Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Титова Мария Викторовна

Комбинаторные и вероятностные методы в задаче о геометрических числах Рамсея

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика,
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Райгородский Андрей Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, зав. лабораторией теории вероятностей и компьютерной статистики ФГБУН Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, профессор Павлов Юрий Леонидович;
	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической логики и высшей алгебры факультета ВМК ННГУ Малышев Дмитрий Сергеевич.
Ведущая организация:	Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.

Защита диссертации состоится 13 декабря 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан ___ ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.А. Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Целью работы является построение комбинаторных и вероятностных методов для получения результатов в некоторых классических задачах экстремальной комбинаторики, а также комбинаторной и дискретной геометрии. Основная задача, решению которой посвящена диссертация, находится на стыке теории Рамсея и комбинаторной геометрии. Ниже мы скажем об актуальности этой задачи и о том вероятностном контексте, в который она вкладывается.

Теория Рамсея — ветвь комбинаторики, появившаяся менее века назад и получившая стремительное развитие. Идеи и техника теории Рамсея связываются с такими разделами математики, как теория множеств, теория графов, комбинаторная теория чисел, теория вероятностей, анализ.

Теория получила название в честь английского математика и философа Фрэнка Рамсея, предложившего ее фундаментальную идею, а также доказавшего результат, впоследствии ставший известным как теорема Рамсея[1]. Теорема утверждает, что при любой раскраске ребер достаточно большого полного графа всегда найдется одноцветный полный подграф с наперед заданным числом вершин.

Начиная с 1930 годов теория Рамсея стала активно развиваться и обрела популярность благодаря работам знаменитого венгерского математика Пола Эрдеша. Известные результаты теории Рамсея о геометрических и числовых множествах, ставшие стимулом ее дальнейшего развития, включают в себя теорему Эрдеша–Секереша о выпуклых многоугольниках, теорему Ван-дер-Вардена об арифметических прогрессиях, теорему Хэйлса–Джуита об игре в многомерные крестики-нолики, теорему Шура, а также множество ее обобщений, таких как теоремы Радо, Радо–Фолкмана–Сандерса, Хиндмана. Большой обзор по результатам теории Рамсея предоставлен в книге Грэхема, Ротшильда, Спенсера[2].

Одной из классических задач теории является задача о нахождении чисел Рамсея, которые возникают в формулировке теоремы Рамсея. В

[1] F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. Ser., 2 (30), 1930, 264–286.

[2] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory.*, 2nd ed., John Wiley and Sons, NY, 1990.

1947 году Эрдеш[3] впервые применительно к задачам такого типа использует вероятностный подход — так называемую случайную раскраску.

Также изучаются многочисленные обобщения чисел Рамсея. Например, многоцветные числа Рамсея, числа Рамсея для гиперграфов, индуцированные числа Рамсея и другие нетривиальные обобщения.

Одно из обобщений классических чисел Рамсея — дистанционные числа Рамсея — служит предметом изучения данной диссертационной работы. Это понятие возникает в связи с известной задачей комбинаторной геометрии об исследовании свойств конечных дистанционных графов.

Комбинаторная геометрия возникла еще в начале прошлого века (хотя истоки подобных задач можно найти и у таких классиков, как Кеплер и Эйлер), а к середине века сформировалась в отдельную дисциплину, которая приобрела популярность и начала активно развиваться.

В первую очередь интерес к задачам комбинаторной геометрии подняли многочисленные работы Пола Эрдеша. В 1935 году выходит статья Эрдеша–Секереша[4], решающая обобщение задачи Клейн о выпуклых четырехугольниках с помощью теории Рамсея.

В работе 1946 года Эрдеш[5] ставит вопросы о наибольшем числе единичных расстояний в множестве из n точек на плоскости и о числе различных расстояний, которые в числе прочих дают начало исследованиям различных свойств графов расстояний.

