Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Машечкин Алексей Игоревич

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУРЫ ВЕТО-ГОЛОСОВАНИЯ С ЛИДЕРОМ

Специальность 01.01.09
– дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Новикова Наталья Михайловна;
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Кукушкин Николай Серафимович;
	кандидат физико-математических наук, доцент Романов Дмитрий Сергеевич.
Ведущая организация:	Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Защита диссертации состоится «15» ноября 2013 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова http://www.cs.msu.su в разделе «Наука» - «Работа диссертационных советов» - «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «14» октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. т. н., в. н. с. В.А. Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Наиболее яркий пример коллективного принятия решений представляют собой выборы. В современной жизни каждый человек, хотя бы раз, но сталкивался с процессом выборов: от выборов старосты класса и до выборов президента страны. Зачастую приходится выбирать не кандидата, который будет проводить ту или иную политику, а конкретное решение – где провести семейный отпуск или встретить с друзьями Новый Год. В общем случае проблема коллективного принятия решений в сложных системах характеризуется различием интересов участников коллектива и в результате – разным пониманием оптимальности решения. Последствия принятия коллективом того или иного решения не равнозначны для членов коллектива или тех групп, представителями которых они являются. Как правило, оценку полезности любого возможного решения для каждого участника не удается оцифровать, но есть информация о предпочтительности для него имеющихся альтернатив – рейтинг всех предложений (естественно, у каждого из лиц, принимающих решение, он свой).

Для формализации данной задачи традиционно используется математический аппарат теории игр, развитый в работах Кондорсе, Неймана и Моргенштерна, Нэша, Эрроу, Воробьева, Гермейера, Мулена, а также Айзермана, Алескерова, Васина, Данилова, Ерешко, Кононенко, Кукушкина, Мазалова, Меньшикова, Морозова, Мохонько, Новиковой, Сотскова и многих других российских и зарубежных ученых.

Как показано в теории игр, обычно применяемые на практике процедуры голосования по правилу большинства (выбор большинством голосов) обладают рядом отрицательных свойств и, в том числе, не гарантируют от принятия наихудшего для меньшинства решения. Предлагаемая работа посвящена не столь дискриминирующей процедуре голосования – голосованию путем открытого наложения вето, т.е. вычеркивания альтернатив. Указанная процедура была предложена в 1978 году Мюллером и состоит в последовательном отводе имеющихся вариантов принятия совместного решения для того, чтобы привести в исполнение единственный оставшийся невычеркнутым вариант. Это может быть выбор одного из кандидатов на управляющую позицию, распределение общего блага, согласование плана развития компании и т.п. Важно заметить, что, помимо учета интересов меньшинства (так как каждый голосующий может во время своего хода удалить из дальнейшего голосования невыгодный для него вариант), данная процедура обладает еще одним несомненным преимуществом: при рациональном поведении голосующих она не приведет к доминируемому результату.

В большинстве работ, исследующих рассматриваемую модель голосования, в частности, в статьях Мюллера и Мулена, проводился анализ, в основе которого лежало предположение о равноправности игроков. В реальной жизни, наоборот, не редкой является ситуация, когда среди голосующих есть лидер – «1-й игрок», который явно или неявно способен оказать влияние на процесс организации выборов. Поэтому задача формального изучения соответствующей ситуации актуальна для теории принятия решений.

Цель работы состоит в теоретико-игровом анализе процедуры голосования путем последовательного отвода альтернатив (иначе, вето-голосования), с точки зрения лидера – игрока, имеющего право управления порядком ходов.

Задачи работы:

- Найти условия, позволяющие лидеру обеспечить победу наиболее выгодного для него варианта.
- Изучить влияние на исход выборов таких факторов, как: очередность голосования, предпочтения партнеров, возможность введения дополнительного игрока и наличие нескольких не упорядоченных по предпочтительности или одинаково предпочтительных вариантов у игроков.

Научная новизна. Для модели игры с вето-голосованием проведена научно-исследовательская работа по оценке возможности одного из игроков обеспечить избрание выгодного ему варианта. При этом рассмотрен случай произвольного числа голосующих с ограничением на количество возможных вариантов – оно должно превышать число игроков на 1.

Получено и обосновано необходимое и достаточное условие существования порядка голосования, *победного* для лидера, т.е. обеспечивающего принятие варианта 1 – предложения 1-го игрока – при рациональном поведении партнеров.

Доказано, что управление порядком голосования позволяет лидеру добиться наилучшего для себя исхода голосования во всех случаях, когда у любой подгруппы остальных голосующих найдется не меньше вариантов, худших предложения лидера, чем участников в подгруппе, т.е. когда победа варианта 1 в принципе возможна по марьяжной теореме Холла.

Показано, что ход лидера при управлении порядком ходов достаточно оставить первым и что выбор оптимального порядка ходов может быть осуществлен заранее – до начала процедуры голосования.

Произведена оценка шансов на победу варианта 1 для моделей с тремя и четырьмя игроками в случае, когда 4-го игрока вводит лидер.

В явном виде найдены решения для соответствующих вето-голосованию игр трех лиц с неопределенностью.

Методика исследований. В работе использовались методы теории игр, исследования операций, математической логики и комбинаторного анализа.

Практическая значимость. Предложено учитывающее интересы меньшинства правило коллективного принятия решений в коллективах с лидером.

Получены априорные оценки шансов на победу варианта лидера для небольших коллективов, в том числе при неточно известных предпочтениях участников.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование нового класса игр и разработаны методы их решения, что соответствует паспорту специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Апробация. Результаты работы докладывались на VI и VII Московских международных конференциях по исследованию операций ORM 2010 и ORM 2013, а также на конференциях в МГУ: Ломоносовские чтения (в 2009, 2011 и 2013 годах) и Тихоновские чтения (в 2008, 2009 и 2012 годах).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих в себя 10 параграфов, и списка литературы из 104 наименований. Полный объем диссертации составляет 121 страницу.

Основное содержание работы

Во **Введении** дается краткая характеристика задачи принятия коллективных решений, приводится литературный обзор теоретико-игровых методов анализа подобных задач и исследования свойств различных процедур голосования, в том числе процедуры голосования путем последовательного наложения вето, которой посвящена данная работа. Сформулированы цели работы, состоящие в изучении случая, когда имеется лидер коллектива, воздействующий на порядок принятия решений. Приведен модельный пример возникновения подобной ситуации.

