Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Чурбанов Дмитрий Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2013

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова **Щеглов Алексей Юрьевич**.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова **Братусь Александр Сергеевич**; доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МИФИ **Орловский Дмитрий Германович**.
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики РАН.

Защита состоится «30» октября 2013 г. в на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. +7 (495) 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск). С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27

Автореферат разослан «30» сентября 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43
д. ф.-м. н., профессор Захаров Захаров Е. В.

Актуальность темы. Математическое моделирование применяется во всех областях науки и техники. Без преувеличения можно сказать, что одними из наиболее важных и сложных задач математики, встречающихся при моделировании, являются обратные задачи.

Большая часть диссертационной работы посвящена исследованию обратных задач для нелинейных моделей популяционной динамики. Как известно, нелинейные задачи изучены не столь подробно как линейные. Исследованию нелинейных постановок уделяется в настоящий момент больше внимания в силу их сложности и важности для приложений. В диссертации рассматривается класс задач по определению коэффициентов в уравнениях в частных производных первого порядка. Такие постановки являются типичными при описании процессов динамики структурированных популяций. Похожие на них математические задачи встречаются в моделях эволюции капитальных ресурсов в экономике, а также некоторых дисперсных системах химии, метеорологии, астрофизики.

Популяционные модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, не включающие в себя пространственную структуру, часто не могут воспроизвести некоторые явления, связанные с распределением по возрасту или по другим параметрам, характеризующим уровень зрелости особей. Одним из первых, кто рассмотрел биологическую модель с распределением по возрастам был Л. Эйлер, когда он еще в 1760 году затронул тему "смертности и умножения человеческого рода"[1]. Некоторые его результаты были повторены А. Лотки [2]. Похожий на этот подход был развит также А. Мак-Кендриком [3], когда он впервые вывел следующее уравнение $\frac{\partial n(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial n(t,a)}{\partial a} = -\mu(t,a)n(t,a)$, где функция $n(t,a)$ описывает плотность популяции особей возраста a в момент времени t, а $\mu(t,a)$ - коэффициент смертности. В исследование данной модели также внес вклад фон Ферстер [4], так что данное уравнение называют уравнением Мак-Кендрика-фон Ферстера. Структурированные популяционные модели и сегодня представляют большой интерес. Данной тематике посвящено немало работ как зарубежных исследователей [5,6], так и отечественных [7,8]. Однако обратные постановки и в особенности для нелинейных моделей, связанные с данной тематикой, еще недостаточно исследованы.

Цель диссертационной работы. Целью работы является исследование обратных задач для некоторых моделей структурированной популяции и разработка численных методов их решения, построение программного комплекса реализующего данные методы, проведение численных экспериментов, подтверждающих возможность применения данных методов для восстановления характеристик популяционных процессов.

Научная новизна и практическая ценность. Исследован ряд обратных задач по восстановлению характеристик моделей структурированной популяции, разработаны численные методы их решения, произведен анализ и обоснование указанных методов. Практическая ценность результатов определяется возможностью уточнения параметров процессов при моделировании популяционной динамики.

Апробация. Основные результаты работы излагались на следующих конференциях и семинарах.

1. Международная конференция "Ломоносов 2012"в г. Москве, 9-13 апреля 2012г.
2. Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики"в г. Новосибирске, 5-12 августа 2012 г.
3. Научная конференция "Тихоновские чтения"в г. Москве, 29.10.2012 - 02.11.2012.
4. Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

5. Научный семинар "Методы решения задач вариационной ассимиляции данных наблюдений и управление сложными системами"в Институте вычислительной математики РАН.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах (1)-(5).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав. Список использованной литературы содержит 89 наименований. Текст диссертации содержит 97 страниц, 14 рисунков.

Содержание работы

Первая глава состоит из четырех параграфов.

