На правах рукописи

Ушаков Андрей Владимирович

ПРИОРИТЕТНЫЕ МОДЕЛИ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институт проблем информатики РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Королев Виктор Юрьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Афанасьева Лариса Григорьевна
	кандидат физико-математических наук, Зарядов Иван Сергеевич
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Защита состоится 18 октября 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан «___» __________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В. А. Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математическая теория массового обслуживания нашла широкое применение в моделировании работы многих реальных систем: инфотелекоммуникационных, вычислительных, транспорта и т.п. Усложнение структуры анализируемых систем, повышение требований к адекватности их описания и точности моделирования приводит к необходимости учета в модели массового обслуживания многих дополнительных факторов. Одним из таких факторов является неравноправие поступающих в систему требований. По разным причинам требования могут иметь разную степень важности, для реализации которой необходимо организовать работу системы таким образом, чтобы улучшить показатели обслуживания одних требований за счет ухудшения показателей других. Этого можно достичь введением различных систем приоритетов.

Первые работы, в которых был проведен содержательный математический анализ характеристик систем массового обслуживания с приоритетами, появились в конце 50-х – начале 60-х годов XX века. В них рассматривались либо одноканальные системы с пуассоновскими входящими потоками, либо марковские системы с относительным и абсолютным приоритетом с дообслуживанием прерванного требования. В дальнейших исследованиях наибольшее внимание уделялось именно однолинейным приоритетным системам с пуассоновскими входящими потоками. К концу 60-х – началу 70-х годов была создана стройная теория таких систем, и появились две монографии [1] и [2], в которых были систематизированы и обобщены исследования в этом направлении. Методы, используемые в этих монографиях, содержат общие идеи: введение вспомогательных дополнительных компонент к исследуемому случайному процессу так, чтобы расширенный процесс стал марковским, и использование регенерирующих свойств полученного процесса. Второе свойство позволяет свести изучение процесса на всей временной оси к его изучению на системе вложенных промежутков занятости различных типов, во время которых обслуживаются только требования определенных приоритетов. В результате, исследование процесса (например, длины очереди) сводится к изучению аналогичного процесса в системе с меньшим числом приоритетных классов и, в конце концов, к систе-

[1] Джейсуол Н.К. Очереди с приоритетами. М., Мир, 1973, 280 с.

[2] Гнеденко Б.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. М., изд-во Моск. ун-та, 1973, 448 с.

ме без приоритетов. Основное отличие методов в этих монографиях состоит в том, что в первой из них выводятся системы дифференциальных уравнений в частных производных для распределения исследуемого процесса, которые затем решаются с помощью различных интегральных преобразований (производящих функций, преобразований Лапласа и Лапласа-Стилтьеса). Во второй монографии используется вероятностная трактовка указанных интегральных преобразований, и преобразования искомых распределений находятся из вероятностных соображений без составления промежуточных дифференциальных уравнений. В дальнейшем этот метод был усовершенствован и применен к анализу широкого класса однолинейных систем с пуассоновскими входящими потоками и различными приоритетными дисциплинами. При всех достоинствах указанного метода он имеет и существенные недостатки:

1)при использовании этого метода алгоритмы нахождения распределения исследуемого процесса содержат большой объем (существенно растущий с ростом числа различных приоритетных классов) информации о распределениях на вложенных промежутках занятости, которая не представляет самостоятельного интереса;

2)метод не применим для ряда важных приоритетных дисциплин, для которых нарушается регенерирующая структура процессов обслуживания. В частности, к таким дисциплинам относятся дисциплина приоритета более длинной очереди, дисциплина случайного выбора очереди и др;

3)и главное – возникают серьезные затруднения с распространением этого метода на системы с непуассоновскими входящими потоками.

В конце 70-х годов появились работы [3] и [4], в которых метод дополнительных компонент был модифицирован для анализа приоритетных систем с эрланговскими и гиперэкспоненциальными потоками. В 90-х годах метод был еще более усовершенствован и применен в исследовании систем с рекуррентными потоками. Однако, этим методом удавалось исследовать только распределение длины очереди (и частично периода занятости) в двух разновидностях приоритетных дисциплин без прерывания обслуживания: относительный приоритет и чередование приоритетов. В исследовании систем с различными разновидностями абсолютного приоритета применить его не удавалось. Кроме того, остались

[3] Ушаков В.Г. Система обслуживания с эрланговским входящим потоком и относительным приоритетом. Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, вып. 4, с. 860–866.