Следующие задачи стали ключевыми для образования и истории комбинаторной геометрии. Первая из них — это гипотеза Борсука[6] о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Речь идет о следующей задаче. Обозначим через $f(d)$ минимальное количество частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$. В 1933 году Борсук высказал гипотезу, что $f(d) = d+1$. Опровержение гипотезы стало одним из важнейших событий в комбинаторной геометрии последних десятилетий. Вторая задача — это

[3]P. Erdős, *Some Remarks on the Theory of Graphs*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53, 1947, 292–294.

[4]P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math., 2, 1935, 463–470.

[5]P. Erdős, *On a set of distances of n points*, Amer. Math. Monthly, 53, 1946, 248–250.

[6]K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20, 1933, 177–190.

проблема Нелсона–Хадвигера[7,8,9] о раскраске метрических пространств. Задача была поставлена Нелсоном в 1950 году, а также независимо незадолго до этого похожая проблема изучалась Хадвигером. Проблема формулируется так: необходимо найти хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$, равное минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния, равного единице.

В диссертационный работе также получены результаты, касающиеся дискретной геометрии. В то время как комбинаторная геометрия занимается комбинаторными свойствами геометрических объектов, дискретная геометрия изучает вопросы о взаимном расположении различных геометрических объектов в пространстве. Задачи этой дисциплины включают в себя проблемы упаковок и покрытий, замощений, раскрасок, разбиений и освещения[10,11].

Источниками дискретной геометрии можно считать несколько течений, появившихся в начале XX века. Во-первых, в 1896 году выходит книга Минковского "Геометрия чисел"[12], которая рассказывает о связях между теорией чисел и выпуклой геометрией. Дальнейшее развитие этой связи рассматривается в книгах Касселса[13], Кокстера[14], Тота[15] и других.

Задача отыскания плотнейших упаковок является одной из наиболее значимых задач дискретной геометрии. Она ведет свое начало из знаменитой гипотезы Кеплера о плотнейшей упаковке шаров (которая рассматривалась Гильбертом как часть 18 проблемы). В середине прошлого века Тот и Роджерс использовали новые комбинаторные подходы к классическим проблемам, поставленным Ньютоном, Гауссом, Минковским, Гильбертом и Туе. Тем самым они начали развитие теории упаковок и

[7] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, 1995.

[8] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.

[9] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[10] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997

[11] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.

[12] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, RG Teubner, Leipzig-Berlin, 1953.

[13] Дж. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Москва, Мир, 1965.

[14] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover edition (3rd ed.), 1973.

[15] Л. Ф. Тот, *Расположения на плоскостии, сфере и в пространстве*, Москва, Физмалит, 1958.

покрытий[16].

Многие из перечисленных задач комбинаторики, а также комбинаторной и дискретной геометрии решались при помощи вероятностного метода. Вероятностный метод применительно к этим задачам возник в конце первой половины XX века. Первой работой, в которой эта техника была введена, считается уже вышеупомянутая работа Эрдеша 1947 года, где он приводит вероятностное доказательство нижней оценки числа Рамсея. Можно найти и более ранние работы, в которых уже использовался вероятностный способ получения результатов. Самые известные из них — работа Турана[17] 1934 года (простое доказательство теоремы Харди–Рамануджана) и теорема Селе[18] 1943 года о существовании турнира с большим количеством гамильтоновых путей. Однако именно Эрдеш начал активное развитие вероятностного метода как мощного инструмента для решения задач комбинаторики и экстремальной теории графов и внес в него за следующие почти 50 лет значительный вклад. В последующие годы метод позволил установить множество утверждений в теории чисел, анализе, теории информации, дискретной математике. Многие результаты теории кодирования также доказываются с помощью вероятностных идей.

Именно применение вероятностного метода позволило получить Эрдешу первую нижнюю оценку числа Рамсея. Еще один пример известной задачи, где метод позволил получить неожиданно эффективный результат, — это задача Эрдеша–Фюреди[19] об остроугольных треугольниках. В работе был построен изящный и простой контрпример к гипотезе Данцера и Грюнбаума, державшейся 20 лет. Небольшое усовершенствование данного метода — метод малых вариаций — позволило получить простое доказательство классического результата комбинаторики и теории графов — теоремы Эрдеша[20] о том, что существуют графы с наперед заданным хроматическим числом и обхватом. Речь идет о следующем

[16] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Москва, Мир, 1990.

