Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Малышев Дмитрий Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ «КРИТИЧЕСКИХ» НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ В АНАЛИЗЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., проф. Алексеев
Владимир Евгеньевич

Нижний Новгород — 2013 год

Оглавление

Введение **6**

1 Граничные классы графов: значение и примеры **13**

1.1 Некоторые обозначения и определения 13

1.1.1 Множества 13

1.1.2 Отношения 14

1.1.3 Графы и подграфы 14

1.1.4 Множества вершин и числовые характеристики 16

1.1.5 Классы графов 16

1.2 «Критические» наследственные классы графов 18

1.3 Расширение пределов справедливости теоремы В.Е. Алексеева . 22

1.4 Критерий граничности 26

1.5 Новые случаи граничности класса $\mathcal{T}$ и его производных 27

1.5.1 Условия граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ 27

1.5.2 Множество задач на графах с граничными классами $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ континуальной мощности 29

1.5.3 Древесная ширина и кликовая ширина графов и их применение при установлении граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$. 34

1.5.4 Производные от $\mathcal{T}$ классы и некоторые случаи их граничности 38

2 Относительные граничные системы и их свойства **40**

2.1 Относительные граничные классы 40

2.2 Строение относительной граничной системы для ряда задач на графах . . . 42
2.2.1 Критерий полноты множества относительных граничных классов . . . 42
2.2.2 Относительные граничные системы из производных класса $\mathcal{T}$ . . . 42
2.2.3 Граничные классы графов для задач о списковом ранжировании относительно лесов . . . 44
2.3 Факторизация решетки наследственных классов графов и ее свойства . . . 57
2.3.1 Критерий принадлежности общему фактор-классу и «избыточные» классы эквивалентности . . . 57
2.3.2 О независимости понятий минимального сложного, абсолютного граничного и относительного граничного классов графов . . . 64
2.3.3 Об одном свойстве относительных граничных классов в задаче о наибольшем двудольном планарном подграфе . 65
2.3.4 Подмножества относительных граничных систем и их свойства . . . 67

3 Полиномиальная разрешимость задачи НМ для некоторых классов графов 71

3.1 Гипотеза В.Е. Алексеева и ее варианты . . . 71
3.2 Расширяющие операторы для задачи о независимом множестве 74
3.2.1 О НМ-расширяемости оператора $\{P_5, C_5, G\} \longrightarrow \{P_5, C_5, G \circ K_1\}$ . . . 75
3.2.2 О НМ-расширяемости оператора $\{P_5, C_5, H\} \longrightarrow \{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\}$ . . . 80
3.3 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе планарных графов, не содержащих больших порожденных яблок . . . 87

3.3.1 Разделяющие клики и C-блоки 87
3.3.2 Свойства планарных графов без больших порожденных звезд 87
3.3.3 Минорно безапексные графы большой древесной ширины 90
3.3.4 Доказательство основного результата первой части главы 91
3.4 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе субкубических планарных графов без порожденного подграфа $T_{2,2,i}$ . . 97
3.4.1 Вспомогательные результаты 97
3.4.2 Присоединенные циклы и их разрушение 99
3.4.3 Гармони и их разрушение 108
3.4.4 Основные результаты второй части главы 115

4 О задачах на графах с континуальными граничными системами 118
4.1 Некоторые результаты из количественной теории граничных классов и смежные с ними 118
4.2 Граничные классы графов для задач о 3-раскраске 119
4.3 Свойства подмножеств 3-РР-граничной системы 128
4.4 Граничные классы графов для задач о k-раскраске 130
4.5 Сравнительный анализ граничных систем для задач о k-раскраске и о хроматическом числе и индексе 132

5 «Критические» классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании 136
5.1 Краткое описание основных результатов пятой главы 136
5.2 Новые минимальные РСР-сложные случаи 137
5.2.1 О минимальной РСР-сложности класса графов $\mathcal{B}at$ . . . 137
5.2.2 О минимальной РСР-сложности классов графов $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ 141
5.3 Новые РСР-граничные случаи 143

5.4 Полная классификация классов графов из некоторого семейства по вычислительной сложности задачи PCP и следствия из нее . . . 144
5.4.1 Оценки количеств вершин, степеней вершин и диаметров графов из некоторых классов . . . 145
5.4.2 О принадлежности каждого конечно определенного класса семейству $\mathscr{M}$ . . . 151
5.4.3 Критерий эффективной разрешимости задачи PCP в семействе $\mathscr{M}$ и следствия из него . . . 154

6 Минимальные сложные классы графов 158

6.1 О задачах на графах без минимальных сложных случаев . . . 158
6.2 Условия и примеры существования минимальных сложных классов графов . . . 159
6.3 О связи и о независимости понятий минимального сложного и граничного классов графов . . . 165

Литература 167

Введение

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и «труднорешаемости». В соответствии с этой концепцией под быстрой (эффективной) разрешимостью массовой задачи понимается возможность ее решения на детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (NP-полных) задач, для которых в настоящее время не получено полиномиальных алгоритмов. Накопленный опыт исследования данных задач и практика их решения дают основания предполагать, что таких процедур вообще не существует.

Одним из способов преодоления алгоритмической сложности NP-полных задач является сужение, т.е. наложение ограничений на рассматриваемый класс входных данных. Иногда учет этого обстоятельства, т.е. принадлежности данных только определенному классу, действительно приводит к созданию эффективных алгоритмов. В других случаях удается доказать NP-полноту задачи в этом классе. При рассмотрении целых семейств бесконечных классов индивидуальных данных (т.е. семейств массовых задач) можно ставить проблемы более общего характера, чем анализ сложности для конкретного класса. В частности, можно поставить целью выявление «линии водораздела» между «простыми» и «сложными» случаями. По-видимому, реализуемость этих намерений обусловлена надлежащим выбором и семейства классов и соответствующего понятийного аппарата. Узость рассматриваемой совокупности массовых задач малопривлекательна для исследователя. Вместе с этим, содержательность проблемы демаркации имеет место далеко не для всех представительных совокупностей массовых задач. Так, удаление/добавление индивидуальной задачи из/к массовой не меняет ее сложностного статуса. Поэтому целесообразно рассматривать те семейства массовых задач, для которых удаление или добавление одной индивидуальной задачи приводит к необходимости выполнения сразу нескольких таких операций (ввиду некоторой замкнутости).

В настоящей диссертации в качестве объекта исследований рассматривается семейство наследственных классов графов. Наследственные классы, т.е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин, образуют представительную континуальную совокупность. Данные классы графов (и только они) допускают описание через запрещенные порожденные подграфы (фрагменты). Если $\mathcal{X}$ — наследственный класс, а $\mathcal{S}$ — множество его запрещенных фрагментов, то пишем $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$. Семейство наследственных классов включает известные подсемейства монотонных и минорно замкнутых классов (замкнутых помимо удаления вершин еще и относительно других операций). В работе выделение «границы» между «простыми» и «сложными» наследственными случаями ведется в рамках поиска «критических» классов графов, т.е. классов, играющих особую, определяющую роль в анализе сложности рассматриваемой задачи на графах.

Граничные классы графов являются одним из типов «критических» классов. Понятие граничного класса было введено В.Е. Алексеевым в работе [32], там же была обоснована полезность этого понятия для анализа сложности задач на графах в семействе конечно определенных классов графов (т.е. наследственных классов с конечным множеством запрещенных порожденных подграфов). Именно, любой такой класс является «сложным» для данной задачи тогда и только тогда, когда он содержит некоторый граничный для этой задачи класс. Тем самым, даже частичная информация о структуре множества граничных классов (граничной системе) представляет определенный интерес.

В первой части первой главы диссертации расширяется множество «сложных» случаев по сравнению с конечно определенными классами, включающими граничные классы. Именно, показывается, каким образом при известной граничной системе для заданных наследственного класса $\mathcal{X}$ и числа

k проверить существование класса $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ с не более чем k запрещенными фрагментами, который включает некоторый граничный класс. Во второй части первой главы доказываются критерии граничности произвольного класса графов и некоторого конкретного класса графов. Это класс $\mathcal{T}$, состоящий из лесов с не более чем тремя листьями в каждой компоненте связности. Известны примеры задач на графах, для которых классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ (множество графов, являющихся реберными к графам из $\mathcal{T}$) являются граничными [32, 34, 33]. В диссертации для некоторых задач доказывается граничность класса $\mathcal{T}$ и производных от него. Результаты первой главы опубликованы в работах [6, 13, 67].

Во второй главе диссертации рассматривается понятие относительного граничного класса, обобщающее понятие (абсолютного) граничного класса. До результатов недавнего времени ни для одной задачи на графах не удавалось полностью описать абсолютную граничную систему. Вместе с тем, надежды на получение исчерпывающего решения в случае относительных граничных классов действительно оправдываются (см., например, [60]). Во всех ранее полученных такого рода результатах утверждалось, что классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ образуют относительную граничную систему. Соответствующие доказательства похожи друг на друга и следуют плану, намеченному в работе [60]. Первый результат с другой парадигмой рассуждений получен во второй главе. Здесь доказывается, что некоторые три класса графов (далекие по «внешнему виду» от $\mathcal{T}$ и от $\mathcal{D}$) составляют граничную систему для задач о списковом ранжировании (вершинного и реберного вариантов) относительно класса лесов. В оставшейся части второй главы впервые рассматривается более общая проблематика, чем описание относительных граничных систем. Именно, там изучается факторизация семейства наследственных классов по отношению равенства относительных граничных систем. Формулируется критерий принадлежности двух наследственных классов общему классу эквивалентности. Показывается, что при некоторых условиях граничные системы относительно объединений и пересечений двух наследственных классов выражаются через граничные системы относительно этих наследственных классов. Доказывается ряд результатов о представимости подмножеств относительных граничных систем в виде других относительных граничных систем. Приводятся примеры, показывающие, что при малом изменении условий некоторые из утверждений второй части второй главы превращаются в неверные высказывания. Один из примеров также демонстрирует, что относительный граничный класс не всегда является абсолютным граничным. Эти результаты опубликованы в [19, 21, 27].

В работе [32] рассматривалась задача о независимом множестве (задача НМ), там же было доказано, что класс $\mathcal{T}$ является граничным для этой задачи. До сих пор не известно, существуют ли для задачи НМ граничные классы, отличные от класса $\mathcal{T}$. Существование таких классов эквивалентно существованию графа $G \in \mathcal{T}$, что класс $Free(\{G\})$ является «сложным» для задачи НМ [32]. О трудности поиска такого графа G (или получения доказательства его отсутствия) говорит тот факт, что сложностной статус задачи НМ для $Free(\{P_5\})$ является открытым уже более 20 лет [72]. Имеются десятки работ, в которых к простому пути с пятью вершинами добавляется один или несколько других запрещенных порожденных подграфов и доказывается эффективная разрешимость задачи НМ для получившегося класса графов [36, 41, 40, 62, 70, 71, 72, 77]. Доказано, что для любого графа G с не более чем пятью вершинами, отличного от P_5 и C_5, задача НМ полиномиально разрешима в классе графов $Free(\{P_5, G\})$ [72]. Вопрос о сложности задачи НМ для класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ остается открытым вот уже более 10 лет. В первой части третьей главы диссертации выявляются новые наследственные случаи полиномиальной разрешимости задачи НМ, которые являются подмножествами класса $Free(\{P_5, C_5\})$. Предлагается систематический способ порождения таких случаев, основанный на введенном в диссертации понятии НМ-расширяющего оператора. Вопросы о единственности класса $\mathcal{T}$, как НМ-граничного относительно множества планарных графов и как НМ-граничного относительно множества субкубических планарных графов, рассматриваются во второй части третьей главы. Соответствующая единственность эквивалентна тому, что для любого $G \in \mathcal{T}$ задача НМ в классе (субкубических) планарных графов, не содержащих порожденного подграфа G, полиномиально разрешима. Хотя и здесь этого доказать не удается, имеется более значительный прогресс к достижению намеченной цели, чем в общем случае. Именно, устанавливается полиномиальная разрешимость задачи НМ для бесконечного семейства классов графов описанного выше типа. Результаты, изложенные в третьей главе, опубликованы в [5, 23, 24, 28, 29, 35].

Трудности, возникающие при попытках дать полное описание множества граничных классов для той или иной задачи на графах, приводят к мысли о том, что для некоторых задач это множество может быть весьма сложно устроенным и поэтому попытки дать его описание, по-видимому, обречены на неудачу. Эта мысль (которую можно назвать геделевским аргументом) действительно находит свое подтверждение, т.к. при $k \geq 3$ для обеих задач о k-раскраске (вершинного и реберного вариантов), задач о хроматическом числе и индексе граничные системы оказываются континуальными. Тем самым доказано предположение из [33] о существовании задач на графах с бесконечным множеством граничных классов. Задачи о хроматическом числе и индексе — «предельные» варианты задач о k-раскраске. Поэтому было бы интересно исследовать общие черты и особенности строения граничных систем для задач о k-раскраске и для задач о хроматическом числе и индексе. Оказалось, что все граничные классы для задачи о реберной 3-раскраске являются граничными для задачи о хроматическом индексе. Вместе с тем, при любом $k > 3$ существует континуум граничных классов для задачи о реберной k-раскраске (соответственно, для задачи о вершинной k-раскраске), каждый из которых не является граничным для задачи о хроматическом индексе (соответственно, для задачи о хроматическом числе). Граничная система для задачи о хроматическом числе не определяется граничными системами для задач о вершинной k-раскраске. Именно, класс $co(\mathcal{D}) = \{G : \overline{G} \in \mathcal{D}\}$ является граничным для задачи о хроматическом числе, но не является граничным для задачи о вершинной k-раскраске ни при каком k. Перечисленные в этом абзаце результаты составляют содержание четвертой главы диссертации. Они опубликованы в [12, 14, 16, 22, 25, 57]

Пятая глава диссертации посвящена успешной демонстрации метода «критического» класса графов. В ней получен критерий эффективной разрешимости задачи о реберном списковом ранжировании (задачи РСР) в некотором достаточно представительном семействе из наследственных классов графов, содержащем все конечно определенные и минорно замкнутые классы. Именно, класс $\mathcal{X}$ из этого семейства является «простым» для задачи РСР тогда и только тогда, когда для трех конкретных классов графов $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ найдутся графы $G_1 \in \mathcal{Y}_1, G_2 \in \mathcal{Y}_2, G_3 \in \mathcal{Y}_3$, что ни один граф из $\mathcal{X}$ не содержит ни G_1, ни G_2, ни G_3 в качестве минора. Из данного утверждения следует, что граничную систему для задачи РСР образуют ровно 10 конкретных классов графов. Это первый результат о полном описании граничной системы с момента первой публикации [2] по граничным классам. Излагаемые в пятой главе результаты опубликованы в [18, 20, 30].

Наследственный класс графов, определяемый бесконечным минимальным множеством запрещенных порожденных подграфов и содержащий некоторый граничный класс, не обязательно будет «сложным». Таким образом, для решения задачи демаркации в решетке всех наследственных классов необходимо помимо граничных рассматривать и другие типы «критических» классов. Естественными кандидатами являются максимальные «простые» и минимальные «сложные» классы, т.е. тупиковые классы графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. Использование понятия максимального «простого» класса графов оказывается безрезультатным. Так, в работе [32] было установлено, что ни один «простой» класс не является максимальным «простым» (правда, в [32] это утверждается только про задачу о независимом множестве, но все рассуждения из данной работы легко переносятся и на общий случай).

Шестая глава диссертации нацелена на исследование минимальных «сложных» классов. В первой части главы рассматривается задача распознавания принадлежности наследственному классу графов и показывается, что для любой такой задачи нет ни одного минимального «сложного» случая. В частности, это верно при любом фиксированном $k \geq 3$ для обеих задач о k-раскраске. Во второй части главы доказывается некоторое достаточное условие того, что «сложный» класс включает минимальный «сложный» класс. На его основе конструктивно доказывается, что для любого натурального k существует задача на графах ровно с k минимальными «сложными» классами. В предлагаемой конструкции эти классы оказываются также и граничными. Приводится пример, показывающий, что предложенное достаточное условие не является необходимым. Некоторые результаты, полученные в предыдущих главах, относятся к исследованию минимальных «сложных» классов. Так, во второй главе приведены задача на графах и минимальный «сложный» класс для данной задачи, который не является граничным. Тем самым опровергнуто предположение о том, что минимальный «сложный» класс всегда является граничным. В пятой главе показывается, что среди минимальных «сложных» для задачи PCP случаев имеется ровно 5 конечно определенных и ровно 1 минорно замкнутый. Результаты, изложенные в шестой главе, опубликованы в работах [15, 26].

Глава 1

Граничные классы графов: значение и примеры

1.1 Некоторые обозначения и определения

В данном разделе формулируются некоторые понятия и вводятся некоторые обозначения. Другие обозначения и определения будут приведены впоследствии. Все основные понятия теории графов, которые в этой и последующих главах не приводятся, можно найти, например, в [10, 11, 31, 39, 50].

1.1.1 Множества

Операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств обозначаются стандартными значками $\cup, \cap, \setminus$ и $\otimes$. Для множеств A и B через $A \times B$ обозначается их декартово произведение. Множество всех подмножеств множества A обозначается через 2^A. Совокупность натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$. Для целых чисел x и y множество $\{x, x+1, \ldots, y\}$ будем обозначать через $\overline{x, y}$.

Термин «максимальное множество» («максимальный граф») применительно к множествам (или графам) с каким-либо свойством всюду означает максимальное по включению множество (или максимальный по включению граф) с этим свойством. Термин «наибольшее множество» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду означает множество наибольшей мощности с этим свойством. Понятия «минимальное множество» и «наименьшее множество» определяются по аналогии.

1.1.2 Отношения

В диссертации будут рассматриваться только бинарные отношения, поэтому далее под термином «отношение» понимается только бинарное отношение. Напомним, что рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением порядка*. Рефлексивное и транзитивное отношение называется *квазипорядком*. Любые два элемента порядка (квазипорядка), находящиеся в отношении, называются *сравнимыми*. Порядок (квазипорядок) называется *линейным*, если любые два его элемента сравнимы.

Пусть задано некоторое отношение порядка R на некотором множестве X. Подмножество попарно сравнимых элементов X называется *цепью*. Цепь называется *убывающей*, если ее i-ый элемент больше (в смысле порядка R) $i+1$-ого элемента для любого i. Любое подмножество попарно несравнимых элементов X называется *антицепью*. Множество X называется *вполне упорядоченным* по отношению R, если оно не содержит бесконечных убывающих цепей и бесконечных антицепей. Минимальное количество цепей, покрывающих X, называется *числом покрытия* X. Максимальное количество элементов в антицепях X называется *шириной* X. Хорошо известно, что если хотя бы один из этих двух параметров конечен, то конечен и другой, причем они равны. Данное утверждение носит называние «теорема Дилворта», а соответствующий параметр называется *числом Дилворта* множества X (относительно R) и обозначается через $Dil_R(X)$.

1.1.3 Графы и подграфы

Все рассматриваемые в диссертации графы являются *абстрактными* и *обыкновенными* одновременно, т.е. конечными непомеченными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество ребер графа G будем обозначать через V (или $V(G)$) и E (или $E(G)$) соответственно.

Для некоторых специальных графов используются следующие стандартные обозначения (n — число вершин):

- P_n — простой путь,
- C_n — простой цикл,
- K_n — полный граф,
- O_n — пустой граф,
- $K_n - e$ — граф, получаемый из K_n удалением произвольного ребра,
- $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле.

Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к G. Объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин обозначается через $G_1 \oplus G_2$. Граф kG изоморфен графу $\underbrace{G \oplus G \oplus \ldots \oplus G}_{\text{k слагаемых}}$. Граф $G_1 \circ G_2$ — граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$.

Граф H называется *реберным к графу* G, если $V(H)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $E(G)$ и любые две вершины H являются смежными тогда и только тогда, когда в G соответствующие им ребра имеют общую вершину.

Мостом B_k называется граф, получаемый соединением вершин степени 2 в двух копиях графа P_3 простым путем длины k. *Триодом* $T_{i,j,k}$ называется дерево, имеющее ровно одну вершину степени 3 и ровно три листа, находящихся от вершины степени 3 на расстояниях i, j, k соответственно. Граф $D_{i,j,k}$ является реберным к графу $T_{i+1,j+1,k+1}$.

Граф $G' = (V', E')$ является *подграфом* графа $G = (V, E)$, если выполнены включения $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф G' некоторого графа G называется *порожденным*, если любые две вершины G' смежны тогда и только тогда, когда эти вершины являются смежными в G. Если G' — порожденный подграф G, то G будем называть *надграфом* графа G'. Таким образом, любой подграф получается из графа удалением вершин и ребер, а порожденный подграф удалением только вершин (имея в виду, что операция удаления вершины подразумевает удаление самой вершины и инцидентных ей ребер). Подграф графа G, порожденный множеством вершин $U \subseteq V(G)$, будем обозначать через $G[U]$. Подграф, получаемый из графа G удалением всех вершин из подмножества $V' \subseteq V(G)$, обозначается через $G \setminus V'$.

1.1.4 Множества вершин и числовые характеристики

В работе приняты следующие обозначения: $N(x)$ — окрестность вершины x; $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ — *замкнутая окрестность вершины* x; *сфера* $N_k(x)$ — множество вершин, находящихся на расстоянии k от вершины x; *шар* $B_k(x)$ — множество вершин, находящихся на расстоянии не более чем k от вершины x, $B_k(x) = \bigcup\limits_{i=0}^{k} N_i(x)$; $d(x, y)$ — расстояние между вершинами x и y; $deg(x)$ — степень вершины x; $rad(G)$ — радиус графа G.

1.1.5 Классы графов

Любое множество графов называется *классом графов*. Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин и *сильно наследственным* (или *монотонным*), если он замкнут как относительно удаления вершин, так и относительно удаления ребер. Хорошо известно, что любой наследственный (и только наследственный) класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{S}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$. Для наследственного класса $\mathcal{X}$ через $Forb(\mathcal{X})$ обозначается минимальное множество запрещенных порожденных подграфов. Для любого наследственного класса это множество существует и определяется единственным образом. Класс $\mathcal{X}$ называется *конечно опре-*

деленным, если $Forb(\mathcal{X})$ конечно, и *бесконечно определенным*, в противном случае. Если $|Forb(\mathcal{X})| \leq k$, то $\mathcal{X}$ называется *$k_{\leq}$-определенным.*

Рассмотрим следующие классические примеры наследственных классов графов:

- $\mathcal{G}$ — множество всех графов. Этот класс является конечно определенным, причем $Forb(\mathcal{G}) = \emptyset$.
- $\mathcal{F}$ — множество лесов. Из их определения следует, что $Forb(\mathcal{F}) = \{C_3, C_4, C_5, \ldots\}$.
- $\mathcal{P}$ — класс планарных графов. Из теоремы Понтрягина-Куратовского, следует, что данный класс является бесконечно определенным.
- $\mathcal{B}ip$ — класс двудольных графов. Множество $Forb(\mathcal{B}ip)$ по теореме Кенига совпадает с множеством всех простых циклов нечетной длины. Данный класс является бесконечно определенным.
- $\mathcal{D}eg(d)$ — класс всех графов, степени вершин которых не превосходят d. Ясно, что для любого d множество $Forb(\mathcal{D}eg(d))$ содержится в множестве графов, у которых число вершин не превосходит $d+2$ и хотя бы одна вершина имеет степень, равную $d+1$. Таким образом, для любого d множество $Forb(\mathcal{D}eg(d))$ конечно.
- $L(\mathcal{G})$ — класс всех реберных графов. Минимальное множество запрещенных порожденных подграфов для этого класса известно — оно полностью описывается при доказательстве теоремы 8.4 монографии [31] и состоит в точности из 9 графов.

Среди 6 представленных примеров наследственных классов только множество реберных графов не является монотонным случаем.

Для произвольного класса $\mathcal{X}$ можно ввести следующие множества графов:

1. $[\mathcal{X}]$ — *наследственное замыкание класса* $\mathcal{X}$, т.е. множество графов, изоморфных порожденным подграфам графов из $\mathcal{X}$.

2. $co(\mathcal{X})$ — множество графов, являющихся дополнительными к графам из $\mathcal{X}$.

3. $L(\mathcal{X})$ — множество графов, являющихся реберными к графам из класса $\mathcal{X}$.

4. $Q(\mathcal{X})$ — множество графов $\{G : \exists H \in \mathcal{X}, V(G) = V(H) \cup E(H)$ и $E(G) = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V(H), v_1 \neq v_2\} \cup \{(v, e) : v \in V(H), e \in E(H),$ вершина v в графе H инцидента ребру $e\}\}$

Если $\mathcal{X}$ состоит из одного графа G, то будем писать $H = L(G)$ (соответственно, $H = Q(G)$) вместо $H \in L(\{G\})$ (соответственно, вместо $H \in Q(\{G\})$).

1.2 «Критические» наследственные классы графов

К настоящему времени накоплено огромное количество результатов о полиномиальной разрешимости и о NP-полноте тех или иных задач при самых различных ограничениях (см., например, [9, 54, 74]). Достаточно напомнить, что поисковая машина компании Google выдает примерно $13 * 10^6$ результатов поиска по запросу «NP-completeness» («NP-полнота») и примерно $4 * 10^5$ результатов поиска по запросу «polynomial-time solvability» («полиномиальная разрешимость»). Направляющие мотивы к получению новых сведений такого рода могут быть самими разнообразными, но среди них можно выделить два наиболее распространенных:

1. Поиск более широких «простых» классов, объемлющих ранее известные.

2. Поиск NP-полных сужений для известных «сложных» случаев.

Вместе с тем, при рассмотрении целых семейств массовых задач можно ставить проблемы более общего характера, чем анализ сложности для конкретного бесконечного класса индивидуальных задач. В частности, можно поставить целью выявление пределов, до которых возможны расширения полиномиальной сложности и сужения с «противоположным» сложностным статусом. Тем самым, речь фактически идет о выявлении «линии водораздела» между «простыми» и «сложными» случаями. С этой проблемой демаркации тесно связано получение исчерпывающего описания «простых» (или «сложных») случаев.

По-видимому, реализуемость сформулированных выше намерений обусловлена не только надлежащим выбором совокупности бесконечных классов индивидуальных данных, но еще и соответствующего понятийного аппарата. Узость рассматриваемой совокупности массовых задач малопривлекательна для исследователя. Вместе с тем, содержательность проблемы демаркации имеет место далеко не для всех представительных совокупностей массовых задач. Так, удаление/добавление индивидуальной задачи из/к массовой не меняет ее сложностного статуса. Поэтому целесообразно рассматривать те семейства массовых задач, для которых удаление или добавление одной индивидуальной задачи приводит к необходимости выполнения сразу несколько таких операций (из-за какой-нибудь замкнутости).

В диссертации исследуется упомянутая граница для ряда задач на графах в семействе наследственных классов графов. Совокупность таких классов континуальна и содержит многие известные, интересные с практической и теоретической точек зрения классы, включает семейства конечно определенных и монотонных классов графов.

Формализуем ранее интуитивно ощущаемые понятия «простых» и «сложных» входных данных. Пусть Π — какая-нибудь NP-полная задача на графах (само понятие «задача на графах» понимается интуитивно и строго не определяется). Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ назовем Π-*простым*, если задача Π полиномиально разрешима для графов из этого класса, и Π-*сложным* в противном случае. При этом не предполагается, что есть эффективный (полиномиальный) алгоритм решения задачи распознавания принадлежности графа к классу $\mathcal{X}$ и даже того, что эта задача алгоритмически разрешима. Считается, что алгоритм, полиномиально решающий Π, получает на вход только графы из $\mathcal{X}$. Нас не интересует, что будет происходить при получении алгоритмом на вход графа не из $\mathcal{X}$. На протяжении всей работы предполагается, что $P \neq NP$ и это условие не включается явным образом в формулировки соответствующих утверждений. Например, такого: если задача П является NP-полной для графов из некоторого наследственного класса $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ — П-сложный класс.

Естественным подходом при решении задачи демаркации в семействе наследственных классов является поиск максимальных по включению П-простых и минимальных по включению П-сложных его элементов. К сожалению, максимальных по включению П-простых классов нет ни для одной задачи П, т.к. если $\mathcal{X}$ — П-простой класс графов и $G \notin \mathcal{X}$, то класс $\mathcal{X} \cup [\{G\}]$ также является П-простым. Это явление было обнаружено В.Е. Алексеевым в работе [32] (там, правда, это утверждается только для задачи о независимом множестве (задачи НМ), но все рассуждения легко переносятся и на общий случай). Вместе с тем, до недавнего времени про минимальные по включению П-сложные классы (называемые в диссертации просто *минимальными* П-*сложными*) вообще ничего не было известно. Существование таких классов графов было конструктивно доказано в работе [14], там же было показано, что для некоторых задач на графах их не существует. Здесь же будут даны ответы на более глубокие вопросы, в т.ч. будет дано полное описание минимальных сложных случаев для некоторых задач на графах.

Итак, минимальные П-сложные классы существуют не всегда. Значит, существуют бесконечные убывающие цепи (по отношению включения) из П-сложных случаев, сходящиеся к некоторому П-простому. Интуиция подсказывает, что пределы таких убывающих последовательностей (особенно минимальные из них) играют особую роль и это действительно так. При этом возникает понятие граничного класса графов. Наследственный класс $\mathcal{B}$ называется П-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных классов графов, что $\mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$.

Минимальный П-предельный класс называется П-*граничным.* Понятие граничного класса графов было введено В.Е. Алексеевым в работе [32], обобщено в [33] и уточнено в [6]. Значение понятия граничного класса графов раскрывает следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 4 из работы [32].

Теорема 1.1. *Конечно определенный класс является* П-*сложным тогда и только тогда, когда в нем содержится какой-либо* П-*граничный класс.*

Теорема 1.1 (которую можно назвать теоремой В.Е. Алексеева) означает, что при известном строении П-*граничной системы* (т.е. множества всех граничных для задачи П классов графов) имеет место полное описание всех П-простых (и П-сложных) конечно определенных случаев. Поэтому выявление П-граничных классов вызывает определенный интерес.

В той же работе [32] доказано, что некоторый конкретный класс графов является граничным для задачи НМ. Это класс $\mathcal{T}$, состоящий из лесов с не более чем тремя листьями в каждой компоненте связности. В работе [34] было доказано, что классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ — множество реберных графов к графам $\mathcal{T}$) являются граничными для задачи о доминирующем множестве (задачи ДМ). В [33] показывается, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ являются граничными для ряда задач на графах (о порожденном паросочетании, о наибольшем пути и цикле и т.п.).

Отметим, что теорема 1.1 оказывается неверной для бесконечно определенных классов. Контрпримером является НМ-простой класс $\mathcal{F}$, включающий класс $\mathcal{T}$. С другой стороны, любой П-сложный класс обязательно содержит некоторый П-граничный (это следует из определения граничного класса). Поэтому, если наследственный класс не включает ни одного П-граничного класса, то он является П-простым. Значит, интересно исследовать (с точки зрения сложности задачи П) только наследственные случаи, включающие хотя бы один П-граничный класс. Здесь бы хотелось в определенном смысле расширить пределы применимости теоремы В.Е. Алексеева, т.е. установить «труднорешаемость» задачи Π для более широкого семейства классов графов, чем совокупность конечно определенных классов, включающих Π-граничные классы. Доказательство соответствующего результата составляет одну из частей этой главы работы.

Тот факт, что установлена граничность именно классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ для целого ряда задач, отражает, по-видимому, однообразие применявшегося до сих пор подхода к доказательству их граничности. Вместе с тем интересно было бы выявить общие черты задач, для которых данные классы являются граничными. Это изучение, по существу, составляет дальнейшее содержание первой главы диссертации. Данное исследование начнется с доказательства критерия граничности произвольного класса графов и доказательства условий граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$. Остальная часть первой главы демонстрирует применение полученных результатов к поиску новых случаев граничности $\mathcal{T}$ и производных от него.

1.3 Расширение пределов справедливости теоремы В.Е. Алексеева

Одно из имеющихся доказательств теоремы 1.1 использует тот факт, что любая бесконечная монотонно убывающая последовательность, состоящая из наследственных классов и сходящаяся к части некоторого конечно определенного класса графов, содержит элемент, включенный в этот конечно определенный класс. Это чисто топологическое наблюдение позволяет установить справедливость упомянутой теоремы 1.1 в одну сторону. Возникает естественная идея — попытаться расширить множество наследственных классов графов, для которых верен этот факт. Но и здесь определяющую роль играют конечно определенные классы.

Лемма 1.1. *Любая бесконечная монотонно убывающая последовательность из наследственных классов, сходящаяся к собственному подмно-*

жеству $\mathcal{Y}$ множества $\mathcal{X}$, содержит включенный в $\mathcal{X}$ член тогда и только тогда, когда существует такой конечно определенный класс $\mathcal{Z}$, что $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Пусть $Forb(\mathcal{Y}) = \{G_1, G_2, \ldots\}$. Обозначим через $\mathcal{Y}_i$ класс $Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_i\})$. Ясно, что $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ и что $\mathcal{Y} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i$. По условию, существует такое i^*, что $\mathcal{Y}_{i^*} \subset \mathcal{X}$. Тогда справедливо включение $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$, где $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}_{i^*}$. Лемма 1.1 доказана.

Если класс $\mathcal{X}$ содержит конечно определенный подкласс $\mathcal{Y}$, который, в свою очередь, содержит некоторый П-граничный класс, то и $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются П-сложными. Этот факт следует из теоремы 1.1. На самом деле, для доказательства П-сложности класса $\mathcal{X}$ достаточно установить существование хотя бы одной последовательности из П-сложных классов, некоторый член которой включен в $\mathcal{X}$. К сожалению, в общем случае это сделать достаточно сложно. С другой стороны, для любого фиксированного k можно дать ответ на вопрос о том, включает ли заданный класс $\mathcal{X}$ какой-нибудь $k_{\leq}$-определенный подкласс $\mathcal{Y}$.

Далее будет показано, что если такой $\mathcal{Y}$ и существует, то он обязательно содержится в некотором конструктивно формируемом за конечное время списке (в рамках некоторой предлагаемой модели вычислений) из $k_{\leq}$-определенных классов графов. Более того, включение хотя бы одного П-граничного класса хотя бы в один $k_{\leq}$-определенный подкласс $\mathcal{X}$ эквивалентен включению хотя бы одного П-граничного класса в один из классов упомянутого списка. При известном множестве всех П-граничных классов это позволяет доказывать (при выполнении соответствующего включения) П-сложность класса $\mathcal{X}$.

Заметим, что в общем случае класс $\mathcal{X}$ может быть и бесконечно определенным. Поэтому при формализации понятия алгоритма (т.е. выборе модели вычислений) никакие стандартные модели (оперирующие с кодами входной информации лишь конечной длины) для решения поставленной задачи, видимо, не пригодны. Вместе с тем, для построения класса $\mathcal{Y}$ необходимо иметь операции, связанные с «заглядыванием внутрь» класса $\mathcal{X}$ и порождением какой-нибудь полезной для этого построения информации. Поэтому в качестве модели вычислений предлагается рассмотреть оракул, запрос к которому в виде произвольного конечного множества графов $\mathcal{S}$ возвращает подмножество $F(\mathcal{S}) \subseteq Forb(\mathcal{X})$, для каждого элемента которого ни один граф из $\mathcal{S}$ не является порожденным подграфом.

Опишем процедуру формирования совокупности $k_{\leq}$-определенных классов с упомянутым выше значением. В ее основе лежит построение дерева, каждому узлу которого приписано некоторое множество из не более чем k графов. Листья этого дерева подразделяются на две категории — нужных листьев и ненужных листьев. Список желаемых классов формируется на основе множеств графов, приписанных нужным листьям, путем их запрещений в качестве порожденных подграфов. Корню приписывается пустое множество. Непосредственным потомкам корня приписываются всевозможные множества из одного элемента — порожденного подграфа произвольного графа G^* из $Forb(\mathcal{X})$. Если $\mathcal{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_i\}$ — информация, приписанная текущему узлу дерева, то все непосредственные потомки этого узла строятся по следующему правилу. На вход оракулу подается множество $\mathcal{S}$ и рассматривается множество $F(\mathcal{S})$. Если оно является пустым и $i \leq k$, то текущий узел объявляется нужным листом. Если это множество не пусто и $i = k$, то узел объявляется ненужным листом. Если же оно не пусто и $i < k$, то рассматривается произвольный граф $H \in F(\mathcal{S})$, определяются все его попарно неизоморфные порожденные подграфы $H_1, H_2, \ldots, H_r$ и к текущему узлу добавляются r пронумерованных непосредственных потомков, j-ому из которых приписано множество $\mathcal{S} \cup \{H_j\}$.

Обоснование соответствия результатов работы данной процедуры заявленным ранее требованиям содержится в доказательствах следующих утверждений.

Лемма 1.2. *Если* $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X}'$*, то для любого* $G \in Forb(\mathcal{X}')$ *существует такой граф* $H \in Forb(\mathcal{Y}')$*, что* G *— надграф* H*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такого графа H не найдется. Тогда граф G должен принадлежать классу $\mathcal{Y}'$ (поскольку он не содержит ни одного графа из $Forb(\mathcal{Y}')$ в качестве порожденного подграфа). Но тогда включение $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X}'$ не может иметь место, т.к. $G \notin \mathcal{X}'$. Получаем противоречие. Поэтому наше предположение было неверным. Лемма 1.2 доказана.

Теорема 1.2. *Если существует* $k_{\leq}$*-определенный подкласс* $\mathcal{X}$*, включающий какой-нибудь* Π*-граничный класс, то существует класс из построенной совокупности с таким же значением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{Y} = Free(\mathcal{S})$ — конечно определенное подмножество $\mathcal{X}$, $|\mathcal{S}| \leq k$, $\mathcal{B}$ — Π-граничный класс, включенный в $\mathcal{Y}$. Дополним для наглядности процедуру построения дерева приписыванием каждому его ребру того графа, который добавляется при переходе от родителя к непосредственному потомку. Рассмотрим путь P наибольшей длины от корня данного дерева к некоторому его узлу, что приписанные его ребрам графы образуют некоторое подмножество $\mathcal{S}'$ множества $\mathcal{S}$. Длина этого пути не менее чем 1, т.к. по лемме 1.2 существует граф из $\mathcal{S}$, для которого граф G^* является надграфом.

Покажем, что P должен заканчиваться в листе дерева. Предположим противное, тогда обозначим через G' граф, приписанный последнему ребру P, а через G'' обозначим произвольный граф непустого множества $F(\mathcal{S}')$. Поскольку $G'' \in Forb(\mathcal{X})$, то $\mathcal{Y} \subseteq Free(\mathcal{S}' \cup \{G''\})$. Поэтому по той же лемме 1.2 существует граф из $Forb(\mathcal{Y})$, являющийся порожденным подграфом графа G''. Отсюда и правил построения дерева заключаем, что путь P не является наибольшим. Получаем противоречие с предположением. Конец пути P совпадает именно с нужным листом дерева, т.к. иначе $|\mathcal{S}'| = k$, откуда следует, что $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ (напомним, что $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ и $|\mathcal{S}| = k$) и $\mathcal{Y} = Free(\mathcal{S}) = Free(\mathcal{S}') \nsubseteq \mathcal{X}$.

Поскольку путь P заканчивается в нужном листе, то $Free(\mathcal{S}')$ принадлежит сформированному множеству классов, причем $Free(\mathcal{S}') \subseteq \mathcal{X}$. Поскольку $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, то $\mathcal{B} \subseteq Free(\mathcal{S}) \subseteq Free(\mathcal{S}')$. Теорема 1.2 доказана.

Итак, значение вычисленной совокупности классов графов состоит в том, что проверка существования $k_{\leq}$-определенного «посредника» между $\mathcal{X}$ и некоторым граничным классом сводится к проверке включения хотя бы одного граничного класса в некоторый класс из совокупности. Тем самым, при заданном k расширяется (по сравнению только с конечно определенными случаями) множество наследственных классов, для которых знание всех П-граничных классов позволяет устанавливать вычислительную сложность задачи П. К сожалению, эти результаты не удается распространить на случай всех конечно определенных классов. Основная трудность, связанная с разработкой такого алгоритма, состоит в формулировке критерия остановки процесса (для $k_{\leq}$-определенных классов параметр k играет роль соответствующего отсечения по «времени»).