[4] Ушаков В.Г. Однолинейная система обслуживания с относительным приоритетом. Известия АН СССР. Техн. кибер. 1978, № 1, с. 76–80.

неизученными и такие важные характеристики систем, как время ожидания начала обслуживания и время пребывания требования в системе.

Наряду с анализом характеристик системы обслуживания в любой фиксированный момент времени интерес также представляет изучение их поведения, когда рассматриваемый момент времени неограниченно увеличивается. В зависимости от величины загрузки возможны два варианта: либо длина очереди и время ожидания начала обслуживания неограничено возрастают (если коэффициент загрузки больше или равен 1), либо их распределения сходятся к невырожденому пределу, который является стационарным распределением соответствующего процесса. Особый интерес представляет ситуация, когда загрузка стремится к единичной, а время — к бесконечности. В этом случае появляется возможность не только определить, когда система перестает справляться с поступающей нагрузкой, но и количественно оценить рост характеристик функционирования системы вблизи критической ситуации.

Объект исследования. Объектом исследования являются одноканальные системы массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания, с гиперэкспоненциальным входящим потоком, с относительным приоритетом и двумя разновидностями абсолютного приоритета.

Цель работы. Целью работы является разработка эффективных алгоритмов расчета основных характеристик одноканальных приоритетных систем массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками как при умеренной, так и при критической загрузке.

Задачи диссертационной работы Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

1)разработка методов анализа систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком и различными разновидностями абсолютного приоритета;

2)изучение основных характеристик приоритетных систем массового обслуживания: вектора длин очередей из требований каждого приоритета, виртуальных времен ожидания начала обслуживания, различных промежутков занятости системы;

3)изучение поведения указанных характеристик, когда загрузка системы приближается к критической, и система перестает справляться с обслуживанием входящего потока. Нахождение предельных распределений при различных предположениях относительно вероятностных свойств параметров исследуемой системы;

Методы исследования. В диссертации используются

1)методы теории вероятностей и теории случайных процессов: методы теории марковских процессов, метод дополнительных компонент при исследовании немарковских процессов, метод характеристических функций;

2)методы теории функций комплексного переменного и функционального анализа;

3)методы линейной алгебры;

4)методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, в том числе асимптотического анализа решений этих уравнений.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1)разработаны методы анализа одноканальных приоритетных систем массового обслуживания с абсолютным приоритетом. Найдено совместное распределение длин очередей из приоритетных и неприоритетных требований в нестационарном режиме для двух разновидностей абсолютного приоритета: с потерей и обслуживанием заново прерванного требования;

2)найдены преобразования Лапласа-Стилтьеса длительностей различных промежутков занятости системы с относительным приоритетом;

3)найдено преобразование Лапласа виртуального времени ожидания начала обслуживания в нестационарном режиме в системе с относительным приоритетом и двумя дисциплинами обслуживания требований одного приоритета: FIFO (прямой порядок обслуживания) и LIFO (инверсионный порядок обслуживания);

4)найдены предельные распределения виртуального времени ожидания при дисциплине FIFO при стремлении загрузки к единице и различных моментных ограничениях на время обслуживания.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанные методы и проведенный анализ моделей приоритетных систем с гиперэкспоненциальными потоками представляют собой теоретический интерес для теории массового обслуживания и ее приложений. Практическая ценность исследования заключается в том, что разработанные алгоритмы и программы могут быть использованы для анализа информационно-вычислительных систем на этапе их проектирования в различных режимах работы.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах "Теория риска и смежные вопросы" (факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова), "Аналитические методы в теории массового обслуживания"(факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова), XXIX и XXX (2011, 2012 гг.) международных семинарах по проблемам устойчивости стохастических моделей, на V и VI (2011, 2012 гг.) международных рабочих семинарах "Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем".

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в семи работах, список которых приведен в конце автореферата. Первые пять из них опубликованы в журналах, входящих в список ВАК "Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук".

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего в себя 73 наименования. Общий объем диссертации составляет 90 стр.

Краткое содержание работы.

Во введении содержится краткий обзор литературы по анализу приоритетных систем обслуживания, обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цель, задачи исследования, кратко излагается содержание работы.