[17] P. Turán, *On a theorem of Hardy and Ramanujan*, Journal of the London Mathematical Society, 9, 1934, 274–276.

[18] T. Szele, *Kombinatorikai Vizsgálatok az Irányitott Teljes Gráffal Kapcsolatban*, Mat. Fiz. Lapok, 50, 1943, 223–256.

[19] P. Erdős, Z. Fűredi, *The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space*, Annals of Discrete Math., 17, 1983, 275–283.

[20] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math., 11, 1959, 34–38.

вопросе: всегда ли для данных целых положительных g, k существует граф G с хроматическим числом не меньше k, содержащий только циклы длины не меньше g?

Независимо друг от друга в 1959 году Гильберт[21], а также Эрдеш и Реньи[22] определяют понятие случайного графа. Исследованиям случайного графа в моделях Эрдеша—Реньи $G(N, p)$ за последние десятилетия посвящено огромное количество работ. В частности, исследовались задачи о распределении малых подграфов в случайном графе, распределении количества деревьев, о поиске гигантской компоненты и определении ее размера, о распределении диаметра случайного графа, о моделях случайных геометрических графов. Приложение теории случайных графов было использовано и в упомянутой выше проблеме Нелсона–Хадвигера о раскраске метрических пространств.

Рассматриваются также альтернативные модели случайных графов, которые применяются при исследованиях различных специальных структур, таких как социальные, биологические или транспортные сети. Особенно большое развитие получило исследование моделей для сети Интернет. Для этого изучаются веб-графы, вершины которых — это сайты в Интернете, а ребра образованы гиперссылками.

В данной диссертационной работе разрабатываются вероятностные методы для исследования свойств дистанционных графов при помощи понятия дистанционных чисел Рамсея — одного из обобщений классических чисел Рамсея. Попутно получены результаты в области комбинаторной геометрии, касающиеся устройства дистанционных графов, а также в области дискретной геометрии — в теории упаковок.

Цель работы

Цель работы состоит в решении следующих задач: исследование свойств дистанционных графов при помощи понятия дистанционных чисел Рамсея, нахождение оценок дистанционного числа Рамсея и разработка вероятностных методов для их нахождения.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные

[21] E.N. Gilbert, *Random graphs*, Annals of Mathematical Statistics, 30, 1959, 1141–1144.
[22] P. Erdős, A. Rényi, *On random graphs, I*, Publ. Math. Debrecen, 6, 1959, 290–297.

из них:

1. Предложены три метода для получения оценок дистанционного числа Рамсея.

2. Получены оценки дистанционного числа Рамсея, существенно улучшающие известные ранее.

3. Найдены оценки плотности множеств без расстояния единица в пространствах малых размерностей.

Основные методы исследования

В работе используются различные методы теории вероятностей и комбинаторики: методы теории случайных графов, локальная лемма Ловаса, разработана вероятностная техника получения оценки дистанционного числа Рамсея, связанная с применением теоремы о взаимном расположении подмножеств конечного множества (теорема Редля). Все теоремы в той или иной степени потребовали сочетания сложной комбинаторной техники с вероятностными методами.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории вероятностей, комбинаторики, комбинаторной и дискретной геометрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

— Семинар "Вероятностные и алгебраические методы в комбинаторике" под руководством профессора А.М. Райгородского (мехмат МГУ, 2009–2012 гг., неоднократно).

— Кафедральный семинар кафедры математической статистики и случайных процессов под руководством профессора А.М. Зубкова (мехмат МГУ, 2013 г.).

— Семинар под руководством профессора В.Е. Бенинга, В.Ю. Королева (ВМК МГУ, 2013 г.)