В **первом параграфе** рассмотрена следующая модель популяции с постоянной скоростью роста объектов

$$u_t + u_x = \mu(u),\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t),\ 0 \leq t \leq 1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

где функция $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $(x,t) \in Q = (0,1) \times (0,1)$, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов, $\psi(t)$ – плотность объектов минимального размера в момент времени t, правая часть, функция $\mu(s)$ описывает миграцию объектов. В данной модели функция $\mu(s)$ предполагается положительной на всей своей области определения. В прямой задаче ищется функция плотности объектов $u(x,t)$ по исходным данным $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $\mu(s)$ при условиях

$$\mu(s) \in C(\mathbb{R}),\ 0 < \mu(s) \leq \mu_M,\ s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$\varphi(x),\ \psi(t) \in C^1[0,1],\ \psi(0) = \varphi(0). \tag{5}$$

Обратная задача состоит в определении функции $\mu(s)$, описывающей миграцию объектов и удовлетворяющей условиям

$$\mu(s) \in C(D),\ \mu(s) > 0,\ s \in D, \tag{6}$$

где область D представляет собой все возможные значения плотности $u(x,t)$ за исключением значений исходных данных $\varphi(x)$, $\psi(t)$, либо все значения плотности объектов без исключения $D = [\min\limits_{\overline{Q}} u(x,t), \max\limits_{\overline{Q}} u(x,t)]$. В качестве дополнительного условия в обратной постановке берется плотность объектов наибольшего размера в моменты времени от 0 до 1:

$$u(1,t) = c(t),\ t \in [0,1],\ c(t) \in C^1[0,1],\ c(0) = \varphi(1). \tag{7}$$

Нужно отметить, что обратная задача, где ищется отрицательная функция $\mu(s)$, решается аналогично.

Решение прямой задачи не представляет особой сложности. Пусть введена функция

$$M(s) = \int\limits_{\varphi_0}^{s} \frac{d\xi}{\mu(\xi)},\ s \in \mathbb{R},$$

где $\varphi_0 = \min\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$. Формулы для определения решения прямой задачи даны в следующей теореме.

Теорема 1. *Единственное решение $u(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(\overline{Q} \setminus \{x = t\})$ задачи (1)–(3) с условиями (4), (5) в области $\overline{Q}$ существует и представимо в виде:*
$u(x,t) = M^{-1}(t + M(\varphi(x-t)))$ *при* $0 \le t \le x \le 1$,
$u(x,t) = M^{-1}(x + M(\psi(t-x)))$ *при* $0 \le x < t \le 1$.

Подставляя в формулу для решения прямой задачи из теоремы 1 для области $0 \le t \le x \le 1$ дополнительную информацию (7), можно получить функциональное уравнение

$$\frac{c'(t)}{\mu(c(t))} + \frac{\varphi'(1-t)}{\mu(\varphi(1-t))} = 1,\ t \in [0,1]. \tag{8}$$

Обратная задача по определению неизвестной функции $\mu(s)$, таким образом, сводится к уравнению (8), которое становится основным объектом исследования.

В первом варианте обратной задачи дополнительная информация $c(t)$ пусть предполагается монотонно возрастающей. При этом правая часть $\mu(s)$

считается известной на начальных данных $\mu_1(x) = \mu(\varphi(x))$, $x \in [0,1]$. Тогда $\mu(s)$ остается определить на отрезке $(c(0), c(1)]$. Это можно сделать используя полученное функциональное уравнение (8):

$$\mu(s) = \frac{\mu_1(1 - c^{-1}(s))c'(c^{-1}(s))}{\mu_1(1 - c^{-1}(s)) - \varphi'(1 - c^{-1}(s))},\ s \in [c(0), c(1)]. \tag{9}$$

Другой случай, когда дополнительная информация $c(t)$ монотонно убывает, представляет больший интерес. Пусть

$$\varphi'(x) > 0,\ \varphi(x) < c(1 - x),\ x \in [0,1), \tag{10}$$

$$c'(t) < 0,\ t \in [0,1],\ \varphi(1) = c(0),\ -c'(0) < \varphi'(1). \tag{11}$$

Тогда функциональное уравнение (8) можно представить в виде

$$\hat{\mu}(s) = \alpha(s)\hat{\mu}(\gamma(s)) + \beta(s),\ s \in [\varphi(0), \varphi(1)], \tag{12}$$

где $\hat{\mu}(s) = 1/\mu(s)$, $\alpha(s) = c'(1 - \varphi^{-1}(s))/\varphi'(\varphi^{-1}(s))$, $\beta(s) = 1/\varphi'(\varphi^{-1}(s))$, $\gamma(s) = c(1 - \varphi^{-1}(s))$.