Рассмотрим процедуру выбора на совете директоров компании одного из вариантов инвестирования ее средств. Пусть в процессе выбора обсуждаются (n+1) вариантов решения, причем n из них выдвинуты членами совета директоров, а один соответствует отказу от инвестирования. Голосуют сторонники вариантов инвестирования. Каждый вариант имеет в совете директоров представителя, для которого это решение является наилучшим. У варианта отказа от инвестирования нет продвигающего его в компании, однако этот вариант не обязательно окажется у голосующих на последнем месте, а может представляться более предпочтительным, чем варианты, предлагаемые партнерами.

В **первой главе** для игры n лиц, соответствующей голосованию путем последовательного наложения вето, доказано необходимое и достаточное условие существования *победного порядка ходов*, т.е. такой очередности голосующих, чтобы 1-й игрок мог гарантировать выбор своего предложения при рациональном поведении остальных игроков (далее, для краткости – *подчиненных*).

В **§ 1** дана формальная постановка задачи в терминах теории игр.

Обозначим альтернативы принимаемого решения номерами 1, 2,..., n, n+1. Каждый номер i, кроме n+1, соответствует номеру представителя данного решения i во время голосования, т.е. номеру игрока i. Место i-го игрока по порядку «ветования» будем обозначать через $\lambda(i)$. Рассматривается процедура с открытым голосованием, когда игроки накладывают вето последовательно, причем каждый из них знает, запрет на выбор каких альтернатив уже был наложен, и удаляет один из еще не заветованных вариантов. Тем самым, вето может быть наложено на каждый из вариантов решения максимум один раз. При этом перед голосованием все игроки проинформированы о предпочтениях друг друга.

В игре, соответствующей голосованию, функции выигрыша имеют вид

$$u_i(x) = U_i(\pi(x)),$$

где π – функция голосования, которая ставит в соответствие набору $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ стратегий x_i голосования, выбранных игроками, вариант решения $\pi(x)$; U_i – отображение множества вариантов решений на числовую ось – задает полезность варианта для i-го игрока.

Особый интерес с содержательной точки зрения представляет изучение возможности одного из игроков определять порядок, в котором накладывают вето остальные игроки, причем при условии, что ему известны их предпочтения. Назовем это возможностью управления порядком ходов.

Данная модель принятия решений представима в виде игры в нормальной форме

$$\widetilde{\Gamma_n} = \langle N, X_i, u_i \rangle,$$

здесь $N = \{1, 2,..., n\}$ – множество игроков, т.е. голосующих (выбирающих) участников, X_i – множество стратегий и u_i – функция выигрыша i-го игрока. Для 1-го игрока множество стратегий $X_1 = Y_1 \times \Lambda$, где $Y_1 = \{2, 3,..., n, n+1\}$ – варианты для ветования 1-м игроком (все множество альтернатив, кроме варианта 1, предложенного им самим), $\Lambda = \{\lambda: N \to N \mid \lambda(1)=1\}$ – набор перестановок среди подчиненных игроков, задающих порядок ходов между ними. Для остальных игроков ($i \geq 2$) множество стратегий X_i – это множество отображений из $Y_{\lambda(1)} \times \ldots \times Y_{\lambda(i)-1}$ в Y_i, где $Y_i = \{1, 2,..., n, n+1\} \setminus \{i, y_{\lambda(1)},..., y_{\lambda(i)-1}\}$ – множество действий игрока i, заключающихся в выборе варианта решения, на которое он накладывает вето (и такой вариант уже далее выбывает из рассмотрения), переменная y_i соответствует номеру варианта решения, выбранного для ветования i-м игроком. Таким образом, стратегия i-го игрока $x_i = y_i(y_{\lambda(1)},..., y_{\lambda(i)-1})$ – функция его действий в зависимости от действий уже проголосовавших игроков (с меньшими по порядку ветования номерами), а действие (ход) i-го игрока – ветование варианта y_i. При условии, что игроки пронумерованы по порядку ходов, функция выигрыша i-го игрока запишется как

$$u_i(x) = U_i(\pi(x)), \qquad \pi(x) = \pi(y_1, y_2(y_1),..., y_i(y_1,...,y_{i-1}),..., y_n(y_1,...,y_{n-1})).$$

Если же у 1-го игрока нет возможности управлять порядком ходов, то такая игра обозначается через Γ_n и отличается от $\widetilde{\Gamma_n}$ тем, что стратегия 1-го голосующего аналогична стратегиям остальных игроков, т.е. $X_1 = Y_1$ – состоит только из множества вариантов, на которые лидер может наложить вето. По умолчанию в Γ_n $\lambda(i)= i$.

Предположим, что для каждого голосующего функции выигрыша заданы не явно, а системой предпочтений, т.е. известны строгие неравенства между значениями функций выигрыша в случае принятия каждого из вариантов. Например, для n=3

$$
\begin{aligned}
&U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1), \quad a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\};\\
&U_2(2) > U_2(a^2) > U_2(b^2) > U_2(c^2), \quad a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\};\\
&U_3(3) > U_3(a^3) > U_3(b^3) > U_3(c^3), \quad a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Считаем, что все игроки знают предпочтения друг друга и порядок ходов, а также, поскольку Γ_n и $\widetilde{\Gamma}_n$ являются играми с полной информацией, полагаем, что игроки действуют рационально, т.е. максимизируют свои функции выигрышей, ожидая этого и от партнеров.

В **§ 2** для иллюстрации основных построений подробно исследован случай n=4.

Также в **§ 2** сформулировано в общем виде необходимое условие победы варианта 1 в игре Γ_n безотносительно к порядку ходов игроков (включая 1-го).

Обозначим через J_i множество вариантов, худших варианта 1 для i-го игрока, с $i > 1$, через $G(I)$ – объединение J_i по i из произвольного подмножества I подчиненных игроков, а через K – объединение J_i всех подчиненных игроков:

$$G(I) = \cup_{i\in I} J_i \ \text{ и } \ K = G(\{2,..., n\}).$$

Множества J_i, $G(I)$ и K характеризуют те варианты, которые подчиненным игрокам более важно вычеркнуть, чем вариант 1, в том числе, если часть из них (группа I) или все они объединяются в коалицию. Применение марьяжной теоремы Холла к набору $\{J_i\}_{i>2}$ дает следующее

Условие А – для любого подмножества I игроков {2, ..., n} число элементов в объединении J_i по i из I не меньше числа игроков в I, т.е. обозначая число знаком |…|,

$$|G(I)| \geq |I|. \tag{2}$$

В **§ 3** показано, что при любом порядке ходов в игре Γ_n *условие А* является необходимым условием победы варианта 1 (У т в е р ж д е н и е 1).