— Семинар под руководством профессора В.Б. Алексеева, профессора А.А. Сапоженко, профессора С.А. Ложкина (ВМК МГУ, 2013 г.)

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

— X международный научный семинар “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 1-8 февраля 2010 г.)

— Научная конференция “Ломоносовские чтения” (Москва, 16–22 апреля 2010 г.)

— Международная конференция “Конечные и бесконечные множества” (Будапешт, Венгрия, 13–17 июня 2011 г.).

— Международная конференция “Четвертая польская конференция по комбинаторике” (Бедлево, Польша, 17–21 сентября 2012 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (3 из которых входят в перечень ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 111 наименований. Общий объем диссертации составляет 64 страницы.

Краткое содержание диссертации

Введение к диссертации состоит из трех частей. В части “Теория Рамсея” излагается история теории Рамсея, говорится о классической задаче о нахождении чисел Рамсея. В части “Комбинаторная и дискретная геометрия” дается круг задач комбинаторной и дискретной геометрии, близких к теме диссертации: это задача Эрдеша о наибольшем числе единичных расстояний на плоскости, проблема Нелсона–Хадвигера о раскраске метрических пространств, задача о плотнейшей упаковке шаров, и др. В части “Вероятностный метод” описывается история вероятностного метода и история его применения к задачам, упомянутым в первых двух частях введения.

Содержание главы 1

В первой главе обсуждается история задачи о дистанционных числах Рамсея, даются необходимые определения, приводятся формулировки полученных результатов.

В разделе 1.1 вводится определение дистанционного графа, дистанционного числа Рамсея и обсуждаются известные результаты в задаче о дистанционном числе Рамсея.

Дистанционным графом в d-мерном евклидовом пространстве называется граф $G = (V, E)$, в котором множество вершин составляют точки пространства $\mathbb{R}^d$ и для которого выполнено

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a,$$

где a — фиксированное положительное число, ρ — обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^d$. Везде далее мы полагаем $a = 1$.

Дистанционным числом Рамсея $R_{\mathrm{NEH}}(s, t, d)$ называется такое минимальное натуральное $n \in \mathbb{N}$, что для любого графа G с n вершинами верно следующее: либо он содержит индуцированный подграф на s вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^d$, либо его дополнение $\bar{G}$ до полного графа на n вершинах содержит индуцированный подграф на t вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^d$.

В разделе 1.2 даются формулировки основных результатов диссертации.

Содержание главы 2

Глава 2 посвящена двум методам получения нижних оценок дистанционного числа Рамсея в случае плоскости и трехмерного пространства. Оба метода построены на использовании случайного графа в модели Эрдеша–Реньи, локальной леммы Ловаса и специальных свойств, которыми обладают дистанционные графы на плоскости и в трехмерном пространстве. С помощью первого метода доказываются новые теоремы 4 и 5, при помощи второго — новые теоремы 6 и 7.

Теорема 4. *Пусть $d = 2$. Имеет место следующее неравенство:*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s, s, d) \geqslant \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e}(1 + o(1))k2^{\frac{k}{8}}, \qquad \text{где } \ k = 4\left[\frac{0.917s}{4}\right].$$

Теорема 5. *Пусть $d = 3$. Имеет место следующее неравенство:*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant \frac{1}{8\sqrt[8]{8}e}(1+o(1))k2^{\frac{k}{16}}, \qquad \text{где } k = 8\left[\frac{\pi s}{8\cdot 3\sqrt{2}}\right].$$

Теорема 6. *Пусть $d = 2$. Существует такая константа $c > 0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant 2^{\frac{s}{2} - cs^{\frac{1}{3}}\ln s}.$$

Теорема 7. *Пусть $d = 3$. Существует такая константа $c > 0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant 2^{\frac{s}{2} - c\beta(s)s^{\frac{1}{2}}\ln s},$$

где $\beta(s) = 2^{\alpha^2(s)}$, а $\alpha(s)$ – обратная функция Аккермана.

В конце главы рассматривается случай одномерного пространства.