Так как $\alpha(\varphi(1)) < 1$, то можно выбрать δ такое, что при $s \in [\varphi(1) - \delta, \varphi(1)]$ выполнено неравенство $\alpha(s) < 1$. Значит на данном отрезке возможно определить $\mu(s)$ с использованием метода сжимающих отображений. Поскольку уравнение (12) является уравнением с запаздыванием ($\gamma(s) > s$), возможно распространить значения из окрестности точки $\varphi(1)$ на весь отрезок $[\varphi(0), \varphi(1)]$. Таким образом, справедлива глобальная теорема о существовании и единственности решения обратной задачи.

Теорема 2. *При выполнении условий (5)–(7), (10), (11) существует единственная непрерывная положительная функция $\mu(s)$, $s \in [\varphi(0), \varphi(1)]$, удовлетворяющая функциональному уравнению (8).*

На основе вышеизложенного построен численный метод, состоящий из двух этапов. На первом используется сжимаемость отображения и строится некоторое приближение $\hat{\mu}(s)$ такое, что $|(\hat{\mu}(s))^{-1} - (\mu(s))^{-1}| < \varepsilon_0$ на отрезке $[\varphi(1) - \delta, \varphi(1)]$. Затем, на втором этапе для некоторого x_1 можно построить рекуррентную последовательность

$$x_{n+1} = \varphi^{-1}(c(1 - x_n)),\ x_1 \in [0, 1),\ n = 1, 2, .., \tag{13}$$

так, что с некоторого номера $n_0(x_1)$, не большего одинакового для всевозможных x_1 номера N_{max}, значения $\varphi(x_{n_0(x_1)})$ попадут в указанную окрестность $[\varphi(1)-\delta, \varphi(1)]$. Далее, в противоположном направлении по рекуррентной формуле

$$1/\mu(\varphi(x_n)) = 1/\varphi'(x_n) - c'(1 - x_n)/(\varphi'(x_n)\mu(\varphi(x_{n+1}))),$$

где $n = n_0(x_1)-1, .., 1$ вычисляются значения $\mu(\varphi(x_1))$ для любого x_1: $\varphi(x_1) \in [\varphi(0), \varphi(1) - \delta]$.

Таким образом, определяется приближение к правой части для любых $x \in [0, 1]$, в виде функции $\hat{\mu}(\varphi(x))$. В том числе в данном параграфе получены оценки скорости сходимости и точности данного вычислительного алгоритма. Оценка числа шагов, после которых последовательность (13) попадет в указанную окрестность, имеет следующий вид.

Лемма 1. *При выполнении условий (5), (7), (10), (11) при любом* $x_1 \in [0, 1)$ *найдется натуральное число* N_{max} *такое, что для всех* $n \geq N_{max}$ *значения* $\varphi(x_n)$ *на элементах* $\{x_n\}$ *последовательности (13) попадут в отрезок* $[\varphi(1) - \delta, \varphi(1)]$*, где* $N_{max} \leq \frac{||\varphi'||_{C[0,1]}}{\min\limits_{x\in[0,\varphi^{-1}(\varphi(1)-\delta)]}(c(1-x)-\varphi(x))} + 2$.

Точность, с которой надо определить правую часть на отрезке $[\varphi(1) - \delta, \varphi(1)]$ для достижения желаемой точности на всем отрезке $[\varphi(0), \varphi(1)]$ установлена в следующей теореме. Пусть $\varphi'_{max} = \max\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu(s)$ *– точное неизвестное заранее решение обратной задачи (1)–(3), (7) при выполнененых условиях (5), (10), (11). Тогда для лю-*

бого $\varepsilon > 0$ *по представленному выше алгоритму можно определить значения приближенного решения* $\hat{\mu}(s)$ *такие, что справедлива оценка* $||\hat{\mu}(s) - \mu(s)||_{C[\varphi(0),\varphi(1)]} < \varepsilon$*, причем для этого на первом этапе решения задачи на отрезке* $[\varphi(1) - \delta, \varphi(1)]$ *потребуется найти* $(\hat{\mu}(s))^{-1}$ *с точностью* $\varepsilon_0 \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2\varphi'^2_{max} B^{N_{max}}}, \frac{1}{2\varphi'_{max} B^{N_{max}}}\}$ *для* $B = \max\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{c'(1-x)}{\varphi'(x)}\right| \geq 1$ *или* $\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{\varphi'^2_{max}}$ *для* $B < 1$*, то есть так, чтобы* $|(\hat{\mu}(s))^{-1} - (\mu(s))^{-1}| < \varepsilon_0$*,* $s \in [c_0 - \delta, c_0]$*.*

Данный вычислительный метод был применен для различных значений исходных данных.