Данного условия достаточно для наличия взаимно-однозначного соответствия между множеством подчиненных игроков i и вариантов в их J_i для вычеркивания, но отсюда не следует, что им выгодно ветовать именно эти варианты.

Основная часть **§ 3** посвящена доказательству указанного результата.

У т в е р ж д е н и е 2. При возможности управления порядком ходов, т.е. в игре $\widetilde{\Gamma_n}$, *условие A* является достаточным условием победы варианта 1.

Таким образом, наличие должного количества предложений, худших варианта 1-го игрока, во всевозможных коалициях между другими голосующими является необходимым и достаточным условием существования порядка ходов подчиненных игроков, который делает игру Γ_n, соответствующую вето-голосованию, победной для лидера. Предпочтения у игроков среди вариантов, лучших варианта 1, не значимы.

Вторая глава имеет более технический характер. Она посвящена обратной задаче по отношению к классической постановке задачи поиска выигрывающей альтернативы при фиксированном порядке ходов, рассматриваемой Мюллером и Муленом, и описывает способы построения победного порядка ходов в зависимости от возможных случаев расположения варианта 1 в предпочтениях подчиненных игроков при выполнении необходимого и достаточного условия из первой главы. Причем, поскольку случаи строгого равенства в (2) для $|I\,| \neq n{-}1$ рассматриваются довольно просто (и были изучены в **§ 3**), то построение проводится в предположении, что выполнено следующее

***Условие* 1**: для любой группы I из $l < n{-}1$ подчиненных игроков i объединение $G(I)$ их J_i (альтернатив, худших варианта 1) состоит из **более** l различных вариантов. Для множества вариантов K (худших варианта 1 для всех подчиненных игроков) так и остаются две возможности: $|K\,| = n{-}1$ и $|K\,| = n$, которые проанализированы отдельно.

В **§ 4** перечислены все возможные победные порядки ходов для такого случая *условия 1*, когда партнеры наименее расположены к варианту лидера. А именно, предполагается, что у всех подчиненных игроков вариант 1 – на третьем с конца (т.е. $(n{-}1)$-м) месте по предпочтительности, отсюда $|J_2| = ... = |J_n| = 2$. Важным свойством данных игр является то, что при *условии 1* все J_i циклически пересекаются, т.е. при определенной нумерации подчиненных игроков, формально полагая $J_{n+1} = J_2$, имеем

$$|J_i \cap J_{i+1}| = 1 \text{ для всех } i > 1. \qquad (3)$$

Будем использовать для предпочтений подчиненных игроков матричную запись, обозначая i-й строкой профиль предпочтений i-го игрока (номера вариантов стоят по убыванию их предпочтительности слева направо); все варианты между предложением игрока и вариантом 1, как незначимые для исследования, запишем одной буквой a (без индексов).

Тогда для рассматриваемой игры получим матрицы предпочтений типа приведенных на рис.1, но с возможностью другой перестановки вариантов внутри J_i.

У матриц на рис. 1 подчерком выделены рациональные стратегии ветования подчиненных игроков (при условии $\lambda(i)= i$). Видно, что для средней и правой матриц предпочтений 2-му игроку рационально заветовать вариант 1, а для левой матрицы данный порядок ходов – победный.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 & c^1 & \underline{c^2} \\ 3 & a & 1 & c^2 & \underline{c^3} \\ 4 & a & 1 & c^3 & \underline{c^4} \\ & & \dots & & \\ n\text{-}2 & a & 1 & c^{n-3} & \underline{c^{n-2}} \\ n\text{-}1 & a & 1 & c^{n-2} & \underline{c^{n-1}} \\ n & a & 1 & c^{n-1} & \underline{c^1} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & a & \underline{1} & c^1 & c^2 \\ 3 & a & 1 & c^3 & \underline{c^2} \\ 4 & a & 1 & c^4 & \underline{c^3} \\ & & \dots & & \\ n\text{-}2 & a & 1 & c^{n-2} & \underline{c^{n-3}} \\ n\text{-}1 & a & 1 & c^{n-2} & \underline{c^{n-1}} \\ n & a & 1 & c^{n-1} & \underline{c^1} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 2 & a & \underline{1} & c^2 & c^1 \\ 3 & a & 1 & \underline{c^2} & c^3 \\ 4 & a & 1 & \underline{c^3} & c^4 \\ & & \dots & & \\ n\text{-}2 & a & 1 & \underline{c^{n-3}} & c^{n-2} \\ n\text{-}1 & a & 1 & c^{n-1} & \underline{c^{n-2}} \\ n & a & 1 & c^{n-1} & \underline{c^1} \end{pmatrix}$$

Рисунок 1. Разновидности матрицы предпочтений при $|J_i| = 2$.

Основной результат **§ 4** состоит в следующей классификации игр Γ_n с $|J_i| = 2$.

У т в е р ж д е н и е 3. Игры Γ_n, заданные матрицами предпочтений с рис. 1 с точностью до перестановки вариантов внутри J_i, где игроки i пронумерованы в порядке ходов между ними, являются победными тогда и только тогда, когда вариант c^1 – не худший для n-го игрока или предпочтения подчиненных игроков задаются левой матрицей на рис.1 либо аналогичной с обратной предпочтительностью между вариантами c^1 и c^2 у 2-го игрока.

Из утверждения 3 вытекает простой способ построения победного порядка ходов в игре $\widetilde{\Gamma}_n$ с $|J_i| = 2$ (вообще говоря, не единственный). Занумеруем подчиненных игроков так, чтобы участники с пересекающимися J_i имели соседние номера, получим выполнение (3), т.е. игру с матрицей предпочтений типа представленных на рис.1 (с точностью до перестановки вариантов внутри J_i). Примем $c^n = c^1$.

Алгоритм 1 – построения победного порядка ходов в игре $\widetilde{\Gamma}_n$ с матрицей предпочтений, удовлетворяющей условиям утверждения 3.