1.4 Критерий граничности

Далее мы сформулируем и докажем критерий граничности произвольного класса графов. Это утверждение будет неоднократно использоваться на протяжении всей работы.

Теорема 1.3. П-*предельный класс* $\mathcal{X}$ *является* П-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathcal{X}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathcal{S} \subseteq Forb(\mathcal{X})$, *что класс* $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ *является* П-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, условие не выполняется, т.е. существует такой граф $G \in \mathcal{X}$, что для любого конечного множества $\mathcal{S} \subseteq Forb(\mathcal{X})$ класс $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ является П-сложным. Занумеруем графы из $Forb(\mathcal{X})$ натуральными числами: $Forb(\mathcal{X}) = \{H_1, H_2, \ldots\}$. Каждый из классов $\mathcal{Y}_n = Free(\{H_1, H_2, \ldots, H_n, G\})$ является П-сложным. Т.к. при любом n справедливо включение $\mathcal{Y}_{n+1} \subseteq \mathcal{Y}_n$, то класс $\mathcal{Y} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{Y}_n = \mathcal{X} \cap Free(\{G\}) \subset \mathcal{X}$ является П-предельным. Следовательно, класс $\mathcal{X}$ — не П-граничный.

Предположим теперь, что условие выполняется и $\mathcal{Y}$ — наследственный класс, являющийся собственным подмножеством класса $\mathcal{X}$. Покажем, что тогда класс $\mathcal{Y}$ не является П-предельным. Пусть $G \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, $\mathcal{S}$ — конечное подмножество множества $Forb(\mathcal{X})$, для которого класс $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ является П-простым. Допустим, $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ — любая такая последовательность, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}$. В этой последовательности найдется класс $\mathcal{Y}_n$, не содержащий графа G и всех графов из $\mathcal{S}$ (по лемме 1.1). Так как $\mathcal{Y}_n$ является подмножеством П-простого класса $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$, то он сам П-простой. Следовательно, в любой убывающей последовательности, сходящейся к $\mathcal{Y}$, имеется П-простой класс, поэтому $\mathcal{Y}$ — не П-предельный. Теорема 1.3 доказана.

1.5 Новые случаи граничности класса $\mathcal{T}$ и его производных

1.5.1 Условия граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$

Нетрудно видеть, что множество $Forb(\mathcal{T})$ образуют все циклы, все мосты и граф $K_{1,4}$. Аналогичное множество для $\mathcal{D}$ образовано всеми циклами длины не менее чем 4, реберными графами всех мостов и графами $K_{1,3}, K_4, K_4 - e$. Эти наблюдения вкупе с теоремой 1.3 позволяют нам сформулировать необходимые и достаточные условия граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$.

Для $i \geq 1, j \geq 4, k \geq 1$ через $\mathcal{U}(i,j,k)$ обозначим класс $Free(\{B_s : 1 \leq s \leq j\} \cup \{C_s : 3 \leq s \leq j\} \cup \{K_{1,4}, kT_{i+1,i+1,i+1}\})$, а через $\mathcal{W}(i,j,k)$ обозначим множество $Free(\{L(B_s) : 1 \leq s \leq j\} \cup \{C_s : 4 \leq s \leq j\} \cup \{K_{1,3}, K_4, K_4 - e, kD_{i,i,i}\})$.

Пользуясь характеризацией реберных графов из [31] нетрудно показать, что для всех упомянутых значений i, j, k справедливо равенство $\mathcal{W}(i,j,k) = L(\mathcal{U}(i,j,k))$.

Применительно к классам $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ теорема 1.3 дает следующий критерий.

Теорема 1.4. *Класс* $\mathcal{T}$ (*соответственно,* $\mathcal{D}$) *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда он* Π-*предельный и для любых* $i \geq 1, k \geq 1$ *существует такое* $j \geq 4$, *что класс* $\mathcal{U}(i,j,k)$ (*соответственно,* $\mathcal{W}(i,j,k)$) *является* Π-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для класса $\mathcal{T}$, доказательство для класса $\mathcal{D}$ аналогично (и использует соотношения $\mathcal{D} = L(\mathcal{T})$ и $\mathcal{W}(i,j,k) = L(\mathcal{U}(i,j,k))$). Допустим, класс $\mathcal{T}$ является Π-граничным. По теореме 1.3 для любых $i \geq 1$ и $k \geq 1$ существует такое конечное множество графов $\mathcal{S} \subseteq Forb(\mathcal{T})$, что класс $Free(\mathcal{S} \cup \{kT_{i+1,i+1,i+1}\})$ является Π-простым. Пусть j — максимум длин циклов и мостов, содержащихся в $\mathcal{S}$ (если $\mathcal{S}$ не содержит ни циклов, ни мостов, то полагаем $j = 4$). Тогда $\mathcal{U}(i,j,k) \subseteq Free(\mathcal{S} \cup \{kT_{i+1,i+1,i+1}\})$, следовательно, класс $\mathcal{U}(i,j,k)$ будет являться Π-простым.

Допустим, что для любых $i \geq 1$ и $k \geq 1$ найдется такое $j \geq 4$, что класс $\mathcal{U}(i,j,k)$ является Π-простым. Очевидно, что любой граф $G \in \mathcal{T}$ при некоторых $i \geq 1$ и $k \geq 1$ является порожденным подграфом графа $kT_{i+1,i+1,i+1}$. Таким образом, для любого $G \in \mathcal{T}$ при некоторых $i \geq 1, j \geq 4, k \geq 1$ имеет место включение $Free(\{B_s : 1 \leq s \leq j\} \cup \{C_s : 3 \leq s \leq j\} \cup \{K_{1,4}, kT_{i+1,i+1,i+1}, G\}) \subseteq \mathcal{U}(i,j,k)$. Поэтому по теореме 1.3 класс $\mathcal{T}$ является Π-граничным. Теорема 1.4 доказана.

1.5.2 Множество задач на графах с граничными классами $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ континуальной мощности

Теорема 1.4 может быть полезным инструментом для установления того, являются ли классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ граничными для той или иной задачи или нет. Она позволяет выявить континуальную совокупность задач на графах, для которых эти классы являются граничными одновременно. Каждая такая задача является конкретным представителем общей задачи о наибольшем порожденном подграфе. Ее постановка (в оптимизационной форме) заключается в поиске в исходном графе порожденного подграфа с наибольшим количеством вершин, обладающим определенным свойством. Более формально, задан граф G и некоторый класс графов $\mathcal{X}$ (не обязательно наследственный). Порожденный подграф G, принадлежащий $\mathcal{X}$, будем далее называть *$\mathcal{X}$-подграфом.* Наибольшее количество вершин в $\mathcal{X}$-подграфах G будем обозначать через $n_{\mathcal{X}}(G)$. *Задача об $\mathcal{X}$-подграфе* (далее, задача ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$]) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $n_{\mathcal{X}}(G) \leq k$. Многие известные задачи на графах являются задачей об $\mathcal{X}$-подграфе при надлежащем выборе $\mathcal{X}$. Это так, например, для задачи о независимом множестве ($\mathcal{X}$ — класс пустых графов) и для задачи о наибольшем порожденном пути ($\mathcal{X}$ — класс простых путей).

Напомним, что ребро в графе называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности. Операция *добавления моста* к графу подразумевает добавление ребра, инцидентного вершинам из разных компонент связности. Операция *s-подразбиения* ребра в графе состоит в замене этого ребра простым путем длины $s+1$. Операция s-стягивания пути с $s+2$ вершинами (все промежуточные вершины которого имеет степень 2) в графе состоит в замене этого пути ребром. Очевидно, что s-подразбиение является обратной операцией к s-стягиванию.

Наложим некоторые требования на класс $\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный наследственный класс, что пересечение класса $\mathcal{X}$ с множеством $\mathcal{D}eg(3)$ совпадает с $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}eg(3)$. Покажем, что существует континуальное множество классов графов с указанными свойствами. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех гомеоморфных $K_{3,3}$ графов. Пусть $\tilde{\mathbb{N}}$ — произвольное подмножество $\mathbb{N}$. Результат s-подразбиений ($s \in \tilde{\mathbb{N}}$) ребер K_5 обозначается через $\mathcal{S}(\tilde{\mathbb{N}})$. Другими словами, граф G принадлежит $\mathcal{S}(\tilde{\mathbb{N}})$ если и только если существуют такие числа $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \tilde{\mathbb{N}}$ и ребра $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(K_5)$, что n_1-подразбиение e_1, n_2-подразбиение e_2, ..., n_k-подразбиение e_k приводит к графу, изоморфному G. Т.к. ни один граф из $\mathcal{S}(\tilde{\mathbb{N}})$ не принадлежит $\mathcal{D}eg(3)$, то $Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\tilde{\mathbb{N}})) \cap \mathcal{D}eg(3) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}eg(3)$. Поэтому множество $\{Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\tilde{\mathbb{N}})) : \tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\}$ содержит только попарно различные классы, удовлетворяющие сформулированным ранее условиям. Это множество является континуальным, поскольку $2^{\mathbb{N}}$ континуально.

Задача ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$] является NP-полной, т.к. задачи ПОДГРАФ[$\mathcal{P}$] и ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$] совпадают для графов из $\mathcal{D}eg(3)$, а задача ПОДГРАФ[$\mathcal{P}$] является NP-полной для таких графов [53].

Часто П-предельность классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ доказывается путем установления связи между оптимизируемыми параметрами исходного графа и результата s-подразбиения его ребра (ребер) при некотором s. Эта идея будет использована далее.

Лемма 1.3. *Если граф G' получен из $G \in \mathcal{D}eg(3)$ s-подразбиением некоторого его ребра, то $n_{\mathcal{X}}(G') = n_{\mathcal{X}}(G) + s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что класс планарных графов замкнут относительно добавлений изолированных вершин, добавлений мостов, k-подразбиений и k-стягиваний при любом k. Любой $\mathcal{X}$-подграф G является планарным со степенями всех вершин не более чем 3.

Предположим, что G' — результат замены ребра $e = (a, b)$ путем P длины $s + 1$ в графе G. Пусть $H \in \mathcal{X}$ — порожденный подграф G с наибольшим числом вершин. Образуем порожденный подграф H' графа G' следующим образом. Если $e \in E(H)$, тогда весь путь P включается в H'. Если $e \notin E(H)$ и $a \in V(H)$ (соответственно, $b \in V(H)$), тогда P тоже включается в H', кроме его концевой вершины b (соответственно, a). Наконец, если $a \notin V(H), b \notin V(H)$, тогда P включается в H', кроме его концевых вершин. Граф H' получается из H либо подразбиением некоторого ребра, либо добавлениями изолированных вершин и мостов. Поэтому $H' \in \mathcal{X}$. Очевидно, что $n_{\mathcal{X}}(G') \geq |V(H')| \geq |V(H)| + s = n_{\mathcal{X}}(G) + s$, т.е. $n_{\mathcal{X}}(G') \geq n_{\mathcal{X}}(G) + s$.

Докажем справедливость обратного неравенства. Пусть H' — наибольший $\mathcal{X}$-подграф графа G'. Т.к. класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно добавлений изолированных вершин и мостов и H' содержит максимально возможное число вершин, то он содержит либо все вершины P, либо все вершины, кроме одного из концов P, либо все вершины, кроме обоих концов P. Путь P s-стягивается в графе H' в первом случае. Все промежуточные вершины P удаляются из H' в остальных случаях и если $a \in V(H'), b \in V(H')$, то любая из этих вершин также удаляется. Ясно, что полученный граф H принадлежит $\mathcal{X}$. Следовательно, $n_{\mathcal{X}}(G) \geq |V(H)| \geq |V(H')| - s = n_{\mathcal{X}}(G') - s$, т.е. $n_{\mathcal{X}}(G) + s \geq n_{\mathcal{X}}(G')$. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ являются* ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$*-предельными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — произвольный граф из $\mathcal{D}eg(3)$. Выполним k-подразбиение ($k \geq 4$) каждого ребра графа G. Получившийся граф G' не содержит $B_1, B_2, \ldots, B_k$ и $C_3, C_4, \ldots, C_k$ в качестве порожденных подграфов. По лемме 1.3, $n_{\mathcal{X}}(G') = n_{\mathcal{X}}(G) + k|E(G)|$. Это означает, что для любого $k > 3$ задача ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$ для графов из $\mathcal{D}eg(3)$ полиномиально сводится к той же задачей для графов из $\mathcal{T}_{k-3} = \mathcal{D}eg(3) \cap Free(\{B_1, B_2, \ldots, B_k, C_3, C_4, \ldots, C_k\})$. Поскольку класс $\mathcal{D}eg(3)$ является сложным для задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$, то для любого $k \geq 1$ класс $\mathcal{T}_k$ тоже является ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$-сложным. Заметим, что $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_k = \mathcal{T}$.

Поэтому $\{\mathcal{T}_k\}$ — бесконечная монотонно убывающая последовательность из ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$-сложных классов, сходящаяся к $\mathcal{T}$. Следовательно, класс $\mathcal{T}$ является предельным для задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$.

Пусть $G \in \mathcal{T}_1$ и $H = L(G)$. Ясно, что $H \in \mathcal{D}eg(3)$ и $n_{\mathcal{X}}(H)$ равно наибольшему количеству ребер в подграфах G (не обязательно порожденных), принадлежащих классу $\mathcal{X}$. Нетрудно видеть, что такие подграфы могут быть только планарными. Аналог задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{P}]$ для подграфов общего вида (т.е. задача о наибольшем планарном подграфе) является NP-полной для графов из $\mathcal{D}eg(3)$ [52]. Следовательно, задача ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$ является NP-полной для реберных графов графов из $\mathcal{T}_1$. Множество $L(\mathcal{T}_1)$ обозначим через $\mathcal{D}_1$.

Теперь, пусть G — произвольный граф из $\mathcal{D}_1$. Нетрудно видеть, что k-подразбиение любого ребра G, не принадлежащего ни одному его треугольнику, приводит к графу, являющемуся реберным графом некоторого графа из $\mathcal{T}_k$. Этот факт и рассуждения из первого параграфа означают, что задача ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$ является NP-полной для реберных графов графов из $\mathcal{T}_k$. Множество таких реберных графов обозначим через $\mathcal{D}_k$. Таким образом, при любом k класс $\mathcal{D}_k$ является сложным для задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$. При этом $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_k = \mathcal{D}$. Таким образом, $\mathcal{D}$ является предельным классом для задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$. Лемма 1.4 доказана.

Теорема 1.5. *Классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ являются* ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$*-граничными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме оба класса $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ являются ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$-предельными. Поэтому, по теореме 1.4 достаточно доказать, что для любых i и k существует такое j^*, что классы $\mathcal{U}(i, j^*, k)$ и $\mathcal{W}(i, j^*, k)$ являются простыми для задачи ПОДГРАФ$[\mathcal{X}]$. Мы докажем, что это так для $j^* = 2i + 6$.

Ясно, что любой граф $G \in \mathcal{U}(i, j^*, k)$ принадлежит классу $\mathcal{D}eg(3)$. Вершину x степени 3 будем называть *внутренней* в графе G, если не существует пути, соединяющего x с висячей вершиной G, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2. Расстояние в G между любыми двумя вершинами степени 3 не менее чем $2i+4$, поскольку в противном случае этот граф содержит либо порожденный цикл длины не более чем $2i+6$, либо порожденный мост B_s длины $s \leq 2i+3$. Покажем, что любая внутренняя вершина графа G принадлежит любому его порожденному подграфу, изоморфному $T_{i+1,i+1,i+1}$. Рассмотрим три кратчайших пути, соединяющих x с вершинами степени 3 (некоторые из которых могут быть совпадающими), каждый из которых содержит ровно одного соседа x. Эти пути не имеют общих вершин, кроме x и, возможно, концевых вершин. Каждый такой путь содержит не менее чем $2i+5 > i+2$ вершин. Следовательно, вершина x и некоторые вершины этих трех путей порождают подграф, изоморфный $T_{i+1,i+1,i+1}$. Более того, любые два порожденных подграфа G, изоморфных $T_{i+1,i+1,i+1}$, не имеют общих вершин и нет ребра G, инцидентного вершинам из разных подграфов (иначе расстояние в G между некоторыми двумя вершинами степени 3 не превосходит $2i+3$). Поэтому граф G не может содержать k внутренних вершин, иначе он содержит порожденный подграф $kT_{i+1,i+1,i+1}$.

Можно считать, что G не имеет висячих вершин, поскольку каждая такая вершина принадлежит каждому $\mathcal{X}$-подграфу G. Если G' — результат 1-стягивания в G, то по лемме 1.3 $n_{\mathcal{X}}(G) = n_{\mathcal{X}}(G')+1$. Заметим, что количество внутренних вершин в G и G' одинаковое. Поэтому задача ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$] для графов из $\mathcal{U}(i, 2i+6, k)$ полиномиально сводится к той же задаче для некоторого множества графов без висячих вершин, к которым не применимо 1-стягивание. Любая вершина каждого такого графа является внутренней и поэтому он содержит не более чем k вершин. Это означает, что класс $\mathcal{U}(i, 2i+6, k)$ является простым для задачи ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$]. Поэтому класс $\mathcal{T}$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{X}$]-граничным.

Доказательство для класса $\mathcal{D}$ почти дословно повторяет рассуждения из предыдущих абзацев. Поэтому, оно здесь не приводиться. Теорема 1.5 доказана.

1.5.3 Древесная ширина и кликовая ширина графов и их применение при установлении граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$

Древесная ширина и кликовая ширина графов являются полезными числовыми характеристиками при выявлении случаев эффективной разрешимости задач на графах. Это обусловлено тем, что для любой наперед заданной константы некоторые задачи полиномиально разрешимы в классе графов, у которых хотя бы одна из данных характеристик ограничена этой константой (много информации по этому поводу можно найти в [37, 46]). Поэтому, помня об утверждении теоремы 1.3, целесообразно использовать эти понятия при формулировке достаточных условий граничности предельных классов. Одно из них будет доказано далее.

Древесным разложением графа G называется пара (T, W), где T — дерево, $W \subseteq 2^{V(G)}$ и с каждой вершиной v дерева T связан элемент W_v множества W так, что выполняются следующие условия:

- $V(G) = \bigcup\limits_{v \in V(T)} W_v$
- для каждого ребра $(a, b) \in E(G)$ существует некоторая вершина v дерева T, что a и b принадлежат W_v
- для каждой вершины $a \in V(G)$ множество $\{v \in V(T) : a \in W_v\}$ образует связное поддерево в дереве T

Шириной древесного разложения (T, W) называется величина $tw(T, W) = \max\limits_{v \in V(T)} (|W_v| - 1)$ и *древесной шириной графа* G называется величина $tw(G) = \min(tw(T, W))$, где минимум берется по всевозможным древесным разложениям (T, W) графа G. Понятие древесной ширины графа было введено в работе [55].

Кликовой шириной графа G (введенной в [45] и обозначаемой через $cw(G)$) называется минимальное число меток, необходимых для построения графа при помощи следующих четырех операций:

- создание новой вершины с любой, в т.ч. уже использованной, меткой
- объединение двух любых созданных графов с непересекающимися множествами вершин
- выбор двух имеющихся меток $i \neq j$ и соединение ребром каждой вершины с меткой i с каждой вершиной с меткой j
- переименование метки любой вершины на любую другую метку

Эквивалентно, процесс создания графа G может быть представлен в виде корневого дерева, корню которого соответствует сам граф G, листьям соответствуют создания вершин, а всем внутренним узлам — бессвязные объединения уже имеющихся графов и добавления ребер. Переименования меток приписаны некоторым ребрам дерева.

Древесная ширина графа — мера близости к лесу, поскольку $tw(G) = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда G — лес. С другой стороны, равенство $tw(G) = |V(G)| - 1$ выполнено только для полного графа G. Кликовая ширина графа — более тонкая характеристика графа, чем древесная ширина. Так, например, $cw(K_n) = 2$ при $n \geq 2$ и $cw(C_4) = 2$, $cw(P_4) = 3$ (и, вообще, $cw(G) \leq 2$ тогда и только тогда, когда $G \in Free(\{P_4\})$ [47]). Ограниченность кликовой ширины влечет полиномиальную разрешимость задач для более широких классов графов, чем ограниченность древесной (правда, случаев ограниченности древесной ширины известно гораздо больше, чем случаев ограниченности кликовой). В классах графов с ограниченными степенями вершин ограниченности обеих характеристик эквивалентны [47].

Лемма 1.5 [63]. *Для любых графов $G_1 \in \mathcal{T}, G_2 \in \mathcal{D}$ и любого натурального числа d существует такое число $C = C(G_1, G_2, d)$, что древесная ширина и кликовая ширина любого графа из класса $\mathcal{D}eg(d) \cap Free(\{G_1, G_2\})$ ограничены сверху числом C.*

Лемма 1.6 [38]. *Если $\mathcal{X}$ — монотонный класс и $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{X}$, то существует такое число $C = C(\mathcal{X})$, что кликовая ширина любого графа из класса $\mathcal{X}$ не превосходит C.*

Лемма 1.7 [63]. *Пусть для некоторого числа d справедливо включение $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}eg(d)$. Древесная (соответственно, кликовая) ширина графов класса $\mathcal{X}$ ограничена некоторым числом $C_1 = C_1(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда древесная (соответственно, кликовая) ширина графов класса $L(\mathcal{X})$ ограничена некоторым числом $C_2 = C_2(\mathcal{X})$.*

Обозначим через $\mathcal{TW}(\infty, t)$ множество графов, древесная ширина которых не превосходит t. Обозначим через $\mathcal{TW}(d, t)$ множество графов $\mathcal{D}eg(d) \cap \mathcal{TW}(\infty, t)$.

Лемма 1.8. *Если класс $\mathcal{T}$ является* Π-*предельным и для любого t задача* Π *полиномиально разрешима в классе $\mathcal{TW}(3, t)$, то класс $\mathcal{T}$ является* Π-*граничным. Если класс $\mathcal{D}$ является* Π-*предельным и для любого t задача* Π *полиномиально разрешима в классе $L(\mathcal{TW}(3, t))$, то $\mathcal{D}$ является* Π-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{T}$. Графы $K_{1,4}$ и C_3 принадлежат множеству $Forb(\mathcal{T})$. Т.к. $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\}) = \mathcal{D}eg(3) \cap Free(\{G, C_3\})$ и $C_3 \in \mathcal{D}$, то из леммы 1.5 следует, что древесная ширина графов из $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\})$ ограничена некоторым числом $t_1 = t_1(G)$, поэтому $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\}) \subseteq \mathcal{TW}(3, t_1)$. Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что $\mathcal{T}$ является Π-граничным.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{D}$. Графы $K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1)$ принадлежат множеству $Forb(\mathcal{D})$. Поскольку $K_{1,3} \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{X} = Free(\{G, K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1)\}) \subseteq \mathcal{D}eg(3) \cap Free(\{G, K_{1,3}\})$, то по лемме

1.5 древесная ширина графов из $\mathcal{X}$ ограничена некоторым числом $t_2 = t_2(G)$. Из теоремы 8.4 монографии [31] следует, что класс $\mathcal{X}$ состоит из реберных графов, т.е. для некоторого класса $\mathcal{Y}$ справедливо равенство $\mathcal{X} = L(\mathcal{Y})$. Поскольку $K_4 \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}eg(3)$. Из леммы 1.7 следует, что древесная ширина графов класса $\mathcal{Y}$ ограничена некоторым числом $t_3 = t_3(G)$, поэтому $\mathcal{X} \subseteq L(\mathcal{TW}(3, t_3))$. Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что $\mathcal{D}$ является П-граничным. Лемма 1.8 доказана.

Продемонстрируем применение леммы 1.8. к установлению граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ для некоторых задач на графах.

Разбиением на клики графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_r$, что для любого i граф $G[V_i]$ является полным. Количество клик в наименьшем разбиении на клики графа G обозначим через $\kappa(G)$ (этот параметр называется *числом кликового покрытия*). *Задача о разбиении на клики* (задача РК) для данного графа G состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $\kappa(G) \leq k$.

Множество путей $\{Path_1, Path_2, \ldots, Path_k\}$ некоторого графа G будем называть НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$*-системой*, если любые два его пути не имеют общих вершин и при любом i путь $Path_i$ соединяет вершины s_i и t_i графа G. *Задача о непересекающихся путях* (задача НП) состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, его вершинам $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$ определить, содержит ли граф НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-систему.

Лемма 1.9. *Класс* $\mathcal{T}$ *является* НП*-предельным. Класс* $\mathcal{D}$ *является* РК*-предельным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. РК-предельность класса $\mathcal{D}$ доказана в работе [33]. Пусть $G \in \mathcal{D}eg(3)$ и граф G_r получается из графа G заменой каждого ребра путем длины $r+1$. Ясно, что для графа G и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$

НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-система существует тогда и только тогда, когда такая система существует для графа G_r и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$. Поскольку $G_r \in Free(\{C_3, C_4, \ldots, C_{4+r}, B_1, B_2, \ldots, B_r\})$, то задача НП в классе графов $\mathcal{D}eg(3)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе $Free(\{C_3, C_4, \ldots, C_{4+r}, B_1, B_2, \ldots, B_r\})$. Отсюда следует, что при любом r класс $Free(\{C_3, C_4, \ldots, C_{4+r}, B_1, B_2, \ldots, B_r\})$ является НП-сложным, т.к. класс $\mathcal{D}eg(3)$ является НП-сложным [68]. Отсюда и равенства $\bigcap\limits_r^{\infty} Free(\{C_3, C_4, \ldots, C_{4+r}, B_1, B_2, \ldots, B_r\}) = \mathcal{T}$ следует, что $\mathcal{T}$ является НП-предельным. Лемма 1.9 доказана.

Теорема 1.6. *Класс $\mathcal{T}$ является* НП-*граничным. Класс $\mathcal{D}$ является* РК-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что при любых фиксированных d и t класс графов $\mathcal{TW}(d, t)$ является РК-простым [37] и НП-простым [75]. При этом, по лемме 1.7 для любого t существует такое t', что $L(\mathcal{TW}(d, t)) \subseteq \mathcal{TW}(2d-1, t')$. Отсюда, лемм 1.8 и 1.9 следует, что $\mathcal{T}$ является НП-граничным и что $\mathcal{D}$ является РК-граничным. Теорема 1.6 доказана.

1.5.4 Производные от $\mathcal{T}$ классы и некоторые случаи их граничности

В некоторых случаях граничность некоторых классов можно доказывать, используя полиномиальную эквивалентность задачи Π_1 в классе $\mathcal{X}$ и задачи Π_2 в образе $f(\mathcal{X})$ некоторого оператора f. Такая идея (в неявной форме) использовалась при доказательстве граничности классов $\mathcal{D} = L(\mathcal{T})$ и $[Q(\mathcal{T})]$ для задачи ДМ [34]. Поэтому классы $\mathcal{D}$ и $[Q(\mathcal{T})]$ можно называть *производными* от класса $\mathcal{T}$.

Особенно просто и удачно упомянутая идея работает для пар *комплементарных задач*, т.е. таких двух задач, что для любого класса $\mathcal{X}$ одна из них полиномиально эквивалентна другой в классе $co(\mathcal{X})$. Именно, если Π_1 и Π_2

— пара комплементарных задач и $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$ — Π_1-граничная система, то множество всех Π_2-граничных классов совпадает с $\{co(\mathcal{B}_1), co(\mathcal{B}_2), \ldots\}$. Классическим примером пары комплементарных задач являются задачи о независимом множестве и о наибольшей клике (последняя для заданного графа состоит в том, чтобы найти в графе клику с наибольшим количеством вершин). Другим таким примером являются задача РК и задача о раскраске, состоящая в том, чтобы разбить множество вершин заданного графа на наименьшее количество независимых множеств. Поэтому класс $co(\mathcal{T})$ является граничным для задачи о наибольшей клике, а класс $co(\mathcal{D})$ является граничным для задачи о раскраске.

Глава 2

Относительные граничные системы и их свойства

2.1 Относительные граничные классы

Из теоремы 1.1 следует, что знание всех П-граничных классов позволяет полностью описать все конечно определенные П-простые случаи. До недавних результатов автора ни для одной задачи на графах не удавалось выявить всю граничную систему. Вместе с тем, если рассматривать не все семейство наследственных классов графов $\mathscr{H}$, а только какую-то его часть, то можно надеяться на исчерпывающее решение проблемы. Например, такого рода результат был получен в [60]. При этом возникает понятие относительного граничного класса.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый П-сложный класс. Класс $\mathcal{B}$ называется П-*предельным относительно* $\mathcal{X}$, если существует такая последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных частей $\mathcal{X}$, что $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$. Если $\mathcal{B}$ является минимальным по включению классом с этим свойством, то он называется П-*граничным относительно* $\mathcal{X}$. Класс $\mathcal{Y}$ называется *конечно определенным относительно* $\mathcal{X}$, если существует такое конечное множество графов $\mathcal{S}$, что $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$. Аналогом теоремы 1.1 для относительных граничных классов является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Конечно определенный относительно $\mathcal{X}$ класс графов явля-*

ется П-*сложным тогда и только тогда, когда он включает какой-нибудь* П-*граничный относительно* $\mathcal{X}$ *подкласс.*

Понятие относительного граничного класса обобщает понятие просто граничного класса, т.к. П-граничный класс — класс, являющийся П-граничным относительно множества всех графов $\mathcal{G}$. Далее такие классы иногда будут называться *абсолютными* П-*граничными.*

В первой части этой главы диссертации будет полностью описано множество П-граничных относительно $\mathcal{X}$ (обозначаемое через $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$) классов графов для некоторых пар $(\Pi, \mathcal{X})$. Множество $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ называется П-*граничной системой относительно* $\mathcal{X}$.

Во второй части исследования в области относительных граничных классов продолжаются и рассматриваются вопросы более общего характера, чем просто описание (всех) П-граничных классов относительно какого-нибудь П-сложного случая. Там рассматривается факторизация семейства $\mathscr{H}$ по отношению равенства множеств относительных П-граничных классов. К сожалению, до сих пор не удается полностью описать хотя бы один такого рода фактор-класс для хотя бы одной задачи на графах. Однако, удается сформулировать критерий принадлежности двух наследственных классов графов одному классу эквивалентности и сформулировать некоторые правила выбора тех фактор-классов, которые определяют структуру всей факторизации. Удается также обнаружить некоторые закономерности между $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}), \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ и $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}), \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Наконец, доказывается ряд результатов о представимости и о непредставимости подмножеств относительных П-граничных систем в виде других относительных П-граничных систем.

2.2 Строение относительной граничной системы для ряда задач на графах

2.2.1 Критерий полноты множества относительных граничных классов

Напомним, что до результатов недавнего времени не имелось примеров полного описания граничных классов. Однако, в случае относительных граничных классов такие результаты были известны. Все имеющиеся утверждения такого рода опираются на следующий критерий.

Теорема 2.2. *Подмножество* $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k\}$ *множества* $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ *совпадает со всем множеством тогда и только тогда, когда для любых графов* $G_1 \in \mathcal{B}_1, G_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots, G_k \in \mathcal{B}_k$ *класс* $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ *является* Π-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k\}$. Если существуют графы $G_1 \in \mathcal{B}_1, G_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots, G_k \in \mathcal{B}_k$, для которых класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является Π-сложным, то по теореме 2.1 есть класс $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$, включенный в $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$. Класс $\mathcal{B}$ отличен от каждого из классов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$ и поэтому $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \neq \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k\}$. Получаем противоречие с предположением.

Пусть теперь для любых графов $G_1 \in \mathcal{B}_1, G_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots, G_k \in \mathcal{B}_k$ класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является Π-простым и $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \neq \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k\}$. Тогда есть класс $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ и графы $G'_1 \in \mathcal{B}_1 \backslash \mathcal{B}, G'_2 \in \mathcal{B}_2 \backslash \mathcal{B}, \ldots, G'_k \in \mathcal{B}_k \backslash \mathcal{B}$. Класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_k\})$ включает $\mathcal{B}$ и по теореме 2.1 он является Π-сложным. Получаем противоречие. Теорема 2.2 доказана.

2.2.2 Относительные граничные системы из производных класса $\mathcal{T}$

Теорема 2.2 вкупе с некоторыми вспомогательными утверждениями (наподобие лемм 1.5 и 1.6) позволяет устанавливать полноту описаний относительных граничных классов. Так, в работе [60] было показано, что классы

$\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ и только они являются граничными для задачи ДМ относительно класса планарных графов $\mathcal{P}$. Нетрудно показать, что эти классы и только они являются ДМ-граничными относительно $\mathcal{D}eg(d)$ при любом $d \geq 3$. Иногда удается показать полноту некоторой совокупности производных от $\mathcal{T}$ относительных граничных классов, используя соображения полиномиальной эквивалентности двух задач (см. последний раздел предыдущей главы). Например, довольно легко показать, что класс $\mathcal{D}$ является единственным ДМ-граничным относительно множества всех реберных графов $L(\mathcal{G})$ [17]. Другим примером использования идеи полиномиальной эквивалентности является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.3. *Класс* $[Q(\mathcal{T})]$ *является единственным* ДМ-*граничным относительно* $[Q(\mathcal{G})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [60] было доказано, что задача НМ в любом классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче ДМ в классе $Q(\mathcal{X})$. Используя это обстоятельство и тот факт, что класс $\mathcal{T}$ является НМ-граничным, нетрудно установить, что $[Q(\mathcal{T})]$ является ДМ-граничным относительно $[Q(\mathcal{G})]$. Докажем его единственность. Воспользуемся теоремой 2.2. Пусть G — произвольный граф из $[Q(\mathcal{T})]$, он является порожденным подграфом графа $Q(kT_{k,k,k})$ при некотором k. Пусть $\mathcal{S}$ — множество графов с $k(3k+1)$ вершинами, для которых $kT_{k,k,k}$ является подграфом (не обязательно порожденным). Справедливо включение $[Q(\mathcal{G})] \cap Free(\{G\}) \subseteq [Q(Free(\mathcal{S}))]$. Класс $Free(\mathcal{S})$ является сильно наследственным и не включает класс $\mathcal{T}$. Поэтому он является НМ-простым [4] (более современное обоснование этому состоит в том, что по лемме 1.6 кликовая ширина графов из $Free(\mathcal{S})$ ограничена некоторой константой и задача НМ полиномиально разрешима в классах графов с ограниченной кликовой шириной [46]). Значит, класс $Q(Free(\mathcal{S}))$ является классом с полиномиально разрешимой задачей ДМ (ввиду сформулированной в начале доказательства полиномиальной эквивалентности). Нетрудно видеть, что задача ДМ для класса $[Q(Free(\mathcal{S}))]$ полиномиально сводится к той же задаче для класса $Q(Free(\mathcal{S}))$. Значит, классы $[Q(Free(\mathcal{S}))]$ и $[Q(\mathcal{G})] \cap Free(\{G\})$ являются ДМ-простыми. Поэтому по теореме 2.2 класс $[Q(\mathcal{T})]$ является единственным ДМ-граничным относительно $[Q(\mathcal{G})]$. Теорема 2.3 доказана.

2.2.3 Граничные классы графов для задач о списковом ранжировании относительно лесов

Во всех известных ранее результатах о строении относительных граничных классов фигурировали производные класса $\mathcal{T}$ и присутствовала полиномиальная эквивалентность задаче с граничным классом $\mathcal{T}$. Первый результат с другой парадигмой доказательства был получен в недавней работе автора диссертации. В ней было показано, что некоторые три класса графов (два из которых весьма далеки по «внешнему виду» от $\mathcal{T}$) составляют граничную систему для задач о списковом ранжировании относительно класса лесов $\mathcal{F}$. Этот результат будет доказан далее.

Постановка задач о списковом ранжировании

Пусть заданы граф G с множеством вершин V и множество $\mathfrak{L} = \{L(v) : v \in V\}$, где каждое $L(v)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить вершину v). *$\mathfrak{L}$-ранжированием вершин* графа G называется такая раскраска c его вершин, что:

1) $c(v) \in L(v)$ для каждой вершины v;

2) если $c(v_1) = c(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, то каждый путь, соединяющий v_1 и v_2, содержит такую вершину v_3, что $c(v_3) > c(v_1)$.

Задача о вершинном списковом ранжировании (задача ВСР) состоит в том, чтобы по данным G и $\mathfrak{L}$ определить, существует ли $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин графа G. Уточним, что под ВСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача ВСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом назначении $\mathfrak{L}$. Понятия

$\mathfrak{L}$-ранжирования ребер графа, задачи о реберном списковом ранжировании (задачи РСР) вводятся по аналогии путем замены слова «вершина» на слово «ребро». Аналогично уточняется понятие РСР-простого класса.

Задачи ВСР и РСР являются обобщениями задач о ранжированной раскраске. *Задача о ранжировании* (ранжированной раскраске) вершин (соответственно, ребер) для заданного графа состоит в том, чтобы определить такое минимальное число цветов (соответствующих натуральным числам), в которые можно так покрасить его вершины (соответственно, ребра), что любой путь, соединяющий две одноцветные вершины (соответственно, два одноцветных ребра), содержит вершину (соответственно, ребро) с большим цветом. Задача о ранжированной раскраске вершин имеет приложения в параллельном вычислении разложения Холецкого [59], проектировании СБИС [58], а задача о ранжировании ребер имеет приложения в параллельной обработке запроса к базе данных [66], к сборке изделия, состоящего из нескольких модулей [48]. Введение списков в задачах о ранжировании позволяет более адекватно моделировать протекание ряда параллельных процессов. Тем самым, имеет место переход к задачам ВСР и РСР.

Случаи полиномиальной разрешимости задач о списковом ранжировании

Если существует $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин графа G, то можно определить величину $\chi_r(G, \mathfrak{L})$ — наименьшее k, при котором существует такое ранжирование с цветом каждой вершины, не превосходящим k. В работе [49] показано, что вычисление параметра $\chi_r(G, \mathfrak{L})$ может быть рекурсивно сведено к вычислению $\chi_r(H, \mathfrak{L})$ для порожденных подграфов H графа G.

Лемма 2.1 [49]. *Если для заданного связного графа $G = (V, E)$ и множества $\mathfrak{L}$ число $\chi_r(G, \mathfrak{L})$ существует, то*

$$\chi_r(G, \mathfrak{L}) = \begin{cases} \min\limits_{x \in L(v)} x, & \text{\textit{если} } |V| = 1, \\ \min\limits_{v \in V} \{\min\{i \in L(v) : i > \chi_r(G \setminus \{v\})\}\}, & \text{\textit{если} } |V| > 1. \end{cases}$$

Существование $\mathfrak{L}$-ранжирования вершин графа G равносильно существованию числа $\chi_r(G,\mathfrak{L})$ и влечет существование $\chi_r(H,\mathfrak{L})$ для всех порожденных подграфов H этого графа. Заметим, что для графа G, допускающего $\mathfrak{L}$-ранжирование и состоящего из компонент связности $G_1,\ldots,G_k$, имеет место равенство $\chi_r(G,\mathfrak{L}) = \max\limits_{1\leq i\leq k}\chi_r(G_i,\mathfrak{L})$.

Класс графов назовем *poly-классом*, если каждый его граф G имеет не более чем $p(|V(G)|)$ попарно неизоморфных связных порожденных подграфов, где $p(n)$ — некоторый полином переменной n.

Теорема 2.4. *Если $\mathcal{X}$ — poly-класс, то задача* ВСР *для графов из этого класса является полиномиально разрешимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(G,\mathfrak{L})$ — входные данные задачи ВСР, где G — связный граф из $\mathcal{X}$. Все связные порожденные подграфы графа G можно перечислить в порядке неубывания числа вершин, применяя, например, процедуру типа поиска в ширину. Вначале помещаем в очередь все одновершинные подграфы. При этом подграфу, порождаемому вершиной v, присваивается значение χ_r, равное наименьшему элементу списка $L(v)$. Далее повторяются следующие действия. Берем из очереди первый подграф и рассматриваем все подграфы, получающиеся добавлением к нему одной вершины. Для каждого из них проверяем связность и отличие от всех уже найденных подграфов. Если оба условия выполняются, новый подграф добавляем к очереди и вычисляем для него значение χ_r, используя соотношение леммы 2.1 и сделанное выше замечание о несвязных графах. Если для какого-либо подграфа это число оказывается не существующим (т.е. не существует соответствующего i в соотношении из леммы 2.1), то граф G не допускает $\mathfrak{L}$-ранжирования вершин. В противном случае будет найдено число $\chi_r(G,\mathfrak{L})$ и тем самым доказано существование $\mathfrak{L}$-ранжирования вершин. Время работы такого алгоритма, очевидно, оценивается полиномом от числа вершин и числа связных порожденных подграфов графа G. Теорема

2.4 доказана.