Во **втором параграфе** рассмотрена модель, аналогичная предыдущей (1)–(3). В ней граничное условие (2) заменено интегральным условием, более характерным для популяционных моделей. Прямая задача относительно функции $u(x,t)$ принимает вид

$$u_t + u_x = \mu(u),\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{14}$$

$$u(0,t) = \int\limits_0^1 q(s)u(s,t)ds,\ 0 \leq t \leq 1, \tag{15}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \tag{16}$$

где функция $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов, $q(s)$ – относительный коэффициент скорости рождения объектов, функция $\mu(s)$ отвечает за миграцию. Она предполагаетя положительной и, соответственно, описывает приток объектов извне:

$$\mu(s) \in C(\mathbb{R}),\ 0 < \mu_m \leq \mu(s) \leq \mu_M,\ s \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$q(x) \in C[0,1],\ q(x) > 0,\ x \in [0,1], \tag{18}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(0) = \int\limits_0^1 q(\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{19}$$

Доказана однозначная разрешимость прямой задачи.

В обратной постановке дополнительно известна функция, задающая значения плотности объектов максимального размера для времени от 0 до 1,

$$u(1,t)=c(t),\ t\in[0,1],\ c(t)\in C^1[0,1],\ c(0)=\varphi(1), \tag{20}$$

и известны значения $\mu(s)$ на начальных данных, то есть задана функция $\mu_1(x)=\mu(\varphi(x))$, при этом справедливы условия

$$\varphi'(x)>0,\ x\in[0,1],\ c'(t)>0,\ t\in[0,1], \tag{21}$$

$$\mu_1(x)\in C[0,1],\ \mu_1(x)>\varphi'(x),\ x\in[0,1]. \tag{22}$$

Требуется на множестве $[\min\limits_{\overline{Q}} u(x,t), \max\limits_{\overline{Q}} u(x,t)] \setminus [\varphi(0),\varphi(1)]$ найти коэффициент $\mu(s)$. На отрезке $(c(0),c(1)]$ функция $\mu(s)$ выражается по формуле (9). Таким образом, коэффициент $\mu(s)$ определяется для всех значений $u(x,t)$ из нижнего треугольника $\overline{Q}\cap\{t\le x\}$, а именно на отрезке $[\varphi(0),c(1)]$. Для разрешимости обратной задачи осталось показать, что в верхнем треугольнике $\overline{Q}\cap\{t>x\}$ значения $u(x,t)$ не выходят из отрезка $[\varphi(0),c(1)]$.

Пусть $q_0=\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)$, $\triangle_m=\min\limits_{x\in[0,1]}[\mu_1(x)-\varphi'(x)]$, $\triangle_M=\max\limits_{x\in[0,1]}[\mu_1(x)-\varphi'(x)]$, $m=\frac{\min\limits_{t\in[0,1]} c'(t)\min\limits_{s\in[\varphi(0),\varphi(1)]}\mu(s)}{\triangle_M}$, $M=\frac{||c'||_{[0,1]}\max\limits_{s\in[\varphi(0),\varphi(1)]}\mu(s)}{\triangle_m}$, и справедливо соотношение

$$q_0\frac{M}{m}\triangle_M\exp\left\{q_0\frac{M}{m}\right\}\le m, \tag{23}$$

тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *При выполнении условий (17)–(19), (21), (22) вместе с условием (23) решение обратной задачи (14)–(16), (20) существует и единственно.*

В **третьем параграфе** рассматривается та же прямая задача (14)–(16), что и в предыдущем параграфе с теми же условиями (17)–(19) на исходные данные, но теперь в случае, когда плотность объектов максимального размера убывает со временем $c'(t) < 0$.

В обратной постановке решается вопрос об однозначном восстановлении пары функций: плотности популяции и характера миграционного процесса, $\{u(x,t), \mu(s)\}$. Для этого в качестве дополнительной информации помимо функции $c(t)$ задается распределение плотности объектов в конечный момент времени, функция $h(x)$, таким образом известны функции

$$u(1,t) = c(t),\ t \in [0,1], \tag{24}$$

$$u(x,1) = h(x),\ x \in [0,1], \tag{25}$$

для которых справедливы ограничения

$$c(t) \in C^1[0,1],\ c'(t) < 0,\ t \in [0,1], \tag{26}$$

$$\varphi'(x) > 0,\ \varphi(x) < c(1-x),\ x \in [0,1),\ -c'(0) < \varphi'(1), \tag{27}$$

$$h(x) \in C^1[0,1],\ h'(x) > 0,\ x \in [0,1],\ h(0) = \int\limits_0^1 q(s)h(s)ds, \tag{28}$$

вместе с условиями согласования $c(0) = \varphi(1)$, $h(1) = c(1)$.