В первой главе дано определение гиперэкспоненциального потока, приведены формулы для расчета его характеристик. Обсуждаются его свойства, которые подтверждают его важность при изучении систем массового обслуживания. Во втором параграфе первой главы даны описания приоритетных дисциплин и дисциплин обслуживания, рассматриваемых в диссертации, а в третьем – определяются различные вероятностно-временные характеристики функционирования систем.

Вторая глава посвящена исследованию системы с абсолютным приоритетом и двумя классами требований. Требования первого класса имеют приоритет перед требованиями второго класса. Длительности обслуживания — независимые в совокупности и не зависящие от входящего потока случайные величины с функцией распределения $B_i(x)$ для требований $i-$го класса. Входящий поток требований — рекуррентный, определяемый плотностью распределения интервалов между поступлениями требований вида

$$a(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} c_j a_j \exp\left(-a_j x\right) & , \quad x \geqslant 0, \\ \qquad\qquad 0 & , \quad x < 0, \end{cases}$$

где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $c_j > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i = 1$. Поступившее требование направляется в i—й приоритетный класс с вероятностью p_i, $i = 1, 2$, независимо от остальных требований. Обозначим

$$L(t) = (L_1(t), L_2(t)),\ P(n_1, n_2, t) = \mathbf{P}(L_1(t) = n_1, L_2(t) = n_2),$$

где $L_i(t)$ — количество требований i—го приоритетного класса в системе в момент времени t, $i = 1, 2$,

$$p(z_1, z_2, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \mathbf{E}\, z_1^{L_1(t)} z_2^{L_2(t)} dt.$$

Пусть $\mu_1(z_1, z_2), \ldots, \mu_N(z_1, z_2)$ корни многочлена

$$\prod_{i=1}^{N} (\mu + a_i) - (p_1 z_1 + p_2 z_2) \sum_{j=1}^{N} c_j a_j \prod_{i \neq j} (\mu + a_i),$$

$\alpha_k\left(z_1, z_2\right) = \prod\limits_{i \neq k} \left(\mu_k\left(z_1, z_2\right) - \mu_i\left(z_1, z_2\right)\right)$, $z_1 = z_1^{(k)}(z_2, s)$ – единственное решение уравнения $z_1 = \beta_1\left(s - \mu_k(z_1, z_2)\right)$, $\psi_k(z_2, s) = \mu_k\left(z_1^{(k)}(z_2, s), z_2, s\right)$,

$$r_k(z_2, s) = \sum_{l=1}^{N}\ m_l(z_2, s) \cdot c_l a_l p_2 z_2 \cdot \prod_{j \neq l} (\mu_k(0, z_2) + a_j),$$

$$e_k(z_2, s) = \sum_{l=1}^{N} \delta_l(z_2, s) \cdot \prod_{j \neq l}^{N} (\mu_k(0, z_2) + a_j) \cdot c_l a_l,$$

$\psi_{mk}(s) = \psi_m(\zeta_k(s), s)$, $\mu_{jk}(s) = \mu_j(0, \zeta_k(s))$,

$$\omega_{kl}(s) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1 - \beta_2(s - \mu_{jk}(s))}{s - \mu_{jk}(s)} \cdot \frac{\prod\limits_{f \neq l} (\mu_{jk}(s) + a_f)}{\alpha_j(0, \zeta_k(s)) \cdot (1 - \zeta_k^{-1}(s) \beta_2(s - \mu_{jk}(s)))}.$$

где $\zeta_1(s), \ldots, \zeta_N(s)$ – решения уравнения

$$\prod_{l=1}^{N}\left(1 - z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_l(0,z_2))\right) + \sum_{j=1}^{N}\prod_{l\neq j}\left(1 - z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_l(0,z_2))\right) \times \\ \times \frac{1-\beta_2(s-\mu_j(0,z_2))}{s-\mu_j(0,z_2)} \cdot \frac{e_j(z_2,s)}{\alpha_j(0,z_2)} = 0.$$

Для системы с абсолютным приоритетом и обслуживанием заново прерванного требования справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Функция* $p(z_1, z_2, s)$ *определяется по формуле*

$$p(z_1,z_2,s) = \sum_{j=1}^{N}\left(p_{0j}(s) + c_j\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1-\beta_1(s-\mu_k(z_1,z_2))}{s-\mu_k(z_1,z_2)}\times \right.\right. \\ \left.\left. \times \frac{\gamma_1^{(k)}(z_1,z_2,s)}{\mu_k(z_1,z_2)+a_j} + \frac{1-\beta_2(s-\mu_k(0,z_2))}{s-\mu_k(0,z_2)}\frac{\gamma_2^{(k)}(z_2,s)}{\mu_k(0,z_2)+a_j}\right)\right),$$