Теорема 2.4 справедлива и для реберного случая, доказательство использует реберный аналог величины $\chi_r(G, \mathfrak{L})$ и аналогично рассуждениям из доказательства теоремы 2.4.

Примерами *poly*-классов являются деревья с маленьким числом листьев, деревья с ограниченными степенями вершин и запрещенным фрагментом $iT_{1,j,j}$, а также графы с ограниченными степенями вершин и с небольшим числом вершин степени не менее чем 3.

Лемма 2.2. *У дерева с n вершинами и k листьями имеется не более $n(n+1)^k$ поддеревьев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T — такое дерево. Выберем один из листов в качестве корня. Каждое поддерево теперь можно задать так:

1) указать вершину, принадлежащую поддереву и являющуюся предком всех остальных вершин поддерева в корневом дереве T;

2) для каждого листа дерева T указать первую вершину на пути от этого листа к корню, принадлежащую поддереву, или указать, что на данном пути вершин поддерева нет.

Отсюда следует доказываемая оценка. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Если дерево не содержит порожденного подграфа $iT_{1,j,j}$, а степени вершин в нем не превосходят d, то оно имеет не более $d^{2i(j+1)}$ листьев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть T — дерево с $l > d^{2i(j+1)}$ листьями и степенями вершин, не превосходящими d. Стянув все ребра, инцидентные вершинам степени 2, получим дерево T' с тем же числом листьев, в котором все внутренние (не являющиеся листьями) вершины имеют степени не меньше 3 и не больше d. Выберем произвольно корень в этом дереве и пусть p — максимальная длина пути от листа до корня. Тогда $l \leq d(d-1)^{p-1} \leq d^p$. Следовательно, $p > 2i(j+1)$. Из этого пути можно удалить некоторое количество вершин так, что оставшиеся будут порождать подграф iP_{2j+1}. Добавим к каждой компоненте этого подграфа вершину дерева, смежную с центральной вершиной этой компоненты (вместе с соединяющим ребром). Получим порожденный подграф $iT_{1,j,j}$ в дереве T'. Но тогда такой подграф будет и в дереве T. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Количество связных порожденных подграфов любого графа с n вершинами и со степенями всех вершин не более d, имеющего не более чем k вершин со степенями больше чем 2, не превосходит $2^k \max\{n^3, d^{\frac{k(k+1)}{2}} n^{dk}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим связный граф G с n вершинами (каждая из которых степени не более чем d), имеющий не более k вершин степени больше чем 2. Вершину графа G степени не менее чем 3 назовем *основной*, а вершину степени не более чем 2 назовем *второстепенной*. Понятно, что для каждой пары основных вершин (не обязательно различных) существует не более чем d путей (не обязательно простых), соединяющих эти две вершины и не содержащих других основных вершин. Рассмотрим произвольное подмножество V' множества всех основных вершин графа G. Всего подмножеств этого множества не более чем 2^k штук. Обозначим через $\mathcal{G}(V')$ совокупность связных порожденных подграфов графа G, множество основных вершин которых совпадает с V'. Если $|V'| = 0$, то $|\mathcal{G}(V')|$ состоит либо из простых путей и одного простого цикла (если G — простой цикл), либо только из простых путей (если G не является простым циклом). Легко проверить, что в этом случае $|\mathcal{G}(V')| \leq n^3$.

Далее всегда будем предполагать, что множество V' не является пустым. Совокупность минимальных элементов из $\mathcal{G}(V')$ обозначим через $\mathcal{G}^*(V')$. Заметим, что каждая второстепенная вершина любого графа из $\mathcal{G}^*(V')$ принадлежит ровно одному его пути, который соединяет две вершины из V' и не содержит других вершин из V'.

Оценим мощность множества $\mathcal{G}^*(V')$. Понятно, что каждый граф из $\mathcal{G}^*(V')$ однозначно определяется множеством своих путей, соединяющих пары вершин из V' и не содержащих других вершин из V'. Поэтому общее количество графов из $\mathcal{G}^*(V')$ не превосходит числа таких путей, а число таких путей не превосходит $d^{\frac{|V'|(|V'|+1)}{2}}$.

Теперь оценим мощность множества $\mathcal{G}(V')$. Очевидно, что каждый граф из $\mathcal{G}(V')$ получается путем отождествлений концов некоторых путей с частью вершин из V' в некотором графе, принадлежащем $\mathcal{G}^*(V')$. С каждой вершиной из $V^{'}$ может отождествляться не более чем d путей. Длина каждого пути не более чем n, поэтому $|\mathcal{G}(V')| \leq n^{d|V'|}|\mathcal{G}^*(V')| \leq d^{\frac{|V'|(|V'|+1)}{2}}n^{d|V'|} \leq d^{\frac{k(k+1)}{2}}n^{dk}$.

Наконец, оценим общее количество связных порожденных подграфов графа G. Из оценок, полученных в предыдущем абзаце, следует, что общее количество таких подграфов G не превосходит величины $2^k \max\{n^3, d^{\frac{k(k+1)}{2}}n^{dk}\}$. Лемма 2.4 доказана.

Помимо *poly*-классов случаями полиномиальной разрешимости задач BCP и PCP являются множества графов с небольшим числом нелистовых вершин.

Теорема 2.5 [49]. *Для любого фиксированного C задачи* BCP *и* PCP *являются полиномиально разрешимыми в любом классе графов, у которых не более чем C нелистовых вершин.*

Абсолютные и относительные граничные классы графов для задач о списковом ранжировании

Кометой Com_i называется граф с множеством вершин $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_i\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ и множеством ребер $\{(a_0, a_1), (a_0, a_2), \dots, (a_0, a_i)\} \cup$

$\{(a_0,b_1),(b_1,b_2),\ldots,(b_{i-1},b_i)\}$. *Звездой* S_i называется граф, который получается подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. В работе [49] показано, что задача ВСР NP-полна в классе всех комет. Поэтому наследственное замыкание множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Com_i\}$ является ВСР-сложным классом, который обозначается через $\mathcal{C}omet$. Далее будет показано, что классы $\mathcal{C}omet$ и $\mathcal{S}tar = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{S_i\}]$ являются как минимальными ВСР-сложными и минимальными РСР-сложными, так и ВСР-граничными и РСР-граничными.

Лемма 2.5. *Класс* $\mathcal{S}tar$ *является как* ВСР-*сложным, так и* РСР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что утверждение леммы справедливо для задачи ВСР. Доказательство основано на сведении задачи о вершинном списковом ранжировании в классе деревьев высоты два (обозначаемом далее через $\mathcal{S}tar'$) к той же задаче в классе $\mathcal{S}tar$. Пусть $T \in \mathcal{S}tar'$. Корень дерева T будем обозначать через r, его нелистовых потомков обозначим через $x_1,x_2,\ldots,x_p$. Для любого $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ под множеством $\{y_1^{(i)},y_2^{(i)},\ldots,y_{j_i}^{(i)}\}$ будем понимать множество потомков вершины x_i. В работе [49] доказано, что задача ВСР является NP-полной в классе $\mathcal{S}tar'$ даже для множеств $\mathfrak{L}$ специального вида (называемых далее *упрощенными*). Это такие $\mathfrak{L}$, у которых множества $L(r), L(y_1^{(1)}),\ldots,L(y_{j_1}^{(1)}), L(y_1^{(2)}),\ldots,L(y_{j_2}^{(2)}),\ldots,L(y_1^{(p)}),\ldots, L(y_{j_p}^{(p)})$ содержат ровно по одному элементу и для которых $L(x_1)=\{\alpha_1,\beta_1\}, L(x_2) = \{\alpha_2,\beta_2\},\ldots,L(x_p)=\{\alpha_p,\beta_p\}$. Они также обладают тем свойством, что цвет из $L(r)$ — наименьший среди цветов из $\mathfrak{L}$ и тем свойством, что для любого $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ и любого $j \in \{1,2,\ldots,j_i\}$ цвет из $L(y_j^{(i)})$ больше α_i и меньше β_i.

Рассмотрим сужение задачи ВСР в классе $\mathcal{S}tar'$ на упрощенные назначения допустимых цветов. Пусть $T \in \mathcal{S}tar'$ и пусть $\mathfrak{L}$ — упрощенная совокупность множеств допустимых цветов. Можно считать, что разность любых двух различных цветов из $\mathfrak{L}$ не меньше чем 2 (это предположение не уменьшает общности, поскольку в противном случае можно умножить каждый из цветов палитры на 2). Рассмотрим вершину x_1 графа T. Множество потомков x_1 произвольным образом разделим на два множества A, B, мощности которых отличаются не более чем на 1. Построим по паре $(T, \mathfrak{L})$ пару $(T', \mathfrak{L}')$ следующим образом. Удалим из T вершину x_1 и добавим вершины $x_1^{'}, x_1^{''}, x_1^{'''}$. Добавим также ребра $(r, x_1^{'}), (r, x_1^{''}), (r, x_1^{'''})$, ребра, инцидентные $x_1^{'}$ и всевозможным вершинам из A, а также ребра, инцидентные $x_2^{''}$ и всевозможным вершинам из B. Для любой вершины $x \in V(T) \cap V(T')$ множество $L'(x)$ в $\mathfrak{L}'$ совпадает с множеством $L(x)$ в $\mathfrak{L}$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$ и $\beta = \beta_1 - 1$. Положим $L'(x_1^{'}) = \{\alpha_1, \beta\}, L'(x_1^{''}) = \{\alpha, \beta_1\}, L'(x_1^{'''}) = \{\alpha, \beta\}$. Покажем, что $\mathfrak{L}'$-ранжирование вершин T' существует тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин T.

Предположим, что существует $\mathfrak{L}'$-ранжирование вершин T'. Возможны только следующие три случая:

1.1. $\mathfrak{L}'$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \alpha_1, c(x_1^{''}) = \beta_1, c(x_1^{'''}) \in \{\alpha, \beta\}$. Окрасим вершину x_1 в цвет β_1, а цвет остальных вершин из $V(T) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $\mathfrak{L}'$-ранжировании. Легко проверить, что построенная таким образом раскраска является $\mathfrak{L}$-ранжированием вершин T.

1.2. $\mathfrak{L}'$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \alpha_1, c(x_1^{''}) = \alpha, c(x_1^{'''}) = \beta$. Окрасим вершину x_1 в цвет α_1, а цвет остальных вершин из $V(T) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $\mathfrak{L}'$-ранжировании. Легко проверить, что построенная таким образом раскраска является $\mathfrak{L}$-ранжированием вершин T.

1.3. $\mathfrak{L}'$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \beta, c(x_1^{''}) = \beta_1, c(x_1^{'''}) = \alpha$. Этот случай эквивалентен первому.

Предположим, что существует $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин T. Возможны только два случая:

2.1. $\mathfrak{L}$-ранжирование таково, что $c(x_1) = \alpha_1$. Построение $\mathfrak{L}'$-ранжирования вершин T' выполняется обратным образом к случаю 1.2.

2.2. $\mathfrak{L}$-ранжирование таково, что $c(x_1) = \beta_1$. Построение $\mathfrak{L}'$-ранжирования вершин T' выполняется обратным образом к случаю 1.1.

Итак, $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин T существует тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{L}'$-ранжирование вершин T', при этом $\mathfrak{L}'$ остается упрощенным. Применяя описанную выше дихотомию достаточное число раз, мы получаем дерево $T^* \in \mathcal{S}tar$. Ясно, что существование соответствующей раскраски вершин T^* эквивалентно существованию $\mathfrak{L}$-ранжирования вершин дерева T. Заметим, что входные данные задачи ВСР для T^* ограничены сверху полиномом от входных данных той же задачи для T. Отсюда следует, что задача ВСР в классе $\mathcal{S}tar'$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{S}tar$.

Доказательство леммы для задачи РСР проводится по аналогии с задачей ВСР, поскольку РСР является NP-полной для графов из класса $\mathcal{S}tar'$ и для упрощенных множеств $\mathfrak{L}$ [49] (в реберном случае под *упрощенной* понимается такая совокупность множеств допустимых цветов, что ребра $(r, x_1), (r, x_2), \ldots, (r, x_p)$ имеют два допустимых цвета, им смежные и не инцидентные r ребра имеют один допустимый цвет и выполняется соответствующее строгое неравенство между допустимыми цветами). Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.6. *Классы $\mathcal{C}omet$ и $\mathcal{S}tar$ являются как минимальными* ВСР-*сложными, так и минимальными* РСР-*сложными. Данные классы являются как* ВСР-*граничными, так и* РСР-*граничными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.5 и работы [49] следует, что классы $\mathcal{C}omet$ и $\mathcal{S}tar$ одновременно являются как ВСР-сложными, так и РСР-сложными. Пусть $G_1 \in \mathcal{C}omet$ и $G_2 \in \mathcal{S}tar$. Существует такое $C = C(G_1, G_2)$, что любой связный граф из $\mathcal{C}omet \cap Free(\{G_1\})$ и любой связный граф из $\mathcal{S}tar \cap Free(\{G_2\})$ имеет либо не более чем C нелистовых вершин, либо не более одной основной вершины, причем ее степень не превосходит C. Из теоремы 2.4 (и замечания к ней) и теоремы 2.5 следует, что классы $\mathcal{C}omet \cap Free(\{G_1\})$ и $\mathcal{S}tar \cap Free(\{G_2\})$ являются как ВСР-простыми, так и РСР-простыми. Поэтому классы $\mathcal{C}omet$ и $\mathcal{S}tar$ одновременно являются как минимальными ВСР-сложными, так и минимальными РСР-сложными.

Классы $\mathcal{C}omet$ и $\mathcal{S}tar$ одновременно являются как ВСР-предельными, так и РСР-предельными. Докажем их граничность. Проведем доказательство только для класса $\mathcal{C}omet$, для $\mathcal{S}tar$ оно аналогично. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{C}omet$. Ясно, что $Forb(\mathcal{C}omet)$ состоит из всех циклов и графов $T_{1,2,2}, 2K_{1,3}, B_1, B_2, B_3$ (отметим, что аналогичное множество для $\mathcal{S}tar$ состоит из графов $C_3, C_4, C_5, C_6, P_3 \oplus P_2, B_1$). Пусть $\mathcal{S} = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Легко проверить, что каждая компонента связности любого графа из $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ является либо простым путем, либо простым циклом, либо кометой. Отсюда и теорем 1.3, 2.4, 2.5 и замечания к 2.4 следует, что класс $\mathcal{C}omet$ является как ВСР-граничным, так и РСР-граничным. Теорема 2.6 доказана.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{T}}$ наследственное замыкание множества графов $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{iT_{1,i,i}\}$. Докажем, что класс $\tilde{\mathcal{T}}$ является как ВСР-граничным, так и РСР-граничным. Обозначим через $\mathcal{F}(d)$ множество всех лесов со степенями вершин не более чем d.

Лемма 2.6. *Класс $\tilde{\mathcal{T}}$ является как* ВСР*-предельным относительно $\mathcal{F}(3)$, так и* РСР*-предельным относительно этого множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство только для задачи ВСР, для задачи РСР оно аналогично. Из доказательства (в [49]) NP-полноты задачи ВСР в классе комет видно, что оно справедливо при дополнительном ограничении на назначение цветов: $L(a_0) = \{1\}$.

Пусть для графа Com_i задано назначение допустимых цветов вершин $\mathfrak{L}$, причем $L(a_0) = \{1\}$. Выберем некоторое $j > 0$ и рассмотрим граф $T_{i,j}$, состоящий из пути $P_{j(i-1)+i+1}$ с вершинами $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{j(i-1)+i+1}$ (занумерованными вдоль пути) и добавленных к нему вершин $b'_1, b'_2, \ldots, b'_i$ и ребер $(a'_1, b'_1), (a'_{j+1}, b'_2), (a'_{2j+1}, b'_3), \ldots, (a'_{1+(i-1)j}, b'_i)$. Зададим для этого графа назначение цветов $\mathfrak{L}'$ для вершин: $L'(a'_{1+(i-1)j+k})$ и $L'(b'_k)$, $k \in \overline{1,i}$ получаются соответственно из $L(b_k)$ и $L(a_k)$ умножением всех элементов на $(i-1)j+2$, а остальным $(i-1)j+1$ вершинам назначаются попарно различные элементы множества $\{1, 2, \ldots, (i-1)j+1\}$.

Легко видеть, что $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин графа Com_i существует тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{L}'$-ранжирование вершин графа $T_{i,j}$. Ясно также, что при фиксированном j длина входа задачи ВСР для пары $(T_{i,j}, \mathfrak{L}')$ ограничена сверху полиномом от длины входа задачи ВСР для пары $(Com_i, \mathfrak{L})$. Из упомянутого выше результата работы [49] следует NP-полнота задачи ВСР для множества графов $\mathcal{X}_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{T_{i,j}\}$. Следовательно, при любом j класс $\mathcal{Y}_j = [\bigcup\limits_{k \geq j} \mathcal{X}_k]$ является ВСР-сложным. Так как $\mathcal{F}(3) \supseteq \mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i = \tilde{\mathcal{T}}$, то отсюда следует, что класс $\tilde{\mathcal{T}}$ — ВСР-предельный относительно $\mathcal{F}(3)$. Лемма 2.6 доказана.

Очевидно, $\tilde{\mathcal{T}}$ является ВСР-предельным и РСР-предельным относительно каждого из классов $\mathcal{F}, \mathcal{F}(d)$ при $d \geq 3$. Покажем теперь, что он ВСР-граничный и РСР-граничный относительно каждого из этих классов. Для этого достаточно доказать, что он является как абсолютным ВСР-граничным, так и абсолютным РСР-граничным.

Теорема 2.7. *Класс* $\tilde{\mathcal{T}}$ *является как* ВСР-*граничным, так и* РСР-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство только для задачи ВСР. Любой граф $G \in \tilde{\mathcal{T}}$ является порожденным подграфом графа $iT_{1,j,j}$ при некоторых i и j. Поэтому при применении теоремы 1.3 для доказательства настоящего утверждения достаточно в качестве графа G рассматривать только графы такого вида. Положим $\mathcal{S} = \{T_{2,2,2}, K_{1,4}, C_3, C_4, C_5, C_6, B_1, B_2, \ldots, B_{2j+1}\}$ и покажем, что в графах из класса $Free(\mathcal{S} \cup \{iT_{1,j,j}\})$ при любых фиксированных i и j число связных подграфов ограничено полиномом от числа вершин. Отсюда и из теоремы 2.4 будет следовать доказываемое утверждение.

Пусть H — связный граф из класса $Free(\mathcal{S} \cup \{iT_{1,j,j}\})$. Так как в H нет порожденных подграфов C_3 и $K_{1,4}$, то степени вершин в нем не превосходят 3. Допустим, в графе H есть циклы. Выберем в нем какой-нибудь простой цикл C. Этот цикл — порожденный, так как любое ребро, соединяющее две вершины цикла C, а само этому циклу не принадлежащее, привело бы к образованию порожденного подграфа B_1 или цикла длины не более 4. Пусть V' — множество вершин графа H, не принадлежащих циклу C. Каждая такая вершина смежна с какой-нибудь вершиной на C, иначе образовался бы порожденный подграф $T_{2,2,2}$ или цикл длины не более 5. Вершина из V' не может быть смежна более чем с одной вершиной на C — в противном случае образуется порожденный подграф B_2 или цикл длины не более 5. Вершины из V', смежные хотя бы с одной вершиной C, не могут быть смежны между собой, так как иначе образуется порожденный подграф B_3 или цикл длины не более 6. Итак, граф H имеет степени не более 3 и состоит из цикла C с несколькими добавленными вершинами, каждая из которых имеет степень 1 и смежна с вершиной на цикле. При этом расстояние между вершинами степени 3 в нем не могут быть меньше, чем $2j + 2$, иначе образовался бы запрещенный мост. Очевидно, H содержит порожденный подграф $kT_{1,j,j}$, где $k = |V'|$. Так как в H нет $iT_{1,j,j}$, то $k < i$. Каждый связный подграф графа H состоит из отрезка цикла C и нескольких вершин из V'. Число таких подграфов не превосходит $|V(H)|^2 2^i$.

Если в графе H нет циклов, то выберем в нем самый длинный простой путь, а в качестве V' возьмем множество всех вершин, не принадлежащих пути. Аналогичными рассуждениями можно для этого случая получить такую же верхнюю оценку числа связных подграфов. Теорема 2.7 доказана.

PCP-граничность класса $\tilde{\mathcal{T}}$ дает новую информацию о BCP-граничных классах. Нетрудно показать, что задача PCP в любом наследственном классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче BCP в классе $L(\mathcal{X})$. Отсюда и из PCP-граничности класса $\tilde{\mathcal{T}}$ следует, что $[L(\tilde{\mathcal{T}})] = L(\tilde{\mathcal{T}})$ является BCP-граничным классом.

Введем обозначение $n(i,j)$ — наибольшее число вершин в графе с степенями вершин не более чем i и $rad(G) \leq j$. Легко видеть, что $n(i,j) \leq 1+i\frac{(i-1)^j-1}{i-2}$.

Лемма 2.7. *Если T — дерево, не содержащее поддеревьев Com_i и S_i, $i > 2$, то либо степени всех вершин T не превосходят $i+1$, либо в T имеется не более $n(i-1,i-3)$ нелистовых вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — вершина наибольшей степени d в дереве T. Допустим, $d \geq i+1$. Тогда эксцентриситет вершины x меньше $i-1$, иначе образовался бы подграф Com_i. Значит, $rad(T) \leq i-2$. Удалив из T все листья, получим дерево T' радиуса не более $i-3$. Для каждой вершины дерева T среди смежных с ней вершин имеется не более $i-1$ нелистовых, в противном случае образовался бы подграф S_i. Поэтому в дереве T' степени вершин не превосходят $i-1$, а их число, т.е. число нелистовых вершин дерева T, не превосходит $n(i-1,i-3)$. Лемма 2.7 доказана.

Теорема 2.8. BCP-*граничная система относительно $\mathcal{F}$ состоит из классов $\mathcal{C}omet, \mathcal{S}tar$ и $\tilde{\mathcal{T}}$. Они же образуют* PCP-*граничную систему относительно $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 2.2 достаточно показать, что для любых $G_1 \in \tilde{\mathcal{T}}, G_2 \in \mathcal{S}tar, G_3 \in \mathcal{C}omet$ класс $\mathcal{F} \cap Free(\{G_1, G_2, G_3\})$ является ВСР-простым и РСР-простым. Для этого заметим, что при некотором i граф G_1 является порожденным подграфом графа $iT_{1,i,i}$, граф G_2 — порожденным подграфом графа S_i, а граф G_3 — порожденным подграфом графа Com_i. Тогда $\mathcal{F} \cap Free(\{G_1, G_2, G_3\}) \subseteq \mathcal{F} \cap Free(\{iT_{1,i,i}, S_i, Com_i\})$.

Пусть $G \in \mathcal{F} \cap Free(\{iT_{1,i,i}, S_i, Com_i\})$. Если G содержит не более чем $n(i-1, i-3)$ нелистовых вершин, то к этому графу применим полиномиальный алгоритм, существование которого следует из теоремы 2.5. Если G содержит не менее чем $n(i-1, i-3)+1$ нелистовых вершин, то по лемме 2.7 степени всех вершин графа G не превосходят i. Но тогда к G применим другой полиномиальный алгоритм, существование которого следует из лемм 2.2,2.3 и теоремы 2.4. Теорема 2.8 доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 2.8 можно показать, что классы $\mathcal{C}omet, \mathcal{S}tar$ и $\tilde{\mathcal{T}}$ образуют как ВСР-граничную, так и РСР-граничную системы относительно $\mathcal{F}(d)$ при любом $d \geq 3$.

2.3 Факторизация решетки наследственных классов графов и ее свойства

2.3.1 Критерий принадлежности общему фактор-классу и «избыточные» классы эквивалентности

Отношение равенства относительных граничных систем на множестве всех наследственных классов будем обозначать через R^*. Иными словами, классы $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathscr{H}$ находятся в отношении R^*, если и только если $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Легко видеть, что данное отношение является отношением эквивалентности и поэтому по теореме о факторизации оно разбивает $\mathscr{H}$ на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий наследственный класс $\mathcal{X}$, будем обозначать через $\mathscr{H}_\Pi(\mathcal{X})$. Другими словами,

$\mathscr{H}_\Pi(\mathcal{X}) = \{\mathcal{Y} : \ \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})\}$. Критерием принадлежности двух наследственных множеств одному классу эквивалентности по отношению R^* является следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого конечного множества графов $\mathcal{S}$ классы $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ и $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ либо одновременно Π-простые, либо одновременно Π-сложные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала необходимость. Пусть существует такое конечное множество графов $\mathcal{S}$, что один из классов $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ и $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ является Π-простым, а другой Π-сложным, при выполнении равенства $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Но тогда, по теореме 2.1 обязан существовать класс $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$, включенный ровно в один из упомянутых двух классов. Но тогда $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \otimes \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Это невозможно, т.к. $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Получаем противоречие с предположением.

Докажем теперь достаточность. Пусть $\mathcal{Z}$ — произвольный Π-предельный класс либо относительно $\mathcal{X}$, либо относительно $\mathcal{Y}$, а множество $Forb(\mathcal{Z})$ совпадает с множеством $\{G_1, G_2, \ldots\}$. Рассмотрим две последовательности из классов графов $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1\}) \supseteq \mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2\}) \supseteq \ldots$ и $\mathcal{Y} \cap Free(\{G_1\}) \supseteq \mathcal{Y} \cap Free(\{G_1, G_2\}) \supseteq \ldots$. Из определения класса $\mathcal{Z}$ и посылки достаточности следует, что обе упомянутые последовательности обязательно состоят из Π-сложных классов. Значит, если $\mathcal{Z}$ является Π-предельным относительно $\mathcal{X}$ (соответственно, относительно $\mathcal{Y}$), то класс $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ (соответственно, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}$) является Π-предельным относительно $\mathcal{Y}$ (соответственно, относительно $\mathcal{X}$).

Пусть $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ (соответственно, $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$). Тогда $\mathcal{Y} \cap \mathcal{B}$ (соответственно, $\mathcal{X} \cap \mathcal{B}$) является Π-предельным относительно $\mathcal{Y}$ (соответственно, относительно $\mathcal{X}$). Отсюда и вывода из предыдущего абзаца следует, что класс $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{B}$ является Π-предельным как относительно $\mathcal{X}$, так и относительно $\mathcal{Y}$. Из этого факта и включений $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$

следует, что $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{B} = \mathcal{X} \cap \mathcal{B} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$, а значит, $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$. Теорема 2.9 доказана.

Хотелось бы иметь некоторые разумные границы на размер множества $\mathcal{S}$ (а не рассматривать всевозможные конечные множества графов) с целью ответа на вопрос, совпадают ли $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})$ и $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$ или все-таки нет. В случае конечных относительных граничных систем такую границу на мощность «разрешающего множества» действительно удается получить.

Лемма 2.8. *Если* $\max\{|\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})|, |\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})|\} \leq k$, *то равенство* $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого конечного множества графов* $\mathcal{S}, |\mathcal{S}| \leq k$ *классы* $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ *и* $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ *либо одновременно* Π*-простые, либо одновременно* Π*-сложные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно и следует из теоремы 2.9, достаточность будет доказана ниже.

Предположим, что $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) \neq \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$. Из предположения и определения относительного граничного класса следует существование такого класса $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) \otimes \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$, что он не содержит никакой другой класс из $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$. Пусть, для определенности, $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$. Ввиду выбора класса $\mathcal{B}$ для любого $\mathcal{B}' \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$ существует граф $G \in \mathcal{B}'$, не принадлежащий $\mathcal{B}$. Поэтому существует такое множество $\mathcal{S}$, состоящее из не более чем k графов, что для каждого класса из $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$ имеется хотя бы один граф из $\mathcal{S}$, ему принадлежащий. Поэтому $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{B}$, а $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ не включает ни один класс из $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$. Значит, по теореме 2.1, класс $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ является Π-сложным, а класс $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ является Π-простым. Получаем противоречие. Поэтому предположение было неверным. Лемма 2.8 доказана.

Известная факторизация множества $\mathscr{H}$ по отношению R^* позволяет решать задачу определения множества относительных граничных классов только для одного элемента из фактор-класса. Следующее утверждение позволяет сузить множество классов эквивалентности за счет определенного отсева. У него также имеются и другие следствия, о которых будет сказано ниже.

Теорема 2.10. *Пусть $\mathcal{X}$ является конечно определенным классом. Тогда для любого наследственного класса $\mathcal{Y}$ справедливо равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) : \ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любой элемент из $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}\cap\mathcal{X})$ является П-предельным классом относительно $\mathcal{Y}$, вложенным в класс $\mathcal{X}$. Покажем, что каждый класс из $\{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) : \ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$ является П-предельным классом относительно $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы 2.10.

Пусть $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}), \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ и $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ — последовательность из П-сложных частей $\mathcal{Y}$, сходящаяся к $\mathcal{B}$. По лемме 1.1 существует такое число i', что $\mathcal{B}_{i'} \subseteq \mathcal{X}$. Обозначим через $\mathcal{B}'_i$ класс $\mathcal{B}_{i+i'}$. Последовательность $\mathcal{B}'_1 \supseteq \mathcal{B}'_2 \supseteq \ldots$ состоит из П-сложных частей класса $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}$, сходится к $\mathcal{B}$, и поэтому $\mathcal{B}$ является П-предельным классом относительно $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}$. Теорема 2.10 доказана.

Из теоремы 2.10 имеется несколько интересных следствий. Во-первых, известные множества $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$ и $\mathscr{H}_\Pi(\mathcal{Y})$ позволяют определять $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X})$ и $\mathscr{H}_\Pi(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X})$ (совпадающее с $\{\mathcal{Z} : \ \exists \mathcal{Z}' \in \mathscr{H}_\Pi(\mathcal{Y})$ такой, что $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}' \cap \mathcal{X}\}$) для любого конечно определенного класса $\mathcal{X}$. Все множество наследственных классов графов можно профакторизовать по отношению $R^{**} : \ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow \exists \mathcal{S}, |\mathcal{S}| < \infty, \mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S}) \vee \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$, затем взять по одному множеству графов из каждого фактор-класса по этому отношению и уже на совокупности этих представителей рассматривать отношение R^*. Например, все конечно определенные классы (включая и множество всех графов) попадают в один класс эквивалентности по отношению R^{**} и поэтому в качестве представителя данного фактор-класса можно рассматривать множество $\mathcal{G}$. Во-вторых, для конечно определенных графов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ верны следующие «законы взаимности» $\{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\} = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}\} = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}\}$ (откуда следует, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cap \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$) и $\{\mathcal{Z}_1 : \exists \mathcal{Z}' \in \mathscr{H}_\Pi(\mathcal{Y})$ такой, что $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}' \cap \mathcal{X}\} = \{\mathcal{Z}_2 : \exists \mathcal{Z}'' \in \mathscr{H}_\Pi(\mathcal{X})$ такой, что $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}'' \cap \mathcal{Y}\} = \{\mathcal{Z} : \exists \mathcal{Z}''' \in \mathscr{H}_\Pi(\mathcal{G})$ такой, что $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}''' \cap \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}\}$.

Отметим, что ни теорема 2.10, ни представленные следствия из нее в общем случае (т.е. когда $\mathcal{X}$ может быть и бесконечно определенным) не верны. В следующем разделе будет указана такая конкретная задача на графах Π', а также такие конкретные классы $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{Y}'$, что $\mathcal{X}'$ является минимальным Π'-сложным, а $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{X}'$ является Π'-граничным. При этом $\mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{X}' \cap \mathcal{G}) = \{\mathcal{X}'\}$ (это следует из того общего наблюдения, что если $\mathcal{X}$ — минимальный Π-сложный класс, то $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) = \{\mathcal{X}\}$) и $\mathcal{X}' \notin \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{G}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}'\}$, $\mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{X}') \cap \mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{G}) = \emptyset$. Таким образом, для некоторых случаев множество $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X})$ строго включает множество $\{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$. Через раздел будет приведен пример, показывающий, что иногда справедливо и обратное строгое включение.

Итак, равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cap \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$ верно только в некоторых случаях (в том числе и для конечно определенных классов). В то же время, интересно было бы выяснить, что происходит с относительными граничными классами при взятии объединения множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Иными словами, как соотносится $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ с множествами $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ и $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Справедливость такого соотношения можно установить при наложении весьма слабых условий на классы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Именно, имеет место следующее утверждение ($< \mathscr{K} >$ — множество минимальных классов из семейства $\mathscr{K}$).

Теорема 2.11. *Равенство* $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого* Π*-простого конечно определенного относительно* $\mathcal{X}$ *класса* $\mathcal{Z}_1$ *и любого* Π*-простого конечно определенного* *относительно* $\mathcal{Y}$ *класса* $\mathcal{Z}_2$ *класс* $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ *является* Π-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Предположим существование таких Π-простого конечно определенного относительно $\mathcal{X}$ класса $\mathcal{Z}_1$ и Π-простого конечно определенного относительно $\mathcal{Y}$ класса $\mathcal{Z}_2$, что класс $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ является Π-сложным. Т.к. данный класс является сложным, то существует последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных подклассов $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, сходящаяся к некоторому классу $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}), \mathcal{B} \subseteq \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$. Поскольку $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$, то либо $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$, либо $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$. Пусть, для определенности, $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$. Существует монотонно убывающая последовательность $\{\mathcal{B}_i\}$ из Π-сложных частей $\mathcal{X}$, сходящаяся к $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_1)$ и $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S}_2)$. Ясно, что $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_1) \cup \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_2)$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 1.1 нетрудно показать, что для некоторого i' выполнено включение $\mathcal{B}_{i'} \subseteq \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_1) \cup \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_2)$. Для любого графа $G \in \mathcal{B}_{i'}$ можно за полиномиальное время определить его принадлежность классу $Free(\mathcal{S}_1)$. Если $G \in Free(\mathcal{S}_1)$, то $G \in \mathcal{Z}_1$, а если $G \notin Free(\mathcal{S}_1)$, то $G \in \mathcal{Z}_2$. Отсюда следует, что $\mathcal{B}_{i'}$ является Π-простым, т.к. известно, какой из двух полиномиальных алгоритмов решения Π (для $\mathcal{Z}_1$ или для $\mathcal{Z}_2$) применять к заданному его графу. Получаем противоречие. Значит, предположение было неверным.

Докажем достаточность. Рассмотрим произвольный класс $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}), Forb(\mathcal{B}) = \{G_1, G_2, \ldots\}$ и сходящуюся к $\mathcal{B}$ последовательность $\{\mathcal{B}_i\}$ из Π-сложных классов, определяемую равенством $\mathcal{B}_i = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_i\})$. Для любого i хотя бы один из классов $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_i\}), \mathcal{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_i\})$ является Π-сложным (т.к. иначе $\mathcal{B}_i$ является Π-простым). Из этого и монотонности $\{\mathcal{B}_i\}$ следует, что $\mathcal{B}$ — Π-предельный класс либо относительно $\mathcal{X}$, либо относительно $\mathcal{Y}$. Очевидно, что любой класс из $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$ является Π-предельным относительно $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Поэтому $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$. Теорема 2.11 доказана.

Простое достаточное условие равенства $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$ будет сформулировано в следующей лемме. Там рассматривается задача распознавания принадлежности классу $\mathcal{X}$, состоящая в том, чтобы по заданному графу G определить, принадлежит ли G классу $\mathcal{X}$ или нет.

Лемма 2.9. *Если в классе графов $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ задача распознавания принадлежности графа хотя бы одному из наследственных классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ решается за полиномиальное время, то $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф G, принадлежащий объединению некоторого П-простого конечно определенного относительно $\mathcal{X}$ класса $\mathcal{Z}_1$ и некоторого П-простого конечно определенного относительно $\mathcal{Y}$ класса $\mathcal{Z}_2$. Ясно, что $G \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. За полиномиальное время можно проверить, принадлежит ли G одному из классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Если он принадлежит этому классу (пусть, для определенности, это будет $\mathcal{X}$), то можно за полиномиальное время проверить принадлежность G классу $\mathcal{Z}_1$. Если же $G \notin \mathcal{X}$, то $G \in \mathcal{Z}_2$. Итак, за полиномиальное время можно определить принадлежность графа хотя бы одному из классов $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$. Тем самым, можно за полиномиальное время определить какой из двух полиномиальных алгоритмов решения задачи П дает правильный ответ применительно к графу G. Значит, класс $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ является П-простым. Поэтому по теореме 2.10 верно равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$. Лемма 2.9 доказана.

Лемма 2.9 показывает, что равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) =< \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$ справедливо именно для актуальных значений $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Действительно, необходимым условием невыполнения этого равенства является то обстоятельство, что распознавание принадлежности графа каждому из классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ не решается за полиномиальное время. Все известные автору случаи «труднорешаемости» задачи распознавания принадлежности имеются на интернет-ресурсе $http://www.graphclasses.org/classes/problem\_Recognition.html$. Но на их основе не удается построить пример, в котором соответствующее равенство не выполняется.

2.3.2 О независимости понятий минимального сложного, абсолютного граничного и относительного граничного классов графов

В этом разделе будет показано, что для некоторой задачи на графах минимальный сложный класс строго включает некоторый абсолютный граничный. Отсюда следует, что существуют абсолютные граничные классы, не являющиеся относительными граничными.

Забором $Fence_i$ называется граф, который может быть получен добавлением к простому пути $(a_1, a_2, \ldots, a_{3i})$ вершин $b_1, b_2, \ldots, b_i$ и ребер $(b_1, a_{i+1}), (b_2, a_{i+2}), \ldots, (b_i, a_{2i})$. *Задача об условном списковом ранжировании* (задача УВСР) состоит в том, чтобы по данным графу G и множеству $\mathfrak{L}$ определить, существует ли $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин G, при условии, что G либо сам является забором, либо G не является собственным порожденным подграфом никакого забора. При невыполнении каждого из этих двух условий ответ к рассматриваемой задаче распознавания считается положительным (независимо от $\mathfrak{L}$).

Класс $\mathcal{F}ence$ — наследственное замыкание множества всех заборов.

Теорема 2.12. *Класс $\mathcal{F}ence$ является минимальным* УВСР-*сложным, а $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{F}ence$ является* УВСР-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Репьем* $Burdock_i$ назовем результат добавления к простому циклу $(a_1, a_2, \ldots, a_{i^2})$ вершин $b_1, b_2, \ldots, b_i$ и ребер $(a_i, b_1), (a_{2i}, b_2), \ldots, (a_{i^2-i}, b_{i-1}), (a_{i^2}, b_i)$. По аналогии с доказательством леммы 2.6 можно показать, что задача УВСР является NP-полной в классах графов $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Fence_i\}$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Burdock_i\}$. Поэтому класс графов $\mathcal{F}ence$ является УВСР-сложным и при любом $i \geq 1$ класс $\mathcal{X}_i = [\bigcup\limits_{j \geq i} Burdock_j]$ является УВСР-сложным.

Докажем, что $\mathcal{F}ence$ является минимальным УВСР-сложным. Пусть G — произвольный граф из этого класса. Для некоторого i граф G является порожденным подграфом забора $Fence_i$. Тогда $\mathcal{F}ence \cap Free(\{G\}) \subseteq \mathcal{F}ence \cap Free(\{Fence_i\})$, причем сложность задачи УВСР в классе $\mathcal{F}ence \cap Free(\{Fence_i\})$ совпадает со сложностью этой задачи в классе $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{Fence_j\} \cap Free(\{Fence_i\})$. Это множество содержит конечное множество заборов и поэтому класс $\mathcal{F}ence \cap Free(\{G\})$ является УВСР-простым.