В разделе 2.1 приводятся вспомогательные утверждения для получения оценок. В параграфе 2.1.1. дается утверждение 1[23], необходимое для доказательства теоремы 4.

Утверждение 1 (Кокоткин). *В любом дистанционном графе на плоскости, имеющем n вершин, есть четыре независимых множества (т.е. множества вершин, свободные от ребер) суммарной мощности не менее $[0.917n]$.*

Формулируется и доказывается обобщение утверждения 1 в случае трехмерного пространства, необходимое для доказательства теоремы 5.

Утверждение 2. *В любом дистанционном графе в $\mathbb{R}^3$, имеющем n вершин, есть восемь независимых множеств суммарной мощности не менее $\left[\frac{\pi n}{3\sqrt{2}}\right]$.*

В параграфе 2.1.2 формулируются вспомогательные утверждения 3, 4[24] для доказательства теорем 6 и 7. А именно, оценивается количество ребер в дистанционном графе на плоскости и в пространстве.

Утверждение 3 (Бек, Спенсер). *Найдется такая константа $c_2 > 0$ и такое $n_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_2$ и для любого дистанционного графа $G = (V,E)$ на плоскости, имеющего n вершин, $|E| \leqslant c_2 n^{\frac{4}{3}}$.*

[23] A.A. Kokotkin, A.M. Raigorodskii, *On large subgraphs of distance graphs having small chromatic number*, Abstracts of the talks at the international conference «Fete of combinatorics and computer science», Keszthely, Hungary, August, 2008.

[24] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.

Утверждение 4 (Вельц, Гибас, Кларксон, Шарир, Эдельбруннер). *Найдется такая константа $c_3 > 0$ и такое $n_3 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_3$ и для любого дистанционного графа $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^3$, имеющего n вершин, $|E| \leqslant c_3\beta(n)n^{\frac{3}{2}}$, где $\beta(n) = 2^{\alpha^2(n)}$, а $\alpha(n)$ – обратная функция Аккермана.*

В параграфе 2.1.3 дается формулировка локальной леммы Ловаса[25].

Теорема (локальная лемма Ловаса). *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – события в произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Пусть также фиксированы числа $p \in [0, 1]$ и $f \leqslant n - 1$, причем $ep(f + 1) \leqslant 1$. Предположим, что $\mathsf{P}(A_i) \leqslant p$ для всех i и для любого i найдется такое множество событий $S_i \subset \{A_1, \ldots, A_n\} \setminus A_i$, что $|S_i| \leqslant f$ и A_i не зависит от алгебры, порожденной событиями из множества $\{A_1, \ldots, A_n\} \setminus (S_i \cup \{A_i\})$. Тогда имеет место неравенство $\mathsf{P}\left(\overline{\cup A_i}\right) > 0$, т.е. с положительной вероятностью ни одно из событий не выполнено.*

В разделе 2.2 приводится доказательство теоремы 4. В разделе 2.3 приводится доказательство теоремы 5. В разделе 2.4 приводится доказательство теоремы 6. В разделе 2.5 приводится доказательство теоремы 7. В разделе 2.6 формулируется и доказывается теорема 14 для одномерного случая.

Теорема 14. *Выполняется следующее неравенство:*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s, s, 1) \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{e^2}(1 + o(1))2^{\frac{s}{2}}.$$

Содержание главы 3

В данной главе получены результаты касающиеся плотнейших упаковок в пространствах размерности $d = 3, \ldots, 8$, которые используются для обобщения одного из методов получения оценок дистанционного числа Рамсея, описанного в главе 2.

В разделах 3.1–3.4 рассматривается задача о плотнейших упаковках. Раздел 3.1 посвящен постановке задачи.

В параграфе 3.1.1 приводятся определения множества без расстояния единица и величины $m_1(\mathbb{R}^d)$ — наибольшей плотности, которую может иметь множество без расстояния единица в пространстве $\mathbb{R}^d$.

[25] N. Alon, J.H. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 2000.