где

$$\frac{\left(1-z_1^{-1}\beta_1(s-\mu_k(z_1,z_2))\right)\alpha_k(z_1,z_2)}{p_1z_1+p_2z_2}\,\gamma_1^{(k)}(z_1,z_2,s) = \\ = \prod_{j=1}^{N}\left(\mu_k(z_1,z_2)-\psi_j(z_2,s)\right)\cdot q^{(1)}(z_2,s),$$

$$q^{(1)}(z_2,s) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu\left(p_{0\nu}(s) + c_\nu\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_2^{(k)}(z_2,s)}{\mu_k(0,z_2)+a_\nu}\cdot\frac{1-\beta_2(s-\mu_k(0,z_2))}{s-\mu_k(0,z_2)}\right),$$

$$\left(\prod_{l=1}^{N}\left(1 - z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_l(0,z_2))\right) + \sum_{j=1}^{N}\prod_{l\neq j}\left(1 - z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_l(0,z_2))\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1-\beta_2(s-\mu_j(0,z_2))}{s-\mu_j(0,z_2)} \cdot \frac{e_j(z_2,s)}{\alpha_j(0,z_2)}\right)\cdot\alpha_k(0,z_2)\cdot\gamma_2^{(k)}(z_2,s) = \\ = \prod_{l\neq k}\left(1 - z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_l(0,z_2))\right)\left(r_k(z_2,s) - \sum_{j\neq k}\frac{1-\beta_2(s-\mu_j(0,z_2))}{s-\mu_j(0,z_2)}\cdot\right. \\ \left. \cdot\frac{e_k(z_2,s)\cdot r_j(z_2,s) - e_j(z_2,s)\cdot r_k(z_2,s)}{1-z_2^{-1}\beta_2(s-\mu_j(0,z_2))}\cdot\frac{1}{\alpha_j(0,z_2)}\right).$$

а функции $p_{0j}(s)$ определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{N}\left((s+a_l)\cdot\omega_{kl}(s)-\sum_{\nu=1}^{N}\omega_{k\nu}(s)\cdot\frac{\prod\limits_{m=1}^{N}(\psi_{mk}(s)+a_\nu)}{\prod\limits_{i\neq\nu}(a_\nu-a_i)}\right)\times$$

$$\times a_l\cdot p_{0l}(s)=\sum_{l=1}^{N}c_l\cdot a_l\cdot\omega_{kl}(s),\ k=1,\ldots,N.$$

Аналогичная теорема доказана и для системы с абсолютным приоритетом и потерей прерванного требования.

В третьей главе рассматривается система обслуживания аналогичная системе главы 2, но уже с произвольным числом приоритетных классов требований и относительным приоритетом. Объектом исследования является виртуальное время ожидания начала обслуживания при двух дисциплинах обслуживания требований одного класса: FIFO и LIFO. Пусть $w_i^{(1)}(t)$ – виртуальное время ожидания для требований i-го приоритетного класса в момент времени t при дисциплине FIFO, $w_i^{(0)}(t),\ i=1,\ldots,r,$ – виртуальное время ожидания в момент времени t для требований i-го приоритетного класса при дисциплине FIFO, при условии, что после t требования в систему больше не поступают;

$$W_{ij}^{(k)}(s,t)=\int\limits_0^\infty e^{-sy}d_y\mathbf{P}(w_i^{(1)}(t)<y,j(t)=j),$$

$$\omega_{ij}^{(k)}(s,v)=\int\limits_0^\infty e^{-vt}W_{ij}^{(1)}(s,t)dt,\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,N,\ k=0,1,$$

Функции $\omega_{ij}^{(0)}(s,v)$ определяются по формулам

$$\omega_{ij}^{(0)}(s,v)=\frac{c_j}{v-s+a_j}-\frac{s}{v-s+a_j}\cdot p_{0j}(v)-\sum_{m=i+1}^{r}\frac{1-\beta_m(s)}{v-s+a_j}\cdot p_{mj}(v)+$$

$$+\frac{c_j}{v-s+a_j}\cdot\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot\omega_{ik}^{(0)}(s,v)\cdot\left(\sum_{m=1}^{i}p_m\beta_m(s)+\sum_{m=i+1}^{r}p_m\right),$$