Класс $\tilde{\mathcal{T}}$ является ВСР-граничным. Ясно, что $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \dots$ и что $\tilde{\mathcal{T}} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Поэтому класс $\tilde{\mathcal{T}}$ является УВСР-предельным. Значит, данный класс является УВСР-граничным. Теорема 2.12 доказана.

2.3.3 Об одном свойстве относительных граничных классов в задаче о наибольшем двудольном планарном подграфе

Известны случаи, когда пересечение двух сложных классов дает простой класс. Поэтому множества соответствующих граничных классов относительно каждого из этих классов непусты, а такое множество относительно их пересечения является пустым. Вместе с тем, было бы интересно получить более сильный результат о строении относительных граничных классов при взятии пересечения. Далее конструктивным образом будет доказано существование таких наследственных классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и такой задачи на графах Π, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cap \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$ и $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \emptyset$.

В качестве Π будем рассматривать задачу ПОДГРАФ[$\mathcal{Z}$] для некоторого конкретного $\mathcal{Z}$. Положим $\mathcal{Z}$ равным множеству всех графов, являющихся и планарными и двудольными одновременно. Иными словами, $\mathcal{Z} = \mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$. В классе графов $\mathcal{B}ip$ задача SUBGRAPH[$\mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$] совпадает с задачей SUBGRAPH[$\mathcal{P}$], а в классе $\mathcal{P}$ она совпадает с задачей SUBGRAPH[$\mathcal{B}ip$].

Покажем, что классы $\mathcal{B}ip(3) = \mathcal{B}ip \cap \mathcal{D}eg(3)$ и $\mathcal{P}(3) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}eg(3)$ являются SUBGRAPH[$\mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$]-сложными. Для этого введем операцию, которая называется *расщепление вершины.* Применение этой операции к вершине x (степени не менее чем 4) графа G состоит в следующем:

- окрестность вершины x произвольно разбивается на два подмножества X_1 и X_2, каждое из которых содержит не менее чем два элемента
- вершина x удаляется из G и добавляется путь (x_1, y, x_2). Добавляются всевозможные ребра, инцидентные x_1 (соответственно, x_2) и вершинам из X_1 (соответственно, X_2)

Лемма 2.10. *Пусть $\mathcal{X} \in \{\mathcal{B}ip, \mathcal{P}\}$ и граф G' получен из G расщеплением вершины x. Тогда $n_{\mathcal{X}}(G') = n_{\mathcal{X}}(G) + 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H и H' — порожденные подграфы графов G и G' соответственно, принадлежащие $\mathcal{X}$ и имеющие наибольшее количество вершин. Если $x \in V(H)$, то порожденный множеством вершин $V(H) \setminus \{x\} \cup \{x_1, y, x_2\}$ подграф графа G' принадлежит $\mathcal{X}$. Если же $x \notin V(H)$, то порожденный множеством вершин $V(H) \cup \{x_1, y\}$ подграф графа G' принадлежит $\mathcal{X}$. Поэтому $n_{\mathcal{X}}(G') \geq n_{\mathcal{X}}(G) + 2$. Если все три вершины x_1, y, x_2 принадлежат H', то порожденный множеством вершин $V(H') \setminus \{x_1, y, x_2\} \cup \{x\}$ подграф графа G принадлежит $\mathcal{X}$. Если же $\{x_1, y, x_2\} \nsubseteq V(G)$, то порожденный множеством вершин $V(H') \setminus \{x_1, y, x_2\}$ подграф G также принадлежит $\mathcal{X}$. Поэтому $n_{\mathcal{X}}(G') \leq n_{\mathcal{X}}(G) + 2$. Значит, $n_{\mathcal{X}}(G') = n_{\mathcal{X}}(G) + 2$. Лемма 2.10 доказана.

Заметим, что граф G является двудольным (соответственно, планарным) тогда и только тогда, когда двудольным (соответственно, планарным) является граф G'. Класс $\mathcal{B}ip$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{P}$]-сложным, а $\mathcal{P}$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{B}ip$]-сложным (см. следствие 3 из теоремы 2 работы [78]). Отсюда и из леммы 2.10 следует, что класс $\mathcal{B}ip(3)$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{P}$]-сложным, а класс $\mathcal{P}(3)$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{B}ip$]-сложным. Слегка модифицируя ход доказательства теоремы 1.5 нетрудно показать граничность класса $\mathcal{T}$ для задачи ПОДГРАФ[$\mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$] как относительно $\mathcal{B}ip(3)$, так и относительно $\mathcal{P}(3)$. Вместе с тем, класс $\mathcal{B}ip(3) \cap \mathcal{P}(3)$ является ПОДГРАФ[$\mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$]-простым и поэтому относительно него нет ПОДГРАФ[$\mathcal{B}ip \cap \mathcal{P}$]-граничных классов.

2.3.4 Подмножества относительных граничных систем и их свойства

Напомним, что важнейшим выводом из теоремы 2.10 является тот факт, что задачу выявления относительных граничных классов достаточно рассматривать только для множества $\mathcal{G}$ и некоторых бесконечно определенных классов. Теорему 2.10 можно также интерпретировать как результат о представимости некоторых подмножеств относительной граничной системы в виде другой относительной граничной системы. Такого рода результаты о представимости и непредставимости подмножеств относительных граничных систем будут доказаны далее.

Лемма 2.11. *Объединение конечного числа конечно определенных классов является конечно определенным классом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_k$ — конечно определенные классы. Очевидно, что множество $Forb(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i)$ состоит из графов, каждый из которых является порожденным подграфом некоторого графа из $\mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — множество графов, содержащих каждый граф из $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Forb(\mathcal{X}_i)$ в качестве порожденного подграфа и являющихся минимальными (относительно удаления вершин) с этим свойством. Поэтому любой граф из $\mathcal{S}$ содержит не более чем $\sum\limits_{i=1}^{k} N_i$ вершин, где N_i — суммарное количество вершин в графах из $Forb(\mathcal{X}_i)$. Значит, множество $\mathcal{S}$ конечно и поэтому множество $Forb(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{X}_i)$ является конечным. Лемма 2.11 доказана.

Нетрудно привести пример, демонстрирующий, что объединение бесконечного количества конечно определенных классов может являться и бесконечно определенным классом.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1.3, нетрудно показать справедливость следующего критерия относительной граничности.

Теорема 2.13. Π-*предельный относительно* $\mathcal{X}$ *класс* $\mathcal{B}$ *является* Π-*граничным относительно* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathcal{B}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathcal{S} \subseteq Forb(\mathcal{B})$, *что класс* $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ *является* Π-*простым.*

Лемма 2.12. *Ни один из* Π-*граничных относительно* $\mathcal{X}$ *классов графов не покрывается конечным числом других* Π-*граничных относительно* $\mathcal{X}$ *классов графов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что некоторый класс $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})$ покрывается отличными от $\mathcal{B}$ классами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$, принадлежащими $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})$. Поскольку $\mathcal{B}$ не включает ни один из классов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$, то для любого $i \in \overline{1,k}$ существует граф $G_i \in \mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}$. По теореме 2.13 для любого $i \in \overline{1,k}$ существует такое множество $\mathcal{S}_i \subseteq Forb(\mathcal{B}_i)$, что класс $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_i \cup \{G_i\})$ является Π-простым. Ясно, что $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_i \cup \{G_i\})$. Отсюда и из включения $\mathcal{B} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ следует, что $\mathcal{B} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_i \cup \{G_i\})$. Заметим, что объединение конечного числа конечно определенных простых классов является простым классом. Это следует из того факта, что для любого графа за полиномиальное время от числа его вершин можно определить, каким из данных конечно определенных классов он принадлежит (или определить, что он не принадлежит ни одному из них). Отсюда и леммы 2.11 следует, что $\mathcal{B}$ —

подмножество П-простого конечно определенного относительно $\mathcal{X}$ множества $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_i \cup \{G_i\})$. Поэтому существует такое конечное множество $\mathcal{S} \subseteq Forb(\mathcal{B})$, что $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}_i \cup \{G_i\})$. Поэтому класс $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ является П-простым. Но по теореме 2.1 он является П-сложным. Получаем противоречие. Значит, наше предположение было неверным. Лемма 2.12 доказана.

Лемма 2.12 оказывается неверной в случае бесконечных относительных граничных систем. Описание соответствующего контрпримера отложим до четвертой главы диссертации. Далее будет доказан интересный результат о возможности представления любого подмножества произвольного конечного множества $\mathcal{B}_\Pi(\mathcal{X})$ в виде другой относительной П-граничной системы.

Теорема 2.14. *Если $|\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})| < \infty$, то для любого подмножества $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ существует такое конечное множество графов $\mathcal{S}$, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})) = \mathscr{B}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{B}'$. По лемме 2.12 ни один его элемент не покрывается классами из $\mathscr{B}'$. Значит, для каждого класса $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{B}'$ существует граф $G_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$, не принадлежащий $\bigcup\limits_{\mathcal{B}' \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{B}'} \mathcal{B}'$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество $\bigcup\limits_{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{B}'} \{G_{\mathcal{B}}\}$. Ясно, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})) = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) : \ \mathcal{B} \subseteq Free(\mathcal{S})\} = \mathscr{B}'$ (теорема 2.10). Теорема 2.14 доказана.

Для бесконечных множеств $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ теорема 2.14 неверна даже при снятии ограничения на конечность множества $\mathcal{S}$. Контрпример будет изложен в четвертой главе. В данном контрпримере фигурирует континуальная относительная граничная система. Неизбежность непредставимости некоторых подмножеств несчетной граничной системы в виде другой относительной граничной системы доказывается в следующей теореме.

Теорема 2.15. *Если $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G})$ является несчетным, то существует несчетное множество таких классов $\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G})$, что для любого наследственного класса $\mathcal{X}$ множество $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) \setminus \{\mathcal{B}\}$ не является* П*-граничной относительно $\mathcal{X}$ системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G})} Forb(\mathcal{B})$. Данное множество является подмножеством счетного множества $\mathcal{G}$ и поэтому оно само счетное. Ясно, что множество всех конечных подмножеств множества $\mathcal{S}$ счетное. Рассмотрим подмножество $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G})$ из таких классов $\mathcal{B}$, что существует конечное подмножество $\mathcal{S}' \subseteq Forb(\mathcal{B})$, для которого $\{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) : \mathcal{S}' \subseteq Forb(\mathcal{B})\}$ является счетным. Т.к. множество конечных подмножеств $\mathcal{S}$ счетное, то и $\mathscr{B}'$ является счетным. Значит, множество $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) \setminus \mathscr{B}'$ является несчетным.

Пусть $\mathcal{B} \in \mathscr{B}''$. Покажем, что для любого наследственного класса $\mathcal{X}$ справедливо $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) \setminus \{\mathcal{B}\} \neq \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$. Действительно, пусть для некоторого $\mathcal{X} \in \mathscr{H}$ справедливо равенство $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G}) \setminus \{\mathcal{B}\} = \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{B}$ не является П-граничным относительно $\mathcal{X}$ (и является П-граничным относительно $\mathcal{G}$) и поэтому существует такое конечное множество $\mathcal{S}' \subseteq Forb(\mathcal{B})$, что $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}')$ является П-простым. Понятно, что существует несчетное множество таких классов $\mathcal{B} \in \mathscr{B}''$, что $\mathcal{S}' \subseteq Forb(\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$ — класс с таким свойством. Он является П-граничным относительно $\mathcal{X}$ и включен в $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}')$. Поэтому по теореме 2.1 класс $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S}')$ является П-сложным. Получаем противоречие с предположением. Теорема 2.15 доказана.

Глава 3

Полиномиальная разрешимость задачи НМ для некоторых классов графов

3.1 Гипотеза В.Е. Алексеева и ее варианты

Напомним, что *независимым множеством* в обыкновенном графе называется множество попарно несмежных его вершин. Размер наибольшего независимого множества графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (задача НМ) состоит для заданных графа G и числа k в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \leq k$.

Класс $\mathcal{T}$ является НМ-граничным классом [32]. Возможно, $\mathcal{T}$ является единственным НМ-граничным классом. Это предположение В.Е. Алексеева эквивалентно тому, что для любого $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым [32]. На настоящее время вопрос о единственности $\mathcal{T}$ является открытым. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время не известен сложностной статус задачи о независимом множестве для класса $Free(\{P_5\})$. Более того, вычислительная сложность задачи НМ для класса $Free(\{P_5\})$ остается не ясной уже более 20 лет. Однако, НМ-простота классов графов $Free(\{P_4\})$ [44] и $Free(\{T_{1,1,2}\})$ [3] дает некоторую надежду на то, что гипотеза В.Е. Алексеева все-таки верна.

Итак, простейшим не преодоленным препятствием на пути к доказательству гипотезы является случай $G = P_5$. Здесь можно попытаться получить новые случаи полиномиальной разрешимости задачи НМ, добавив один или несколько графов к P_5 (тем самым, косвенно продвинуться на пути к установлению вычислительного статуса для класса $Free(\{P_5\})$). Если $|V(G)| \leq 4$, то в классе $Free(\{G\})$ задача НМ полиномиально разрешима тогда и только тогда, когда G — лес. Более того, среди всех связных графов G с пятью вершинами случай простого пути является единственным, для которого статус задачи НМ в классе $Free(\{G\})$ остается открытым [72]. Имеются десятки работ, в которых к графу P_5 добавляется один или несколько других запрещенных порожденных подграфов и доказывается эффективная разрешимость задачи НМ для полученного класса (см., например, [36, 41, 40, 62, 70, 71, 72, 77]). Доказано также, что для любого графа G с не более чем 5 вершинами, отличного от P_5 и C_5, задача НМ полиномиально разрешима в классе графов $Free(\{P_5, G\})$ [72]. Вопрос о сложности для класса $Free(\{P_5, C_5\})$ пока остается открытым (вот уже более 10 лет). В первой части этой главы выявляются новые случаи полиномиальной разрешимости задачи НМ, которые являются подмножествами $Free(\{P_5, C_5\})$. Предлагается систематический способ генерации таких случаев, основанный на введенном в работе понятии расширяющего оператора.

Если рассматривать относительные граничные классы, то надежды на получение исчерпывающего описания таких классов становятся более оправданными. Иногда эти надежды действительно полностью оправдываются, см. работу [60] о задаче ДМ и предыдущую главу диссертации о задачах о списковом ранжировании. Подобного рода результат известен и для задачи о независимом множестве. Так, в [32] было показано, что класс $\mathcal{T}$ является единственным НМ-граничным среди монотонных классов и поэтому конечно определенный сильно наследственный класс является НМ-сложным тогда и только тогда, когда он включает $\mathcal{T}$.

В данной главе рассматриваются НМ-граничные классы относительно некоторых подмножеств множества планарных графов $\mathcal{P}$. Рассмотрение именно таких случаев подсказано результатами работы [60]. В этой работе было показано, что ДМ-граничная система относительно $\mathcal{P}$ исчерпывается классами $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$. Класс $\mathcal{T}$ является НМ-граничным как относительно $\mathcal{P}$, так и относительно $\mathcal{D}eg(d)$ при $d > 2$ и $\mathcal{P}(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}eg(d)$ для таких d. Доказательства этих фактов почти дословно повторяют соответствующее доказательство из [32]. Предположение В.Е. Алексеева может быть перенесено на случай НМ-граничных классов относительно $\mathcal{P}$ (соответственно, относительно $\mathcal{D}eg(d)$ или $\mathcal{P}(d)$). Нет никакой гарантии, что множество абсолютных НМ-граничных классов совпадает с множеством НМ-граничных классов относительно $\mathcal{P}$ (соответственно, относительно $\mathcal{D}eg(d)$ или $\mathcal{P}(d)$). Несмотря на это обстоятельство, единственность класса $\mathcal{T}$, как НМ-граничного относительно $\mathcal{P}$ (соответственно, относительно $\mathcal{D}eg(d)$ или $\mathcal{P}(d)$), может служить косвенным подтверждением справедливости гипотезы В.Е. Алексеева.

Вопрос о существовании НМ-граничных относительно $\mathcal{X} \in \{\mathcal{D}eg(d), \mathcal{P}, \mathcal{P}(d)\}$ классов графов, отличных от $\mathcal{T}$, эквивалентен вопросу о существовании такого $G \in \mathcal{T}$, что класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G\})$ является НМ-сложным. Хотя единственность класса $\mathcal{T}$ и в рассматриваемых случаях доказать не удается, имеется более значительный прогресс к достижению этой цели, чем в случае абсолютных НМ-граничных классов. Для случая $\mathcal{X} = \mathcal{D}eg(d)$ $(d > 2)$ и любого i удалось показать, что класс $\mathcal{D}eg(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым [61]. Во второй части данной главы показывается, что это утверждение верно и для случая $\mathcal{X} = \mathcal{P}$. Там же рассматривается $\mathcal{X} = \mathcal{P}(3)$ и при любом i устанавливается полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$. На настоящее время данный результат является наилучшим в смысле глубины продвижения к определению истинности гипотезы.

3.2 Расширяющие операторы для задачи о независимом множестве

Пусть П — какая-нибудь NP-полная задача на графах. Как правило, направляющим мотивом к установлению полиномиальной разрешимости П для того или иного класса является расширение уже известных случаев эффективной разрешимости. Все известные автору обобщения такого рода имеют «локальный характер», т.е. реализованное полиномиальное сведение использует информацию о конкретике структуры старой, более узкой совокупности графов. Вместе с тем, хотелось бы иметь «универсальные» сведения, пригодные сразу для целых семейств классов графов. Например, для случая наследственных классов указать такое преобразование $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ (функцию одного или многих аргументов — графов из части $\mathcal{S}$), что $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$ и из П-простоты класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ следовала бы П-простота класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$. Такое отображение назовем П-*расширяющим оператором.*

Полезность понятия расширяющего оператора состоит в том, что конкретные операторы такого рода позволяют конструктивно («регулярным образом») порождать новые П-простые случаи. Например, если $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ — конкретный П-простой класс, а f — П-расширяющий оператор, для которого $\mathcal{S}$ входит в область его определения, то $\mathcal{F}ree(f(\mathcal{S})), \mathcal{F}ree(f(f(\mathcal{S}))), \mathcal{F}ree(f(f(f(\mathcal{S}))))$ — монотонно возрастающая бесконечная цепь (по отношению включения) из П-простых классов. Заметим, что такие трансформации могут быть особенно полезными, когда известно сразу несколько расширяющих операторов (поскольку можно рассматривать действия их суперпозиций).

Понятие расширяющего оператора применяется в диссертации к задаче о независимом множестве. Далее довольно просто доказывается, что отображение $\{G\} \longrightarrow \{G \oplus K_1\}$ является НМ-расширяющим оператором.

Теорема 3.1. *Если для некоторого наследственного класса графов*

$\mathcal{X}$ и графа G класс $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$ является НМ-*простым, то класс $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G \oplus K_1\})$ также является* НМ-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — граф из $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G \oplus K_1\})$, x — произвольная вершина графа H. Обозначим: $H_1 = H \setminus \{x\}, H_2 = H \setminus N(x), H_3 = H \setminus N[x]$. Ясно, что $\alpha(H) = \max(\alpha(H_1), \alpha(H_2))$, $\alpha(H_2) = \alpha(H_3) + 1$, граф H_3 принадлежит классу $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$. Значит, вычисление числа независимости графа H рекурсивно сводится к вычислению чисел независимости графов H_1 и H_3. Из формулировки теоремы следует, что время вычисления $\alpha(H_3)$ не превосходит $poly(|V(H_3)|)$, где $poly(n)$ — некоторый полином переменной n. Таким образом, время решения задачи НМ для графа H не превосходит $|V(H)|poly(|V(H)|)$, т.е. ограничено полиномом от числа вершин. Теорема 3.1 доказана.

К сожалению, в общем случае утверждение теоремы 3.1 не удается перенести на классы графов вида $\mathcal{F}ree(\{G \oplus K_2\})$. Вместе с тем, утверждение теоремы 3.1 для операции $\circ$ и вовсе не верно (это так и для более слабых «умножений», когда добавляется только часть ребер, инцидентных $V(K_1)$ и $V(G)$). Действительно, класс $\mathcal{F}ree(\{K_{1,3}\})$ — НМ-простой [69], а $\mathcal{F}ree(\{K_{1,3} \circ K_1\})$ содержит все графы без треугольников, которые образуют НМ-сложный класс [73]. В случае подклассов класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ теорема 3.1 верна и для умножения. Это результат будет доказан далее.

3.2.1 О НМ-расширяемости оператора $\{P_5, C_5, G\} \longrightarrow \{P_5, C_5, G \circ K_1\}$

Лемма 3.1. *В графе $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$, содержащем порожденный путь (x_1, x_2, x_3), выполняется либо включение $N(x_1) \subseteq N(x_2) \cup N(x_3)$, либо включение $N(x_3) \subseteq N(x_1) \cup N(x_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда существуют такие вершины a и b, что $a \in N(x_1) \setminus (N(x_2) \cup N(x_3))$ и что

$b \in N(x_3) \setminus (N(x_1) \cup N(x_2))$. Но тогда вершины a, x_1, x_2, x_3, b порождают в G либо подграф P_5 (если $(a, b) \notin E(G)$), либо подграф C_5 (если $(a, b) \in E(G)$). Получаем противоречие. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Радиус любого связного графа из* $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$ *не превосходит* 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — вершина связного графа $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5\})$, для которой величина $|\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)|$ является наибольшей (если таковых вершин несколько, то рассматривается любая из них). Поскольку граф G является связным и не содержит порожденного подграфа P_5, то каждая вершина этого графа отстоит от x на расстоянии, не большем, чем 3. Покажем, что расстояние от x до каждой из вершин G не превосходит даже 2.

Предположим противное, тогда существуют такие вершины $a \in N(x), b \in N_2(x), c \in N_3(x)$, что $(a, b) \in E(G)$ и $(b, c) \in E(G)$. Понятно, что $\{z \in N_2(x) : \exists y \in N(x) \cap N(b), (y, z) \in E(G)\} \subseteq N(b) \cup N_2(b)$. Докажем, что $N(x) \setminus N(b) \subseteq N_2(b)$ и $\{z \in N_2(x) : \exists y \in N(x) \setminus N(b), (y, z) \in E(G)\} \subseteq N(b) \cup N_2(b)$. Действительно, пусть $y \in N(x) \setminus N(b)$. Очевидно, что вершина y не может быть смежна с вершиной c, т.к. противное означало бы, что расстояние между x и c равно 2. Вместе с тем, y обязательно должна быть смежна с вершиной a, поскольку в противном случае граф G содержит порожденный вершинами y, x, a, b, c подграф P_5. Но тогда $y \in N_2(b)$. Теперь предположим, что существует вершина z, для которой $z \in N_2(x)$ и $(z, y) \in E(G)$. Граф G содержит хотя бы одно из ребер $(a, z), (b, z), (c, z)$, т.к. противное означало бы, что вершины z, y, a, b, c порождают в G подграф P_5. Но тогда $z \in N(b) \cup N_2(b)$.

Итак, из результатов предыдущего абзаца следует, что $\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x) \subseteq \{b\} \cup N(b) \cup N_2(b)$. Вместе с тем, $c \in N(b)$, но $c \notin \{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)$. Поэтому $|\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)| < |\{b\} \cup N(b) \cup N_2(b)|$. Получаем противоречие с выбором вершины x. Значит, предположение из первого абзаца неверно.

Поэтому радиус графа G не превосходит 2. Лемма 3.2 доказана.

Из леммы 3.2 следует, что если x — центральная вершина связного графа G из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$, то любая вершина G отстоит от x на расстоянии не более чем 2. Рассмотрим окрестность вершины x. Заметим, что для любых двух различных несмежных вершин $y_1 \in N(x)$ и $y_2 \in N(x)$ имеет место либо включение $N(y_1) \setminus N(x) \supseteq N(y_2) \setminus N(x)$, либо включение $N(y_2) \setminus N(x) \supseteq N(y_1) \setminus N(x)$. Это следует из леммы 3.1. Поэтому на любой совокупности из попарно несмежных вершин, принадлежащих $N(x)$, отношение $R : uRv \Leftrightarrow N(u) \setminus N(x) \subseteq N(v) \setminus N(x)$ является линейным квазипорядком. Этот квазипорядок обязательно имеет максимальный элемент.

Пусть IS — какое-либо независимое множество графа G, для которого вершина $y \in N(x) \cap IS$ является максимальным элементом относительно введенного выше квазипорядка R. Ясно, что необходимым условием принадлежности вершины $z \in N(x)$ множеству IS является выполнение двух условий: а). $(y, z) \notin E(G)$, б). $N(z) \setminus N(x) \subseteq N(y) \setminus N(x)$. Это наблюдение может быть положено в основу вычисления числа независимости графа G следующим образом:

Шаг 1. Для каждой вершины $y \in N(x)$ определить графы $G_1(y) = G[\{z \in N(x) : (y, z) \notin E(G), N(z) \setminus N(x) \subseteq N(y) \setminus N(x)\}]$ и $G_2(y) = G[N_2(x) \setminus N(y)]$.

Шаг 2. Вычислить число $\max(\alpha(G[N_2(x)]) + 1, \max\limits_{y \in N(x)}(\alpha(G_1(y)) + \alpha(G_2(y)) + 1))$, которое равно $\alpha(G)$.

Лемма 3.3. *Для каждой компоненты связности G' графа $G[N_2(x)]$ существует вершина $y \in N(x)$, для которой:*

1. *$V(G') \cap N(y) \neq \emptyset$,*

2. *радиус графа* $G'' = G[V(G') \cup \{y\}]$ *не превосходит* 2,

3. *для любых двух смежных вершин* z_1 *и* z_2 *графа* G'', *отстоящих в этом графе от вершины* y *на расстоянии* 2, *существует такая вершина* z, *что* $(z, z_1) \in E(G''), (z, z_2) \in E(G''), (z, y) \in E(G'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y — произвольная вершина из $N(x)$, окрестность которой в графе G имеет непустое пересечение с $V(G')$ (такая вершина обязательно существует ввиду связности графа G). Расстояние от y до любой вершины G'' не превосходит 2 (в противном случае радиус графа G был бы не менее чем 3). Значит, радиус графа G'' не превосходит 2. Пусть теперь z_1 и z_2 — две смежные вершины графа G'', отстоящие в этом графе от вершины y на расстоянии 2, а z — произвольная вершина G'' смежная и с y и с z_1 (такая вершина обязательно существует, ввиду связности графа G' и ограничений на его радиус). Если вершины z и z_2 несмежны, то вершины z_1, z_2, z, y, x порождают в графе G путь P_5. Поэтому обязательно $(z, z_2) \in E(G'')$. Лемма 3.3 доказана.

Пусть для некоторого графа H справедливо $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ K_1\})$. Легко видеть, что для любого $y \in N(x)$ граф $G_1(y)$ принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Из последней части утверждения леммы 3.3 следует, что при применении шагов 1-2 к компоненте G' (путем перебора кандидатов в максимальные элементы относительно квазипорядка R среди вершин G', смежных с y) вычисление ее числа независимости полиномиально сводится к решению задачи НМ для графов из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ (поскольку получаемые в шаге 1 графы принадлежат этому классу). Заметим также, что каждая компонента связности любого графа $G_2(y)$ является порожденным подграфом некоторой компоненты связности $G[N_2(x)]$. Поэтому задача НМ для графов из $\{G_2(y) : y \in N(x)\} \cup \{G[N_2(x)]\}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов, принадлежащих $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если класс графов* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$ *является* НМ-*простым, то класс* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G \circ K_1\})$ *тоже является* НМ-*простым.*

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют конструктивно расширять совокупность НМ-простых подмножеств класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$. Будем называть граф G-*пороговым*, если он может быть получен из G с использованием операций $\oplus K_1$ и $\circ K_1$. Иными словами, G-пороговые графы индуктивно определяются следующим образом:

1. граф G — G-пороговый,
2. если G' — G-пороговый граф, то $G' \oplus K_1$ и $G' \circ K_1$ тоже являются G-пороговыми.

Отметим, что графы, сформированные по этим правилам для случая $G = K_1$, принято называть *пороговыми* (отсюда и их обобщающее название на случай произвольного G). Имея какой-нибудь НМ-простой случай $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$, можно рассмотреть G-пороговый граф H и поставить вопрос о вычислительном статусе задачи НМ для графов из $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Пользуясь утверждениями теорем 3.1 и 3.2 и индукцией, можно легко показать полиномиальность задачи НМ в этом классе. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если класс графов* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$ *является* НМ-*простым, то для любого G-порогового графа H класс* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ *тоже является* НМ-*простым.*

3.2.2 О НМ-расширяемости оператора $\{P_5, C_5, H\} \longrightarrow \{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\}$

В этой части работы будет показано, что для любого p отображение $\{P_5, C_5, H\} \longrightarrow \{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\}$ является НМ-расширяющим оператором. По аналогии с доказательством леммы 3.2 можно доказать справедливость леммы 3.4.

Лемма 3.4. *Для любого связного графа $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5\}) \setminus \mathcal{F}ree(\{K_{1,p}\})$ существует такая вершина x, что $N(x)$ содержит не менее p независимых вершин и для любой вершины $y \in V(G)$ расстояние между x и y не превосходит 2.*

Одна из вспомогательных процедур при решении задачи НМ состоит в упрощении, «сжатии» текущего графа. При этом вместо исходного графа рассматривается такой его порожденный подграф, что числа независимости графа и его подграфа совпадают. Иногда идеи такого рода даже приводят к созданию целого алгоритма решения задачи НМ. Например, для непустых хордальных графов (т.е. графов без порожденных циклов длины четыре и более) всегда возможно удаление так называемой смежно поглощающей вершины [7].

Говорят, что вершина a *смежно поглощает* вершину b, если вершины a и b являются смежными и $N(b) \setminus \{a\} \subseteq N(a) \setminus \{b\}$. Значение этого понятия состоит в том, что при удалении любой смежно поглощающей вершины из графа не изменяется его число независимости [7]. Возможность применения к некоторым графам идеи удаления вершины с сохранением числа независимости доказывается далее.

Лемма 3.5. *Пусть x — центральная вершина связного графа $G = (V, E)$ из $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$, причем существуют такие несмежные вершины $y_1 \in N(x)$ и $y_2 \in N(x)$, что:*

- *для любой вершины $z \in N(x) \setminus N[y_1]$ выполнено включение $N(z) \setminus N[x] \subseteq N(y_1) \setminus N[x]$, причем для $z = y_2$ это включение строгое,*

- *никакая вершина из $N_2(y_1) \setminus (N(y_1) \cup N(x))$ несмежна ни с какой вершиной из $N(y_1) \setminus N[x]$,*

- *каждая вершина из $N(y_2) \setminus N[x]$ смежна со всеми вершинами множества $N(y_1) \setminus N[x]$.*

Тогда $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное наибольшее независимое множество графа G, которое обозначим через IS. Если ни одна из вершин множества $N(y_2) \setminus N[x]$ (по третьему условию порождающего в G полный подграф) не принадлежит IS, то из первых двух условий следует, что множество $IS \setminus \{x\} \cup \{y_2\}$ также является наибольшим независимым множеством графа G. Если хотя бы одна вершина $z \in IS$ принадлежит $N(y_2) \setminus N[x]$, то по третьему условию $(IS \cap N(y_1)) \setminus N[x] = \{z\}$. По первому условию существует такая вершина $z' \in N(y_1) \setminus (N(y_2) \cup N(x))$, что $(z', z) \in E$. Из первых двух условий следует, что $IS \setminus \{y_2, z'\} \cup \{x, z\}$ — наибольшее независимое множество графа G. В обоих возможных случаях справедливо равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x\})$. Лемма 3.5 доказана.

Другими полезными инструментами для установления НМ-простоты тех или иных классов оказываются некоторые соединения графов из уже известных НМ-простых классов. Одно из таких преобразований рассматривается далее. Именно, далее будет введено понятие композиции наследственных классов графов и доказано, что эффективная разрешимость задачи НМ сохраняется при композиции.

Пусть $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — два наследственных класса. *Композицией* $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ (обозначаемой через $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$) называется множество тех графов G, для которых существуют такие графы $G_1 \in \mathcal{X}_1, G_2 \in \mathcal{X}_2$ и подмножества $V_1 \subseteq V(G_1), V_2 \subseteq V(G_2)$, что $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup V_1 \times V_2$.

Лемма 3.6. *Если* $\mathcal{X}_1$ *и* $\mathcal{X}_2$ *— два* НМ-*простых класса, то их композиция* $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$ *тоже является* НМ-*простым классом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что композиция $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ является наследственным классом. Докажем, что этот класс является еще и НМ-простым. Пусть граф $G = (V, E)$ принадлежит классу $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$ и пусть $G_1 = (V_1', E_1'), G_2 = (V_2', E_2'), V_1, V_2$ — те графы и множества, которые для G фигурируют в определении композиции. Очевидно, что если $V_1 \times V_2 = \emptyset$ (т.е. если $V_1 = \emptyset$ или $V_2 = \emptyset$), то $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ и поэтому число независимости графа G вычисляется за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Если же $V_1 \times V_2 \neq \emptyset$, то любое независимое множество графа G содержит вершины из не более чем одного множества V_1 и V_2. Поэтому $\alpha(G) = \alpha(G[V_1' \setminus N(x)]) + \alpha(G[V \setminus V_2])$ (или $\alpha(G) = \alpha(G[V_2' \setminus N(y)]) + \alpha(G[V \setminus V_1])$), если некоторое наибольшее независимое множество графа G содержит хотя бы одну вершину $x \in V_1$ (или $y \in V_2$). Если же ни одна из вершин $V_1 \cup V_2$ не принадлежит ни одному наибольшему независимому множеству графа G, то $\alpha(G) = \alpha(G[V \setminus V_1]) + \alpha(G[V \setminus V_2])$. Поэтому в случае, когда $V_1 \times V_2$ непусто, справедливо равенство $\alpha(G) = \max(\max\limits_{x \in V_1} \alpha(G[V_1' \setminus N(x)]) + \alpha(G[V \setminus V_2]), \max\limits_{y \in V_2} \alpha(G[V_2' \setminus N(y)]) + \alpha(G[V \setminus V_1]), \alpha(G[V \setminus V_1]) + \alpha(G[V \setminus V_2]))$. Таким образом, число независимости графа G вычисляется за полиномиальное время независимо от пустоты множества $V_1 \times V_2$. Лемма 3.6 доказана.

Пусть G — связный граф класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\})$. Можно считать, что G не содержит смежно поглощающих вершин. Поскольку при любом s класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, K_{1,s}\})$ является НМ-простым [70], то можно также считать, что граф G содержит $K_{1,p+1}$ в качестве порожденного подграфа. По лемме 3.4 существует центральная вершина x графа G (радиуса не более чем 2), для которой $N(x)$ содержит $p+1$ независимых вершин $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$. Для каждой вершины $y \in N(x)$ через $N'(y)$ обозначим множество $N(y) \setminus N[x]$. Поскольку G не содержит смежно поглощающих вершин, то для любого такого y множество $N'(y)$ не пусто. На множестве вершин $N(x)$ введем отношение квазипорядка R' следующим образом:

$$uR'v \Leftrightarrow N'(u) \subseteq N'(v)$$

Квазипорядок R' на множестве $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}\}$ является линейным (по лемме 3.1). Поэтому существует такая вершина $y^* \in A$, что для любой вершины $y' \in A$ следует $N'(y') \subseteq N'(y^*)$. Рассмотрим квазипорядок R' на множестве $\{y \in N(x) : N'(y^*) \subseteq N'(y)\}$. На данном множестве этот квазипорядок не обязательно является линейным, но обязательно имеет максимальный элемент y_1. Ясно, что для любой несмежной с y_1 вершины $y \in N(x)$ (множество $B = N(x) \setminus N[y_1]$ обязательно непусто, т.к. иначе y_1 — смежно поглощающая вершина) выполнено включение $N'(y) \subseteq N'(y_1)$, причем если $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, то данное включение является строгим.

Обозначим через C множество вершин G, отстоящих от y_1 на расстоянии 2 и не принадлежащих множеству $N(x) \cup N(y_1)$.

Лемма 3.7. *Граф $G[C]$ принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{H\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C = \emptyset$, то утверждение очевидно. Если множество C не является пустым, то никакая вершина из C не является смежной ни с какой вершиной из $A \cup B$ (т.к. для любой вершины $y \in A \cup B$ имеет место включение $N'(y) \subseteq N'(y_1)$). Поэтому $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, поскольку в противном случае некоторые вершины из C, любые p вершин из A и вершина x порождают в G подграф $H \oplus K_{1,p}$. Лемма 3.7 доказана.

Лемма 3.8. *Если существуют две смежные вершины $z_1 \in C$ и*

$z_2 \in N'(y_1)$, *то* $G[B] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая из вершин множества B смежна с z_2, поскольку существование несмежной с z_2 вершины $y \in B$ означает, что вершины y, x, y_1, z_2, z_1 порождают P_5 (напомним, что $(y, z_1) \notin E(G)$). Значит, $G[B] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, поскольку в противном случае некоторые вершины из B и вершины x, z_2 порождают в G подграф $H \circ O_2$. Лемма 3.8 доказана.

Рассмотрим вершину y_2 — максимальный элемент множества B относительно квазипорядка R'. Ясно, что $G[N'(y_2)] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$ и что если $G[N'(y_1)] \notin \mathcal{F}ree(\{H\})$, то $N'(y_2) \subset N'(y_1)$. Понятно также, что для любой вершины $y \in B \setminus (A \cup N(y_2))$ справедливо включение $N'(y) \subseteq N'(y_2)$. Обозначим через D множество $N'(y_1) \setminus N'(y_2)$. В лемме 3.9 предполагается, что D непусто.

Лемма 3.9. *Если* $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{H\}), N'(y_2) \times D \nsubseteq E(G)$ *или* $N'(y_2) \times D \subseteq E(G)$ *и* $G[N'(y_2)]$ *не является полным, то* $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\}) \star \mathcal{F}ree(\{H\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что каждая вершина из $N'(y_2)$ либо одновременно смежна с каждой вершиной из D, либо одновременно несмежна ни с одной такой вершиной. Предположим противное, что существует вершина $z_1 \in N'(y_2)$, смежная с вершиной $z_2 \in D$ и несмежная с вершиной $z_3 \in D$. Заметим, что каждая несмежная с y_2 вершина $y \in B \setminus A$ должна быть смежна с вершиной z_1, т.к. в противном случае граф G содержит порожденный вершинами y, x, y_2, z_1, z_2 подграф P_5. Вместе с тем, каждая вершина y' из $N(y_2) \cap (B \setminus A)$ должна быть смежна с вершиной z_1, поскольку в противном случае граф G содержит порожденный вершинами y', y_2, z_1, y_1, z_3 подграф P_5 (если $(y', z_3) \notin E(G)$) или подграф C_5 (если $(y', z_3) \in E(G)$). Значит, каждая из вершин множества $B \setminus A$ одновременно смежна как с x, так и с z_1. Но т.к. G не содержит порожденного подграфа $H \circ O_2$, то $G[B \setminus A]$ не содержит порожденного подграфа H. Получаем противоречие с условием леммы. Поэтому предположение о существовании вершин z_1, z_2, z_3 неверно.

Пусть существуют такая вершина $a \in N'(y_2)$, которая несмежна ни с одной вершиной из D. При этом из рассуждений первого абзаца следует, что a смежна сразу со всеми вершинами из $N(y_2) \cap (B \setminus A)$. Т.к. граф $G[N(y_2) \cap (B \setminus A)]$ не принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{H\})$, а граф $G[B \setminus A]$ ему принадлежит, то из связности H следует существование таких двух смежных вершин $b \in N(y_2) \cap (B \setminus A)$ и $c \in B \setminus A$, что $(a, b) \in E(G)$ и $(a, c) \notin E(G)$. Но тогда вершина b должна быть смежна сразу со всеми вершинами из D, т.к. в противном случае в графе G есть порожденный вершинами c, b, a, y_1 и некоторой вершиной из D подграф P_5. Поэтому $G[D] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, т.к. все вершины из D одновременно смежны с несмежными вершинами b и y_1. Значит, $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\}) \star \mathcal{F}ree(\{H\})$.