Обозначим через w^0 номер игрока, являющийся максимальным из номеров w подчиненных игроков, для которых вариант c^w лучше c^{w-1}. Если такого w нет или $w^0 =$

2, имеем игру с левой матрицей или аналогичной с перестановкой c^1 и c^2 в J_2, порядок ходов для которой и так победный; при $2< w^0<n$ циклически переставим подчиненных игроков, чтобы игрок с номером w^0 оказался на последнем (т.е. n-м) месте по порядку голосования, и этого достаточно для победности порядка ходов по утверждению 3.

В § 5 рассматриваются игры, в которых у одного из игроков (пусть, для определенности, 2-го) позиция варианта лидера выше 3-го с конца предложения.

Раздел 5.1 посвящен анализу случаев, когда у всех подчиненных игроков вариант 1 оказывается 3-м с конца, а у одного – на 4-й позиции с конца. Для каждой такой игры с помощью утверждения 3 построен победный порядок ходов.

В **разделе 5.2** строится победный порядок ходов для игр, в которых для 2-го игрока вариант 1 лучше, чем, как минимум, четыре других варианта. Показано, что в таком случае структура предпочтений игроков $L = \{3, 4, \dots , n\}$ (при выполнении *условия 1*) усложняется: игроки могут быть разбиты на подгруппы L^j, внутри которых предпочтения задаются аналогично представленному на рис. 1, а J_i для i из разных подгрупп (кроме как для игроков, начинающих подгруппу) не пересекаются. Это, в свою очередь, приводит к невозможности прямого применения утверждения 3 к таким играм, и общая логика построения победного порядка ходов становится более разветвленной.

Определения. Вариант из J_i будем называть *парным* к варианту из J_r, где $i \neq r$, и *парным* с игроком r (или в группе игроков I), если он находится в пересечении J_i и J_r ($r \in I$). Вариант назовем *непарным* (внутри I), если он принадлежит лишь одному J_i (среди $i \in I$). Вариант, принадлежащий J_i трех и более различных игроков из L, будем называть *повторным*.

Занумеруем (и обозначим) игроков из L следующим образом. Присвоим начальные номера игрокам (далее v-м) с множеством $J_v = \{b^v, c^v\}$, состоящим из повторного и непарного внутри L вариантов. Затем по порядку пусть будет номер игрока f с одним непарным внутри L вариантом, худшим варианта 1, а другим – парным. Игроку с парным к f-му вариантом дадим номер $(f+1)$. Второй непарный внутри L вариант должен оказаться в J_n у игрока с последним (n-м) номером в группе L. Для остальных номеров i игроков из L ($n > i > f$) либо будет (см. рис. 1) выполнено

$$J_i = \{b^i, c^i\}, \text{ где } b^i \in J_{i-1}, \text{ а } c^i \in J_{i+1}, \qquad (4)$$

либо выделяются T подгрупп $L^1, L^2, \ldots, L^T$, заданных номерами n^j ($n^1 < n^2 < \ldots < n^T < n$) игроков, для которых удается обеспечить следующие соотношения:

$$\begin{cases} J_{n^j} = \{b^{n^j}, c^{n^j}\}, \quad b^{n^j} \in J_{n^j-1}, \quad c^{n^j} \in J_2 \text{ - непарный внутри } L, \\ J_{n^j+1} = \{b^{n^j+1}, c^{n^j+1}\}, \quad b^{n^j+1} \in J_{t^j} - \quad \text{повторный}, \quad t^j < n^j, \quad c^{n^j+1} \in J_{n^j+2}, \\ \forall\, j = 1, 2, \ldots, T \text{ для игроков } i \text{ внутри подгруппы } L^j \text{ (т.е. } t^j < i < n^j\text{) справедливо (4).} \end{cases} \qquad (5)$$

Далее свойство (4) будем называть *цепным*, игроков с номерами от f до n и их парные внутри группы L или подгрупп L^j варианты b^i, c^i – *зацепленными*, а непарные внутри L варианты у зацепленных игроков и самих игроков с этими вариантами будем называть *крайними*.

Для зацепленных игроков существует такой порядок ходов между ними, что, кроме f-го, каждый следующий игрок имеет парный вариант с предыдущим.

Например, для всех матриц на рис. 1: $T = 0$, $f = 2$, $b^i = c^{i-1}$ и $c^n = c^1$, т.е. цепное свойство выполняется для всех подчиненных игроков. Но в предположении $|J_2| > 2$ получаем возможность $T > 0$. При $T > 0$ каждая подгруппа L^j начинается с игрока t^j и его повторного варианта b^{t^j} (варианты b^{t^j} могут быть совпадающими для разных L^j), а кончается игроком n^j и его уникальным вариантом c^{n^j} – крайним в L. К множеству указанных вариантов будем далее адресоваться как к *цепочке вариантов* для L^j. При этом если в L^j существует игрок, имеющий повторный вариант, отличный от b^{t^j} игрока t^j, то, значит, внутри L^j от зацепленного в ней варианта ответвляется еще одна подгруппа – L^g. Игроки, не вошедшие в L^j, L^g, также являются зацепленными между собой, и их множество далее обозначается как L^0.

Свойство (5), отражающее пересечения J_i в силу *условия 1*, задает среди игроков из L структуру типа дерева (см. левый граф на рис. 2), вершины которого соответствуют игрокам, а дуги соединяют игроков, имеющих между собой парные внутри L варианты. Подгруппы L^j – как бы ветви дерева (которое на рис. 2 изображено перевернутым), на них дуги соединяют подряд вершины игроков с соседними номерами. Ствол дерева – вертикальная жирная линия на рис. 2 – соответствует множеству игроков L^0. Наличие ответвления означает существование повторного варианта у первого на ответвлении игрока, в таком случае Т > 0. И тогда для построения победного порядка ходов аналог *Алгоритма 1* надо применять для L^0 – ствола дерева. При этом потребуется следующее

***Условие на нумерацию подчиненных игроков*:**

если наихудшим для 2-го игрока среди парных с голосующими ранее игроками является парный в L вариант b^r, то r-й игрок находится во множестве L^0, а если – незацепленный вариант c^{n^j} (или c^v), то n^j-й (или v-й) игрок оказывается n-м игроком – последним в L^0.

Указанное условие названо *условием на нумерацию игроков,* поскольку для его выполнения достаточно до формирования порядка ходов так перенумеровать игроков в L, чтобы нужная последовательность ветвей образовала ствол дерева.