Определение 1. *Пара функций $\{u(x,t), \mu(s)\}$ называется решением обратной задачи (14)–(16), (24), (25), если $u(x,t) \in C^1(\overline{Q} \setminus \{x = t\})$, $\mu(s) \in C^1[h(0), \varphi(0)] \cap C[h(0), \varphi(1)]$, $\mu(s) > 0$ для $s \in [h(0), \varphi(1)]$, при этом выполнены условия (17)–(19), (26)–(28).*

Используя результат первого параграфа, можно сделать заключение об однозначной разрешимости обратной задачи в области $\overline{Q} \cap \{t \le x\}$, а именно о существовании пары функций $\{\underline{u}(x,t), \mu(s)\}$, в которой $\underline{u}(x,t)$ – решение уравнения (14) в области $\overline{Q} \cap \{t \le x\}$, функция $\mu(s)$ определяется на отрезке

$s \in [\min\limits_{\overline{Q}\cap\{t\le x\}} \underline{u}(x,t), \max\limits_{\overline{Q}\cap\{t\le x\}} \underline{u}(x,t)]$. Доказательство единственности в области $\overline{Q} \cap \{t \ge x\}$ сводится к исследованию системы

$$\frac{\psi'(t)}{\mu(\psi(t))} + \frac{h'(1-t)}{\mu(h(1-t))} = 1, \ t \in [0,1],$$

$$\psi(t) = \int\limits_0^t q(s)\bar{u}(s,t;\psi(\tau),\mu(\xi))ds + \int\limits_t^1 q(s)\underline{u}(s,t)ds, \ t \in [0,1],$$

где $\bar{u}(s,t;\psi(\tau),\mu(s))$ – решение уравнения (14) в области $\overline{Q} \cap \{t \ge x\}$ с заданным граничным условием $u(0,t) = \psi(t)$ и правой частью $\mu(s)$, а $\underline{u}(s,t)$ – известная функция. Основным результатом данного параграфа является следующая теорема единственности.

Теорема 5. *Обратная задача (14)–(16), (24), (25) при выполненных условиях (17)–(19), (26)–(28) имеет не более одного решения.*

В **четвертом параграфе** приведены результаты численных экспериментов определения нелинейного коэффициента $\mu(s)$ в задаче (1)–(3) с применением метода, описанного выше.

Вторая глава состоит из четырех параграфов.

В **первом параграфе** рассмотрена следующая модель популяции биологических объектов с переменной скоростью роста

$$u_t + (g(x)u)_x = -\mu(x)f(u), \ 0 \le x \le 1, \ t \ge 0, \tag{29}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \ t \ge 0, \tag{30}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{31}$$

где функция $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $g(x)$– коэффициент скорости роста объектов, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов, $\psi(t)$ – плотность объектов минимального размера в момент времени t. Коэффициенты $\mu(x)$, $f(s)$, стоящие в правой части уравнения, отвечают за процессы оттока объектов и таковы что

$$f(s) \in C^1(\mathbb{R}),\ 0 < f_m \leq f(s) \leq f_M,\ |f'(s)| \leq f'_M,\ s \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(x) > 0,\ x \in [0,1], \tag{33}$$

$$\psi(t) \in C^1[0,\infty),\ 0 < \psi(t) \leq \psi_M,\ |\psi'(t)| < \psi'_M,\ t \in [0,\infty), \tag{34}$$

$$\mu(x) \in C[0,1],\ \mu(x) > 0,\ x \in [0,1], \tag{35}$$

$$g(x) \in C^1[0,1],\ g(x) > 0,\ x \in [0,1]. \tag{36}$$

При этом справедливо условие согласования $\psi(0) = \varphi(0)$. Разрешимость задачи типа (29)-(31) для более общего случая исследовалась ранее [9]. Где предполагалось, что правая часть и начальные данные были дважды непрерывно-дифференцируемыми. В рассматриваемой задаче (29)–(31) подобные условия являются избыточными. Специальный вид правой части (29) позволяет не требовать от коэффициентов $g(x)$, $\mu(x)$, $f(s)$ дополнительной гладкости. Таким образом, при условиях (32)–(36) была доказана однозначная разрешимость прямой задачи (29)–(31).