Пусть теперь $N'(y_2) \times D \subseteq E(G)$ и граф $G[N'(y_2)]$ не является полным. Тогда существуют две несмежные вершины u и v, одновременно смежные сразу со всеми вершинами из D. Но тогда граф $G[D]$ не содержит H в качестве порожденного подграфа. Отсюда и первого абзаца утверждения следует, что $G[N'(y_1)]$ принадлежит композиции классов $\mathcal{F}ree(\{H\})$ и $\mathcal{F}ree(\{H\})$. Лемма 3.9 доказана.

Одним из основных результатов настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Если для некоторого связного графа H класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ является* НМ-*простым, то для любого p класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\})$ также является* НМ-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем идею ветвления по таким образом выбираемой вершине v текущего графа, что либо его подграф без v, либо его подграф без $N(v)$ принадлежит некоторому НМ-простому расширению класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Это обеспечивает возможность решения задачи НМ в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ O_2, H \oplus K_{1,p}\})$ за полиномиальное время. Можно считать, что текущим является граф $G = (V, E)$ из этого класса, удовлетворяющий всем условиям из начала этого раздела работы (связность, отсутствие смежно поглощающих вершин и не принадлежность классу $\mathcal{F}ree(\{K_{1,p+1}\})$). Опишем правила выбора вершины v.

- Если $G[B \setminus A] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ (что проверяется за полиномиальное время от числа вершин графа G), то положим $v = y_1$. В этом случае $G \setminus N(y_1) = G[C] \oplus G[(B \setminus A) \cup (A \setminus N(y_1))]$. По лемме 3.7 $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. В графе $G[(B \setminus A) \cup (A \setminus N(y_1))]$ рассмотрим всевозможные независимые подмножества множества $A \setminus N(y_1)$ (которых, очевидно, не более 2^{p+1} штук). Для каждого такого подмножества рассмотрим подграф графа $G[B \setminus A]$, порожденный всевозможными вершинами, несмежными с вершинами из выбранного подмножества. Такой подграф обязательно принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Значит, задача НМ для графа $G \setminus N(y_1)$ решается за полиномиальное время от числа его вершин.

- Если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$, $N'(y_2) \times D \nsubseteq E(G)$ или если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$, $N'(y_2) \times D \subseteq E(G)$ и $G[N'(y_2)]$ не является полным, то положим $v = x$. Из леммы 3.8 следует, что в этом случае $G[V \setminus (N(x) \cup \{x\})] = G[C] \oplus G[N'(y_1)]$. По лемме 3.7 $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Если D является пустым, то $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Если же D не является пустым, то $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\}) \star \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ (лемма 3.9). Поэтому из леммы 3.6 следует, что задача НМ для графа $G \setminus N(x)$ решается за полиномиальное время от числа его вершин.

- $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$, $N'(y_2) \times D \subseteq E(G)$ и $G[N'(y_2)]$ — полный граф, то по лемме 3.5 $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x\})$. Таким образом, третий случай сводится к первым двум за счет удаления избыточной вершины.

Теорема 3.4 доказана.

3.3 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе планарных графов, не содержащих больших порожденных яблок

Яблоком A_k называется граф, получаемый из цикла длины k добавлением одной вершины, смежной с произвольной вершиной цикла. В данном разделе для любого $s \geq 3$ рассматривается задача о независимом множестве в классе $\mathcal{P} \cap Free(\{A_s, A_{s+1}, \ldots\})$. Далее будет показана НМ-простота этого класса при любом фиксированном $s \geq 3$. Отсюда легко следует, что при любых фиксированных i и j класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,j}\})$ является НМ-простым. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,j}\}) \subseteq \mathcal{P} \cap Free(\{A_{i+j+1}, A_{i+j+2}, \ldots\})$.

3.3.1 Разделяющие клики и C-блоки

Разделяющая клика графа — множество вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности. *C-блоком* [32] называется максимальный порожденный подграф данного графа, не имеющий разделяющей клики. Известен полиномиальный алгоритм выделения всех C-блоков входного графа [32]. Известно также, что задача НМ для любого наследственного класса полиномиально сводится к той же задаче для его C-блоков [32].

3.3.2 Свойства планарных графов без больших порожденных звезд

Напомним, что *звездой* S_i называется граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. Для любого $i \geq 3$ не известно, является ли класс $\mathcal{P} \cap Free(\{S_i\})$ НМ-простым или НМ-сложным. В этом подразделе будет только доказано, что для произвольного фиксированного i задача НМ в классе графов $\mathcal{P} \cap Free(\{S_i\})$ полиномиально эквивалентна той же задаче для графов из этого класса, степени вершин которых ограничены некоторой константой, зависящей только от i.

Нашим главным алгоритмическим инструментом будут сжатия, описанные в работе [1]. *Сжатием* называется отображение множества вершин графа в себя, не являющееся автоморфизмом, при котором любые две различные несмежные вершины переходят в различные и несмежные. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порожденный подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Здесь мы будем использовать только сжатия первого и второго порядков, т.е. такие, при которых все вершины, кроме одной или двух, остаются неподвижными.

Сжатие φ первого порядка записывается в виде $\binom{a}{b}$, это означает, что $\varphi(a) = b$, а остальные вершины неподвижны. Такое преобразование действительно является сжатием тогда и только тогда, когда вершины a и b являются смежными, причем $N(b) \setminus \{a\} \subseteq N(a) \setminus \{b\}$ (т.е. когда a смежно поглощает b).

Преобразование $\binom{a\ b}{c\ d}$ $(\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, остальные неподвижны) является сжатием второго порядка, если:

- $c \neq d$;
- в графе есть ребра (a, c) и (b, d) и нет ребер (a, b) и (c, d);
- каждая вершина, смежная с вершиной c, кроме a и b, смежна и с a;
- каждая вершина, смежная с вершиной d, кроме a и b, смежна и с b.

Граф назовем *несжимаемым*, если для него нет сжатий первого и второго порядка. Несжимаемый подграф данного графа, получающийся из него последовательностью сжатий первого и второго порядка, называется 2-*основой* графа. Граф может иметь несколько 2-основ (например, у графа C_4 их две), но, как показано в [1], все они изоморфны. Очевидно, 2-основа графа может быть найдена за полиномиальное время.

Лемма 3.10. *Пусть G — несжимаемый граф из $\mathcal{P} \cap Free(\{S_i\})$, a и b —*

его вершины, $d(a,b)=2$. Тогда $|N(a)\cap N(b)|\le 4i+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вершину $x\in N(a)\cap N(b)$ назовем

- *особой*, если каждая смежная с x вершина, кроме a и b, принадлежит $N(a)\cap N(b)$;
- *a-чистой* (соответственно, *b-чистой*), если существует вершина, смежная с x и несмежная с вершиной a (соответственно, с вершиной b).

Отметим, что каждая вершина из $N(a)\cap N(b)$ принадлежит к одной из этих трех категорий. Оценим число вершин каждого типа.

Допустим, имеется четыре особые вершины. Тогда, ввиду планарности графа G, среди них найдутся две несмежные. Пусть это вершины x и y. Но тогда отображение $\binom{a\ b}{x\ y}$ является сжатием. Следовательно, имеется не больше трех особых вершин.

Допустим, имеется $2i$ a-чистых вершин. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Она определяет циклическое упорядочение ребер, инцидентных каждой вершине, а следовательно, и смежных вершин. Пусть $x_1,\dots,x_{2i}$ — a-чистые вершины, расположенные в циклическом порядке, определяемом данной укладкой, относительно вершины a. Пусть y_j — произвольная вершина, смежная с x_j и несмежная с a. Некоторые из вершин множества $\{y_1,y_2,\dots,y_{2i}\}$ могут совпадать, но вершины $y_1,y_3,y_5,\dots,y_{2i-1}$ попарно различны и не смежны между собой. Тогда множество $\{a,x_1,x_3,x_5,\dots,x_{2i-1},y_1,y_3,y_5,\dots,y_{2i-1}\}$ порождает подграф S_i. Таким образом, имеется не более $2i-1$ a-чистых и не более $2i-1$ b-чистых вершин, а всего не более $4i+1$ вершин в $N(a)\cap N(b)$. Лемма 3.10 доказана.

Лемма 3.11. *В несжимаемом графе из $\mathcal{P}\cap Free(\{S_i\})$ степень каждой вершины не превосходит $16i^2-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — вершина степени d в несжимаемом графе $G \in \mathcal{P} \cap Free(\{S_i\})$. Рассмотрим двудольный подграф H, образованный множествами вершин $A = N(a)$, $B = N_2(a)$ и всеми ребрами графа G, соединяющими вершины из A с вершинами из B. Пусть π — мощность наибольшего паросочетания, а β — мощность наименьшего вершинного покрытия графа H. По теореме Кенига $\pi = \beta$.

Если вершина $x \in A$ не смежна ни с одной вершиной из B, то отображение $\binom{a}{x}$ является сжатием. Следовательно, каждая вершина из A смежна хотя бы с одной вершиной из B и в графе H имеется d ребер, попарно не имеющих общих вершин в множестве A. По лемме 3.10 каждая вершина из множества B имеет в графе H степень не более $4i + 1$. Значит, для того, чтобы покрыть эти d ребер, требуется не менее $\frac{d}{4i+1}$ вершин. Следовательно, $\pi \geq \frac{d}{4i+1}$.

Возьмем в графе H какое-либо паросочетание с π ребрами и рассмотрим планарный граф $H^{'}$, полученный из графа H стягиванием всех ребер этого паросочетания. Если $d \geq (4i + 1)(4i - 1) + 1$, то в графе $H^{'}$ не менее $4i$ вершин. Из теоремы о четырех красках следует, что в графе $H^{'}$ имеется независимое множество, состоящее из i вершин. Вершинам этого множества в графе H соответствуют $2i$ ребер, образующие вместе с инцидентными им вершинами порожденный подграф iK_2. Но тогда эти $2i$ вершин вместе с вершиной a порождают в графе G звезду S_i. Лемма 3.11 доказана.

Из леммы 3.11 и возможности выделения 2-основы за полиномиальное время следует обозначенное в начале данного абзаца сведение.

3.3.3 Минорно безапексные графы большой древесной ширины

Граф называется *апексным*, если удаление некоторой его вершины приводит к планарному подграфу. Например, граф K_5 является апексным, поскольку удаление любой его вершины приводит к планарному подграфу K_4. Граф H называется *минором* графа G, если H может быть получен из графа G применением (возможно, вперемешку) удалений вершин и ребер и стягиваний ребер. Если граф H не является минором графа G, то G называется

H*-безминорным.* Скажем, из критерия Вагнера следует, что любой планарный граф является как K_5-безминорным, так и $K_{3,3}$-безминорным.

В [35] доказано следующее утверждение.

Лемма 3.12. *Для любого фиксированного апексного графа H и любых фиксированных натуральных чисел k, s, d существует такое натуральное число $N = N(H, k, s, d)$, что для любого H-безминорного графа G древесной ширины не менее чем N и любого его непустого подмножества вершин S $(|S| \leq s)$ граф G содержит простой цикл C, обладающий следующими двумя свойствами:*

- *каждая вершина графа G не смежна с некоторыми k последовательными вершинами цикла C,*
- *расстояние между S и C (т.е. наименьшее среди попарных расстояний между двумя вершинами, одна из которых принадлежит S, а другая C) не менее чем d.*

3.3.4 Доказательство основного результата первой части главы

Теорема 3.5 является основным результатом этого раздела работы.

Теорема 3.5. *Для любого фиксированного $k \geq 3$ задача* НМ *в классе $\mathcal{P} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ полиномиально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathcal{P} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$. Не уменьшая общности можно считать, что граф G является несжимаемым и не содержит разделяющих клик. Если $G \in Free(\{S_{11}\})$, то из леммы 3.11 следует, что степень каждой вершины графа G не превосходит 1935. Известно [61], что для любых фиксированных d и k класс графов $\mathcal{D}eg(d) \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Таким образом, можно считать, что граф G содержит порожденный подграф S_{11}. Вершину степени 11 этого подграфа обозначим через a, вершины степени 2 обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$, а вершины степени 1 обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$. Будем считать, что $(b_1, c_1) \in E(G), (b_2, c_2) \in E(G), \ldots, (b_{11}, c_{11}) \in E(G)$.

Пусть $N = N(K_5, 6k - 14, 23, [\frac{k}{2}] + 3)$ — число, определенное в лемме 3.12. Покажем, что древесная ширина графа G не превосходит N. Предположим противное. Пусть S — множество вершин звезды S_{11}. Тогда из леммы 3.12 следует, что граф G содержит простой цикл C, для которого выполняются два следующих свойства:

- каждая вершина графа G не смежна с некоторыми $6k - 14$ последовательными вершинами цикла C,
- расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}] + 3$.

Центральное место в доказательстве теоремы 3.5 занимает утверждение 1.

Утверждение 1. *Граф G содержит простой цикл, проходящий через вершину a и некоторые вершины цикла C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. G не содержит разделяющих клик, то этот граф является двусвязным. Таким образом, существуют два непересекающиеся по вершинам простых пути, соединяющие вершину a с некоторыми двумя вершинами цикла C. Пусть $P_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и $P_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_q)$ — два простых пути, где вершины x_1 и y_1 смежны с вершиной a, а вершины x_p и y_q смежны с некоторыми вершинами из C. Можно считать, что суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная. Это означает, что среди вершин путей P_1 и P_2 вершина a смежна только с x_1 и y_1. Аналогично, ни одна из вершин этих путей, кроме x_p и y_q, не смежна ни с одной из вершин цикла C. Для доказательства утверждения 1 нам понадобятся еще четыре утверждения.

В справедливости утверждения 2 легко убедиться непосредственной проверкой.

Утверждение 2. *Любая из вершин графа G смежна не более чем с 4 вершинами цикла C. Более того, если вершина v графа G смежна ровно с 2 вершинами цикла C, то либо эти вершины стоят последовательно, либо между ними находится ровно 1 вершина. Если v смежна ровно с 3 вершинами из C, то эти три вершины стоят последовательно. Если v смежна ровно с 4 вершинами цикла C, то эти вершины можно разбить на 2 пары смежных вершин.*

Утверждение 3. *Множество вершин цикла C, которые смежны с вершиной x_p, состоит в точности из двух смежных вершин. Это же верно и для вершины y_q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что вершина x_p смежна хотя бы с двумя вершинами цикла C. Рассмотрим максимальный путь $P^{'}$, образованный последовательными вершинами цикла C, с каждой из которых вершина x_p не смежна. Данный путь содержит не менее чем $6k - 14$ вершин. Из максимальности пути $P^{'}$ следует, что существуют такие различные вершины u и v цикла C, каждая из которых смежна с вершиной x_p и с одной из концевых вершин пути $P^{'}$. Если вершины u и v являются несмежными, то для некоторого $s \geq k$ граф G содержит порожденный вершинами пути $P^{'}$ и вершинами u, v, x_p, x_{p-1} подграф A_s. Последнее невозможно, поэтому вершины u и v являются смежными. Отсюда следует справедливость первой части утверждения 3. Вторая часть утверждения может быть доказана по аналогии с первой. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Существует вершина цикла C, которая смежна только с одной из вершин множества $\{x_p, y_q\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда из утверждения 3 следует, что существуют две такие последовательные вершины u и v цикла

C, каждая из которых смежна с x_p и y_q. Т.к. граф G является C-блоком, то в любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_p, y_q\}$ расположена внутри цикла C, другая снаружи этого цикла. Но тогда существуют два пути, соединяющие вершину a с двумя вершинами C, суммарная длина которых меньше суммарной длины P_1 и P_2. Получаем противоречие. Утверждение доказано.

Любое ребро графа G, соединяющее вершину пути P_1 с вершиной пути P_2, назовем (P_1, P_2)-*хордой.*

Утверждение 5. *Если граф G содержит (P_1, P_2)-хорды, то (x_1, y_1) — единственная (P_1, P_2)-хорда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x_i, y_j) — (P_1, P_2)-хорда, отличная от (x_1, y_1), для которой величина $i+j$ принимает максимально возможное значение. Т.к. G не содержит больших порожденных яблок, то x_i смежна с y_{j-1} и y_j смежна с x_{i-1} (считаем, что $x_0 = y_0 = a$). Отсюда следует, что $i > 1$ и что $j > 1$. Рассмотрим цикл C', образованный вершинами $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_q$ и частью вершин цикла C. В любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_{i-1}, y_{j-1}\}$ расположена внутри цикла C', другая снаружи. Это невозможно, т.к. противоречит выбору путей P_1 и P_2 (см. утверждение 4). Утверждение доказано.

Продолжим доказательство утверждения 1. Из утверждения 5 следует, что если (x_1, y_1) не является (P_1, P_2)-хордой, то желаемый цикл образуется вершиной a, вершинами путей P_1 и P_2, а также не менее чем $3k-7$ последовательными вершинами цикла C. Поэтому можно считать, что $(x_1, y_1) \in E(G)$. Обозначим через C' простой цикл, образованный вершинами путей P_1, P_2 и некоторыми последовательными вершинами цикла C, которые образуют простой путь P' длины не менее чем $3k-6$.

Т.к. G не содержит разделяющих клик, то среди вершин $b_1, b_2, \dots, b_{11}$ существует вершина z_1, не смежная ни с x_1, ни с y_1. Покажем, что z_1 не смежна ни с одной вершиной цикла C'. Поскольку суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная, то вершина z_1 не смежна ни с одной из вершин множества $\{x_3, x_4, \dots, x_p, y_3, y_4, \dots, y_q\}$. Легко проверить, что z_1 не смежна также ни с x_2, ни с y_2 (ввиду того, что граф G не содержит больших порожденных яблок).

Поскольку граф G не содержит разделяющих клик, то в графе $G[V(G) \setminus \{a, x_1, y_1\}]$ существует путь, одна из концевых вершин которого совпадает с z_1, а другая смежна с некоторой вершиной цикла C'. Пусть $P_3 = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ — кратчайший среди таких путей. Понятно, что $r > 1$. Из утверждения 2 следует, что вершина z_r не может быть смежна с 5 вершинами пути P'. Поэтому из того же утверждения 2 следует, что существует не менее чем $k-3$ последовательных вершин пути P', не смежных с вершиной z_r. Значит, существуют $k-3$ последовательных вершин цикла C', каждая из которых не смежна с z_r. По аналогии с утверждением 3 можно показать, что множество вершин цикла C', которые смежны с вершиной z_r, состоит в точности из двух смежных вершин. Аналогично утверждению 4 можно показать, что либо $(z_r, x_1) \notin E(G)$, либо $(z_r, y_1) \notin E(G)$. По аналогии с утверждением 5 можно показать, что единственным ребром, инцидентным вершине a и некоторой вершине пути P_3, может быть только ребро (a, z_2). Таким образом, граф G имеет простой цикл, содержащий вершину a и некоторые вершины цикла C. Первое утверждение доказано.

Вернемся к непосредственному доказательству теоремы. Пусть $C^* = (a, v_1, v_2, \dots, v_s)$ — простой цикл, содержащий вершину a и часть вершин цикла C. Вершины цикла C^*, принадлежащие циклу C, обозначим через $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$. Т.к. расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}] + 3$, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \dots, b_{11}$ не смежна ни с одной из вершин множества

$\{v_{i-[\frac{k}{2}]}, v_{i-[\frac{k}{2}]+1}, \ldots, v_{[\frac{k}{2}]+j}\}$. Ясно, что среди вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ не менее девяти вершин не принадлежат циклу C^*. Среди этих девяти вершин не менее пяти не смежны ни с v_1, ни с v_s (в противном случае либо ребро (v_s, a), либо ребро (a, v_1) принадлежит трем треугольникам, поэтому граф G содержит разделяющую клику). Не уменьшая общности можно считать, что вершины $b_1, b_2, \ldots, b_5$ принадлежат циклу C^* и каждая из них не смежна ни с v_1, ни с v_s. Поскольку граф G не содержит больших порожденных яблок, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_5$ не может быть смежна ни с одной из вершин множества $\{v_3, v_4, \ldots, v_{i-[\frac{k}{2}]-1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+2}, \ldots, v_{s-2}\}$. По тем же причинам ни одна из этих пяти вершин не может быть одновременно смежна и с v_2 и с v_{s-1} или одновременно несмежна ни с v_2, ни с v_{s-1}. Таким образом, либо вершина v_2, либо вершина v_{s-1} смежна с тремя из рассматриваемых пяти вершин. Можно считать, что вершина v_2 смежна с тремя такими вершинами. Тогда в любой плоской укладке графа G среди данных трех вершин существуют такие вершины b_i и b_j, что вершина b_j лежит внутри цикла (a, b_i, v_2, v_1). Рассмотрим 2 возможных случая:

1. $(c_j, v_2) \notin E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_j и c_j образуют большое порожденное яблоко.

2. $(c_j, v_2) \in E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_i и c_j образуют большое порожденное яблоко.

Таким образом, предположив, что древесная ширина графа G не менее чем N, мы пришли к противоречию. Поэтому $tw(G) < N$. Отсюда следует, что при любом фиксированном k класс $\mathcal{P} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым (поскольку для любого фиксированного t класс $\mathcal{TW}(\infty, t)$ является НМ-простым [37]). Теорема 3.5 доказана.

3.4 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе субкубических планарных графов без порожденного подграфа $T_{2,2,i}$

Напомним, что графы из класса $\mathcal{D}eg(3)$ иногда называются *субкубическими*. Класс планарных субкубических графов обозначается через $\mathcal{P}(3)$. Далее будет доказано, что для любого фиксированного i класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$ является НМ-простым.

3.4.1 Вспомогательные результаты

Планером называется граф, получаемый добавлением к графу $K_{2,3}$ с долями x_1, x_2, x_3 и x_4, x_5 вершин x_6, x_7 и ребер $(x_1, x_6), (x_3, x_7)$. В этом и следующих параграфах будут многократно использоваться термины «независимое множество» и «наибольшее независимое множество». Для первого из них используется сокращение н. м., а для второго н. н. м.

Лемма 3.13. *Пусть граф $G \in \mathcal{P}(3)$ содержит планер и является C-блоком, тогда $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что вершина x_2 обязательно имеет степень два. Предположим противное, тогда $deg(x_2) = 3$. Поскольку граф G является планарным C-блоком (следовательно, двусвязным графом) со степенями всех вершин не более чем три, то существует путь, соединяющий x_2 с x_1 (или с x_3), не содержащий ни x_4, ни x_5 и содержащий вершину x_6 (или вершину x_7, соответственно). В этом легко убедиться, рассмотрев оба возможных способа расположения вершины x_2 в плоской укладке графа G (внутри цикла (x_1, x_4, x_3, x_5) и вне его) и заметив, что в противном случае $\{x_2\}$ — разделяющая клика графа G. Но тогда из-за планарности G и ограничений на значения степеней вершин этого графа, множество $\{x_3\}$ (соответственно, $\{x_1\}$) является разделяющей кликой. Получаем противоречие с предположением. Значит, $deg(x_2) = 2$.

Покажем теперь, что существует н. н. м. графа G, которое либо одновременно содержит вершины x_4 и x_5, либо одновременно содержит вершины x_1, x_2, x_3. Ясно, что каждое н. н. м. графа G либо одновременно содержит и x_4 и x_5, либо не содержит ни x_4, ни x_5. Вместе с тем, если x_4 и x_5 одновременно не принадлежат некоторому н. н. м. графа G, то вершина x_2 и ровно по одной вершине в каждой из пар (x_1, x_6) и (x_3, x_7) принадлежат этому н. н. м. Но тогда из данного н. н. м. можно удалить вершины каждой из пар и добавить x_1 и x_3, в результате снова получится н. н. м. графа G. Таким образом, доказано существование н. н. м. графа G с указанными в начале абзаца свойствами. Нетрудно убедиться и в том, что существует н. н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$, содержащее либо x_1 и x_3, либо x_5.

Из предыдущего абзаца следует, что из некоторого н. н. м. графа G можно так удалить вершину (x_2 или x_4), что в результате получиться н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$. Поэтому $\alpha(G) \leq \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$. С другой стороны, к любому н. н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$ можно так добавить вершину (x_2 или x_4), что в результате получится н. м. графа G. Поэтому $\alpha(G) \geq \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$. Из обоих неравенств следует утверждение леммы. Лемма 3.13 доказана.

Лемма 3.14. *Пусть H — произвольный граф и H содержит цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (не обязательно порожденный), причем $(x_2, x_4) \notin E(H)$ и $(x_3, x_5) \notin E(H)$. Если $deg(x_2) = deg(x_5) = 2$ или $deg(x_2) = deg(x_5) = 3$ и $(x_2, x_5) \in E(H)$, то $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть IS — н. н. м. графа H. Если $x_1 \notin IS$, то $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$. Пусть теперь $x_1 \in IS$, тогда x_2 и x_5 не принадлежат IS. Среди x_3 и x_4 не более одной вершины принадлежит IS. Следовательно, существует вершина $x \in \{x_2, x_5\}$, смежная с вершиной из $\{x_3, x_4\}$, не принадлежащей множеству IS. Тогда $IS \cup \{x\} \setminus \{x_1\}$ — н. н. м. графа H. Поэтому $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$. Лемма 3.14 доказана.

3.4.2 Присоединенные циклы и их разрушение

Пусть G — C-блок из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$, содержащий яблоко A_k ($k \geq 10$). Порожденный цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ графа G назовем *присоединенным* (*к яблоку* A_k), если $a_0 = x_5, a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3$. Ясно, что вершина x_4 не может быть смежна ни с одной из вершин $a_6, a_7, \dots, a_{k-1}$, т.к. в противном случае граф G содержал бы порожденный подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому среди вершин из $V(A_k)$ вершина x_4 может быть смежна только с a_k, a_4 и a_5. При скрупулезном анализе окрестностей некоторых вершин обнаруживаются определенные свойства наибольших независимых множеств графа G. Именно, всегда можно указать вершину присоединенного цикла (исходя из состава этих окрестностей), не входящую в некоторое н. н. м. графа G. Удаление данной вершины не изменяет числа независимости, а сам механизм разрушения присоединенных циклов является важной составляющей алгоритма решения задачи НМ в классе $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Упомянутый анализ окрестностей составляют доказательства лемм 3.15–3.17.

Лемма 3.15. *Пусть $deg(x_2) = 2$. Если $deg(x_4) = 2$ или $deg(x_5) = 2$ или вершина x_4 смежна только с вершинами яблока A_k, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$. Во всех остальных случаях $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что существует такая вершина b, для которой $(b, x_5) \in E(G), b \neq x_1, b \neq x_4$ (иначе по лемме 3.14 выполнено равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$). Вершина b должна быть смежна либо с вершиной a_k, либо с вершиной a_{k-1} (т.к. противное приводит к порожденному вершинами $a_1, a_0, b, a_k, a_{k-1}, a_2, a_3$ подграфу $T_{2,2,2}$ графа G).

Будем сперва предполагать, что x_4 смежна только с вершинами яблока A_k или что $deg(x_4) = 2$. Покажем, что вершины x_4 и a_5 обязательно являются несмежными (откуда будет следовать, что либо $deg(x_4) = 2$, либо $(x_4, a_4) \in E(G)$, либо $(x_4, a_k) \in E(G)$). Предположим противное. Вершины b

и a_6 должны быть смежными, т.к. в противном случае G содержит порожденный вершинами $x_4, x_5, b, x_3, x_2, a_5, a_6$ подграф $T_{2,2,2}$. Значит, вершина b не смежна ни с вершиной a_7, ни с вершиной a_8 (т.к. $k \geq 10$). Но тогда граф G содержит порожденный вершинами $a_6, a_5, a_4, b, a_0, a_7, a_8$ подграф $T_{2,2,2}$. Получаем противоречие с предположением.

Покажем теперь, что существует наибольшее независимое множество графа G, не содержащее вершины x_1. Отсюда будет следовать первая часть утверждения леммы. Рассмотрим IS — произвольное н. н. м. графа G. Можно считать, что $x_1 \in IS$ (иначе $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$). Если $x_3 \notin IS$, то $IS \cup \{x_2\} \setminus \{x_1\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_3 \in IS$, то множество вершин $IS \cup \{x_2, x_4\} \setminus \{x_1, x_3\}$ тоже является н. н. м. графа G (ввиду того, что либо $deg(x_4) = 2$, либо $(x_4, a_k) \in E(G)$, либо $(x_4, a_4) \in E(G)$).

Далее будем предполагать, что вершина x_4 смежна с вершиной $x \notin V(A_k)$. Вершины b и x_4 несмежны (поэтому $b \neq x$), т.к. иначе $b = x$ и либо вершины $x_1, a_k, a_{k-1}, x_5, x, x_2, x_3$, либо вершины $x_3, x_2, x_1, x_4, x, a_4, a_5$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Покажем, что существует н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_4. Отсюда следует вторая часть утверждения леммы. Пусть IS' — некоторое н. н. м., содержащее x_4 (если такого множества не найдется, то утверждение очевидно). Если ни одна из вершин b и x_1 не принадлежит IS', то $IS' \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}$ — н. н. м. графа G. Если ровно одна вершина $y \in \{x_1, b\}$ принадлежит IS', то множество $IS' \cup \{x_5, x_2\} \setminus \{x_4, y\}$ тоже является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что и b и x_1 принадлежат IS'. Наконец, можно предполагать, что $a_4 \in IS'$ (и поэтому $(b, a_4) \notin E(G)$), иначе $IS' \cup \{x_3\} \setminus \{x_4\}$ является н. н. м. графа G.

Напомним, что вершина b должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1}, a_k. Через a_i обозначим вершину из $\{a_{k-1}, a_k\}$, смежную с b и имеющую минимальный индекс (среди этих вершин сразу обе могут быть смежны с b). Вершина x обязательно смежна с хотя бы одной из вершин a_4 и a_5 (в противном случае G содержит порожденный множеством вершин $\{x_3, x_2, x_1, x_4, x, a_4, a_5\}$ подграф $T_{2,2,2}$). Покажем, что вершины b и x не являются смежными. Предположим противное, тогда вершина b смежна ровно с одной вершиной из $\{a_{k-1}, a_k\}$. Ясно, что вершина x должна быть смежна либо с a_{i-1}, либо с a_{i-2} (иначе G содержит порожденный вершинами $a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, b, x, a_{i+1}, a_{i+2}$ подграф $T_{2,2,2}$, где индексы вершин понимаются по модулю k). Получаем противоречие, т.к. x должна быть смежна с x_4, с b, с a_4 или a_5, с a_{i-1} или a_{i-2}. На самом деле вершина x несмежна с вершиной a_5 (следовательно, она обязательно смежна с a_4), поскольку в противном случае граф G содержит порожденный вершинами $x_4, x_5, b, x_3, x_2, x, a_5$ подграф $T_{2,2,2}$.

Заметим, что если вершина x смежна с некоторой вершиной y, отличной от x_4 и не принадлежащей яблоку A_k, то вершины b и y обязательно должны быть смежными, иначе вершины $x_4, x_5, b, x, y, x_3, x_2$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому множество $IS' \cup \{x_3, x\} \setminus \{a_4, x_4\}$ является н. н. м. графа G. Лемма 3.15 доказана.

Лемма 3.16. *Пусть $deg(x_5) = 2$ и существует вершина $c \notin V(A_k)$, смежная с x_2. Если множество $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ не является независимым, то $\alpha(G) = \alpha(G \backslash \{x_4\})$. Если оно является независимым, то $\alpha(G) = \alpha(G \backslash \{x_3\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ не является независимым. Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \backslash \{x_4\})$. Пусть IS — некоторое н. н. м. графа G, содержащее вершину x_4 (если такого н. н. м. не найдется, то, очевидно, $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$). Если $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ не является независимым, то хотя бы одна из вершин x_1, c, a_4 не принадлежит IS. Отсюда следует, что хотя бы одно из множеств $IS \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}, IS \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_4\}, IS \cup \{x_3, x_5\} \setminus \{x_1, x_4\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что множество $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ является независимым.

Предположим, что есть вершина $a' \notin V(A_k)$, смежная с a_4. Покажем, что вершина a' должна быть смежна с c. Предположим противное, тогда вершина a' обязательно должна быть смежна с x_4, т.к. иначе вершины $a_3, a_2, c, x_4, x_5, a_4, a'$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. Ясно, что c должна быть смежна или с a_k, или с a_{k-1}, т.к. в противном случае вершины $x_1, x_5, x_4, x_2, c, a_k, a_{k-1}$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. При этом, вершина c не может быть смежна с вершиной a_{k-1} (и поэтому она смежна с a_k), т.к. иначе вершины $a_2, c, a_{k-1}, a_1, a_0, a_3, a_4$ порождают $T_{2,2,2}$. Вершина c должна быть смежна с вершиной a_5, поскольку в противном случае вершины $x_3, x_4, x_5, x_2, c, a_4, a_5$ порождают подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$. Но тогда вершины $a_k, c, a_5, a_{k-1}, a_{k-2}, a_1, a_0$ порождают подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$. Получили противоречие с предположением.

Возможны два взаимно исключающих случая — либо вершины x_4 и a_5 являются смежными, либо они таковыми не являются. Рассмотрим отдельно каждый из данных случаев.

1. Вершины x_4 и a_5 не являются смежными. Вершина c должна быть смежна с вершиной a_5, т.к. в противном случае граф G содержит порожденный множеством вершин $\{x_3, x_2, c, x_4, x_5, a_4, a_5\}$ подграф $T_{2,2,2}$. Вершина c не может быть смежна с a_k, т.к. иначе G содержит порожденный вершинами $a_k, a_1, a_0, c, a_5, a_{k-1}, a_{k-2}$ подграф $T_{2,2,2}$. Вершина x_4 должна быть смежна с вершиной a_k, т.к. иначе вершины $x_2, c, a_5, x_3, x_4, a_1, a_k$ порождают подграф $T_{2,2,2}$.

Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$. Пусть IS' — некоторое н. н. м., содержащее вершину x_3 (если такого множества не найдется, то равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$ очевидно). Если ни одна из вершин x_1, c не принадлежит IS', то $IS' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ является н. н. м. графа G. Если $x_1 \in IS'$, а $c \notin IS'$, то $IS' \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Если $x_1 \notin IS'$, а $c \in IS'$, то $IS' \cup \{x_2, a_4\} \setminus \{c, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Наконец, если $c \in IS'$ и $x_1 \in IS'$, то множество $IS' \cup \{x_2, x_5, a_4\} \setminus \{x_1, x_3, c\}$ является н. н. м. графа G. Равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$ доказано.

2. Вершины x_4 и a_5 являются смежными. Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$.

Ясно, что вершина c должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1} и a_k, иначе вершины $a_1, a_k, a_{k-1}, x_5, x_4, a_2, c$ порождают в G подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$. Вместе с тем, она не может быть смежна с a_{k-1} (значит, смежна с a_k), т.к. в противном случае есть порожденный вершинами $a_2, c, a_{k-1}, a_1, a_0, a_3, a_4$ подграф $T_{2,2,2}$.

Пусть IS'' — н. н. м., содержащее вершину x_3. Если $c \notin IS''$, то либо $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$, либо $IS'' \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что $c \in IS''$, а следовательно, и $a_k \notin IS''$. Если $a_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{a_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что $c \in IS'', x_3 \in IS'', a_5 \in IS''$. Если $x_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{a_4, x_4\} \setminus \{x_3, a_5\}$ — н. н. м. графа G, а если все же $x_5 \in IS''$, то $IS'' \cup \{a_4, x_1, x_4\} \setminus \{x_3, x_5, a_5\}$ — н. н. м. графа G. Таким образом, всегда существует наибольшее независимое множество графа G, не содержащее x_3 (значит, $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$). Лемма 3.16 доказана.

Лемма 3.17. *Пусть вершина x_5 смежна с вершиной $b \notin V(A_k) \cup \{x_4\}$, а вершина x_2 смежна с вершиной $c \notin V(A_k)$. Если $b = c$ и x_4 смежна с a_4 или x_4 смежна с $x \notin V(A_k)$, а x смежна с a_5 и несмежна с a_4, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$. Если $b \neq c$ и b смежна с a_k, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$. Во всех остальных случаях $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_5\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Рассмотрим по отдельности два случая — когда вершины b и c не совпадают и когда они являются совпадающими.

1. Пусть $b \neq c$. При доказательстве леммы 3.15 показано, что в случае $deg(x_5) > 2$ вершины x_4 и a_5 должны быть несмежными (и степень вершины x_2 на справедливость этого факта не влияет). Вершина b должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1}, a_k. Понятно, что вершина x_4 не может быть смежна с вершиной a_k, иначе планарность графа G препятствовала бы смежности b с вершиной a_{k-1}. Ввиду планарности графа G, либо вершины x_4 и c

несмежны, либо $(x_4, c) \in E(G)$ и $(a_{k-1}, c) \notin E(G), (a_k, c) \notin E(G)$. Докажем, что в действительности вершины x_4 и c должны быть смежными. Предположим противное. Вершина c должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\{a_{k-1}, a_k\}$ (иначе есть порожденный вершинами $x_1, x_2, c, x_5, x_4, a_k, a_{k-1}$ подграф $T_{2,2,2}$ графа G). Покажем, что $(a_{k-1}, c) \notin E(G)$ (следовательно, $(a_k, c) \in E(G)$ и $(a_{k-1}, b) \in E(G)$). Пусть $(a_{k-1}, c) \in E(G)$, следовательно, $(a_k, b) \in E(G)$. Если $(c, a_4) \notin E(G)$, то вершины $x_2, x_1, x_5, c, a_{k-1}, a_3, a_4$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$, а если $(c, a_4) \in E(G)$, то вершины $c, x_2, x_1, a_{k-1}, a_{k-2}, a_4, a_5$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Ни одна из вершин b, c не может быть смежна ни с a_{k-2}, ни с a_{k-3}. Если вершина b смежна с вершиной $a \in \{a_{k-3}, a_{k-2}\}$, то в G есть порожденный вершинами $x_5, b, a, a_1, a_k, x_4, x_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Если же вершина c смежна с вершиной $a \in \{a_{k-3}, a_{k-2}\}$, то в G есть порожденный вершинами $x_2, c, a, x_1, x_5, a_3, a_4$ подграф $T_{2,2,2}$. Но тогда вершины $a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}, b, x_5, a_k, c$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Итак, вершины x_4 и c обязательно являются смежными. Тогда $deg(c) = 2$, иначе (ввиду планарности G) множество $\{c\}$ было бы разделяющей кликой.

Покажем, что если вершина b смежна с a_k, то существует н. н. м. графа G, не содержащее x_4. Пусть IS — н. н. м. графа G. Можно считать, что $x_4 \in IS$. Если хотя бы одна из вершин x_2 и b не принадлежит IS, то либо $IS \cup \{c\} \setminus \{x_4\}$, либо $IS \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}$ является н. н. м. графа G. Если вершины x_2, x_4, b принадлежат IS, то $IS \cup \{x_1, c\} \setminus \{x_2, x_4\}$ является н. н. м. графа G и это множество не содержит x_4.

Докажем, что если вершина b смежна с вершиной a_{k-1}, то существует н. н. м. без вершины x_5. Если существует вершина x, смежная с a_k (соответственно, с b) и не принадлежащая $V(A_k)$, то она должна быть соседней с вершиной b (соответственно, с a_k). Действительно, если $(x, a_k) \in E(G)$ и $(x, b) \notin E(G)$, то в G есть порожденный вершинами $a_1, a_0, b, a_k, x, a_2, a_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Если же $(x, b) \in E(G)$ и $(x, a_k) \notin E(G)$, то в G есть порожденный вершинами $a_0, b, x, a_1, a_k, x_4, x_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Пусть IS' — н. н. м., содержащее вершину x_5. Если $a_k \in IS'$, то $IS' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G.

Если $x_2 \in IS'$ и $a_k \notin IS'$, то $IS' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если же ни a_k, ни x_2 не принадлежат множеству IS', то $IS' \cup \{x_1\} \setminus \{x_5\}$ – н. н. м. графа G.