где

$$\left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{v-s+a_j}\left(\sum_{m=1}^{i}p_m\beta_m(s)+\sum_{m=i+1}^{r}p_m\right)\right)\cdot\sum_{k=1}^{N}a_k\,\omega_{ik}^{(0)}(s,v)=$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{v-s+a_j}-s\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{0j}(v)}{v-s+a_j}-\sum_{m=i+1}^{r}(1-\beta_m(s))\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{mj}(v)}{v-s+a_j},$$

а функции $p_{0j}(v)$ и $p_{mj}(v)$ удовлетворяют системам линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j\,p_{0j}(v)}{v-\alpha_{lr}(v)+a_j}=\alpha_{lr}^{-1}(v)\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{v-\alpha_{lr}(v)+a_j},$$

$$a_k\,p_{0k}(v)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{c_\nu a_\nu}{\alpha_{lr}(v)\cdot(a_\nu+v-\alpha_{lr}(v))}\times$$
$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{N}((a_k+v-\alpha_{jr}(v))(a_j+v-\alpha_{lr}(v)))}{(a_k+v-\alpha_{lr}(v))\cdot\prod\limits_{n\neq l}(\alpha_{nr}(v)-\alpha_{lr}(v))\cdot\prod\limits_{i\neq k}(a_k-a_i)},\ k=1,\ldots,N.$$

$$a_k p_{i+1k}=\sum_{l=1}^{N}f_{li}(v)\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{N}((a_k+v-\alpha_{ji}(v))(a_j+v-\alpha_{li}(v)))}{(a_k+v-\alpha_{li}(v))}\times$$
$$\times\prod_{n\neq l}(\alpha_{ni}(v)-\alpha_{li}(v))^{-1}\cdot\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)^{-1},\ k=1,\ldots,N,\ i=r-1,\ldots,0.$$

Здесь

$$f_{li}(v)=(1-\beta_{i+1}(\alpha_{li}))^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{v-\alpha_{li}(v)+a_j}-\alpha_{li}(v)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{0j}(v)}{v-\alpha_{li}(v)+a_j}-\sum_{m=i+2}^{r}(1-\beta_m(\alpha_{li}(v)))\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{mj}(v)}{v-\alpha_{li}(v)+a_j}\right),$$

$\alpha_{li}(v),\ l=1,\ldots,N,$ – решения уравнения

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{v-s+a_j}\left(\sum_{m=1}^{i}p_m\beta_m(s)+\sum_{m=i+1}^{r}p_m\right)=1$$

аналитические в области $\operatorname{Re} v > 0$, $z_{ij}^{(k)}(s) = \beta_j(\alpha_{ki}(s))$,
$\mu_{ki}^*(s) = \mu_k\left(z_{i1}^{(k)}(s), \ldots, z_{ii}^{(k)}(s), 1, \ldots, 1\right)$, $\mu_{ci}^{(k)}(s) = \mu_c(z_{i1}^{(k)}(s), \ldots, z_{ii}^{(k)}(s), 1, \ldots, 1)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *При дисциплине FIFO* $W_{1j}^{(1)}(s,t) = W_{1j}^{(0)}(s,t)$ *и для* $i \geqslant 1$

$$W_{i+1j}^{(1)}(s,t) = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \prod_{l \neq \nu} \frac{\mu_{ki}^*(s) + a_l}{a_l} \cdot \prod_{p \neq k} \frac{\mu_{pi}^*(s)}{\mu_{pi}^*(s) - \mu_{ki}^*(s)}\, c_\nu a_j \times$$
$$\times \sum_{c=1}^{N} \frac{\prod\limits_{q \neq j} (\mu_{ci}^{(k)}(s) + a_q)}{(\mu_{ci}^{(k)}(s) + a_\nu) \cdot \alpha_c(z_{i1}^{(k)}(s), \ldots, z_{ii}^{(k)}(s), 1, \ldots, 1)} \times$$
$$\times \left(\sum_{m=1}^{i} p_m z_{im}^{(k)}(s) + \sum_{m=i+1}^{r} p_m \right) W_{i+1j}^{(0)}\left(s - \mu_{ci}^{(k)}(s), t\right).$$

Аналогичные результаты получены для дисциплины LIFO.