На множестве $S \subseteq \mathbb{R}^d$ *реализуется расстояние* a, если найдутся такие точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, что $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a$, где через $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначено евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в $\mathbb{R}^d$. В противном случае мы называем S *множеством без расстояния* a. *Верхней плотностью* измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$ называется величина

$$\overline{\delta}(A) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{V\left(A \cap B_d^{\mathbf{0}}(r)\right)}{V(B_d^{\mathbf{0}}(r))},$$

где $B_d^{\mathbf{0}}(r)$ обозначает шар радиуса r с центром в начале координат, а $V(X)$ — объем множества X.

$$m_1(\mathbb{R}^d) = \sup_{A \subseteq \mathbb{R}^d} \overline{\delta}(A),$$

где A — измеримое по Лебегу множество без расстояния единица.

В параграфе 3.1.2 приводятся необходимые определения из теории решеток и упаковок. В параграфе 3.1.3 рассматривается идея получения нижних оценок $m_1(\mathbb{R}^d)$. В параграфе 3.1.4 в теореме 15 формулируются основные результаты в задаче о плотнейших упаковках, а именно лучшие нижние оценки величины $m_1(\mathbb{R}^d)$ при $d = 3, \ldots, 8$. Приводится сравнение новых результатов с известными ранее оценками.

Теорема 15. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} m_1(\mathbb{R}^3) &\geqslant 0.09877, \qquad & m_1(\mathbb{R}^6) &\geqslant 0.00806, \\ m_1(\mathbb{R}^4) &\geqslant 0.04413, \qquad & m_1(\mathbb{R}^7) &\geqslant 0.00352, \\ m_1(\mathbb{R}^5) &\geqslant 0.01833, \qquad & m_1(\mathbb{R}^8) &\geqslant 0.00165. \end{aligned}$$

Основной целью разделов 3.2–3.4 является построение как можно более плотных множеств без расстояния единица в $\mathbb{R}^d$, $d = 3, \ldots, 8$ для доказательства теоремы 15. В разделе 3.2 описывается конструкция множества без расстояния единица, с помощью которого Крофт получил лучшую оценку $m_1(\mathbb{R}^2)$. В разделе 3.3 описывается конструкция для $\mathbb{R}^3$ и доказывается теорема 15 в случае $d = 3$. В разделе 3.4 описываются результаты в случаях $d = 4, \ldots, 8$.

Раздел 3.5 посвящен приложению результатов в задаче о плотнейших множествах без расстояния единица к задаче о дистанционном числе Рамсея. Доказана теорема 8.

Теорема 8. *Пусть $d \in \{4, \ldots, 8\}$. Выполняются следующие неравенства:*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant \frac{1}{e \cdot 2^{\frac{2^{d-1}-1}{2^d}}}(1+o(1))k2^{\frac{k}{2}}, \qquad \text{где } k = [c_d s],$$

$$c_4 = 0.04413,\ c_5 = 0.01833,\ c_6 = 0.00806,\ c_7 = 0.00352,\ c_8 = 0.00165.$$

Содержание главы 4

В данной главе описан метод, позволивший получить лучшие оценки дистанционного числа Рамсея для любого фиксированного $d \geqslant 4$, где d — размерность пространства. Основной результат главы — доказательство теоремы 9.

Теорема 9. *Пусть $d \geqslant 4$ и $\gamma > 0$. Тогда существует такое $s_0 = s_0(d, \gamma)$, что при всех $s \geqslant s_0$ выполняется неравенство*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant 2^{\left(\frac{1}{2[d/2]} - \gamma\right)s}.$$

В разделе 4.1 формулируется вспомогательная теорема 16 об ограничении числа клик определенного размера в дистанционных графах, необходимая для доказательства теоремы 9. Теорема позволяет обобщить подход, использованный для получения оценок в теоремах 6 и 7. Пусть $cl(G, r)$ — число клик размера r (т.е. полных подграфов на r вершинах) в графе H.