При постановке обратной задачи дополнительно задаются значения решения уравнения (29) на границе, плотности особей максимального размера для всех возможных моментов времени

$$u(1,t) = c(t),\ t \in [0,\infty), \tag{37}$$

причем для $c(t)$ вместе с условием согласования $c(0) = \varphi(1)$ имеют место ограничения

$$c(t) \in C[0,\infty),\ |c(t_2) - c(t_1)| < L_c|t_2 - t_1|,\ \forall t_1,\ t_2 \in [0,\infty). \tag{38}$$

Тогда функция $g(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(x) = \frac{c\left(\int\limits_x^1 \frac{d\xi}{g(\xi)}\right)}{\varphi(x)} g(1) + \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_x^1 f(u(\eta, t(\eta, x)))\mu(\eta)d\eta,\ x \in [0,1]. \qquad (39)$$

Введем функцию

$$G(x) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)},\ x \in [0,1].$$

Пусть определено множество $\mathfrak{G} = \{g(x) \in C^1[0,1],\ 0 < g_m \leq g(x),\ x \in [0,1],\ g(1) = g_1\}$.

Определение 2. *Пара функций $\{g(x),\ u(x,t)\}$ называется решением обратной задачи (29)–(31), (37), если известные функции $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $\mu(x)$, $f(s)$, и искомые функции $u(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q \setminus \{t = G(x)\})$, $g(x) \in \mathfrak{G}$ удовлетворяют соотношениям (29)–(31), (37) при выполнении условий (32)–(35), (38) и известной постоянной g_1 из определения множества $\mathfrak{G}$.*

В силу нелинейности задачи для доказательства единственности возникает необходимость ввести условие малости для отношения, связывающего мажоранты и миноранты исходных функций. Пусть $\varphi_m = \min\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$, $\varphi_M = \max\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$, $\mu_M = \max\limits_{x\in[0,1]} \mu(x)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (32)–(35), (38) и существует постоянная g_m такая, что справедливо неравенство*

$$\frac{\varphi_M \mu_M f'_M}{g_m \varphi_m} \exp\left\{L_f \frac{\mu_M}{g_m}\right\} < 1,$$

тогда решение обратной задачи (29)–(31), (37), предсатвимое парой функций $\{g(x),\ u(x,t)\}$, единственно.

Во **втором параграфе** также рассматривается задача (29)–(31) вместе с условиями (32)–(36). Как и прежде, в качестве дополнительной информации берутся значения плотности объектов максимального размера $u(1,t) =$

$c(t),\ t \in [0,\infty)$. Здесь от функции $c(t)$ требуется непрерывная дифференцирумость

$$c(t) \in C^1[0,\infty),\ c(0) = \varphi(1). \tag{40}$$

Обратная задача состоит в определении коэффициента $\mu(x)$ в правой части, зависящего от пространственной переменной. Получено интегральное уравнение, которое может быть использовано для определения коэффициента $\mu(x)$:

$$\mu(x)f(\varphi(x))+\int\limits_x^1 f'(u(\xi,G(\xi)-G(x)))u_t(\xi,G(\xi)-G(x))\frac{\mu(\xi)}{g(x)}d\xi = -\tilde{c}'(x), \tag{41}$$

где $\tilde{c}(x) = g(x)\varphi(x) - g(1)c(G(1)-G(x))$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mu(x) \in C[0,1],\ 0 < \mu(x) \le \mu_M,\ x \in [0,1]\}$.

Определение 3. *Пара функций $\{\mu(x),\ u(x,t)\}$ называется решением обратной задачи (29)–(31), (37), если известные функции $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $g(x)$, $f(s)$ и искомые функции $u(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q \setminus \{t = G(x)\})$, $\mu(x) \in \mathfrak{M}$ удовлетворяют соотношениям (29)–(31), (40) при выполнении условий (32)–(34), (36).*

Единственность решения данной обратной задачи имеет место при малости некоторого соотношения, представленного в следующей теореме.