2. Пусть теперь $b = c$. Вершина x_4 не может быть смежна с вершиной a_k, т.к. противное приводит к подграфу $T_{2,2,2}$, порожденному вершинами $x_4, a_k, a_{k-1}, x_5, b, a_3, a_4$. Покажем, что если вершина x_4 смежна с вершиной a_4, то существует н. н. м. графа G, не содержащее x_3. Ясно, что $deg(b) = 2$, т.к. в противном случае множество $\{b\}$ является разделяющей кликой. Пусть IS'' — н. н. м. графа G, содержащее x_3. Если $x_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{x_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Если же $x_5 \in IS''$, то $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Итак, в обоих случаях есть н. н. м., не содержащее вершины x_3. Докажем также, что если x_4 смежна с вершиной $x \notin V(A_k)$, а x смежна с a_5 и несмежна с a_4, то есть н. н. м., не содержащее x_3. Пусть IS'' — некоторое н. н. м. графа G, содержащее вершину x_3. Если существует вершина y, смежная с a_4 и не принадлежащая $V(A_k)$, то она должна быть смежна и с x, иначе вершины $x_3, x_4, x, a_4, y, a_2, a_1$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. Отсюда следует, что если $x \in IS''$, то $IS'' \cup \{a_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что $x \notin IS''$. Можно также считать, что $x_5 \in IS''$, т.к. в противном случае $IS'' \cup \{x_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Но тогда $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Значит и в рассматриваемом случае есть н. н. м., не содержащее x_3.

Покажем, что во всех остальных случаях есть н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_5. Пусть IS''' — н. н. м., содержащее x_5. Если $(x_4, x) \in E(G), x \notin V(A_k) \cup \{b\}$, то x смежна либо с a_4, либо с a_5, поскольку иначе G содержит порожденный вершинами $a_3, a_2, a_1, x_4, x, a_4, a_5$ граф $T_{2,2,2}$. Возможны только следующие ситуации.

а). Вершина b смежна с x_4. Если $x_3 \in IS'''$, то $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если же $x_3 \notin IS'''$, то $IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G.

б). Степень вершины x_4 равна двум или вершина x_4 смежна с a_5. Если ни одна из вершин окрестности x_4 (кроме x_5) не принадлежит IS''', то $IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_3 \in IS'''$, то $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м.

графа G. Если же $(x_4, a_5) \in E(G)$ и $x_3 \notin IS'''$, $a_5 \in IS'''$, то $x_2 \in IS'''$ (ввиду максимальности IS''') и поэтому $IS''' \cup \{x_3, b\} \setminus \{x_2, x_5\}$ — н. н. м. графа G.

в). Вершина x_4 смежна с вершиной $x \notin V(A_k)$, которая смежна с a_4. Можно считать, что $x_3 \notin IS'''$ и что $x \in IS'''$, $x_2 \in IS'''$ (иначе одно из множеств $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$, $IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ будет н. н. м. графа G или IS''' не будет максимальным). Но тогда множество $IS''' \cup \{x_3, b\} \setminus \{x_2, x_5\}$ является н. н. м. графа G. Лемма 3.17 доказана.

Будем говорить, что наследственный класс графов $\mathcal{X}$ является *классом без присоединенных циклов*, если для произвольного его графа и каждого яблока A_k ($k \geq 10$) этого графа нет ни одного присоединенного к нему цикла.

Теорема 3.6. *Задача* НМ *для графов из класса* $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ *полиномиально сводится к той же задаче для наследственной его части без присоединенных циклов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к его C-блокам. Пусть G — связный граф без разделяющих клик из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ и x — некоторая его вершина. За полиномиальное время от числа вершин графа G можно проверить, содержит ли граф G яблоко A_k в качестве порожденного подграфа, для которого $k \geq 10$, вершина x имеет степень 3 в этом яблоке и к A_k имеется присоединенный цикл C. Для этого прямым перебором можно найти все циклы длины 5 в графе G (их количество линейно от числа вершин) и выбрать среди них те, которые содержат x. Пусть $C' = (x, y_1, y_2, y_3, y_4)$ — один из таких циклов. Удалим из G вершины y_1, y_3, y_4 и их окрестности (соответственно, вершины y_1, y_2, y_4 и их окрестности) и получим граф G_1 (соответственно, G_2). Ясно, что в графе G цикл C' будет являться присоединенным к некоторому яблоку тогда и только тогда, когда в графе G_1 имеется порожденный путь длины не менее чем 8, соединяющий x и y_2, или в графе

G_2 имеется порожденный путь такой длины, соединяющий x и y_3. Проверка существования такого пути может быть выполнена следующим образом. Для определенности, рассмотрим граф G_1. Пусть $v \in V(G_1)$, обозначим через $N_k(v)$ множество вершин G_1, отстоящих от v на расстоянии $k \geq 0$. Ясно, что $|N_0(v)| = 1$ и что для любого $k \geq 1$ выполнены неравенства $|N_k(v)| \leq 3 \cdot 2^{k-1}$ и $|\bigcup\limits_{i=0}^{k} N_i(v)| \leq 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k - 2$. Рассмотрим подграф G, порожденный множеством вершин $\bigcup\limits_{k=0}^{4}(N_k(x) \cup N_k(y_2))$. Данный граф содержит не более $2 \cdot (3 \cdot 2^4 - 2) = 92$ вершин. Поэтому за время $O(1)$ можно в этом графе проверить существование порожденного пути из x в y_2 длины не менее чем 8. Пусть данный граф не содержит такого пути. Тогда в G_1 порожденный путь между x и y_2 длины 8 и более существует тогда и только тогда, когда существуют такие порожденные пути P_1 из x в $z_1 \in N_3(x)$, P_2 из y_2 в $z_2 \in N_3(y_2)$, что после удаления вершин путей $P_1 \setminus \{z_1\}$ и $P_2 \setminus \{z_2\}$ и их окрестностей z_1 и z_2 оказываются в одной компоненте связности. Декартово произведение $N_3(x)$ и $N_3(y_2)$ содержит не более 22^2 элементов и поэтому поиск таких P_1 и P_2 выполняется за полиномиальное время. Отсюда и более ранних рассуждений следует, что проверка существования присоединенного цикла C (и определение в случае его наличия) выполняется за полиномиальное время.

Из лемм 3.15–3.17 следует, что существует такая вершина $y \in V(C)$, что y не принадлежит некоторому н. н. м. графа G. Поэтому $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{y\})$. Вместе с тем, поиск вершины y (исходя из формулировок лемм 3.15–3.17) выполняется за полиномиальное время.

Выполнив (за полиномиальное время) разрушение присоединенных циклов и сведение к связным графам без разделяющих клик надлежащее количество раз, мы получим систему порожденных подграфов $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$ (без разделяющих клик) графа G, для любого яблока A_k $(k \geq 10)$ каждого из которых нет ни одного присоединенного к этому яблоку цикла. Каждый такой граф содержит не менее двух вершин. Каждая вершина G принадлежит не более чем трем графам из $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$. Поэтому $2s \leq 3|V(G)|$. Отсюда следует, что имеет место обозначенное ранее сведение. Теорема 3.6 доказана.

3.4.3 Гармони и их разрушение

Покрышкой называется граф, получаемый из двух простых циклов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ добавлением ребер $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$. *Проколотой покрышкой* называется граф, получаемый удалением ребра (x_{k-1}, x_k) из покрышки.

Напомним, что по леммам 3.13 и 3.14 задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к графам из этого класса, не содержащим порожденных планера и подграфа, являющегося дополнительным к простому пути с пятью вершинами. Вместе с тем, по теореме 3.6 эта задача для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к C-блокам, для которых каждое достаточно большое порожденное яблоко не имеет присоединенных циклов. Заметим, что число независимости покрышки с $2n$ вершинами равно n (если n четное) или равно $n-1$ (если n нечетное) и что проверка того, является ли граф покрышкой, выполняется за полиномиальное время. Заметим также, что число независимости проколотой покрышки с $2n$ вершинами равно n и что проверка того, является ли заданный граф проколотой покрышкой, выполняется за полиномиальное время. Таким образом, задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к *простейшим графам*, т.е. графам из этого класса, отличным от покрышки и от проколотой покрышки, которые сами являются C-блоками, не содержат порожденных подграфов указанного в начале этого абзаца вида и для которых каждое порожденное яблоко A_k $(k \geq 10)$ не имеет присоединенных циклов.

Лемма 3.18. *Пусть G — простейший граф, содержащий яблоко A_k $(k \geq 10)$. Тогда окрестность вершины a_0 без вершины a_1 непуста и каждая вершина данной усеченной окрестности среди вершин яблока A_k обязатель-*

но смежна либо с a_2, либо с a_k, но не сразу с обеими этими вершинами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Поскольку G — простейший граф, то он является C-блоком и не содержит присоединенных к A_k циклов. Значит, есть хотя бы одна смежная с a_0 вершина $x \neq a_1$. Вершина x не может быть смежна с вершинами a_3 и a_{k-1}, иначе либо к яблоку A_k имеется присоединенный цикл, либо вершины $x, a_1, a_0, a_{k-1}, a_{k-2}, a_3, a_4$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Если x несмежна ни с a_2, ни с a_k, то G содержит порожденный вершинами $a_1, a_0, x, a_2, a_3, a_k, a_{k-1}$ подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому вершина x должна быть смежна с a_2 или с a_k, но не с обеими сразу, иначе граф G содержит порожденный вершинами $a_{k-1}, a_k, a_1, a_0, x, a_2, a_3$ планер. Лемма 3.18 доказана.

Рассмотрим в простейшем графе G цикл C_k яблока A_k, $k \geq 10$. Будем рассматривать множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$ $(p \geq 2)$ из последовательных вершин этого цикла, содержащие a_1 и обладающие следующими свойствами:

- Каждая вершина x_i смежна с вершиной $y_i \notin V(C_k)$, где все вершины y_i являются различными
- Для любого $i \in \overline{2, p-1}$ множество вершин $V(C_k) \cup \{y_i\}$ в графе G порождает яблоко.
- Граф G содержит ребра $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \ldots, (y_{p-1}, y_p)$

Совокупность множеств с этими свойствами непуста, т.к. она обязательно содержит либо $\{a_k, a_1\}$, либо $\{a_1, a_2\}$. Это следует из леммы 3.18. В качестве $\{x_1, \ldots, x_p\}$ будем рассматривать множество из рассматриваемой совокупности с наибольшим количеством элементов. Множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$ и $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ не совпадают, поскольку граф G отличен от покрышки и от проколотой покрышки. Из максимальности множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$, леммы 6 и запрещения в G графа $T_{2,2,2}$, планера и дополнения к пути с 5 вершинами в качестве порожденных подграфов следует, что для любого $i \in \{1, p\}$

либо $deg(y_i) = 2$, либо y_i смежна с вершиной из $V(A_k)$, отстоящей от x_i на расстоянии 2. Порожденный множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ подграф графа G будем называть *гармонью*.

Вершина x_p смежна с вершиной $x_{p+1} \in V(C_k)$, $x_{p+1} \neq x_{p-1}$, x_{p+1} смежна с вершиной $x_{p+2} \in V(C_k)$, $x_{p+2} \neq x_p$, ..., вершина x_{k-1} смежна с вершиной $x_k \in V(C_k)$, $x_k \neq x_{k-2}$, x_k смежна с вершиной x_1.

Гармонь будем называть *гармонью первого типа*, если $deg(y_1) = deg(y_p) = 2$. Во всех остальных случаях гармонь будем называть *гармонью второго типа*. В гармони второго типа вершина y_1 смежна с x_{k-1} или вершина y_p смежна с x_{p+2}.

Покажем, что задача НМ для простейших графов сводится к той же задаче для простейших графов, содержащих гармони только первого типа. Для этого предположим, что множество вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ порождает в графе G гармонь второго типа. Будем, для определенности, считать, что вершина y_1 смежна с вершиной x_{k-1} (возможно, что и y_p смежна с x_{p+2}). Ясно, что если вершина x_k смежна с вершиной $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то либо $(y, x_{k-2}) \in E(G)$, либо $(y, x_{k-3}) \in E(G)$ (иначе G содержит порожденный вершинами $x_{k-1}, y_1, y_2, x_k, y, x_{k-2}, x_{k-3}$ подграф $T_{2,2,2}$). По графу G построим граф G' в соответствии со следующими правилами:

1. Если $deg(x_k) = 2$ или x_k смежна с вершиной $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $(y, x_{k-3}) \in E(G)$, то G' получается из G удалением ребра (x_{k-1}, y_1),
2. Если x_k смежна с вершиной $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $(y, x_{k-2}) \in E(G)$, $(y, x_{k-3}) \notin E(G)$, то G' получается из G удалением вершин x_{k-1}, x_k, x_1, y_1 и добавлением ребер (x_{k-2}, y_2) и (y, x_2).

Лемма 3.19. *Если G' получен из G по первому правилу, то эти графы имеют одинаковые числа независимости, причем $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что G' является остовным подграфом графа G. Поэтому $\alpha(G) \leq \alpha(G')$. Покажем выполнение и обратного неравенства. Пусть IS — н. н. м. графа G'. Если вершины y_1 и x_{k-1} одновременно не принадлежат IS, то IS — н. н. м. графа G. Если и $y_1 \in IS$ и $x_{k-1} \in IS$, то рассмотрим степень вершины x_k. Если $deg(x_k) = 2$, то $IS \cup \{x_k\} \setminus \{x_{k-1}\}$ — н. н. м. графа G. Если $deg(x_k) = 3$ (т.е. $(y, x_k) \in E(G)$) и существует вершина z, смежная с x_{k-2} и отличная от x_{k-1} и x_{k-3}, то либо $z = y$, либо z смежна с y. В противном случае вершины $x_{k-1}, x_{k-2}, z, x_k, y, y_1, y_2$ порождают в графе G подграф $T_{2,2,2}$. Но тогда $IS \cup \{x_k\} \setminus \{x_{k-1}\}$ (если $y \notin IS$) или $IS \cup \{x_k, x_{k-2}\} \setminus \{x_{k-1}, y\}$ (если $y \in IS$) является н. н. м. графа G. Итак, в обоих случаях есть независимое множество графа G с числом вершин $\alpha(G')$. Поэтому $\alpha(G) \geq \alpha(G')$. Значит, числа независимости графов G' и G равны.

Покажем, что $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Для этого достаточно проверить, что G' не имеет порожденного подграфа $T_{2,2,2}$, одновременно содержащего вершины x_{k-1} и y_1. Предположим, что такой подграф существует. Обозначим через z^* его вершину степени 3. Обозначим через z^* его вершину степени 3. Очевидно, что z^* принадлежит пересечению множеств $N_1(y_1) \cup N_2(y_1)$ и $N_1(x_{k-1}) \cup N_2(x_{k-1})$. При этом $N_1(y_1) \cup N_2(y_1) \subseteq \{x_1, x_2, x_k, y_2, y_3\}$ и $N_1(x_{k-1}) \cup N_2(x_{k-1}) \subseteq \{x_{k-3}, x_{k-2}, x_k, x_1, x, y\}$, где $x \notin V(C_k)$ — вершина, смежная с x_{k-2}. Отсюда и т.к. $\{x_1, x_2, x_k, y_2, y_3\} \cap \{x_{k-3}, x_{k-2}, x_k, x_1, x, y\} = \{x_1, x_k\}$, то $z^* \in \{x_1, x_k\}$. В случае $z^* = x_1$ образование порожденного подграфа $T_{2,2,2}$ невозможно, т.к. этому мешает ребро (x_2, y_2). В случае $z^* = x_k$ подграф $T_{2,2,2}$ может быть порожден только вершинами $x_k, x_1, y_1, x_{k-1}, x_{k-2}, y, z'$, где $(z', y) \in E(G')$ и $z' \notin \{x_{k-3}, x_k\}$. Но это невозможно, т.к. при $z' \neq x_3$ вершины $x_k, x_1, x_2, x_{k-1}, x_{k-2}, y, z'$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$, а при $z' = x_3$ вершины $x_3, x_2, x_1, y, x_{k-3}, x_4, x_5$ порождают в G такой подграф. Поэтому и во втором случае образования порожденного подграфа $T_{2,2,2}$ не происходит. Лемма 3.19 доказана.

Лемма 3.20. *Если G' получен из G по второму правилу, то*

$\alpha(G) = \alpha(G') + 2$, *причем* $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существует н. н. м. графа G, содержащее хотя бы одну из вершин x_1, y_1. Очевидно, если какое-нибудь н. н. м. IS этого графа не содержит ни одной из этих вершин, то ввиду максимальности IS хотя бы одна из вершин из $\{x_{k-1}, y_2\}$ и хотя бы одна из вершин $\{x_k, x_2\}$ принадлежат этому множеству. Вместе с тем, в каждом из данных множеств ровно одна вершина обладает этим свойством. Поэтому, если $x_{k-1} \in IS$, то $IS \cup \{y_1\} \setminus \{x_{k-1}\}$ — н. н. м. графа G, а если $y_2 \in IS$, то $IS \cup \{y_1\} \setminus \{y_2\}$ тоже является н. н. м. графа G. Значит, всегда есть н. н. м. графа G, содержащее либо x_1, либо y_1.

Докажем теперь, что существует н. н. м. графа G, содержащее вершины x_1, x_{k-1}, y, y_2 или вершины x_{k-2}, x_k, y_1, x_2 одновременно. Пусть, для определенности, некоторому н. н. м. IS' графа G принадлежит вершина y_1. Можно считать, что $x_k \in IS'$ (ясно, что ввиду максимальности данного независимого множества либо x_k, либо y ему принадлежит, если $y \in IS'$, то ее можно заменить на x_k). Похожие рассуждения приводят к заключению о том, что вершины x_{k-2} и x_2 принадлежат IS'. Аналогично доказывается, что если $x_1 \in IS'$, то $\{x_1, x_{k-1}, y, y_2\} \subseteq IS'$.

Заметим, что $IS' \setminus \{x_k, y_1\}$ является независимым множеством графа G'. Если бы IS' содержала вершины x_1, x_{k-1}, y, y_2, то $IS' \setminus \{x_{k-1}, x_1\}$ — н. м. графа G'. Поэтому $\alpha(G') \geq \alpha(G) - 2$. Докажем, что выполняется обратное неравенство. По аналогии с рассуждениями предыдущего абзаца можно доказать, что существует н. н. м. IS'' графа G', содержащее либо вершины x_{k-2}, x_2, либо вершины y, y_2. В первом случае $IS'' \cup \{x_k, y_1\}$ является н. м. графа G, а во втором $IS'' \cup \{x_{k-1}, x_1\}$ является н. м. графа G. Поэтому $\alpha(G) \geq \alpha(G') + 2$. Из обоих неравенств следует, что $\alpha(G) = \alpha(G') + 2$.

Проверим, что граф G' принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Ясно, что $G \in \mathcal{P}(3)$. Предположим, что G содержит порожденный подграф H, изоморфный $T_{2,2,2}$, с вершиной z степени 3. Понятно, что H содержит в точности одно из ребер (y, x_2), (x_{k-2}, y_2). Ясно также, что $z \notin \{x_2, y_2\}$. Поэтому возможны только следующие случаи:

1. $z = y$ и H содержит простой путь $P = (y, x_2, x_3)$,
2. $z = x_{k-2}$ и H содержит простой путь $P = (x_{k-2}, y_2, y_3)$,
3. $z = x_{k-3}$ и H содержит простой путь $P = (x_{k-3}, x_{k-2}, y_2)$,
4. $z = x_3$ и H содержит простой путь $P = (x_3, x_2, y)$,
5. $z = y_3$ и H содержит простой путь $P = (y_3, y_2, x_{k-2})$,
6. H содержит простой путь $P = (z, y, x_2)$.

В каждом из этих шести случаев есть порожденный подграф $T_{2,2,2}$ графа G, получаемый из H следующим образом: в случаях 1—2 заменой пути P на путь (y, x_k, x_1) или на путь (x_{k-2}, x_{k-1}, y_1) соответственно, а случаях 3—6 заменой ребра $(x_{k-2}, y_2), (x_2, y), (y_2, x_{k-2}), (y, x_2)$ соответственно на ребро $(x_{k-2}, x_{k-1}), (x_2, x_1), (y_2, y_1), (y, x_k)$. Получаем противоречие. Значит, $G' \in \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Лемма 3.20 доказана.

Лемма 3.21. *Пусть G — простейший граф, содержащий гармонь первого типа, порожденную вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$. Если p нечетно, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$, а если p четно, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}) + \frac{p}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда p является нечетным числом. Если есть н. н. м. графа G, не содержащее вершину x_1, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$. Если есть IS — н. н. м. графа G, содержащее x_1, то либо $IS \cup \{y_1\} \setminus \{x_1\}$, либо $IS \cup \{y_1, x_2\} \setminus \{x_1, y_2\}$, либо $IS \cup \{y_1, x_2, y_3\} \setminus \{x_1, y_2, x_3\}, \ldots$, либо $IS \cup \{y_1, x_2, y_3, x_4, \ldots, y_p\} \setminus \{x_1, y_2, x_3, y_4, \ldots, x_p\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому во всех возможных случаях $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$.

Пусть теперь число p является четным. Обозначим граф $G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ через G'. Легко видеть, что существует н. н. м. IS графа G', содержащее ровно половину среди вершин $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Отсюда следует, что есть н. н. м. графа G, содержащее ровно $\alpha(G') + \frac{p}{2}$ вершин (оно получается добавлением $\frac{p}{2}$ вершин из $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, несмежных с вершинами из $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \cap IS$). Поэтому $\alpha(G) \geq \alpha(G') + \frac{p}{2}$. Нетрудно показать справедливость и обратного неравенства, которое следует из того, что любое н. н. м. графа G содержит не более половины из вершин $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Сравнивая оба неравенства, получаем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}) + \frac{p}{2}$. Лемма 3.21 доказана.

Теорема 3.7. *Задача* НМ *для графов из класса* $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ *полиномиально сводится к той же задаче для графов из* $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы 3.6 было показано, каким образом за полиномиальное время проверить, является ли заданная вершина x степени 3 произвольного C-блока из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ вершиной степени 3 некоторого его порожденного яблока A_k, $k \geq 10$ (и найти такое яблоко, в случае его существования). Если нет присоединенного к этому яблоку цикла и сам граф является простейшим, то существует гармонь (первого или второго типа), содержащая вершину x. Понятно, что эта гармонь может быть определена за полиномиальное время.

Из правил сведения, сформулированных в этом и предыдущем разделах, следует, что задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ сводится к той же задаче для простейших графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$. На каждой итерации упомянутого выше сведения с некоторым из имеющихся графов происходит одно из следующих действий: (1) выделение C-блоков (2) удаление вершины (3) проверка изоморфности покрышке или проколотой покрышке (4) разрушение гармони. Любое из этих действий выполняется за полиномиальное время. На каждой итерации будем рассматривать величину $7n_3 + 3n_2 + n_1 + n_0$, где n_i — общее количество вершин степени i в текущих графах. Покажем, что применение операций типа (1)—(4) уменьшает эту величину. Для (2),(3) и при разрушении гармони первого типа в (4) это очевидно. Нетрудно видеть, что разрушение гармони второго типа по первому правилу уменьшает величину на 8, а по второму на 28. Заметим, что если $G \in \mathcal{P}(3)$ и вершина v принадлежит более чем одному C-блоку G, то:

1. либо степень v равна 3 и v принадлежит двум C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень не более чем 2
2. либо степень v равна 3 и v принадлежит трем C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень 1
3. либо степень v равна 2 и v принадлежит двум C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень 1

Имея в виду эти три случая, нетрудно убедиться в том, что при выделении C-блоков рассматриваемая сумма уменьшается. Таким образом, в любой момент процесса взвешенная сумма степеней вершин не превосходит $7|V(G)|$, что дает верхнюю оценку $7|V(G)|$ на число итераций. Поэтому и сведение является полиномиальным. Теорема 3.7 доказана.

3.4.4 Основные результаты второй части главы

Теорема 3.8. *При любом $i > 2$ задача* НМ *для графов из класса $\mathcal{D}eg(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{D}eg(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любого связного графа $G \in \mathcal{D}eg(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ либо $G \in \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$, либо G имеет не более $3 \cdot 2^{i+2} - 2$ вершин.

Пусть граф G содержит порожденный подграф $T_{2,2,2}$, в котором $deg(x) = 3$ и для любого $k \in \overline{1,3}$ вершина x смежна с вершиной y_k, а вершина y_k смежна с вершиной z_k. Докажем, что граф G не содержит вершины y, отстоящей от вершины x на расстоянии $i+3$. Предположим противное, тогда рассмотрим кратчайший путь $P = (x_1 = x, x_2, x_3, \ldots, x_{i+4} = y)$ из x в y. Понятно, что $x_2 \in \{y_1, y_2, y_3\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $x_2 = y_1$. Ввиду выбора пути P, каждая из вершин y_2 и y_3 не может быть смежна ни с одной вершиной x_j при $j > 3$. По тем же причинам, ни одна из вершин z_1, z_2, z_3 не может быть смежна с вершиной x_j, для которой $j > 4$. Возможны два случая — либо $x_3 = z_1$, либо $x_3 \neq z_1$. Рассмотрим каждый из них.

1). Пусть $x_3 \neq z_1$. Если z_1 и x_4 являются смежными, то вершины $x, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_4, x_5, \ldots, x_{i+1}$ порождают в G подграф $T_{2,2,i}$. Поэтому можно считать, что $(z_1, x_4) \notin E(G)$. Если ни одна из вершин y_2, y_3, z_2, z_3 несмежна ни с x_3, ни с x_4, то G содержит порожденный вершинами $x_1, y_2, y_3, z_2, z_3, x_2, x_3, \ldots, x_{i+1}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если среди вершин y_2, y_3, z_2, z_3 есть смежная с x_3 вершина y_k или z_k ($k \in \{2, 3\}$, такая вершина единственна) и ни одна из них не смежна с x_4, то G содержит порожденный вершинами $y_k, z_k, x_2, x_3, z_1, x_4, \ldots, x_{i+3}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если среди вершин y_2, y_3, z_2, z_3 есть смежная с x_4 вершина z_k (ввиду выбора пути P такая вершина может принадлежать только множеству $\{z_2, z_3\}$), то вершины $x, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_4, x_5, \ldots, x_{i+1}$ порождают подграф $T_{2,2,i}$.

2). Пусть $x_3 = z_1$. Если ни одна из вершин z_2, z_3 несмежна с x_4, то в G имеется порожденный вершинами $x_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_2, x_3, \ldots, x_{i+1}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если есть смежная с x_4 вершина z_k ($k \in \{2, 3\}$) (такая вершина единственна), то $y_k, z_k, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{i+4}$ порождают в G подграф $T_{2,2,i}$.

Итак, в обоих случаях приходим к тому, что вершины y не существует. Это означает, что если G содержит порожденный подграф $T_{2,2,2}$, то каждая его вершина отстоит от x на расстоянии не более чем $i+2$. Значит, граф G имеет не более чем $1+3+3\cdot 2+\ldots+3\cdot 2^{i+1} = 3\cdot 2^{i+2}-2$ вершин. Поэтому при любом фиксированном i связных графов из $\mathcal{D}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\}) \setminus \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ имеется конечное число. Отсюда следует обозначенное в формулировке теоремы сведение. Теорема 3.8 доказана.

Основным результатом этого раздела работы является следующее утверждение.

Теорема 3.9. *При любом фиксированном i задача* НМ *для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 3.7 и 3.8 следует, что задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$. В предыдущем разделе было показано, что при любом фиксированном k класс $\mathcal{P} \cap \mathcal{F}ree(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Поэтому при любом фиксированном i класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ тоже является НМ-простым. Теорема 3.9 доказана.

Глава 4

О задачах на графах с континуальными граничными системами

4.1 Некоторые результаты из количественной теории граничных классов и смежные с ними

Напомним, что по теореме 1.1 полностью известное множество П-граничных классов графов позволяет полностью описать все множество П-простых конечно определенных классов графов. Однако, до результатов совсем недавнего времени такое описание не удавалось получить ни для одной задачи П. Вместе с тем, возникающие при получении таких описаний трудности натолкнули автора настоящей работы на мысль о том, что для некоторых задач на графах множество граничных классов может быть весьма сложно устроенным и поэтому попытки дать его описание, по-видимому, обречены на неудачу. Эта мысль (которую можно назвать геделевским аргументом) нашла свое подтверждение в том, что для обеих задач о 3-раскраске (вершинного и реберного вариантов) удается выявить континуальные множества граничных классов (эти результаты составляют содержание следующего раздела этой главы диссертации). Тем самым конструктивно доказано предположение из [33] о существовании задач на графах с бесконечным множеством граничных классов. В другом разделе этой главы континуальность доказывается для обеих задач о k-раскраске для любого $k > 3$.

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, для которого можно так покрасить вершины G, что любые две его соседние вершины покрашены в разные цвета. В *задаче о вершинной k-раскраске* (*задаче* k-ВР) требуется определить, верно ли, что хроматическое число задаваемого графа G не больше, чем фиксированное число k. Постановка задачи о реберной k-раскраске (задачи k-РР) аналогична постановке задачи k-ВР (только в ней фигурирует *хроматический индекс* — минимальное количество цветов, необходимое для правильного окрашивания ребер графа).

Можно продолжить изучение граничных классов для задач о k-раскраске, поставив цели, отличные от поиска всех k-ВР-граничных (k-РР-граничных) классов. Например, можно рассмотреть «поведение» граничных классов для задач о k-раскраске по сравнению с граничными классами для «предельных» задач о k-раскраске (т.е. когда k не ограничено), называемых задачами о хроматическом числе и индексе. В *задаче о хроматическом числе* (*задаче* ХЧ) необходимо дать ответ на тот же вопрос, что и в задаче k-ВР, при условии, что k задается вместе с графом G. Постановка задачи о хроматическом индексе (задачи ХИ) аналогична постановке задачи ХЧ с заменой хроматического числа на хроматический индекс.

Оказалось, что при $k = 3$ все k-РР-граничные классы являются ХИ-граничными, а при любом $k > 3$ существует континуум k-РР-граничных классов, каждый из которых не является ХИ-граничным. Для задачи ХЧ был выявлен граничный класс, который не является k-ВР-граничным ни при каком k. Доказательства этих результатов составляют содержание оставшейся части четвертой главы.

4.2 Граничные классы графов для задач о 3-раскраске

Пусть G — граф, в котором выбраны такие две вершины, что существует автоморфизм G, переводящий эти вершины друг в друга. Операция *замены ребра* $e = (a, b)$ *графом* G состоит в удалении этого ребра из некоторого графа с последующим отождествлением вершины a с одной из выбранных вершин графа G и вершины b с другой выбранной вершиной графа G. Понятно, что граф, получаемый при замене ребра, не зависит от того, какая именно из выбранных вершин графа G отождествляется с вершиной a.

Через A_k $(k \geq 3)$ обозначим граф с множеством вершин $\{x, y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$, в котором множества вершин $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ и $\{y, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ образуют две клики и имеются ребра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$, а через B_k $(k \geq 3)$ обозначим граф с множеством вершин $\{x, y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, в котором множества вершин $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}\}, \{y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ образуют три клики и имеются ребра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{k-2}, y_{k-2}), (x, y_{k-1}), (y, y_k)$.

Обозначим через C граф, содержащий вершины $x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ и ребра $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4)$, $(y_1, y_2), (y_1, y_3), (y_2, y_3), (y_2, y_4), (y_3, y_4), (x_1, y_1), (x_4, y_4), (x, x_1), (x, y_1), (y, x_4), (y, y_4)$.

Выбранными вершинами в графах A_k и B_k являются вершины степени $k-1$, а в графе C таковыми являются вершины степени 2.

Для произвольной бинарной последовательности $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ назовем π-*гирляндой* граф, получаемый из простого пути P_{2k+1} заменой каждого его ребра. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i-е и $(2k+1-i)$-е ребра этого пути заменяются графом $K_4 - e$, если $\pi_i = 0$, или графом C, если $\pi_i = 1$.

Введем понятие π-*преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины v некоторого графа состоит из четырех вершин x_1, x_2, y_1, y_2, причем порожденный этими четырьмя вершинами подграф содержит ровно два ребра (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Применение π-преобразования к вершине v состоит в том, что:

1. Вершину v заменяем на две вершины v_1 и v_2. Вершину v_1 соединяем ребрами с вершинами x_1, x_2, а вершину v_2 с вершинами y_1, y_2.

2. Вершину v_1 отождествляем с одной вершиной степени 2 π-гирлянды, а вершину v_2 отождествляем с другой такой вершиной.

Обозначим через $\mathcal{X}^*$ множество 4-регулярных графов класса $Free(K_{1,3}, K_4, K_4 - e)$. Пусть $G \in \mathcal{X}^*$. Ясно, что окрестность любой вершины

v этого графа представляет собой граф $2K_2$. *π_V-Преобразованием графа G* является последовательное применение π-преобразования к всем вершинам, окрестности которых изоморфны графу $2K_2$ и которые еще не содержатся в порожденных подграфах $K_4 - e$ и C. Обозначим через G_{π_V} граф, получаемый π_V-преобразованием из графа G. Все множество таким образом сформированных графов из графов класса $\mathcal{X}^*$ обозначим через $\mathcal{X}^*_\pi$. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Граф $G \in \mathcal{X}^*$ является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_V} является вершинно 3-раскрашиваемым.*

Пусть G — произвольный граф, $e = (a, b)$ — некоторое его ребро, $k \geq 3$. Обозначим через G'_e (соответственно, G''_e) результат удаления из G ребра e, добавления вершин a', b' и ребер $(a, a'), (a', b'), (b', b)$ и замены ребра (a', b') графом A_k (соответственно, B_k), в котором выбранными вершинами являются две вершины степени $k - 1$ графа A_k (соответственно, B_k).

Лемма 4.2. *Произвольный граф G является реберно k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для произвольного его ребра $e = (a, b)$ таковыми являются графы G'_e и G''_e.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно построить k-раскраску ребер каждого из графов G'_e и G''_e по k-раскраске ребер графа G. Приведем ее построение для более сложного случая — графа G''_e, а для G'_e построение оставим читателю. Рассмотрим два экземпляра клики с k вершинами, в каждом из которых вершины пронумеруем числами от 1 до k. Раскрасим ребра каждого из экземпляров правильным образом так, чтобы ребра обеих клик, инцидентные парам вершин с одинаковыми наборами номеров, имели бы одинаковые цвета. Можно предполагать, что в этой раскраске присутствует цвет col, в который окрашена дуга e в некоторой k-раскраске ребер графа G (всегда можно так переобозначить назначенные ребрам клик цвета, что это свойство выполняется). Для каждого номера i имеется цвет col_i, который не входит в раскраску ребер, инцидентных вершинам с номером i. Поэтому существует k-раскраска ребер графа H, получаемого добавлением всех ребер, которые инцидентны вершинам, имеющим одинаковые номера. Выберем ребро (x, y) графа H, принадлежащее одной из k-клик и окрашенное в цвет col, и удалим его из H. Рассмотрим k-раскраску ребер G, в которой e имеет цвет col. Она порождает раскраску ребер из $E(G''_e) \cap E(G)$. Окрасим ребра (a, a') и (b', b) графа G''_e в цвет col. Заметим, что вершины из $V(G''_e) \setminus (V(G) \cup \{a, b\})$ порождают подграф, изоморфный H без ребра (x, y). Поэтому можно продолжить текущую частичную раскраску ребер G''_e до некоторой его k-раскраски ребер.

Докажем теперь, что в любой k-раскраске ребер графов G'_e и G''_e ребра (a, a') и (b', b) окрашены в одинаковые цвета. Отсюда, будет следовать утверждение леммы. Предположим противное, т.е. существует правильная раскраска ребер хотя бы одного из графов G'_e и G''_e в k цветов, что (a, a') и (b', b) окрашены в разные цвета col_1 и col_2.

Рассмотрим множество ребер подграфа A_k (соответственно, B_k) графа G'_e (соответственно, G''_e), окрашенных в цвет col_1. Каждая вершина из $V(A_k) \setminus \{a'\}$ (соответственно, $V(B_k) \setminus \{a'\}$) должна быть инцидентна некоторому ребру, окрашенному в цвет col_1 (это следует из того, что все вершины A_k (соответственно, B_k) имеют в G'_e (соответственно, G''_e) степень k, а ребро (b, b') окрашена в цвет $col_2 \neq col_1$). Значит, множество $V(A_k) \setminus \{a'\}$ (соответственно, $V(B_k) \setminus \{a'\}$) должно содержать четное количество элементов, а это не так. Получаем противоречие с предположением. Лемма 4.2 доказана.

Для произвольной двоичной последовательности π длины l назовем $\pi(k)$-*связкой* ($k \geq 3$) граф, получаемый из простого пути P_{4l+2} заменами его ребер. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ $2i$-е и $(4l + 2 - 2i)$-е ребра этого пути заменяются графом A_k, если $\pi_i = 0$, или графом B_k, если $\pi_i = 1$. $\pi(k)$-

Преобразование графа G состоит в замене каждого его ребра $\pi(k)$-связкой. Обозначим через $G_{\pi(k)}$ граф, получаемый $\pi(k)$-преобразованием графа G. Следующее утверждение легко следует из леммы 4.2.

Лемма 4.3. *Для любой конечной двоичной последовательности* π *граф* $G_{\pi(k)}$ *является реберно* k*-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф* G.

Для произвольной конечной бинарной последовательности π через D_π будем обозначать граф, получаемый отождествлениями трех вершин степени 2, принадлежащих трем копиям π-гирлянды, с тремя различными вершинами графа C_3. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ через $\mathcal{D}_\pi$ обозначим множество графов, каждая компонента связности которых является порожденным подграфом графа из $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{D_{\pi^{(k)}}\}$, где $\pi^{(k)} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$. Через $T_{\pi(s)}, s \geq 3$ (соответственно, $T'_{\pi(s)}, s \geq 3$) будем обозначать граф, получаемый применением $\pi(s)$-преобразования к графу $K_{1,s}$ (соответственно, к $K_{1,3}$). Через $\mathcal{T}_{\pi(s)}$ (соответственно, $\mathcal{T}'_{\pi(s)}$) обозначим множество графов, каждая компонента связности которых является порожденным подграфом графа из $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\{T_{\pi^{(l)}(k)}\}$ (соответственно, из $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\{T'_{\pi^{(l)}(k)}\}$). Очевидно, что для любой бесконечной двоичной последовательности π справедливо включение $\mathcal{T}'_{\pi(s)} \subseteq \mathcal{T}_{\pi(s)}$, причем равенство имеет место только когда $s = 3$.

Лемма 4.4. *Для любой бесконечной двоичной последовательности* π *класс* $\mathcal{D}_\pi$ *является* 3-ВР*-предельным. Для любой бесконечной двоичной последовательности* π *и любого* $k \geq 3$ *класс* $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ *является* 3-РР*-предельным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение докажем только для задачи 3-ВР, для задачи k-РР оно доказывается по аналогии (с использованием лемм 4.2 и 4.3).

Известно [56], что задача 3-ВР для графов класса $\mathcal{X}^*$ является NP-полной. Отсюда и из леммы 4.1 следует, что для любого i эта задача NP-полна в классе $\mathcal{X}^*_{\pi(i)}$. Поэтому при любом s класс $\mathcal{X}_s = [\bigcup\limits_{j=s}^{\infty} \mathcal{X}^*_{\pi(j)}]$ является 3-ВР-сложным. Докажем справедливость равенства $\mathcal{D}_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_j$.

Для произвольного графа $G \in \mathcal{D}_\pi$ существуют такие натуральные числа n и k, что для любого $j \geq k$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi(j)}$. Очевидно, что для любых n, k, s граф $nD_{\pi(k)}$ принадлежит классу $\mathcal{X}_s$ (поскольку при любом s класс $\mathcal{X}_s$ является наследственным). Таким образом, произвольный граф $G \in \mathcal{D}_\pi$ принадлежит классу $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_j$. Поэтому имеет место включение $\mathcal{D}_\pi \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_j$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_j$. Тогда существует такая бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{j_d\}$, что для любого натурального d граф G принадлежит классу $[\mathcal{X}^*_{\pi(j_d)}]$. Отсюда, положив $d = |V(G)| + 1$, заключаем, что для некоторых n и $k < d$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi(k)}$. Таким образом, граф G принадлежит классу $\mathcal{D}_\pi$. Поэтому справедливо включение $\mathcal{D}_\pi \supseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_j$. Лемма 4.4 доказана.