Теорема 16. *Для любого d существует такое $\varepsilon > 0$ и существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всякого дистанционного графа G в $\mathbb{R}^d$ на $n \geqslant n_0$ вершинах*

$$cl\left(G, \left[\frac{d}{2}\right] + 1\right) \leqslant n^{\left[\frac{d}{2}\right]+1-\varepsilon}.$$

В разделе 4.2 доказывается теорема 16.

Раздел 4.3 посвящен доказательству теоремы 9.

В параграфе 4.3.1 описывается общая идея нахождения оценки дистанционного числа Рамсея. Рассказывается о применении результата теоремы 16 и использовании вероятностной техники для получения оценки теоремы 9.

Для каждого n рассматривается случайный граф в классической модели Эрдеша–Реньи $G(n, 1/2)$. Для каждого подмножества S, $|S| = s$, множества V_n вершин случайного графа $G(n, 1/2)$ определим событие A_S, состоящее в том, что количество k-клик индуцированного подграфа $H = G|_S$ не больше $s^{k-\varepsilon}$. Пусть также A'_S — это событие, состоящее в том, что количество k-клик графа $H = \bar{G}|_S$ не больше $s^{k-\varepsilon}$, где ε — число из вспомогательной теоремы 16. Задача сводится к оценке вероятности событий A_S и A'_S.

В параграфе 4.3.2 разбирается случай $d = 4, 5$. Для упрощения изложения техника получения оценки дистанционного числа Рамсея подробно описывается в более простом случае, когда она не дает лучшую оценку. Затем говорится о том, как модифицировать эту технику для получения лучшего результата.

Доказывается теорема 18 и следствие из нее.

Теорема 18. *Справедливы неравенства*

$$\mathsf{P}(A_S) \leqslant \mathcal{P},\ \mathsf{P}(A'_S) \leqslant \mathcal{P}, \text{где } \mathcal{P} = s! \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{s^2}{6}(1+o(1))}.$$

Следствие. *При* $d = 4, 5$ *верна следующая нижняя оценка дистанционного числа Рамсея:*

$$R_{\text{NEH}}(s, s, d) \geqslant \left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{s}{6}(1+o(1))}.$$

В параграфе 4.3.3 техника, описанная в параграфе 4.3.2, обобщается на случай произвольного фиксированного $d \geqslant 4$, где d — размерность пространства.

В заключении указываются возможные направления для дальнейших исследований.

Благодарности

Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе, а также Андрею Борисовичу Купавскому за ряд плодотворных обсуждений.

Список публикаций по теме диссертации

[1] А.М. Райгородский, М.В. Титова, *О дистанционных подграфах графов в пространствах малых размерностей*, Современная математика и ее приложения, 20, 2011, 75–83. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, М.В. Титовой принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[2] А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, М.В. Титова, *О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей*, Труды МФТИ, 4 (1), 2012, 111–121. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи о дистанционном числе Рамсея и редакция введения, А.Б. Купавскому принадлежит постановка задачи о плотнейших множествах без расстояния единица и редакция истории задачи, М.В. Титовой принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[3] А.Б. Купавский, М.В. Титова, *Дистанционные числа Рамсея*, Доклады Академии Наук, 449 (3), 2013, 267–270. (А.Б. Купавскому принадлежит редакция введения, доказательство утверждения о недистанционности графов, содержащих в качестве подграфа граф, изоморфный графу с (d/2+2) долями по три вершины. М.В. Титовой принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[4] A. Kupavskii, A. Raigorodskii, M. Titova, *New bounds for the distance Ramsey numbers*, Discrete Mathematics, 313 (22), (2013), 2566–2574. (А.М. Райгородскому принадлежит доказательство верхней оценки дистанционного числа Рамсея, А.Б. Купавскому принадлежит редакция введения, доказательство утверждения о недистанционности графов, содержащих в качестве подграфа граф, изоморфный графу с (d/2+2) долями по три вершины. М.В. Титовой принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[5] М.В. Титова, *Задача о геометрических числах Рамсея*, Фундаментальная и прикладная математика, 18 (1) (2013), 171–180.