В четвертой главе исследуется поведение виртуального времени ожидания в системе с относительным приоритетом и дисциплиной FIFO, когда загрузка системы приближается к критической. Рассматривается последовательность систем обслуживания (схема серий), параметры которых зависят от номера системы n в последовательности. Предельные теоремы получены в двух случаях: 1)существуют вторые моменты длительностей обслуживания; 2) существуют моменты длительностей обслуживания порядка $1 < \gamma < 2$. Приведем результаты, относящиеся к первому случаю (для сокращения записи зависимость параметров от номера n будем опускать, запись $\lim$ будет означать $\lim\limits_{n\to\infty}$).

Положим

$$a = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j a_j^{-1} \right)^{-1}, \ \rho_{k1} = a \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i \beta_{i1}, \ \rho_{k2} = a \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i \beta_{i2},$$

$$\rho_k = 1 - \rho_{k1}, \ \rho = \rho_r, \ u = \frac{\rho_{r2}}{2} + a \cdot \sum_{j=1}^{N} c_j a_j^{-2} - \sum_{j=1}^{N} c_j a_j^{-1}.$$

$w(t)$ — виртуальное время ожидания для требований r-го приоритетного класса в момент времени t.

Предположим, что

1) существуют первые два момента длительностей обслуживания требований всех приоритетов, причем, справедливы разложения:

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}\, s + \frac{1}{2}\,\beta_{i2}\, s^2 + o_n(s^2),$$

где $\dfrac{o_n(s^2)}{s^2} \to 0$ при $s \to 0$ равномерно по n;

2) для любого $n \geqslant 1$ $\rho_{r1} < 1$;

3) существуют пределы $\lim c_j = c_j^*$, $\lim a_j = a_j^*$, $j = 1, \ldots, N$, $\lim \beta_{ik} = \beta_{ik}^*$, $k = 1, 2$, $i = 1, \ldots, r$, $\lim p_i = p_i^*$, $i = 1, \ldots, r$, $\lim \rho_{r-11} < 1$, $\lim \rho_{r1} = 1$. Положим $u^* = \lim u$, $k = \dfrac{\rho_{r-1}^*}{2u^*}\, x$.

Теорема. *При $n \to +\infty$ существует предел*

$$\lim \mathbf{P}\left(\rho^\delta w\left(t\rho^{-\alpha}\right) < x\right) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2u^* t^{-1}}\ k} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ \alpha < 2, \\ 1 - \pi^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-2k} \displaystyle\int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4u^*}} + k\cdot\sqrt{\frac{u^*}{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4u^*}} + k\cdot\sqrt{\frac{u^*}{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right), \ \alpha = 2, \\ 1 - e^{-2k}, \ \alpha > 2. \end{cases}$$

Список публикаций по теме диссертации

1. Ушаков А.В. О виртуальном времени ожидания в системе с относительным приоритетом и гиперэкспоненциальным входящим потоком. Информатика и ее применения, 2012, т. 6, вып.1, с. 2–6.

2. Ушаков А.В. Анализ системы обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком в условиях критической загрузки. Информатика и ее применения, 2012, т. 6, вып.3, с. 117–121.

3. Ушаков А.В. О длине очереди в системе $HM|G|1|\infty$ с абсолютным приоритетом и потерей прерванного требования. Вестник ТвГУ. Прикл. мат., 2012, вып. 32 , с 7–15.

4. Ушаков А.В., Ушаков В.Г. О длине очереди в системе с абсолютным приоритетом и гиперэкспоненциальным входящим потоком. Вестник Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., 2012, № 1, с. 27–34.

5. Ушаков А.В., Ушаков В.Г. Предельное распределение времени ожидания при критической загрузке в системе с относительным приоритетом. Вестник Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., 2012, № 4, с. 11–16.

6. Ushakov A.V. The heavy traffic limiting distribution of the waiting time in a priority queue with hyperexponential input stream. XXX International seminar on stability problems for stochastic models, Book of abstracts, Moscow, Institute of Informatics Problems, 2012, p. 93–94.

7. Ushakov A.V.,Ushakov V.G. On a queue length in queueing system with preemptive loss priority. XXIX International seminar on stability problems for stochastic models, Book of abstracts, Moscow, Institute of Informatics Problems, 2011, p. 88–89.