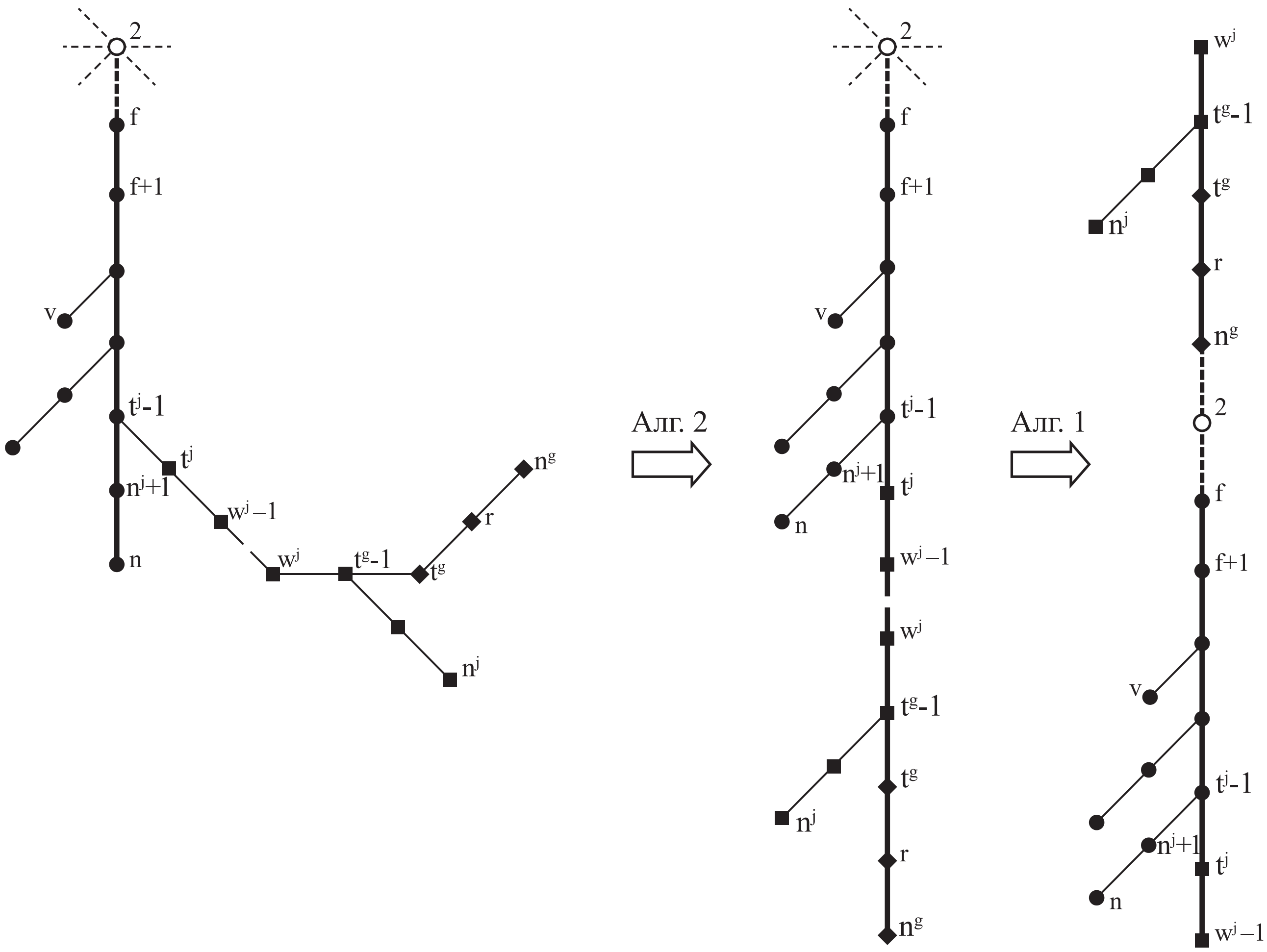

Рисунок 2. Построение победного порядка ходов

Далее опишем соответствующий алгоритм, по которому осуществляется перенумерация подчиненных игроков (перед формированием порядка ходов – т.е. их циклической перестановкой аналогично *Алгоритму 1*) для выполнения *условия на нумерацию*. Алгоритм перенумерации задает переход от левого дерева к среднему на рисунке: новый ствол – это новая вертикальная жирная линия. Исходные номера игроков на рисунке проставлены рядом с вершинами. Игроки подгруппы L^j обозначены квадратиками, а подгруппы L^g – ромбиками.

Алгоритм 2 – перенумерации игроков, при которой r-й игрок с худшим для 2-го игрока парным с ним вариантом из тех, кто после циклической перестановки подчиненных будет голосовать ранее 2-го игрока, оказывается на стволе дерева для L.

Рассмотрим в исходной игре все цепочки вариантов для подгрупп L^j, включая подгруппы $L^v = \{v\}$ с $t_v = n_v = v$. Обозначим через w^j номер игрока из подгруппы L^j, следующий за максимальным номером $w^{0j} \in L^j$ игроков w, для которых вариант c^w лучше b^w, а если таких w в L^j нет, то j-ю подгруппу *не учитываем*. Если найдется подгруппа L^j, для которой игрок w^{0j} совпадает с n^j, то игрока n^j делаем n-м. Если же этот номер для 0-й подгруппы совпал с n, то не меняем исходной нумерации игроков.

Допустим, что не оказалось таких j, чтобы в L^j было $w^{0j} = n^j$. Если при этом найдется учитываемая подгруппа L^j, в которой $w^j > t^j$ и между игроками w^j и n^j в L^j нет (n^g+1)-го, т.е. ответвлений других подгрупп, то выбираем игрока n^j в качестве n-го – образуем 0-ю подгруппу на основе L^j. В такой нумерации игроков, если применять *Алгоритм 1* к новой 0-й подгруппе, то окажется, что у нее нет ответвлений после w^0-го игрока.

В остальных случаях все подгруппы L^g, не содержащие ответвлений, по определению являются *неучитываемыми*. Тогда выберем учитываемую подгруппу L^j, в которой все (n^g+1)-е игроки с номерами, большими w^j, соответствуют таким *неучитываемым* L^g, и образуем 0-ю подгруппу на ее основе. После применения *Алгоритма 1* к этой 0-й подгруппе получим, что для всех игроков n^g+1, которые ходят ранее 2-го игрока, будет c^i хуже b^i у каждого i из подгруппы L^g. Если опять подобных L^j нет, то выбираем ту L^j, в которой все (n^g+1)-е игроки с номерами, бóльшими w^j, соответствуют лишь *неучитываемым* L^g, не имеющим учитываемых ответвлений. Если и таких L^j не найдено, то рассматриваем исходную 0-ю подгруппу.