Теорема 7. *При выполнении условий (32)–(36) пусть постоянная μ_M удовлетворяет неравенству*

$$\exp\left\{\frac{f'_M\mu_M}{g_m}\right\}\frac{f_M g_M \mu_M f'_M}{f_m g_m^2} < 1,$$

тогда решение обратной задачи (29)–(31), (40), представимое парой функций $\{\mu(x),\ u(x,t)\}$, единственно.

Третий параграф посвящен модели популяции биологических объектов с постоянной скоростью роста:

$$u_t + u_x = \mu(x)f(t),\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1, \tag{42}$$

$$u(0,t) = \int_0^1 q(s)u(s,t)ds,\ 0 \le t \le 1, \tag{43}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{44}$$

где функция $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов, $q(s)$ – относительный коэффициент скорости рождения объектов, функция $\mu(x)f(t)$ в правой части, описывающая миграцию, представляет собой произведение двух функций, зависящих от размера особей и от времени. Положим $Q = (0,1) \times (0,1)$. Пусть справедливы условия:

$$\mu(x) \in C^2[0,1],\ \mu(x) > 0,\ x \in [0,1], \tag{45}$$

$$q(s) \in C[0,1],\ q(s) > 0,\ s \in [0,1], \tag{46}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(x) > 0,\ x \in [0,1], \tag{47}$$

$$f(t) \in C[0,1]. \tag{48}$$

Как доказывается в указанном параграфе, прямая задача (42)–(44) с условиями (45)–(48) имеет единственное решение.

Для обратной задачи задается переопределение в виде функции плотности объектов фиксированного размера $x_0 \in (0,1)$ для моментов времени от 0 до 1:

$$u(x_0,t) = c(t),\ t \in [0,1], \tag{49}$$

$$c(t) \in C[0,1] \cap C^1\left([0,x_0) \cup (x_0,1]\right). \tag{50}$$

Сначала рассматривается задача об определении коэффициента, зависящего от времени.

Определение 4. *Пару функций $\{f(t),\ u(x,t)\}$ назовем решением обратной задачи A, если $f(t) \in C[0,1]$, $u(x,t) \in C^1(Q \setminus \{x=t\})$, причем искомые функции $f(t)$, $u(x,t)$ удовлетворяют соотнощениям (42)–(44), (49) при заданных функциях $\mu(x)$, $q(s)$, $\varphi(x)$, $c(t)$, удовлетворяющих условиям (45)–(47), (50).*

Приведенные условия (45)–(47), (50) позволяют сделать вывод о единственном решении обратной задачи:

Теорема 8. *При выполнении условий (45)–(47), (50) решение обратной задачи A единственно.*

В другой обратной задаче об определении коэффициента $\mu(x)$, зависящего от пространственной переменной, вместо условий (46), (47), (48), (50) берутся условия

$$q(s) \in C^1[0,1],\ q(s) > 0,\ s \in [0,1], \tag{51}$$

$$\varphi(x) \in C^2[0,1],\ \varphi(x) > 0,\ x \in [0,1]. \tag{52}$$

$$f(t) \in C^2[0,1],\ f(t) \geq 0,\ t \in (0,1],\ f(0) > 0, \tag{53}$$

$$c(t) \in C[0,1] \cap C^2\left([0,x_0) \cup (x_0,1]\right), \tag{54}$$

Определение 5. *Пара функций $\{\mu(x),\ u(x,t)\}$ называется решением обратной задачи B, если $\mu(x) \in C[0,1]$, $u(x,t) \in C^1(Q \setminus \{x = t\})$, причем искомые функции $\mu(x)$, $u(x,t)$ удовлетворяют соотношениям (42)–(44), (49) при заданных функциях $f(t)$, $q(s)$, $\varphi(x)$, $c(t)$, удовлетворяющих условиям (51)–(54).*

Обратная задача B сводится к уравнению Фредгольма второго рода. Для его решения единственным образом достаточно ввести условие малости ядра уравнения. Данное условие представлено в следующей теореме.

Пусть норма $||*||$ обозначает норму в пространстве непрерывных функций $||*||_{C[0,1]}$.

Теорема 9. *При условиях (51)–(54) и при выполнении неравенства*

$$\frac{(1-x_0)^2}{f(0)q(1)}||q||||f''|| + \frac{(1-x_0)}{f(0)q(1)}(f(0)||q'|| + |f'(0)|||q||) < 1, \tag{55}$$

решение обратной задачи B единственно.