Лемма 4.5. *Пусть $\mathcal{B}$ — k-ВР-граничный класс, вложенный в класс $\mathcal{D}eg(d)$ для некоторого фиксированного d. Тогда этот класс обладает следующими двумя свойствами:*

1. *выполняется либо включение $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$, либо включение $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$*
2. *если некоторый граф $G \in \mathcal{B}$ содержит вершину x степени не более чем $k-1$, то существует надграф $G' \in \mathcal{B}$ графа G, в котором x имеет степень k*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что первое условие не выполняется. Пусть $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к k-ВР-граничному классу $\mathcal{B}$ последовательность из k-ВР-сложных классов графов. Поскольку класс $\mathcal{D}eg(d)$ является конечно определенным, то по лемме 1.1 существуют такое j' и такие графы $G_1 \in \mathcal{T}, G_2 \in \mathcal{D}$, что $\mathcal{B}_{j'} \subseteq \mathcal{D}eg(d) \cap Free(\{G_1, G_2\})$. По лемме 1.5 древесная ширина всех графов из $\mathcal{B}_{j'}$ ограничена сверху некоторой константой $C = C(d, G_1, G_2)$. Хорошо известно, что для любых фиксированных k и C класс графов, степени всех вершин которых и древесная ширина которых не превосходят C, является k-ВР-простым [37]. Значит, в любой последовательности, сходящейся к $\mathcal{B}$, имеется k-ВР-простой класс. Получаем противоречие с тем, что этот класс является k-ВР-граничным.

Рассмотрим множество тех графов из $\mathcal{B}_i$, степень каждой вершины которых не менее чем k. Наследственное замыкание множества таких графов (обозначаемое через $\mathcal{B}_i^{'}$) является k-ВР-сложным классом (поскольку задача k-ВР для класса $\mathcal{B}_i$ сводится к графам $\mathcal{B}_i^{'}$). Вместе с тем, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i^{'} = \mathcal{B}$, поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i^{'} \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, а $\mathcal{B}$ — k-ВР-граничный класс.

По построению класса $\mathcal{B}_i'$ для любого i существует такой граф $G_i' \in \mathcal{B}_i^{'}$, что G порожден в $G_i^{'}$, а вершина x имеет степень, равную k. Пусть граф G_i' является наименьшим с этим свойством, тогда $|V(G_i^{'})| - |V(G)| < k+1$. Пусть $\mathcal{S} = \{G_1', G_2', \ldots\}$. Очевидно, $\mathcal{S}$ — конечное множество. Поэтому существует граф G', принадлежащий $\mathcal{B}_s' \cap \mathcal{S}$ для бесконечно многих значений s. Отсюда и из включения $\mathcal{B}_1' \supseteq \mathcal{B}_2' \supseteq \ldots$ следует, что $G' \in \mathcal{B}_i'$ для любого i, т.е. $G' \in \mathcal{B}$. Лемма 4.5 доказана.

Вершину x некоторого графа G со степенями всех вершин не более чем k назовем *k-элиминируемой*, если выполнено одно из следующих двух условий:

- вершина x принадлежит компоненте связности графа G, изоморфной порожденному подграфу (возможно, несобственному) либо графа A_k, либо графа B_k, или же граф G содержит перешеек, при удалении которого x принадлежит компоненте связности с таким же свойством

- имеется не более одного соседа x степени k

Значение понятия k-элиминируемой вершины состоит в том, что G и результат удаления вершины x из G либо одновременно являются реберно k-раскрашиваемыми графами, либо одновременно нет. В первом случае это является очевидным (следует из того, что A_k и B_k имеют реберную k-раскраску и при удалении перешейка из графа со степенями всех вершин не более чем k его реберная k-раскрашиваемость эквивалента такой же раскрашиваемости каждой из соответствующих компонент). Во втором случае это следует из леммы 4.6.

Лемма 4.6. [76]. *Пусть вершина v некоторого графа G и все соседние с ней вершины имеют степени не более чем k, причем не более чем одна вершина из окрестности v имеет степень в точности k. Тогда, если результат удаления вершины v из G является реберно k-раскрашиваемым графом, то таковым является и сам граф G.*

Используя лемму 4.6, нетрудно доказать следующее утверждение (по аналогии с леммой 4.5).

Лемма 4.7. *Пусть $\mathcal{B}$ — k-РР-граничный класс. Тогда этот класс обладает следующими двумя свойствами:*

1. *выполняется либо включение $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$, либо включение $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$*
2. *если граф $G \in \mathcal{B}$ содержит k-элиминируемую вершину x, то существует граф $G' \in \mathcal{B}$, для которого G — порожденный подграф, а x не является k-элиминируемой*

Лемма 4.8. *Для любой бесконечной двоичной последовательности π существует k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$, причем любой такой класс включает $\mathcal{T}'_{\pi(k)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предельность класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ доказана в лемме 4.4. Значит, по определению граничного класса графов существует k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$. Рассмотрим произвольный из данных подклассов и обозначим его через $\mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{T}_{\pi(k)}$ (значит, и $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{B}$), то по лемме 4.7 выполнено включение $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому при любом i граф $iK_{1,3}$ принадлежит $\mathcal{B}$.

Теперь докажем, что для любого i выполняется включение $[\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{iT'_{\pi^{(j)}(k)}\}] \subseteq \mathcal{B}$. Отсюда будет следовать, что $\mathcal{T}'_{\pi(k)} \subseteq \mathcal{B}$. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого j граф $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$ не принадлежит $\mathcal{B}$. Среди порожденных подграфов графа $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$, содержащих $iK_{1,3}$ в качестве порожденного подграфа и принадлежащих $\mathcal{B}$, выберем любой из максимальных по включению. Очевидно, что такой граф существует, обозначим его через G. Ясно, что $G \neq iT'_{\pi^{(j)}(k)}$. Существует вершина графа G, что ее степень в графе G меньше ее степени в графе $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$ и отлична от нуля. Но тогда данная вершина будет невисячей вершиной графа G, принадлежащей некоторому его порожденному подграфу A_k, либо некоторому его порожденному подграфу B_k. Легко проверить, что тогда данный подграф обязательно содержит некоторую k-элиминируемую вершину x. Из леммы 4.7 следует, что в классе $\mathcal{B}$ существует такой граф $G^{'}$, в котором граф G является собственным порожденным подграфом, а вершина x не является k-элиминируемой. Удалим из G' все вершины, которые не принадлежат $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$. Получившийся граф G'' будет принадлежать $\mathcal{B}$ (ввиду наследственности этого класса), причем x в нем не будет k-элиминируемой (для этого отметим, что на k-элиминируемость вершины x в графе G' влияют только те вершины, которые принадлежат множеству $V(iT'_{\pi^{(j)}(k)}) \cap V(G')$). Но тогда G — собственный порожденный подграф графа G'' и поэтому граф G не является максимальным по включению. Получаем противоречие. Таким образом, предположение о существовании графа $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$ было неверным. Лемма 4.8 доказана.

Основной результат этого подраздела составляет следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для любой бесконечной бинарной последовательности π класс $\mathcal{D}_\pi$ является* 3-ВР-*граничным. Для любой бесконечной двоичной последовательности π класс $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ является* 3-РР-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.8 любой 3-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ включает $\mathcal{T}'_{\pi(3)} = \mathcal{T}_{\pi(3)}$. Отсюда следует, что $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ является 3-РР-граничным.

Рассмотрим $\mathcal{B}$ — произвольный 3-ВР-граничный подкласс $\mathcal{D}_\pi$. Заметим, что по лемме 4.5 имеет место включение $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, т.к. $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{D}_\pi$. Значит, для любого i граф $iD_{1,1,1}$ принадлежит $\mathcal{B}$. По аналогии с доказательством леммы 4.8 можно показать, что для любого i справедливо включение $[\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{iD_{\pi(j)}\}] \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому $\mathcal{D}_\pi \subseteq \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{D}_\pi$. Значит, $\mathcal{D}_\pi$ — 3-ВР-граничный класс. Теорема 4.1 доказана.

Ясно, что для различных бесконечных двоичных последовательностей π_1 и π_2 справедливо $\mathcal{D}_{\pi_1} \neq \mathcal{D}_{\pi_2}$ и $\mathcal{T}_{\pi_1(k)} \neq \mathcal{T}_{\pi_2(k)}$. Поэтому и сами множества 3-ВР-граничных и 3-РР-граничных классов континуальные.

Задачи о 3-раскраске являются примерами задач с континуальным множеством граничных классов. Таким образом, доказана гипотеза из работы [33] о существовании задач с бесконечным множеством граничных классов.

4.3 Свойства подмножеств 3-РР-граничной системы

Во второй главе диссертации было показано, что ни один П-граничный относительно $\mathcal{X}$ класс не покрывается конечной совокупностью других П-граничных относительно $\mathcal{X}$ классов графов (лемма 2.12). Там также было показано, что любое подмножество конечной относительной граничной системы представляется в виде другой относительной граничной системы (теорема 2.14). Во второй главе было анонсировано, что для бесконечных множеств эти утверждения теряют силу. Соответствующие контрпримеры излагаются в этом разделе.

Приведем контрпример для первого случая. Пусть $\mathcal{X}$ — множество всех графов, π_0 — бесконечная последовательность из нулей, а π_i — бесконечная двоичная последовательность, только i-ый член которой равен 1. Для любого $i \geq 0$ класс $\mathcal{T}_{\pi_i(3)}$ является 3-РР-граничным относительно $\mathcal{X}$ (по теореме 4.1). Вместе с тем, $\mathcal{T}_{\pi_0(3)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_{\pi_i(3)}$.

Приведем контрпример для второго случая (оказывается, что для бесконечных относительных граничных систем теорема 2.14 неверна даже при снятии ограничения на конечность множества $\mathcal{S}$). Пусть Π — задача о реберной 3-раскраске, $\mathcal{X} = \mathcal{G}$, $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \setminus \{\mathcal{T}_{\pi_*(3)}\}$, где $\mathscr{B}$ — совокупность всех 3-РР-граничных классов, $\pi_* = (\underline{0}, \underline{1}, \underline{0, 0}, \underline{0, 1}, \underline{1, 0}, \underline{1, 1}, \underline{0, 0, 0}, \ldots)$.

Лемма 4.9. *Для любого множества $\mathcal{S}$ множество $\mathscr{B}'$ не равно $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G} \cap Free(\mathcal{S}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует такое множество $\mathcal{S}$, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{G} \cap Free(\mathcal{S})) = \mathscr{B}'$. Тогда существует конечное множество $\mathcal{S}' \subseteq Forb(\mathcal{T}_{\pi_*(3)})$, для которого класс $Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$ является 3-РР-простым (в противном случае $\mathcal{T}_{\pi_*(3)} \in \mathscr{B}_\Pi(Free(\mathcal{S}))$). Обозначим через $\mathcal{Y}$ наследственное замыкание множества всех π-связок. Поскольку любая конечная двоичная последовательность является непрерывным фрагментом последовательности π_*, то ни один граф из $\mathcal{Y}$ не принадлежит множеству $Forb(\mathcal{T}_{\pi_*(3)})$. Обозначим через $\mathcal{S}''$ множество $Forb(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{S}'$. Ясно, что существует такая конечная двоичная последовательность π', для которой π'-связка является надграфом любого собственного порожденного подграфа каждого графа из $\mathcal{S}''$. Поэтому если некоторая бесконечная двоичная последовательность π содержит π' в качестве непрерывного фрагмента, то $\mathcal{S}'' \subseteq Forb(\mathcal{T}_{\pi(3)})$. Рассмотрим множество

$\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}''$, обозначим через N величину $\max\limits_{G \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}''} |V(G)| + 1$. Ясно, что все графы из $\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}''$ являются связными, причем удаление любой вершины из каждого такого графа образует граф из $\mathcal{T}_{\pi_*(3)}$ с центральной вершиной, не принадлежащей ни A_3, ни B_3. Поэтому для любой бесконечной двоичной последовательности π'', N первых членов которой совпадают с N первыми членами последовательности π_*, справедливо включение $\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}'' \subseteq Forb(\mathcal{T}_{\pi''(3)})$. Существует бесконечная двоичная последовательность $\pi''' \neq \pi_*$, содержащая π' в качестве непрерывного фрагмента и N первых членов которой совпадают с N первыми членами π_*. Значит, $\mathcal{T}_{\pi'''(3)} \subseteq Free(\mathcal{S}')$. Т.к. $\mathcal{T}_{\pi'''(3)} \in \mathscr{B}_\Pi(Free(\mathcal{S}))$, то $\mathcal{T}_{\pi'''(3)} \subseteq Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$, причем $Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$ является конечно определенным относительно $Free(\mathcal{S})$. Поэтому по теореме 2.1 класс $Free(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$ должен быть 3-РР-сложным. Получаем противоречие. Значит, наше предположение было неверным. Лемма 4.9 доказана.

4.4 Граничные классы графов для задач о k-раскраске

Во втором разделе этой главы было конструктивным образом показано, что множество граничных классов графов для обеих задач о 3-раскраске является континуальным. В этом разделе мы покажем континуальность для случая произвольного k.

Пусть p — некоторое целое неотрицательное число. Для наследственного класса $\mathcal{X}$ через $\mathcal{X}^p$ будем обозначать множество $[\{G \circ K_p : \ G \in \mathcal{X}\}]$ (считается, что $G \circ K_0$ равно G).

Лемма 4.10. *Пусть $\mathcal{B}$ — k-ВР-граничный класс ($k \geq 3$) и для некоторого конечно определенного класса $\mathcal{X}$ справедливо включение $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$, причем $\mathcal{X}$ состоит из графов с хроматическим числом не более чем $k+1$. Тогда для любого натурального p класс $\mathcal{B}^p$ является $(k+p)$-ВР-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку класс $\mathcal{B}$ является k-ВР-предельным, то существует такая последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$, состоящая из k-ВР-сложных классов, что $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$. Покажем, что любой класс последовательности $\{\mathcal{B}_i^p\}$ является $(k+p)$-ВР-сложным. Отсюда будет следовать, что класс $\mathcal{B}^p$ является $(k+p)$-ВР-предельным.

Действительно, для произвольного графа G справедливо равенство $\chi(G \circ K_p) = \chi(G) + p$. Таким образом, неравенство $\chi(G \circ K_p) \leq p + k$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\chi(G) \leq k$. Поэтому при любом i класс $\mathcal{B}_i^p$ является $(k+p)$-ВР-сложным.

Теперь докажем, что класс $\mathcal{B}^p$ является $(k+p)$-ВР-граничным. Предположим, что это не так. Тогда ввиду леммы 1.1 существует бесконечная монотонно убывающая последовательность из $(k+p)$-сложных частей класса $\mathcal{X}^p$, сходящаяся к собственному подклассу класса $\mathcal{B}^p$. Назовем эту последовательность первой. Сформируем новую последовательность, которую назовем второй. Для каждого члена первой последовательности выберем все графы H, представимые в виде $G \circ K_p$. Понятно, что такое разложение графа H единственно (с точностью до изоморфизма) и что формирование графа G осуществимо за полиномиальное время. Очевидно, что все исключенные графы заведомо имеют хроматическое число, не превосходящее $k + p$. Поэтому порожденные подграфы графов G составляют k-ВР-сложный класс, являющийся членом второй последовательности. Очевидно, что вторая последовательность сходится к собственному подклассу класса $\mathcal{B}$. Получаем противоречие с его k-ВР-граничностью. Таким образом, $\mathcal{B}^p$ — $(k+p)$-ВР-граничный класс. Лемма 4.10 доказана.

Теорема 4.2. *Для любого натурального k класс $\mathcal{D}_\pi^k$ является $(k+3)$-ВР-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим класс $\mathcal{D}eg(4) \cap Free(\{K_5\})$ через $\mathcal{X}$. Данный класс является конечно определенным и по теореме Брукса [43] состоит из графов с хроматическим числом не более чем 4. При этом, для любой бесконечной двоичной последовательности π справедливо включение $\mathcal{D}_\pi \subseteq \mathcal{X}$. Значит, по лемме 4.10 класс $\mathcal{D}_\pi^k$ является $(k+3)$-ВР-граничным. Теорема 4.2 доказана.

Итак, из теоремы 4.2 следует, что при любом $k \geq 3$ существует континуум k-ВР-граничных классов графов. Далее будет показано, что это же верно и для задачи k-РР.

Теорема 4.3. *Для любого $k \geq 3$ множество граничных классов для задачи k-РР является континуальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любых различных бесконечных двоичных последовательностей π_1, π_2 не существует k-РР-граничного класса, одновременно являющегося подмножеством и $\mathcal{T}_{\pi_1(k)}$ и $\mathcal{T}_{\pi_2(k)}$. Действительно, по лемме 4.8 противное бы означало, что $\mathcal{T}'_{\pi_1(k)} \cup \mathcal{T}'_{\pi_2(k)} \subseteq \mathcal{T}_{\pi_1(k)} \cap \mathcal{T}_{\pi_2(k)}$, а оно не может быть выполнено. Отсюда и поскольку множество бесконечных двоичных последовательностей является континуальным, то при любом $k \geq 3$ множество k-РР-граничных классов континуально. Теорема 4.3 доказана.

4.5 Сравнительный анализ граничных систем для задач о k-раскраске и о хроматическом числе и индексе

В предыдущих разделах было показано, что для обеих задач о k-раскраске имеется континуум граничных классов графов. Докажем, что это верно и для задач ХЧ и ХИ.

Теорема 4.4. *Любой* 3-РР-*граничный класс является* ХИ-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любой 3-РР-сложный класс является и ХИ-сложным. Значит, любой 3-РР-граничный класс обязательно будет ХИ-предельным. Покажем, что на самом деле любой такой класс $\mathcal{B}$ является ХИ-граничным. Предположим противное, т.е. что существует ХИ-граничный класс $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{B}'_1 \supseteq \mathcal{B}'_2 \supseteq \mathcal{B}'_3 \dots$ — последовательность из ХИ-сложных классов, сходящаяся к классу $\mathcal{B}'$. Каждый k-РР-граничный класс состоит из графов, степень каждой вершины которых не более чем k. Поскольку $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, то таким свойством обладает и класс $\mathcal{B}$ для $k = 3$. Множество всех графов со степенями вершин не более чем 3 является конечно определенным классом. Поэтому существует такое i, что класс $\mathcal{B}'_i$ состоит из графов со степенями вершин не более, чем 3. Из известной теоремы Визинга [8] следует, что хроматический индекс каждого графа из $\mathcal{B}'_i$ не превосходит 4. Поэтому класс $\mathcal{B}'_j$ является k-РР-простым для любых $k > 3$ и $j \geq i$. Следовательно, при любом $j \geq i$ класс $\mathcal{B}'_j$ является 3-РР-сложным. Значит, класс $\mathcal{B}'$ является 3-РР-предельным. Поэтому класс $\mathcal{B}$ не может быть 3-РР-граничным. Получаем противоречие с предположением. Теорема 4.4 доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 4.4 нетрудно показать, что для любой бесконечной двоичной последовательности π класс $\mathcal{D}_\pi$ является ХЧ-граничным. Тем самым, ХЧ-граничная система и ХИ-граничная система являются континуальными. По всей видимости, каждый 3-ВР-граничный класс все-таки является также и ХЧ-граничным (хотя это строго доказать и не удается).

Оказывается, что при $k \geq 4$ свойство «наследования» k-ВР-граничных (соответственно, k-РР-граничных) классов ХЧ-граничной (соответственно, ХИ-граничной) системой отсутствует. Именно, справедлива

Теорема 4.5. *Для любого* $k \geq 4$ *существует континуум* k-ВР-*граничных классов (соответственно,* k-РР-*граничных классов), каждый из которых не является* ХЧ-*граничным (соответственно,* ХИ-*граничным).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество классов $\{\mathcal{D}_\pi^k \ : \ \pi$ – бесконечная двоичная последовательность$\}$ является континуальным фрагментом $(k+3)$-ВР-граничной системы (по теореме 4.2). При этом, для любой такой π справедливо включение $\mathcal{D}_\pi \subset \mathcal{D}_\pi^1 \subset \mathcal{D}_\pi^2 \subset \ldots$ и класс $\mathcal{D}_\pi$ является ХЧ-граничным. Значит, при любом $k \geq 1$ класс $\mathcal{D}_\pi^k$ не является ХЧ-граничным. Для любой бесконечной бинарной последовательности π класс $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ является 3-РР-граничным. Вместе с тем, для любой такой последовательности π имеет место цепочка включений $\mathcal{T}_{\pi(3)} = \mathcal{T}'_{\pi(3)} \subset \mathcal{T}'_{\pi(4)} \subset \mathcal{T}'_{\pi(5)} \subset \ldots$ и любой k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ включает $\mathcal{T}'_{\pi(k)}$. Отсюда следует, что для любого $k \geq 4$ существует континуальное семейство k-РР-граничных классов графов, не являющихся граничными для задачи о хроматическом индексе. Теорема 4.5 доказана.

Можно поставить и «обратную» задачу об отыскании ХЧ-граничных (соответственно, ХИ-граничных) классов графов, не являющихся k-ВР-граничными (соответственно, k-РР-граничными) ни при каком k. Существование таких классов для вершинного случая следует из теоремы 4.6.

Теорема 4.6. *Класс $co(\mathcal{D})$ является* ХЧ-*граничным, но не является* k-ВР-*граничным ни при каком* k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граничность класса $co(\mathcal{D})$ для задачи ХЧ следует из того, что класс $\mathcal{D}$ является граничным для задачи о разбиении на клики (что доказано в последнем разделе первой главы диссертации). Понятно, что любой k-ВР-граничный класс состоит из графов с хроматическим числом не более чем k. Поэтому $co(\mathcal{D})$ не может быть k-ВР-граничным ни при каком k. Теорема 4.6 доказана.

К сожалению, пока не удается выявить примеров ХИ-граничных классов, не являющихся k-РР-граничными ни при каком k. По-видимому, получению таких примеров (или хотя бы неконструктивному доказательству их существования) неизбежно предшествует установление NP-полноты задачи ХИ для такого наследственного класса $\mathcal{X}$, что при любом k графы из $\mathcal{X}$ со степенями вершин не более чем k образуют ХИ-простой класс. На настоящее время известно совсем немного случаев «труднорешаемости» задачи о хроматическом числе (довольно хороший обзор сделан в [64, 65]) и все они не удовлетворяют предложенному условию.

Глава 5

«Критические» классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании

5.1 Краткое описание основных результатов пятой главы

Напомним, что до результатов недавнего времени ни для одной задачи на графах не удавалось полностью описать ни граничную систему, ни все множество минимальных сложных классов. В этой части диссертации впервые (с момента первой публикации [2] по граничным классам) будет получен результат о полном описании граничной системы. Именно, будет доказано, что PCP-граничную систему образуют ровно 10 конкретных классов графов. Данное описание является следствием полученного критерия эффективной разрешимости задачи PCP в некотором достаточно представительном семействе классов графов, содержащем в том числе и все конечно определенные классы. Из него также следует, что существует всего 5 минимальных PCP-сложных классов, являющихся конечно определенными, и единственный минимальный PCP-сложный класс, который является минорно замкнутым.

5.2 Новые минимальные PCP-сложные случаи

Во второй главе настоящей диссертации было доказано, что классы $\mathcal{S}tar$ и $\mathcal{C}omet$ являются минимальными PCP-сложными. Здесь будет показано, что этим свойством обладают еще четыре конкретных класса графов. Введем следующие обозначения для графов и классов графов.

1. $Comb_i$ — граф, получающийся добавлением к $K_{2,i}$ ребра, инцидентного обеим вершинам степени i

2. Cam_i — граф, получаемый соединением ребрами вершины степени i графа S_i со всеми его листьями

3. $\mathcal{C}lique$ — класс полных графов

4. $\mathcal{B}at = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{K_{2,i}\}]$

5. $\mathcal{C}omb = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comb_i\}]$

6. $\mathcal{C}amomile = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Cam_i\}]$

5.2.1 О минимальной PCP-сложности класса графов $\mathcal{B}at$

Для доказательства PCP-минимальности класса $\mathcal{B}at$ будем использовать NP-полноту задачи о трехмерном сочетании. В задаче о трехмерном сочетании заданы попарно непересекающиеся множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ и множество троек $M \subseteq X \times Y \times Z$. Требуется определить, существует ли подмножество $M' \subseteq M$ мощности n такое, что никакие две тройки из M' не имеют общего элемента.

Лемма 5.1. *Класс $\mathcal{B}at$ является* PCP-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество M — входные данные задачи о трехмерном сочетании. Для каждых $i, j \in \overline{1, n}$ положим $A(i, j) =$

$\{k : (x_i, y_j, z_k) \in M\}$. Для каждого $i \in \overline{1,n}$ рассмотрим множество $\{j : A(i,j) \neq \emptyset\}$. Понятно, что для каждого $i \in \overline{1,n}$ это множество непусто (иначе бы для имеющегося M множества M' заведомо не нашлось бы). Будем считать, что $\{j : A(i,j) \neq \emptyset\} = \{j_1^{(i)}, j_2^{(i)}, \ldots, j_{s_i}^{(i)}\}$. Для заданных натурального числа k и некоторого множества натуральных чисел $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ через kN будем обозначать множество $\{kn_1, kn_2, \ldots, kn_p\}$.

Обозначим через S^k $(k \in \overline{0,n})$ сумму $\sum\limits_{i=0}^{k} s_i$, где s_0 считается равным нулю. Рассмотрим граф $G = K_{2,2S^n}$. Обозначим через a и b его вершины степени $2S^n$. Для каждой вершины $x \in \{a,b\}$ плоская укладка графа G задает циклическое упорядочивание ребер, инцидентных x. Для каждой такой вершины x пронумеруем ребра, инцидентные x, в порядке их следования в циклическом упорядочивании. При этом ребра с одинаковыми номерами являются смежными.

Множество ребер, инцидентных вершине a, разобьем на $n+1$ частей. Для каждого $i \in \overline{1,n}$ множество ребер, принадлежащих i-ой части, составляют ребра (инцидентные a) с номерами из множества $N_i = \{S^{i-1}+1, S^{i-1}+2, \ldots, S^i\}$. Последнюю часть образуют ребра, инцидентные вершине a и имеющее номер, больший, чем S^n. Множество ребер, принадлежащих i-ой части $(i \in \overline{1,n+1})$, обозначим через $Part_i(a)$. Множество ребер, инцидентных вершине b, разбивается на $2n$ частей. Для каждого $i \in \overline{1,n}$ множества ребер, принадлежащих i-ой и $n+i$-ой частям, составляют ребра (инцидентные b) с номерами из N_i и $\{S^n + S^{i-1} + 1, S^n + S^{i-1} + 2, S^n + S^i\}$ соответственно. Множество ребер, принадлежащих i-ой части $(i \in \overline{1,2n})$, обозначим через $Part_i(b)$.

Теперь покажем, как построить $\mathcal{L}$ — назначение допустимых цветов ребер графа G. Внутри каждой из введенных ранее частей плоская укладка G порождает свою нумерацию. То есть, если какую-нибудь часть образовывали ребра с номерами из $\overline{k_1,k_2}$, то во внутренней нумерации этой части ребро с общим номером $i \in \overline{k_1,k_2}$ имеет номер $i - k_1 + 1$. Для ребра e, имеющего в части $Part_i(a)$ $(i \neq n+1)$ номер k, положим $\mathcal{L}(e)$ равным множеству $(n+1)^5 A(i, j_k^{(i)}) \cup (n+1)(N_i \setminus \{S^i\})$. Ребро e, имеющее в части $Part_{n+1}(a)$ номер k, имеет один допустимый цвет $(n+1)^6 + k$. Для ребра e, принадлежащего части $Part_i(b)$ $(i < n+1)$ и имеющего в этой части номер k, положим $\mathcal{L}(e)$ равным множеству $\{j_k^{(i)}\} \cup (n+1)^3(N_i \setminus \{S^i\})$. Для всех ребер e, принадлежащих части $Part_i(b)$ $(i \geq n+1)$, положим $\mathcal{L}(e)$ равным множеству $(n+1)N_i$.

Предположим, что существует $\mathcal{L}$-ранжирование ребер графа G. Покажем, что тогда существует множество M' с требуемыми свойствами. Очевидно, что для любого $i \in \overline{1,n}$ хотя бы одно ребро из $Part_i(a)$ покрашено в цвет, не принадлежащий множеству $(n+1)(N_i \setminus \{S^i\})$. Вместе с тем, такое ребро должно быть единственным, поскольку среди ребер, инцидентных a, не более n ребер может быть покрашено в цвета, не принадлежащие множеству $(n+1)\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i \setminus \{S^i\})$. Обозначим это ребро через $e_i^{'}$. Аналогично, для любого $i \in \overline{1,n}$ ровно одно ребро из $Part_i(b)$ покрашено в цвет, не принадлежащий множеству $(n+1)^3(N_i \setminus \{S^i\})$. Данное ребро обозначим через $e_i^{''}$. Ясно, что среди ребер $e_1^{''}, e_2^{''}, \ldots, e_n^{''}$ нет двух ребер, покрашенных в один и тот же цвет. Покажем, что ребра $e_i^{'}$ и $e_i^{''}$ должны быть смежными для любого i. Предположим противное. Тогда рассмотрим ребро $e^* \in Part_i(a)$, смежное с ребром $e_i^{''}$. Цвет ребра e^* больше цвета ребра $e_i^{''}$. В множестве $Part_{i+n}(b)$ обязательно есть ребро e^{**}, цвет которого совпадает с цветом ребра e^*. Но тогда для пути, содержащего ребра $e^*, e_i^{''}, e^{**}$, не выполняется условие $\mathcal{L}$-ранжирования ребер. Получаем противоречие.

Итак, для любого $i \in \overline{1,n}$ ребра $e_i^{'}$ и $e_i^{''}$ должны быть смежными. Но тогда в частях $Part_i(a)$ и $Part_i(b)$ ребра $e_i^{'}$ и $e_i^{''}$ имеют одинаковый номер k_i. Поскольку, ребра $e_1^{''}, e_2^{''}, \ldots, e_n^{''}$ окрашены в попарно различные цвета, то $\{j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_n}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Аналогично, поскольку ребра $e_1^{'}, e_2^{'}, \ldots, e_n^{'}$ окрашены в различные цвета, то $\{\frac{c(e_1^{'})}{(n+1)^5}, \frac{c(e_2^{'})}{(n+1)^5}, \ldots, \frac{c(e_n^{'})}{(n+1)^5}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ (напомним, что $c(e_i^{'})$ — цвет, в который покрашено ребро $e_i^{'}$). Но тогда множество M содержит набор из n троек $M' = \{(x_1, y_{j_{k_1}}, z_{\frac{c(e_1')}{(n+1)^5}}), (x_2, y_{j_{k_2}}, z_{\frac{c(e_2')}{(n+1)^5}}), \ldots, (x_n, y_{j_{k_n}}, z_{\frac{c(e_n')}{(n+1)^5}})\}$ с требуемым свойством.

Таким образом, если существует $\mathcal{L}$-ранжирование ребер графа G, то существует и множество M' с соответствующими свойствами. Легко проверить справедливость и обратного утверждения. Заметим, что длина входа задачи РСР для пары $(G, \mathcal{L})$ ограничена сверху полиномом от длины входа задачи о трехмерном сочетании — множества M. Поэтому задача о трехмерном сочетании полиномиально сводится к задаче РСР в классе графов $\{K_{2,i} : \ i = 1, 2, \ldots\}$. Отсюда следует, что класс $\mathcal{B}at$ является РСР-сложным. Лемма 5.1 доказана.

Теорема 5.1. *Класс $\mathcal{B}at$ является минимальным* РСР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.1 класс $\mathcal{B}at$ является РСР-сложным. Докажем его минимальность. Для этого покажем, что для любого $G \in \mathcal{B}at$ класс $\mathcal{B}at \cap Free(\{G\})$ является РСР-простым. Действительно, каждый граф из класса $\mathcal{B}at \cap Free(\{G\})$ является либо порожденным подграфом графа $K_{|V(G)|,|V(G)|}$, либо графом вида $K_{1,i}$, либо пустым графом. Задача РСР полиномиально разрешима в классе графов $\{K_{1,i} : i = 1, 2, \ldots\}$, поскольку она полиномиально эквивалентна задаче о системе различных представителей. Граф $K_{|V(G)|,|V(G)|}$ содержит конечное число попарно неизоморфных порожденных подграфов. Таким образом, при любом $G \in \mathcal{B}at$ класс $\mathcal{B}at \cap Free(\{G\})$ является РСР-простым. Теорема 5.1 доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 2.6 нетрудно показать, что класс $\mathcal{B}at$ является РСР-граничным.

5.2.2 О минимальной PCP-сложности классов графов $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$

В этом разделе для задачи PCP будет сформулировано и доказано некоторое полиномиальное сведение, которое оказывается полезным для построения новых PCP-сложных случаев. Оно позволяет довольно просто показать, что классы $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ являются минимальными PCP-сложными.

Напомним, граф H называется *минором* графа G, если H получается стягиванием ребер некоторого подграфа графа G. Класс графов, замкнутый относительно перехода к минорам его графов, называется *минорно замкнутым.* Любой минорно замкнутый класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных миноров $\mathcal{S}$, это будем записывать так: $\mathcal{X} = Free_m(\mathcal{S})$. По известной теореме Н. Робертсона и П. Сеймура минимальное (по отношению «быть минором графа») множество запрещенных миноров является конечным для любого минорно замкнутого класса. Например, для класса планарных графов данное множество совпадает с $\{K_{3,3}, K_5\}$ по критерию Понтрягина-Куратовского.

Класс графов $\mathcal{X}$ будем называть *минором класса* $\mathcal{Y}$, если для любого графа $H \in \mathcal{X}$ существует такой граф $G \in \mathcal{Y}$, что H — минор графа G. Эффективным аналогом понятия минора класса графов является понятие сильного минора класса графов. Класс $\mathcal{X}$ будем называть *сильным минором класса* $\mathcal{Y}$, если существует полиномиальный алгоритм, который по произвольному графу $H \in \mathcal{X}$ вычисляет граф $G \in \mathcal{Y}$ и последовательность действий над ним, состоящую из серии удалений вершин и ребер, а затем из серии стягиваний ребер, выполнение которой приводит к графу H.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс графов, для которого задача* PCP *не является полиномиально разрешимой. Тогда таким свойством обладает любой класс, для которого $\mathcal{X}$ является сильным минором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ — сильный минор класса $\mathcal{Y}$. Покажем, что задача PCP для графов из $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{Y}$. Отсюда будет следовать справедливость теоремы.

Пусть $H \in \mathcal{X}$ и $\mathfrak{L}$ — входные данные задачи PCP, C — максимальный цвет в множествах из $\mathfrak{L}$. Пусть G — граф, существование которого для H постулируется в определении сильного минора класса. Граф H получается из G удалением вершин и ребер и последующим стягиванием некоторых ребер. Существует множество тех ребер G, которые становятся ребрами графа H. Пусть E — множество таких ребер G. Пусть E_1 — множество ребер G, которые в процессе построения H стягиваются, а $E_2 = E(G) \setminus (E \cup E_1)$. По определению сильного минора класса графов сам граф G и множества E, E_1, E_2 вычисляются за полиномиальное время. Построим множество $\mathfrak{L}'$ назначений допустимых цветов ребрам G следующим образом. Если $e \in E$, то положим $L'(e)$ равным объединению цветов из $L(e)$, увеличенных на $|E_1|$. Пронумеруем все ребра из E_1 числами от 1 до $|E_1|$. Для ребра $e \in E_1$ с номером i положим $L'(e) = \{i\}$. Пронумеруем все ребра из E_2 числами от 1 до $|E_2|$. Для ребра $e \in E_2$ с номером i положим $L'(e) = \{C+|E_1|+i\}$. Очевидно, что $\mathfrak{L}'$-ранжирование ребер графа G существует тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{L}$-ранжирование ребер графа H. Вместе с тем, длина входных данных пары $(G, \mathfrak{L}')$ ограничена сверху некоторым полиномом от длины входных данных пары $(H, \mathfrak{L})$. Отсюда следует обозначенное в предыдущем абзаце полиномиальное сведение. Теорема 5.2 доказана.

Теорема 5.2 позволяет по уже известным PCP-сложным случаям строить новые PCP-сложные случаи. Так, например, класс $\mathcal{B}at$ является сильным минором классов $\mathcal{C}omb$ и $\mathcal{C}lique$, а класс $\mathcal{S}tar$ является сильным минором класса $\mathcal{C}amomile$. Поэтому по теореме 5.2 классы $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ являются PCP-сложными.

Теорема 5.3. *Классы $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ являются минимальными* PCP-*сложными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для классов $\mathcal{C}omb$ и $\mathcal{C}lique$ рассуждения аналогичны доказательству теоремы 5.1. Каждый граф любого наследственного класса $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}amomile$ имеет не более чем $C = C(\mathcal{X})$ нелистовых вершин. Поэтому по теореме 2.5 класс $\mathcal{X}$ является PCP-простым. Теорема 5.3 доказана.

На настоящее время не известно, каким образом устроено множество всех минимальных PCP-сложных классов. Далее будет доказано, что конечно определенными минимальными PCP-сложными классами являются только классы $\mathcal{C}lique, \mathcal{B}at, \mathcal{C}omb, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile$. Там же будет показано, что единственным минорно замкнутым минимальным PCP-сложным классом является класс $\mathcal{C}omet$.

По аналогии с доказательством теоремы 2.6 нетрудно показать, что классы $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ являются PCP-граничными.

5.3 Новые PCP-граничные случаи

Напомним, что во второй главе этой диссертации (теорема 2.7) было доказано, что класс $\tilde{\mathcal{T}}$ является PCP-граничным. По аналогии с доказательством этой теоремы нетрудно показать PCP-граничность еще трех классов графов. По строению их графов они близки к классу $\tilde{\mathcal{T}}$. Поэтому приведем определения всех этих четырех классов (т.е. включая класс $\tilde{\mathcal{T}}$) с единых позиций.

Аддитивным замыканием класса $\mathcal{X}$ называется множество всевозможных графов, каждая компонента связности которых принадлежит $\mathcal{X}$.

1. $\tilde{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребра, инцидентного добавленной вершине и некоторой вершине пути

2. $\tilde{\mathcal{D}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум последовательным вершинам пути

3. $\hat{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум вершинам пути, отстоящим в пути друг от друга на расстоянии 2

4. $\hat{\mathcal{D}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и трем последовательным вершинам пути

5.4 Полная классификация классов графов из некоторого семейства по вычислительной сложности задачи PCP и следствия из нее

Введем в рассмотрение семейство $\mathscr{M}$ классов графов. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ принадлежит $\mathscr{M}$, если выполняется одно из условий:

- ни один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ не является минором $\mathcal{X}$
- если хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является минором $\mathcal{X}$, то хотя бы один из них является и сильным минором $\mathcal{X}$.

Интерес к классу $\mathscr{M}$ объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, удается получить критерий полиномиальной разрешимости задачи PCP для классов из $\mathscr{M}$. Во-вторых, $\mathscr{M}$ является достаточно представительным семейством классов графов. Так, все минорно замкнутые классы принадлежат семейству $\mathscr{M}$ (это прямо следует из определения), далее будет доказано, что и все конечно определенные классы ему принадлежат.

5.4.1 Оценки количеств вершин, степеней вершин и диаметров графов из некоторых классов

Напомним, что множество попарно несмежных вершин графа называется *независимым*, а множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*. *Паросочетанием* в графе называется множество попарно несмежных ребер. Паросочетание называется *порожденным*, если не существует ребра, которое смежно с двумя различными ребрами данного паросочетания.