Предположим, что оказалась выбранной подгруппа L^j для некоторого $j \geq 0$. Найдем наихудший для 2-го игрока вариант из $J_2 \cap J_h$ среди номеров h игроков, которые будут голосовать ранее 2-го (т.е. находящихся в подгруппах L^g с $n^g+1 \geq w^j$ или имеющих в L^j номер $h \geq w^j$). Если найденный вариант принадлежит J_r игрока r из подгруппы L^g , то соответствующего n^g-го игрока (крайнего в L^g) делаем n-м. В противном случае n-м становится игрок n^j. На рис.2 игрок r из подгруппы L^g, поэтому n^g-й игрок будет перенумерован в n-го (на рис. 2 сохранены исходные номера), т.е.

расположен теперь на стволе дерева – в 0-й подгруппе (это показано графически – ствол выделен вертикальной жирной прямой).

Теперь опишем идею ***Алгоритма 3*** – построения победного порядка ходов в игре $\widetilde{\Gamma_n}$ типа (4), (5). Перестановка игроков, находящихся на стволе дерева после перенумерации по *Алгоритму 2,* соответствует *Алгоритму 1* – см. правое дерево на рисунке, т.е. определяется циклической перестановкой игроков 0-й подгруппы так, чтобы последним стал игрок w^{0j} (= w^j-1). Заметим, что при перенумерации, заданной *Алгоритмом 2,* w^j-й и w^{0j}-й игроки расположены в 0-й подгруппе, и что среди вариантов $b^h \in J_2 \cap J_h$ для игроков h, которые при указанном порядке ходов голосуют ранее 2-го игрока, худший для 2-го игрока вариант b^r (или c^n) также принадлежит J_r (или J_n) игрока из L^0. Тем самым, *условие на нумерацию* оказывается выполненным.

На ветвях дерева, полученного по *Алгоритму 1* (т.е. правого на рис.2), введем обратный относительно начального порядок ходов и поместим всех игроков одной ветви по порядку голосования до или после 2-го игрока в зависимости от того, до или после него оказалось соответствующее ответвление на правом дереве с рис. 2 (т.е. по итогам применения циклической перестановки к игрокам на стволе по *Алгоритму 1*). Причем если какая-то ветвь отходит от другой, то все вместе игроки отходящей ветви ставятся перед игроками той ветви, от которой они ответвились (в порядке, обратном исходному порядку их номеров).

В результате, удается в общем виде построить победный порядок ходов для случая **§ 5**.

<u>В **§§ 6-7**</u> анализируются случаи наличия нескольких игроков, у которых место варианта 1 выше 3-го с конца. В этом случае по *условию 1* структура связей среди J_i у подчиненных игроков i представима «лесом» – множеством деревьев, аналогичных деревьям на рис. 2. Найдено правило, позволяющее деревья леса, вершины которых переупорядочены как в **§ 5**, «склеить» между собой в один порядок ходов.

Подчеркнем, что даже при наличии точной информации построить победный порядок ходов для десятка игроков в условиях, исследуемых в **§§ 6** и **7**, уже не просто из-за необходимости перебора довольно большого числа комбинаций. Для таких коллективов гипотеза о рациональном поведении плохо подтверждается на практике (так как слишком много комбинаций должны перебрать и участники, чтобы найти рациональное решение). Однако, в реальных ситуациях принятия решений число возможных для коллектива альтернатив по сути, если не вдаваться в их детали, не столь велико (4-5, а не 10). Так что их стремятся укрупнить (отложив нюансы для дальнейшей проработки). При этом члены коллектива объединяются в группы приверженцев каждой агрегированной альтернативы и выдвигают своего выборщика.

В применении к рассматриваемому модельному примеру подобная ситуация возможна при относительно большом составе совета директоров с разноплановыми интересами. Последний фактор приводит к осложнению продвижения любого конкретного предложения, поэтому становится выгодным разбиваться на коалиции и формулировать обобщенные (или компромиссные) коалиционные варианты. В итоговом голосовании участвуют не все, а только выборщики (уполномоченные представители коалиций), которые уже и получают право вето одного из ранее незаветованных (остальными выборщиками) объединенных вариантов.

Формально, такой механизм принятия решений соответствует рассмотренному выше, но теперь другая из принятых гипотез становится дальше от реальности – это гипотеза о строгом порядке среди промежуточных альтернатив. Действительно, если для половины группы, которую представляет выборщик (например, 2-й игрок) вариант 4 лучше варианта 3, а для другой половины – наоборот, то при принятии решений от лица коалиции этот игрок может ориентироваться как на то, так и на другое отношение предпочтительности между этими – чужими для него – вариантами: либо он будет считать их эквивалентными, либо они будут для него несравнимы.

В третьей главе более подробно изучаются игры Γ_n и $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}_n}$ с небольшим числом участников в различных содержательных предположениях, в том числе, когда каждый голосующий является представителем целой группы избирателей.

В § 8 для игр 3-х и 4-х игроков формализована и решена задача получения количественных оценок шансов на победу варианта, лучшего для 1-го игрока, при произвольных наборах предпочтений подчиненных и порядке ходов между ними. В целом, **§ 8** посвящен исследованию влияния возможности управления порядком ходов на увеличение шансов на победу варианта 1-го игрока в зависимости от порядка голосования и профиля предпочтений подчиненных, а также в сравнении со способом управления путем включения в процедуру дополнительного игрока и его варианта.

В **разделе 8.1** произведена оценка изменения шансов на выбор предложения 1-го голосующего в зависимости от наличия или отсутствия у него возможности управлять порядком ходов для игры 3-х лиц.

Конкретизированы условия, являющиеся необходимыми и достаточными для победы предложения 1-го игрока в игре Γ_3 (без управления порядком ходов), на базе утверждения 3. Результаты, по сути, различаются для двух случаев: большей или меньшей благожелательности к варианту 1 со стороны участника, голосующего вторым, по сравнению с вариантом третьего голосующего участника. В итоге все игры Γ_3 типа (1) распадаются на две группы:

$U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1)$, $a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\}$; **(I)**: $U_2(1)>U_2(3)$

$U_2(2) > U_2(a^2) > U_2(b^2) > U_2(c^2)$, $a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\}$;

$U_3(3) > U_3(a^3) > U_3(b^3) > U_3(c^3)$, $a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}$. **(II)**: $U_2(3)>U_2(1)$

С л е д с т в и е 1**.** Для победы варианта 1 при условии (**I**) необходимо и достаточно, чтобы он не был наихудшим для 3-го игрока.