В **четвертом параграфе** приведены результаты численных расчетов по решению задачи (29)–(31), (37), в которой отыскивался коэффициент $\mu(x)$ в правой части уравнения (29). Данная задача представляет бо̀льшую трудность по сравнению с задачей, в которой отыскивается коэффициент $g(x)$ уравнения (29) в силу более сложного интегрального уравнения (41) по сравнению с (39). Однако расчет $g(x)$ легко проводится аналогичными методами.

При этом функция $\mu(x)$ определялась двумя способами. В первом способе функция $\mu(x)$ была представима в виде конечной функциональной суммы и предполагалось, что она принадлежит некоторому компакту. Параметры, определяющие $\mu(x)$, вычислялись с помощью минимизации невязки градиентным методом. Во втором способе функция $\mu(x)$ вычислялась через итерированную последовательность

$$\mu_{n+1}(x) = -\frac{\tilde{c}'(x)}{f(\varphi(x))} -$$
$$-\frac{1}{f(\varphi(x))}\int\limits_x^1 f'(u(\xi, G(\xi)-G(x);\mu_n(x)))u_t(\xi, G(\xi)-G(x);\mu_n(x))\frac{\mu_n(\xi)}{g(x)}d\xi,$$

построенную на основе интегрального уравнения (41). Проведено сравнение указанных двух методов. Также опробовано совместное последовательное использование данных методов. При таком подходе зафиксирован выигрыш по времени.

Основные результаты работы

1. Предложены итерационные методы решения обратных задач восстановления коэффициентов смертности и миграционной плотности, входящих в правые части уравнений, моделирующих популяционную динамику. Для ряда алгоритмов, реализующих численное решение таких задач, построены оценки точности и числа шагов.
2. Получены условия однозначного определения коэффициента скорости роста популяции. Предложен итерационный метод решения обратной задачи для уравнения популяционной динамики с непостоянной скоростью роста, а также модификация такого алгоритма с использованием минимизации невязки на компакте.
3. Разработанные методы реализованы в виде программного комплекса. На их основе проведен ряд вычислительных экспериментов, показавших достаточно хорошую восстанавливаемость решений для большого числа исходных данных.

Работы автора по теме диссертации

(1) *Чурбанов Д.В.* Единственность определения коэффициента при производной в нелинейном уравнении первого порядка // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Выч. матем. и киберн. 2013. №1. С. 9-14.

(2) *Чурбанов Д.В., Щеглов А.Ю.* Итерационный метод решения обратной задачи для нелинейного уравнения первого порядка в частных производных с оценками гарантированной точности и числа шагов // ЖВМиМФ. 2013. 53. №2. С. 105-110.

(3) *Чурбанов Д.В.* Метод восстановления нелинейного коэффициента в задаче популяционной динамики, оценки его точности и вычислительной сложности// Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2012 секция

"Вычислительная математика и кибернетика Москва, МГУ. М.: МАКС Пресс, 2012. С. 88.

(4) *Чурбанов Д.В.* Метод восстановления нелинейного коэффициента в задаче популяционной динамики и некоторые его свойства // Обратные и некорректные задачи математической физики, Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012г. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. С. 111.

(5) *Чурбанов Д.В., Щеглов А.Ю.* Существование и единственность определения нелинейного коэффициента в задаче популяционной динамики // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 29-31 октября 2012 г.: Тезисы докладов. –М.: МАКС Пресс, 2012. С.60.

Цитированная литература

[1] *Euler L.* Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humain // Memoires del'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres. 1760. V. XVI. P. 144-164.

[2] *Lotka A. J.* Relation between birth rates and death rates // Science. 1907. V.26. P. 21-22.

[3] *McKendrick A. G.* Applications of mathematics to medical problems // Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. 1926. V. 44, №1. P 98-130.

[4] *von Foerster H.* Some remarks on changing population // The Kinetics of Cellular Proliferation. 1959. P. 382-407.

[5] *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г.* Уравнения с частными производными первого порядка. М. Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

[6] *Murray J. D.* Biology. New York: Springer, 1993.

[7] *Webb G. F.* Theory of nonlinear age-dependent population dynamics. New York: Marcel Dekker, 1985.

[8] *Братусь А. С., Новожилов В. П., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. М. ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[9] *Денисов А. М., Макеев А. С.* Итерационные методы решения обратной задачи для одной модели популяции // Ж. вычисл. матем и матем. физ. 2004. Т.44, №8. С. 1480-1489.