С л е д с т в и е 2. Для победы варианта 1 при условии (**II**) необходимо и достаточно, чтобы одновременно:

1. вариант 1 не был наихудшим для 2-го игрока и
2. для 3-го игрока вариант 2 являлся наименее предпочтительным.

На основании найденных условий получены следующие оценки

У т в е р ж д е н и е 4. Из 36 случаев соотношений между выигрышами 2-го и 3-го игроков только в 14 побеждает вариант 1, причем, в 12 случаях при условии (**I**) и в двух – при условии (**II**).

При наличии возможности управлять порядком ходов действует утверждение 2 (*условие А*), и 1-й игрок может обеспечить победу своего предложения в 15 случаях. Таким образом, введение управления порядком голосования увеличивает шансы на победу варианта 1-го игрока с 39% до 42%.

В **разделе 8.2** рассматривается игра, в которой 1-й игрок имеет возможность ввести дополнительного игрока (4-го, и новый вариант 4, соответственно). Для такой игры получено и доказано следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 5. Если для 2-го и 3-го голосующих вариант 4 хуже варианта 1, то 1-й игрок может без изменения порядка их ходов обеспечить избрание своего варианта в 62.5% случаев.

Если 1-й игрок знает, что его предложение более выгодно, чем новый вариант 4, для 2-го и 3-го игроков вместе или хотя бы для одного из них: 2-го (или 3-го), он может рассчитывать на 44.4% (или 44%). Если же 1-й игрок должен ориентироваться на возможность любого места в предпочтениях 2-го и 3-го игроков предложения нового голосующего, то его шансы на победу в игре с добавочным игроком составляют 30%, что хуже, чем в игре с двумя партнерами.

Полученные результаты показывают, что с точки зрения лидера возможность ввода дополнительного голосующего более выгодна, чем управление порядком ходов, только когда заранее известно, что вариант нового игрока менее предпочтителен, чем предложение 1-го игрока, для 2-го и 3-го игроков одновременно или хотя бы для одного из них (лучше, если для игрока, голосующего вторым).

В § 9 рассмотрены игры Γ_3 и $\widetilde{\Gamma_3}$, соответствующие голосованию путем последовательного наложения вето, при условии нестрогих (неполностью определенных) предпочтений. Показано, что такая ситуация характерна для многокритериальной игры, возникающей в частности из-за наличия выборщиков, наследующих целевые функции участников выдвинувших их групп.

Понятие неполностью определенных предпочтений вводится в **разделе 9.1**. В реальной ситуации бывает трудно предпочесть один неоптимальный вариант другому, если игрок представляет интересы нескольких участников. В таком случае в предпочтениях игрока может присутствовать неопределенность в собственных интересах, которая предполагает невозможность для i-го игрока указать более предпочтительный из двух вариантов b и c, что далее обозначается как $U_i(b) <> U_i(c)$. (К ситуации с неполностью определенными предпочтениями формально относится и неоднозначность функции выигрыша, т.е. существование у нее одинаковых значений.) Подобная неопределенность в предпочтениях голосующего может быть вызвана, в том числе, наличием векторной оценки вариантов.

Например, если каждый вариант оценивается игроком i по двум критериям V и W, а каждая из компонент V и W вектор-функции выигрыша аналогична функции выигрыша из игры Γ_3 без неопределенности в предпочтениях, то наличие двух критериев оценки вариантов может не позволить игроку однозначно определить свои предпочтения. Данная модель представима в виде двухкритериальной игры в нормальной форме $<N, X_i, u_i>$ с $X_i = \{1,2,3,4\}$ – множеством стратегий игрока i, N =

{1,2,3} – множеством выборщиков и функциями выигрыша $u_i(x) = U_i(\pi(x_1,x_2,x_3)) = (V_i(\pi(x_1,x_2,x_3)),\ W_i(\pi(x_1,x_2,x_3)))$, где $\pi(x_1,x_2,x_3)$ – функция голосования, определяющая правила выбора варианта в зависимости от действий игроков, а V_i и W_i – критерии оценки выбранного варианта игроком i. Переход от указанной игры в нормальной форме к рассматриваемой игре с фиксированным порядком ходов производится независимо от функций выигрыша участников так же, как и в **§ 1**.

Для игры 3-х лиц выведены необходимые и достаточные условия победы варианта 1 (1-го голосующего) в игре с нестрогими предпочтениями, различающиеся для следующих двух (аналогичных рассмотренным в разд. 8.1) случаев предпочтений второго голосующего:

$U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1)$, $a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\}$;   (**I**): $U_2(1)>U_2(3)$

$U_2(2) > U_2(a^2)\ ?\ U_2(b^2)\ ?\ U_2(c^2)$, $a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\}$;

$U_3(3) > U_3(a^3)\ ?\ U_3(b^3)\ ?\ U_3(c^3)$, $a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}$. (**II**): $U_2(3)>U_2(1)$ или $U_2(3)<>U_2(1)$

Здесь на месте любого из знаков “?” может стоять “<>”, обозначающее нестрогие предпочтения (отсутствие предпочтительности между вариантами или неопределенность предпочтений).

У т в е р ж д е н и е 6. При возможной неопределенности в предпочтениях игроков между чужими (т.е. предложенными другими игроками или «статус кво») вариантами, для победы варианта 1 в предположении (**I**) необходимо и достаточно, чтобы вариант 1 не был наихудшим для 3-его игрока, ни как единственный, ни в случае неопределенности, т.е.

если $U_3(a) > U_3(b) > U_3(c) <> U_3(d)$, то ни c, ни d не равны 1.

Таким образом, условие (**I**) само по себе является выгодным для 1-го игрока.

У т в е р ж д е н и е 7. При возможной неопределенности в предпочтениях подчиненных игроков между чужими вариантами, для победы варианта 1 при условии (**II**) необходимо и достаточно, чтобы одновременно:

1. вариант 1 не был наихудшим ни для 2-го, ни для 3-го игроков, причем как в строгом смысле (единственности), так и в нестрогом смысле (т.е. не может быть неопределенности в двух местах и, если $U_i(a) > U_i(b) > U_i(c) <> U_i(d)$, то ни c, ни d не равны 1, $i = 2, 3$), **и**
2. для 3-го игрока вариант 2 был наименее предпочтительным (строго или нет).

Объединяя в одно условия (**I**) и (**II**) в предположении, что 1-й игрок может выбирать, кто из подчиненных делает ход за ним, получим из утверждений 6 и 7

С л е д с т в и е 3. В случае возможной неопределенности в предпочтениях игроков между чужими вариантами, для того чтобы 1-й игрок мог обеспечить избрание своего предложения при условии, что он формирует порядок ходов 2-го и 3-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для обоих этих игроков вариант 1 не был наихудшим (как строго, так и нестрого), а для одного из них был строго лучше, чем предложение другого подчиненного игрока.

Раздел 9.2 посвящен оценке шансов 1-го игрока обеспечить победу своего варианта при условии неопределенных (или нестрогих) предпочтений остальных голосующих. В данной модели предполагается, что у каждого из игроков, голосующих вторым или третьим, есть максимум два несравнимых или одинаково предпочтительных варианта решения, причем, чужих.

В случае наличия неопределенности в предпочтениях 2-го (или же 3-го) игрока лидер может рассчитывать на победу в 33% (или 35%) случаев. При этом появление возможности управлять порядком ходов увеличивает этот показатель до 36%.

Если по паре несравнимых/равнозначных предложений есть и у 2-го, и у 3-го игроков, то 1-й игрок одерживает победу в 30% случаев (34% при формировании порядка ходов).

Результаты наглядно демонстрируют, что игроку, голосующему первым, более выгодны случаи, когда он может спрогнозировать б*о*льшую часть игры. Предложение 1-го игрока побеждает с большей частотой в играх, где несравнимые или одинаково предпочтительные варианты решений есть только у 3-го игрока. Тогда как наличие неопределенности у обоих подчиненных, даже при возможности 1-го игрока задавать порядок ходов, дает меньшую уверенность в победе предложения 1-го игрока. Таким образом, приходим к выводу, что лидеру априори лучше более уверенные в своих предпочтениях подчиненные.

В § 10 рассматривается случай появления двух наилучших предложений в предпочтениях лидера – игрока, голосующего первым. Формально подтверждено, что наличие варианта у подчиненных игроков, столь же хорошего для лидера, как свой, дает существенный прирост в шансах на победу – один из двух вариантов удается провести более чем в 60% игр. Одновременно с этим, 1-му игроку более выгодна ситуация, когда партнеры по голосованию имеют более строгие предпочтения.

Если 1-й игрок так же, как к своему, расположен к варианту «статус кво», не имеющему представителя среди голосующих, то шансы на победу 1-го игрока уменьшаются почти до результатов, полученных для случая полностью определенных предпочтений игроков при возможности 1-го устанавливать порядок голосования.

Существование нескольких одинаково предпочтительных вариантов у лидера снижает пользу от формирования порядка ходов 1-м игроком – наибольший прирост в числе побед изменение порядка голосования дает для случая полностью определенных предпочтений всех игроков.

В **Заключении** формулируются основные результаты работы.

Результаты, выносимые на защиту

1. Для игры *n* лиц, соответствующей вето-голосованию, получено и доказано необходимое и достаточное условие существования порядка ходов голосующих, обеспечивающего победу предложения заранее выбранного игрока. Найдены все такие порядки в наихудшем для данного игрока случае отношения партнеров к его варианту (при условии существования).
2. Разработаны методы построения победного порядка ходов при выполнении необходимого и достаточного условия.
3. На примере игр 3-х лиц получены оценки шансов на победу варианта, выгодного 1-му игроку, при возможной неопределенности (или одинаково выгодных вариантах) в предпочтениях голосующих.
4. На примере игр 3-х и 4-х лиц получены оценки увеличения шансов на победу варианта, выгодного 1-му игроку, при наличии у него права формирования порядка ходов. Проведен анализ игры с 4-мя выборщиками в предположении, что 4-го голосующего вводит игрок-лидер.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Машечкин А.И., Поспелова И.И.* Свойства голосования с правом вето // Прикладная математика и информатика. 2009. Т. 31. С. 83–94.

   Переиздание: *Mashechkin A.I., Pospelova I.I.* Properties of voting with veto power // Computational Mathematics and Modeling. 2009. V. 20. № 4. P. 427-437.

2. *Машечкин А.И.* Голосование с правом вето в условиях неполностью определенных предпочтений // VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19-23 октября 2010г. Труды. М.: МАКС Пресс. С. 426–427.

3. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Дополнительный игрок в задаче о вето-голосовании // Прикладная математика и информатика. 2012. Т. 40. С. 105–121.

   Переиздание: *Mashechkin A.I., Novikova N.M.* An additional player in the voting by veto problem // Computational Mathematics and Modeling. 2013. V. 24. № 1. P. 153-166.

4. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Условия принятия заданного решения при вето-голосовании // Тихоновские чтения: 29-31 октября 2012. Тезисы докладов. М.: МАКС Пресс. С. 43–44.

5. *Машечкин А.И.* Оценка шансов принятия решения первого игрока в условиях голосования путем ветования // Вестник МГУ, серия "Вычислительная математика и кибернетика". 2012. № 4. С. 31–36.

   Переиздание: *Mashechkin A.I.* Estimating the winning chances of a solution suggested by the first player under conditions of voting by veto // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2013. V. 37. № 1, P. 28–34.

6. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Управление порядком ходов при вето-голосовании. I. Условия принятия заданного решения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 1. С. 42-56.

   Переиздание: *Mashechkin A.I., Novikova N.M.* Controlling the order of moves in voting by veto. I. Conditions for making the given decision // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. V. 52. № 1. P. 66–79.

7. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Управление порядком ходов при вето-голосовании. II. Алгоритмы построения оптимального порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 55-82.

   Переиздание: *Mashechkin A.I., Novikova N.M.* Controlling the order of moves in voting by veto. II. Algorithms for constructing an optimal order of moves // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. V. 52. № 2. P. 186–214.

В совместных работах с научным руководителем Новиковой Н.М. принадлежит: в работах [3,4,7] – постановка задачи, в работе [6] – идея доказательства. В работе [1] Поспеловой И.И. принадлежит формулировка многокритериальной игры.