Лемма 5.2. *Любой граф G с n вершинами, имеющими степени от 1 до Δ, содержит порожденное паросочетание с $\lceil\frac{n}{2\Delta^2}\rceil$ ребрами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2-*Сферой* B_e (с центром в ребре $e \in E(G)$) графа G назовем множество тех ребер G, которые в реберном к G графе отстоят от вершины e на расстоянии не более чем 2. Ясно, что для любого $e \in E(G)$ 2-сфера B_e содержит не более $1 + 2(\Delta-1) + 2(\Delta-1)^2 = 2\Delta(\Delta-1)+1 < 2\Delta^2$ элементов. Отсюда следует, что любая компонента связности H графа G содержит порожденное паросочетание с $\lceil\frac{|E(H)|}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil$ ребрами, которое может быть построено методом первого подходящего. Если H не является деревом, то $|E(H)| \geq |V(H)|$ и поэтому $\lceil\frac{|E(H)|}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq \lceil\frac{|V(H)|}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq \lceil\frac{|V(H)|}{2\Delta^2}\rceil$. Пусть теперь H является деревом. Покажем, что все равно выполняется неравенство $\lceil\frac{|E(H)|}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil = \lceil\frac{|V(H)|-1}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq \lceil\frac{|V(H)|}{2\Delta^2}\rceil$. Действительно, пусть $k = \lceil\frac{|V(H)|-1}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil$ и $\lceil\frac{|V(H)|}{2\Delta^2}\rceil \geq k+1$. Тогда $|V(H)| \geq 2\Delta^2 k + 1$ (из последнего неравенства) и поэтому $\lceil\frac{|V(H)|-1}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq \lceil\frac{2\Delta^2 k+1-1}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq \lceil\frac{2\Delta^2 k}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil$. Заметим, что $\lceil\frac{2\Delta^2 k}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil = \lceil k+\frac{k(2\Delta-1)}{2\Delta(\Delta-1)+1}\rceil \geq k+1$, т.к. $2\Delta > 1$ и $k \in \mathbb{N}$ (поскольку $|V(H)| > 1$). Получаем противоречие.

Итак, каждая компонента связности H графа G содержит порожденное паросочетание с $\lceil\frac{|V(H)|}{2\Delta^2}\rceil$ ребрами. Отсюда следует, что и сам граф G содержит порожденное паросочетание с $\lceil\frac{n}{2\Delta^2}\rceil$ ребрами (напомним, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выполняется неравенство

$\lceil x_1 \rceil + \ldots + \lceil x_k \rceil \geq \lceil x_1 + \ldots + x_k \rceil$). Лемма 5.2 доказана.

Широко известна теорема Рамсея, согласно которой любой граф с достаточно большим числом вершин содержит либо независимое множество, либо клику с заданными мощностями. Обозначим наименьшее число вершин в графе, обязательно содержащем либо независимое множество с a вершинами, либо клику с b вершинами, через $R(a, b)$.

Лемма 5.3. *Пусть* $G \in Free(\{K_i, K_{2,i}, Comb_i, S_i, Cam_i\})$ $(i \geq 2)$ *и* $x \in V(G)$. *Тогда вершина* x *имеет менее* $2iR^2(i,i) + R(iR(i,i), i)$ *нелистовых соседей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $N(x)$ и удалим из нее все листья графа G. Оставшееся множество разобьем на два подмножества N_1 и N_2. Подмножество N_1 составляют те вершины y, для которых справедливо включение $N(y) \subseteq N(x) \cup \{x\}$. Подмножество N_2 образуют вершины, имеющие хотя бы одного соседа, несмежного с вершиной x.

Каждая вершина из $N(x)$ имеет не более чем $R(i, i-1) - 1$ соседних вершин в $N(x)$. Действительно, если бы существовала вершина $y \in N(x)$ с не менее чем $R(i, i-1)$ соседями из $N(x)$, то $N(y) \cap N(x)$ содержала бы либо независимое множество размера i, либо клику с $i-1$ вершиной. Но тогда G содержал бы либо $Comb_i$, либо K_i в качестве порожденного подграфа. Во множестве N_2 рассмотрим подмножество N_2' тех вершин, которые смежны хотя бы с одной вершиной из N_1. Подграф H графа G, порожденный множеством вершин $N_1 \cup N_2'$, не содержит изолированных вершин, причем степень каждой его вершины не превосходит $R(i, i-1) - 1$. Поэтому множество $N_1 \cup N_2'$ содержит не более $2(i-1)(R(i, i-1) - 1)^2 < 2iR^2(i,i)$ вершин, т.к. в противном случае по лемме 1 имеются $2i$ вершин из $N_1 \cup N_2'$, порождающих в G паросочетание (и G содержит порожденный подграф Cam_i). Значит, $|N_1| < 2iR^2(i,i)$.

Рассмотрим множество N_2. Через $N_2^{(1)}$ обозначим наибольшее независимое подмножество N_2, а через $N_2^{(2)}$ множество $\{z : \exists y \in N_2^{(1)}, z \in N(y) \setminus (N(x) \cup \{x\})\}$. Рассмотрим минимальное по включению подмножество $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq N_2^{(2)}$, доминирующее $N_2^{(1)}$ (т.е. $N_2^{(1)} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} N(u_j)$). Такое множество обязательно существует, т.к. каждая вершина множества $N_2^{(1)}$ смежна хотя бы с одной вершиной из $N_2^{(2)}$. Ввиду минимальности V существуют такие вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$, что для любого $s \in \overline{1,k}$ вершина v_s принадлежит множеству $N(u_s) \setminus \bigcup\limits_{j=1, j\neq s}^{k} N(u_j)$. Ясно, что любая вершина V смежна с не более чем $i-1$ вершинами из $N_2^{(1)}$ (т.к. $G \in Free(\{K_{2,i}\})$) и поэтому $k = |V| \geq \frac{|N_2^{(1)}|}{i-1}$. Множество V содержит не более $R(i,i)-1$ элементов, т.к. в противном случае оно содержит независимое множество размера i, вершины которого вместе со смежными им вершинами из $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и вершиной x порождают в G подграф S_i. Значит, $k < R(i,i)$ и $|N_2^{(1)}| < iR(i,i)$. Понятно, что $|N_2| \leq R(|N_2^{(1)}|+1, i-1) - 1$ и поэтому $|N_2| < R(iR(i,i), i)$. Объединяя полученную оценку с оценкой на мощность N_1 заключаем, что x имеет не более чем $2iR^2(i,i) + R(iR(i,i), i)$ нелистовых соседей. Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. *Пусть G — связный граф из $Free(\{Com_i\})$ и $i \geq 2$. Тогда либо диаметр G не превосходит $2i-1$, либо каждая вершина G имеет не более чем $i-1$ соседних листьев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть диаметр G не менее чем $2i$ и некоторая вершина x имеет i соседних листьев. Пусть y и z — две вершины, расстояние между которыми не менее чем $2i$. По неравенству треугольника существует такая вершина $x' \in \{y, z\}$, что расстояние между ней и x не менее i. Ввиду связности G существует порожденный путь P, соединяющий x и x', содержащий не менее чем $i+1$ вершин. Путь P не содержит ни одного листового соседа x, т.к. его длина не менее чем 2. Некоторые вершины P и некоторые соседние с x листья G порождают подграф, изоморфный Com_i. Получаем противоречие. Значит, предположение было неверным. Лемма 5.4 доказана.

Вершину степени 2 в графе назовем *внутренней*, если ее соседи не смежны.

Лемма 5.5. *Пусть* $H_1 \in \tilde{\mathcal{T}}, H_2 \in \tilde{\mathcal{D}}, H_3 \in \hat{\mathcal{T}}, H_4 \in \hat{\mathcal{D}}$ *и* G *— связный граф без внутренних вершин с не менее чем тремя вершинами, принадлежащий классу* $Free(\{H_1, H_2, H_3, H_4\})$. *Тогда* G *имеет не более чем* $\frac{\Delta^{8n^2\Delta^2+20n\Delta+1}-1}{\Delta-1}$ *вершин, где* Δ *— максимальная из степеней вершин графа* G, *а* $n = \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|, |V(H_3)|, |V(H_4)|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Поскольку G является связным графом и содержит не менее трех вершин, то $\Delta \geq 2$. Легко показать, что любой связный граф с диаметром d и наибольшей из степеней вершин $\Delta' > 1$ имеет не более чем $1 + \Delta' + \Delta'^2 + \ldots + \Delta'^d = \frac{\Delta'^{d+1}-1}{\Delta'-1}$ вершин. Из этого и сделанного предположения следует, что диаметр G не менее $8n^2\Delta^2 + 20n\Delta + 1$. Рассмотрим две вершины G, расстояние между которыми равно диаметру, и порожденный путь между этими вершинами. Удалим крайние вершины этого пути и получим путь $P = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Понятно, что $k \geq 8n^2\Delta^2 + 20n\Delta$. Каждая вершина пути P смежна хотя бы с одной вершиной из $V(G) \setminus V(P)$ (поскольку G не содержит внутренних вершин и P является порожденным путем). Обозначим через V множество тех вершин из $V(G) \setminus V(P)$, которые смежны хотя бы с одной вершиной пути P. Для каждой вершины $v \in V$ рассмотрим множество $I_v = \{i : \ (v, u_i) \in E(G)\}$.

Покажем, что для любых $i, j \in \overline{1, k}, j - i = 2n\Delta + 2$ существуют такая вершина $v \in V$ и такие $i^*, j^* \in I_v$, что $i+n \leq i^* \leq j^* \leq j-n, I_v \cap \overline{i^* - n, i^* - 1} = \emptyset$ и что $I_v \cap \overline{j^* + 1, j^* + n} = \emptyset$. Рассмотрим вершину $u_{i+\Delta n+1}$, у нее есть сосед, не принадлежащий P. Обозначим этого соседа через v. Рассмотрим множества $I_1 = \{p \in I_v : \ i \leq p \leq i+\Delta n+1\} \cup \{i\}$ и $I_2 = \{q \in I_v : \ i+\Delta n+1 \leq q \leq j\} \cup \{j\}$. Пусть $i_0 = i < i_1 < \ldots < i_s = i + \Delta n + 1$ — все элементы множества I_1. Хотя бы одна из $s \leq \Delta$ разностей $i_s - i_{s-1}, i_{s-1} - i_{s-2}, \ldots, i_1 - i_0$ не меньше $n + 1$

(по принципу Дирихле). Тогда среди $i_1, i_2, \dots, i_s$ есть число i^*, для которого $I_v \cap \overline{i^* - n, i^* - 1} = \emptyset$. Аналогичным образом можно показать, что и во множестве I_2 существует элемент $j^* \in I_v$, для которого $I_v \cap \overline{j^* + 1, j^* + n} = \emptyset$.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$ и числа $i', j' \in I_v$, для которых $n+1 \le i' \le j' \le k-n$, $I_v \cap \overline{i' - n, i' - 1} = \emptyset$ и $I_v \cap \overline{j' + 1, j' + n} = \emptyset$. Обозначим через A множество вершин $\{u_{i'-n}, u_{i'-n+1}, \dots, u_{i'}\}$, а через B множество вершин $\{u_{j'}, u_{j'+1}, \dots, u_{j'+n}\}$. Если $j' = i'$, то множество $A \cup B \cup \{v\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности графа H_1. Если $j' = i'+1$, то множество $A \cup B \cup \{v\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности графа H_2. Если $j' = i'+2$, то множество $A \cup B \cup \{u_{i'+1}, v\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности либо графа H_3 (если $(v, u_{i'+1}) \notin E(G)$), либо графа H_4 (если $(v, u_{i'+1}) \in E(G)$). Пусть теперь $j' > i'+2$. Если $(v, u_{i'+1}) \notin E(G)$, то множество вершин $A \cup B \cup \{v, u_{i'+1}\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности графа H_1. Если же $(v, u_{i'+1}) \in E(G)$, то множество вершин $A \cup B \cup \{v, u_{i'+1}\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности графа H_2.

Во множестве $V(P)$ выделим попарно непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \dots, V_{4n\Delta}$, где $V_p = \{u_{2n\Delta(p-1)+5(p-1)+1}, u_{2n\Delta(p-1)+5(p-1)+2}, \dots, u_{2n\Delta p+5p}\}$. Такие подмножества обязательно существуют, поскольку $k \ge 8n^2\Delta^2 + 20n\Delta$. Для каждого p через V'_p обозначим множество $V_p \setminus \{u_{2n\Delta(p-1)+5(p-1)+1}, u_{2n\Delta p+5p}\}$. Заметим, что для любого p множество V'_p содержит «отрезок» пути P с $2n\Delta + 3$ вершинами. Из результатов предыдущих двух абзацев следует, что для любого p есть такая вершина $v_p \in V$ и такой граф $H^p \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$, что $V'_p \cup \{v_p\}$ порождает в G надграф любой компоненты связности графа H^p. Заметим, что для любых $p_1 \ne p_2$ нет таких вершин $x \in V'_{p_1}$ и $y \in V'_{p_2}$, что $(x, y) \in E(G)$. Поскольку каждая вершина G имеет степень не более Δ, то для любого $i \in \overline{1, 4n\Delta}$ существует не более чем Δ элементов множества $\{V'_1 \cup \{v_1\}, V'_2 \cup \{v_2\}, \dots, V'_{4n\Delta} \cup \{v_{4n\Delta}\}\}$, которые содержат вершины, смежные с v_i. Из последних двух замечаний следует, что среди $v_1, v_2, \dots, v_{4n\Delta}$ есть такие попарно различные вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{4n}}$

(которые могут быть построены по $v_1, v_2, \ldots, v_{4n\Delta}$ по правилу первого подходящего), что G не содержит ребра, инцидентного двум вершинам из разных элементов множества $\{V'_{i_1} \cup \{v_{i_1}\}, V'_{i_2} \cup \{v_{i_2}\}, \ldots, V'_{i_{4n}} \cup \{v_{i_{4n}}\}\}$. По принципу Дирихле среди $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{4n}}$ существуют такие вершины $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_n}$, что множества $V'_{j_1} \cup \{v_{j_1}\}, V'_{j_2} \cup \{v_{j_2}\}, \ldots, V'_{j_n} \cup \{v_{j_n}\}$ порождают графы, каждый из которых является надграфом любой компоненты связности некоторого графа $H \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Объединение этих надграфов является надграфом H и поэтому G содержит H в качестве порожденного подграфа. Получаем противоречие с исходным предположением. Лемма 5.5 доказана.

Граф H будем называть *стяжкой* графа G, если G получается подразбиениями ребер H и H содержит минимальное количество вершин. Ясно, что стяжка любого графа G существует и единственна.

Для минорно замкнутых классов графов лемма 5.5 формулируется и доказывается несколько проще.

Лемма 5.6. *Пусть G — связный граф из $Free_m(\{Com_i\})$ $(i \geq 2)$ с не менее чем тремя вершинами, Δ — наибольшая из степеней вершин графа G. Тогда стяжка графа G имеет не более чем $\frac{\Delta^{(\Delta+1)i+1}-1}{\Delta-1}$ вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Ясно, что $\Delta > 1$. Пусть H — стяжка графа G. Если G — простой путь, то $H = K_2$. Для такого графа G неравенство справедливо. Пусть G не является простым путем. Понятно, что H не содержит внутренних вершин, причем степени всех вершин H не превосходят Δ и степень некоторой вершины H равна в точности Δ. Рассмотрим в графе H порожденный путь P наибольшей длины (т.е. путь, соединяющий две диаметрально противоположные вершины H). Данный путь содержит не менее чем $(\Delta + 1)i + 2$ вершин (напомним, что любой связный граф с диаметром d и наибольшей из степеней вершин $\Delta' > 1$ имеет не более чем $\frac{\Delta'^{d+1}-1}{\Delta'-1}$ вершин). Каждая неконцевая вершина P смежна хотя бы с одной вершиной из $V(H) \setminus V(P)$, причем каждая вершина графа H смежна с не более чем Δ вершинами P. Рассмотрим множество V_1 первых Δi неконцевых вершин P. Существует множество V_2, состоящее из i вершин множества $V(H) \setminus V(P)$, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из V_1. Рассмотрим подграф H' графа H, образованный всеми неконцевыми ребрами P и i произвольными ребрами, каждое из которых инцидентно одной вершине из V_2 и одной вершине из V_1, причем в совокупности все i этих ребер инцидентны всем вершинам из V_2. Легко видеть, что из H' стягиванием некоторых его ребер можно получить граф Com_i. Значит, H содержит Com_i в качестве минора. Получаем противоречие. Поэтому наше предположение было неверным. Лемма 5.6 доказана.

5.4.2 О принадлежности каждого конечно определенного класса семейству $\mathscr{M}$

Напомним, что из определения семейства $\mathscr{M}$ следует, что каждый минорно замкнутый класс графов ему принадлежит. Покажем, что и каждый конечно определенный класс графов принадлежит $\mathscr{M}$.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс графов. Обозначим через $\mathcal{X}_c$ множество стяжек графов из $\mathcal{X}$. Справедлива следующая

Лемма 5.7. *Пусть наследственный класс $\mathcal{X}$ не включает ни один из классов $\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet$. Тогда $[\mathcal{X}_c]$ тоже не включает ни один из них.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если для некоторого $\mathcal{Y} \in \{\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet\}$ имеем $\mathcal{Y} \subseteq [\mathcal{X}_c]$, то для некоторого $\mathcal{Y}' \in \{\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet\}$ справедливо $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X}$. Отсюда будет следовать утверждение леммы. Подразбиение любых ребер произвольного графа из $\mathcal{C}omet$ (или из $\tilde{\mathcal{T}}$) приводит к его надграфу. Отсюда и наследственности $\mathcal{X}$ следует истинность утверждения для случаев $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{C}omet, \tilde{\mathcal{T}}\}$ (здесь $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}$). Рассуждения в оставшихся трех случаях аналогичны и поэтому приведем доказательство только для случая $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{D}}$. Именно, докажем, что если $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq [\mathcal{X}_c]$, то $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}$.

Предположим противное. Пусть $G_k^{(1)}$ — результат добавления вершины к пути P_{2k+1} и ребра, инцидентного добавленной вершине и средней вершине пути. Пусть $G_k^{(2)}$ — результат отождествления двух концов двух путей P_{k+1} с двумя различными вершинами треугольника. Пусть $G_k^{(3)}$ — результат отождествления двух концов двух путей P_{k+1} с двумя несмежными вершинами цикла длины 4. Отметим, что при любом k справедливо $G_k^{(1)} \in \tilde{\mathcal{T}}, G_k^{(2)} \in \tilde{\mathcal{D}}, G_k^{(3)} \in \hat{\mathcal{T}}$. Существует такое k', что $\mathcal{X} \subseteq Free(\{k'G_{k'}^{(1)}, k'G_{k'}^{(2)}, k'G_{k'}^{(3)}\})$. По определению класса $\mathcal{X}_c$ и ввиду наследственности $\mathcal{X}$ для любого k существует граф $H_k \in \mathcal{X}$ с $3k$ компонентами связности, из которого серией стягиваний ребер можно получить граф $3kG_k^{(2)}$. Заметим, что каждая компонента связности H_k является надграфом либо $G_k^{(1)}$, либо $G_k^{(2)}$, либо $G_k^{(3)}$. Поэтому есть такое $i_k \in \overline{1,3}$, что $kG_k^{(i_k)}$ является порожденным подграфом H_k. Пусть $k > k'$. Значит, $kG_k^{(i_k)} \in \mathcal{X}$ и $k'G_{k'}^{(i_k)} \in \mathcal{X}$ (из наследственности $\mathcal{X}$). Получаем противоречие. Значит, предположение было неверным. Лемма 5.7 доказана.

Лемма 5.8. *Каждый конечно определенный класс принадлежит $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ — конечно определенный класс, для которого хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является минором. Можно считать, что $\mathcal{X}$ не включает ни один из шести классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$, т.к. иначе один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является сильным минором $\mathcal{X}$. Обозначим через N сумму количеств вершин в графах из $Forb(\mathcal{X})$. Рассмотрим граф $G_{i,j}$, где $i \in \overline{1,4}$ и $j \in \mathbb{N}$, формируемый следующим образом. Возьмем путь с $(j+1)N + j\delta_i$

вершинами, где $\delta_i = i$ для $i \in \overline{1,3}$ и $\delta_4 = 3$. Пронумеруем вершины этого пути числами от 1 до $(j+1)N + j\delta_i$ последовательно от одного конца к другому и добавим к нему j новых вершин, которые также пронумеруем числами от 1 до j. Для любого $k \in \overline{1,j}$ рассмотрим добавленную вершину с номером k. Соединим ее ребром с вершиной пути с номером $kN+(k-1)+1$ (если $i = 1$), ребрами с вершинами пути с номерами $kN+2(k-1)+1$ и $kN+2(k-1)+2$ (если $i = 2$), ребрами с вершинами пути с номерами $kN + 3(k-1) + 1, kN + 3(k-1) + 2$ и $kN + 3(k-1) + 3$ (если $i = 3$), ребрами с вершинами пути с номерами $kN + 3(k-1) + 1$ и $kN + 3(k-1) + 3$ (если $i = 4$). Пусть $\mathcal{Z}_i = [\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{G_{i,j}\}]$. Ясно, что для любого $i \in \overline{1,4}$ класс $\mathcal{C}omet$ является сильным минором класса $\mathcal{Z}_i$. Поэтому можно считать, что каждый из этих четырех классов не включен в $\mathcal{X}$. Заметим, что для любого $i \in \overline{1,4}$ любой граф с N вершинами из $\mathcal{Z}_i$ принадлежит либо $\tilde{\mathcal{T}}$ (если $i = 1$), либо $\tilde{\mathcal{D}}$ (если $i = 2$), либо $\hat{\mathcal{D}}$ (если $i = 3$), либо $\hat{\mathcal{T}}$ (если $i = 4$). Поэтому во множестве $Forb(\mathcal{X})$ существуют графы, принадлежащие каждому из множеств $\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$. По исходному предположению это верно также и для классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$.

По леммам 5.3 и 5.4 существуют такие константы C_1 и C_2 (зависящие от графов из $Forb(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$), что для любого связного графа $G \in \mathcal{X}$ либо степени всех вершин не больше C_1, либо диаметр G не больше C_2. Пусть $\mathcal{X}_1$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ со степенями всех вершин не более чем C_1. Пусть $\mathcal{X}_2$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ с диаметром не более чем C_2. Стяжка любого графа не содержит внутренних вершин. Поэтому по леммам 5.5 и 5.7 существует такая константа C_3 (также зависящая от графов из $Forb(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$), что стяжка любого графа из $\mathcal{X}_1$ имеет не более чем C_3 вершин. По лемме 5.3 существует такая константа C_4 (зависящая от графов из $Forb(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$), что любой граф из $\mathcal{X}_2$

имеет не более чем C_4 нелистовых вершин.

Очевидно, что существует лишь конечное число графов из $\{K_{2,i}:\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{S_i:\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{Com_i:\ i \in \mathbb{N}\}$, являющихся минорами хотя бы одного графа из $\mathcal{X}_1$ (иначе последовательность, составленная из количеств вершин стяжек графов из $\mathcal{X}_1$, была бы неограниченной). Это же верно и для класса $\mathcal{X}_2$. Поэтому ни один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ не может быть минором $\mathcal{X}$. Получили противоречие. Лемма 5.8 доказана.

5.4.3 Критерий эффективной разрешимости задачи PCP в семействе $\mathscr{M}$ и следствия из него

Критерием эффективной разрешимости задачи PCP в семействе $\mathscr{M}$ является следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Задача* PCP *является полиномиально разрешимой для класса $\mathcal{X} \in \mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда ни один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ не является минором $\mathcal{X}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что все три класса $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ являются PCP-сложными. Отсюда и теоремы 5.2 следует, что если хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является сильным минором класса $\mathcal{X}$, то задача PCP не является полиномиально разрешимой в классе $\mathcal{X}$. Пусть теперь ни один из этих трех классов не является сильным минором $\mathcal{X}$. Тогда, по определению семейства $\mathscr{M}$, ни один из данных трех классов не является минором $\mathcal{X}$. Поэтому существуют такие графы $H_1 \in \mathcal{B}at, H_2 \in \mathcal{S}tar, H_3 \in \mathcal{C}omet$, что $\mathcal{X} \subseteq Free_m(\{H_1, H_2, H_3\})$. Отсюда и наследственности $\mathcal{X}$ следует существование такого $i = i(\mathcal{X})$, что $\mathcal{X} \subseteq Free(\{K_i, K_{2,i}, Comb_i, S_i, Cam_i, Com_i\})$.

По аналогии с второй частью доказательства леммы 5.8 (с использованием лемм 5.3,5.4,5.6) можно показать существование такой константы C (зависящей от i и от H_3), что каждый связный граф из $\mathcal{X}$ либо имеет не более чем C нелистовых вершин, либо его стяжка содержит не более чем

C вершин. Пусть $\mathcal{X}_1$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ с не более чем C нелистовыми вершинами, а $\mathcal{X}_2$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$, стяжки которых содержат не более C вершин. Из теоремы 2.5 следует, что задача РСР полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}_1$. По лемме 2.4 и теореме 2.4 задача РСР полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}_2$. Ранжирование ребер несвязного графа есть ранжирование ребер каждой из его компонент связности. Принадлежность любого графа из $\mathcal{X}$ каждому из классов $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ можно проверить за полиномиальное от числа вершин время. Поэтому задача РСР полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}$. Теорема 5.4 доказана.

Теорему 5.4 удобно применять, когда имеется некоторое правило, позволяющее определять, является ли хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ минором заданного класса из $\mathscr{M}$. Это легко можно сделать для минорно замкнутых классов, поскольку необходимо только проверить, имеются ли в конечном множестве запрещенных миноров графы, принадлежащие $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$. Вместе с тем, применение теоремы 5.4 к конечно определенным классам вызывает некоторые трудности. Но тут нам помогают РСР-граничные классы графов, полное описание которых будет представлено далее.

Теорема 5.5. РСР-*граничная система совпадает с* $\{\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что каждый из 10 классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$ является РСР-граничным. Применим утверждение теоремы 2.2. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный наследственный класс графов, не включающий ни один из десяти указанных граничных классов. Покажем, что $\mathcal{X}$ является РСР-простым. По лемме 5.7 стяжка любого графа из $\mathcal{X}$ принадлежит классу $Free(\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\})$ для некоторых $H_1 \in \tilde{\mathcal{T}}, H_2 \in \tilde{\mathcal{D}}, H_3 \in \hat{\mathcal{T}}, H_4 \in \hat{\mathcal{D}}, H_5 \in \mathcal{C}omet$. Дальнейшие рассуждения по доказательству PCP-простоты класса $\mathcal{X}$ аналогичны доказательству теоремы 5.4 и опираются на леммы 2.4,5.3,5.4,5.5 и на теоремы 2.4,2.5. Теорема 5.5 доказана.

Критерии эффективной разрешимости задачи PCP для минорно замкнутых классов и конечно определенных классов связаны между собой. Именно, хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является (сильным) минором некоторого конечно определенного класса графов тогда и только тогда, когда он включает хотя бы из один классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$. Это следует из теорем 5.4 и 5.5, леммы 5.8 и определения семейства $\mathscr{M}$.

При помощи теорем 5.4 и 5.5 нетрудно перечислить все конечно определенные минимальные PCP-сложные классы и все минорно замкнутые минимальные PCP-сложные классы.

Теорема 5.6. *Существует ровно* 5 *конечно определенных минимальных* PCP-*сложных классов. Это* $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}lique, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$. *Единственным минорно замкнутым минимальным* PCP-*сложным классом является класс* $\mathcal{C}omet$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что классы $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}lique, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ являются конечно определенными. Нетрудно видеть, что классы $\mathcal{C}omet, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$ являются бесконечно определенными (для каждого из этих классов все простые циклы длины 5 и более принадлежат минимальному множеству запрещенных порожденных подграфов). Пусть $\mathcal{X}$ — PCP-сложный конечно определенный класс, не включающий ни один из 5 классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}lique, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$. По теоремам 1.1 и 5.5 класс $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\mathcal{C}omet, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$. Поскольку все эти классы не являются конечно определенными, а $\mathcal{X}$ является таковым, то $\mathcal{X}$ не совпадает ни с одним из этих пяти классов. Поэтому класс

$\mathcal{X}$ содержит граф G, не принадлежащий хотя бы одному из пяти классов $\mathcal{C}omet, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}$. Тогда класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G\})$ является PCP-сложным (по теореме 1) и поэтому класс $\mathcal{X}$ не является минимальным PCP-сложным.

По теореме 5.4 любой минорно замкнутый PCP-сложный класс обязательно включает хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$. Среди данных классов только $\mathcal{C}omet$ является минорно замкнутым. Поэтому он является единственным минорно замкнутым минимальным PCP-сложным классом. Теорема 5.6 доказана.

Возможно, что множество минимальных PCP-сложных классов совпадает с множеством $\{\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique\}$.

Глава 6

Минимальные сложные классы графов

6.1 О задачах на графах без минимальных сложных случаев

Напомним, что по теореме 1.1 конечно определенный класс графов является П-сложным тогда и только тогда, когда он включает какой-нибудь П-граничный класс. Тем самым, П-граничные классы графов являются «критическими» классами, т.е. они играют особую роль в анализе вычислительной сложности задачи П. Другими естественными «критическими» классами являются максимальные П-простые и минимальные П-сложные классы, т.е. тупиковые наследственные классы графов с соответствующей сложностью П (элементы границы между полиномиальной разрешимостью и «труднорешаемостью»). Максимальных простых классов нет ни для одной задачи на графах, соответствующие рассуждения представлены во втором разделе первой главы данной диссертации. Покажем, что для некоторого типа задач на графах минимальных сложных случаев также не существует. Речь идет о задаче распознавания принадлежности графа классу графов. В этой задаче фиксирован класс графов $\mathcal{X}$ и для заданного графа G требуется ответить на вопрос, принадлежит ли G классу $\mathcal{X}$ или нет. Такую задачу будем обозначать через РП$[\mathcal{X}]$.

Теорема 6.1. *Если $\mathcal{X}$ — наследственный класс графов, то любой* РП$[\mathcal{X}]$-*сложный класс не является минимальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда некоторый класс графов $\mathcal{Y}$ является минимальным РП[$\mathcal{X}$]-сложным. Ясно, что этот класс содержит граф G, не принадлежащий классу $\mathcal{X}$ (в противном случае класс $\mathcal{Y}$ был бы РП[$\mathcal{X}$]-простым). Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{Y} \cap Free(\{G\}))$. Понятно, что класс $\mathcal{Z}$ состоит из графов, в каждом из которых граф G является порожденным. Т.к. класс графов $\mathcal{X}$ является наследственным и граф G не принадлежит этому классу, то любой граф из $\mathcal{Z}$ не принадлежит классу $\mathcal{X}$. Поэтому класс $\mathcal{Z}$ является классом с полиномиально разрешимой задачей РП[$\mathcal{X}$]. Отсюда следует, что задача РП[$\mathcal{X}$] в классе графов $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Z} = \mathcal{Y} \cap Free(\{G\})$ не является полиномиально разрешимой. Получаем противоречие с предположением. Таким образом, любой РП[$\mathcal{X}$]-сложный класс не является минимальным. Теорема 6.1 доказана.

Приведем примеры конкретных задач на графах, которые являются задачами распознавания принадлежности наследственному классу графов. Граф G называется *графом пересечений кругов единичного радиуса*, если этот граф является графом пересечений кругов одинакового радиуса, принадлежащих одной плоскости. Класс таких графов является наследственным, который обозначим через $\mathcal{U}disk$. Класс всех графов является РП[$\mathcal{U}disk$]-сложным [42]. Таким образом, для задачи РП[$\mathcal{U}disk$] и для вершинного и реберного вариантов задачи о k-раскраске при $k \geq 3$ (которые являются переформулировками задачи распознавания принадлежности наследственному классу) нет минимальных сложных случаев.

6.2 Условия и примеры существования минимальных сложных классов графов

В предыдущем разделе работы было показано, что для некоторых типов задач на графах нет минимальных сложных случаев. Для некоторых задач такие классы все-таки существуют. Так, примеры минимальных BCP-сложных и PCP-сложных классов графов могут быть найдены в предыдущих главах диссертации. Теорема 6.1 может рассматриваться как некоторый инструмент для систематического порождения задач на графах, для которых нет минимальных сложных случаев. А нельзя ли получить условие существования минимальных сложных классов, также претендующее на определенную систематичность? Такого рода результатом является теорема 6.2.

Теорема 6.2. *Если $\mathcal{X}$ является* Π-*сложным классом и $\mathcal{X}$ является вполне упорядоченным множеством по отношению $R_* =$ «быть порожденным подграфом», то $\mathcal{X}$ содержит некоторый минимальный* Π-*сложный подкласс.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует такое бесконечное множество графов $\mathcal{Y} = \{G_1, G_2, \ldots\}$, что $G_1 \in \mathcal{X}, G_2 \in \mathcal{X} \cap Free(\{G_1\}), G_3 \in \mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2\}), \ldots, G_k \in \mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}\}), \ldots$ и при любом k класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является Π-сложным. Множество $\mathcal{Y}$ не может содержать бесконечных цепей по отношению R_*. Действительно, если такая цепь существует, то все ее элементы различны и они являются порожденными подграфами некоторого графа G. Но это невозможно, т.к. G содержит только конечное множество порожденных подграфов. Значит, $\mathcal{X}$ содержит бесконечную антицепь по отношению R_*. Но это противоречит условию о том, что $\mathcal{X}$ — вполне упорядоченное множество по отношению R_*. Значит, предположение было неверным. Теорема 6.2 доказана.

Под действие теоремы 6.2 попадают все шесть известных минимальных PCP-сложных случаев (напомним, что это $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$). Иными словами, все эти классы действительно являются PCP-сложными и не содержат бесконечных антицепей по отношению R_*. Значит, каждый из них обязан содержать минимальный PCP-сложный случай (как оказалось, он совпадает с самим классом). Доказательство отсутствия бесконечных антицепей основано на рассмотрении замыканий этих классов относительно удалений ребер и на следующем критерии [51].

Лемма 6.1. *Монотонный класс графов является вполне упорядоченным множеством по отношению R_* тогда и только тогда, когда он содержит конечное число графов из $\{C_i:\ i \geq 3\} \cup \{B_i:\ i \geq 1\}$.*

Теорема 6.2 является достаточным условием, но не является необходимым. В теореме 2.12 было доказано, что класс $\mathcal{F}ence$ является минимальным УВСР-сложным классом. Однако, такой класс не является вполне упорядоченным множеством по отношению R_*. Отметим также, что формулировка теоремы 6.2 оперирует только со структурными свойствами класса $\mathcal{X}$ и в ней не требуется, чтобы какие-то собственные наследственные подмножества $\mathcal{X}$ были сложными. Это позволяет указать бесконечную последовательность $\{\Pi_k\}$ задач на графах, для k-ого члена которой есть минимальный сложный класс с числом Дилворта (относительно R_*), равным k, и для каждого члена которой множество минимальных сложных классов состоит в точности из k классов.

Члены последовательности $\{\Pi_k\}$ — некоторые специальные представители задачи о наибольшем взвешенном 3-раскрашиваемом подграфе. Для любого натурального k в задаче Π_k заданы граф G и отображение $c: E(G) \longrightarrow \{-1,+1\}$. Требуется найти такой подграф H графа G, что H имеет 3-раскраску вершин и величина $w(H)$ является максимально возможной. Значение $w(H)$ определяется следующим образом: $w(H) = 0$, если размер наибольшего независимого множества графа G не равен k, и $w(H) = \sum\limits_{e \in E(H)} c(e)$

в противном случае. Уточним, что под Π_k-простым понимается наследственный класс графов, для которого данная задача полиномиально разрешима при любой функции c.

Ясно, что каждый Π_k-сложный класс содержит хотя бы один граф с наибольшим независимым множеством мощности k. Понятно также, что если $\mathcal{X}$ является Π_k-сложным, $G \in \mathcal{X}$ и G имеет независимое множество мощности более чем k, то $\mathcal{X} \cap Free(\{G\})$ также является Π_k-сложным. Поэтому все минимальные Π_k-сложные классы состоят из графов, у которых каждое независимое множество состоит из не более чем k вершин. Понятно, что каждый минимальный Π_k-сложный класс должен быть бесконечным, поэтому любой такой класс должен содержать все клики. Это легко следует из теоремы Рамсея.

В качестве заявленного класса $\mathcal{X}_k$ рассмотрим множество графов $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{K_i \oplus \overline{K}_j : j \in \overline{0, k-1}\}$ (при этом предполагается, что $K_i \oplus \overline{K_0} = K_i$). Очевидно, что $\mathcal{X}_k$ — наследственный класс графов и $Dil_{R_*}(\mathcal{X}_k) = k$. Легко проверить, что $\mathcal{X}_k$ удовлетворяет также всем необходимым требованиям к минимальным Π_k-сложным классам, обозначенным в предыдущем абзаце.

Лемма 6.2. *Для любого s класс $\mathcal{X}_s$ является минимальным Π_s-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что класс $\mathcal{X}_s$ является Π_s-сложным. Обозначим через $\mathcal{Y}$ множество всех вершинно 3-раскрашиваемых графов. Очевидно, что класс $\mathcal{Y}$ замкнут не только относительно удаления вершин, но еще и относительно удаления ребер. Покажем, что при любом s NP-полная задача РП$[\mathcal{Y}]$ полиномиально сводится к задаче Π_s в классе $\mathcal{X}_s$. Отсюда будет следовать NP-полнота задачи Π_s в классе $\mathcal{X}_s$.

Рассмотрим произвольный граф G. Добавим к G несколько ребер до полного графа и $s-1$ изолированную вершину. Получим граф G'. Для каждого $e \in E(G') \cap E(G)$ положим $c(e) = 1$, для всех остальных ребер e графа G' положим $c(e) = -1$. Понятно, что граф H — решение задачи Π_s для графа G' не содержит ни одного ребра с отрицательным значением функции c (поскольку класс $\mathcal{Y}$ замкнут относительно удаления ребер). Ясно, что граф G является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда $w(H) = |E(G)|$. Отсюда следует заявленная в первом абзаце сводимость.

Докажем теперь минимальность класса $\mathcal{X}_s$. Для этого покажем, что для любого $G \in \mathcal{X}_s$ класс $\mathcal{X}_s \cap Free(\{G\})$ является Π_s-простым. Среди графов из $\mathcal{X}_s \cap Free(\{G\})$ имеет смысл рассматривать только графы вида $K_n \oplus \overline{K}_{s-1}$ (т.к. во всех остальных случаях в качестве ответа можно взять результат удаления всех ребер из входного графа). Пусть $G = K_i \oplus \overline{K_j}$. Заметим, что тогда $n \leq i$. Следовательно, во множестве $\mathcal{X}_s \cap Free(\{G\})$ графов вида $K_n \oplus \overline{K}_{s-1}$ только конечное число. Поэтому задача Π_s в классе $\mathcal{X}_s \cap Free(\{G\})$ полиномиально разрешима. Лемма 6.2 доказана.

Можно также заметить, что класс $\mathcal{X}_s$ не является единственным минимальным Π_s-сложным классом с числом Дилворта, равным s. Для этого через $\mathcal{Y}_s$ обозначим совокупность графов, являющихся порожденными в графах из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\overline{K_s \oplus \overline{K_i}}\}$. Легко проверить, что $Dil_{R_*}(\mathcal{Y}_s) = s$. По аналогии с доказательством леммы 6.2 можно показать, что $\mathcal{Y}_s$ — минимальный Π_s-сложный класс.

Итак, классы $\mathcal{X}_k$ и $\mathcal{Y}_k$ являются минимальными Π_k-сложными. А существуют ли другие такие классы? Вообще, каким образом устроено все множество минимальных Π_k-сложных классов? Для ответа на этот вопрос сначала напомним понятие расщепляемого графа. Граф G называется *расщепляемым*, если множество его вершин V можно так разбить на два подмножества V_1 и V_2, что V_1 порождает в графе полный подграф, а V_2 пустой подграф. Рассмотрим всевозможные бесконечные классы из расщепляемых графов, у которых размер наибольшего независимого множества равен k. Через $\mathscr{X}(k)$ обозначим совокупность минимальных по включению наследственных замыканий таких классов. По аналогии с доказательством леммы 6.2 можно легко показать, что каждый класс из $\mathscr{X}(k)$ является минимальным Π_k-сложным. Оказывается, что других таких классов нет.

Теорема 6.3. *Все множество минимальных Π_k-сложных классов совпадает с множеством $\mathscr{X}(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует минимальный Π_k-сложный класс $\mathcal{X}$, не принадлежащий множеству $\mathscr{X}(k)$. Рассмотрим те графы из $\mathcal{X}$, число независимости которых равно k. В данных графах рассмотрим подграфы, порожденные объединением наибольшего независимого множества и наибольшей клики. Понятно, что таких попарно неизоморфных расщепляемых подграфов бесконечное количество. Обозначим это множество за $\mathcal{Y}$. Ясно, что наследственное замыкание класса $\mathcal{Y}$ включает какой-нибудь элемент $\mathcal{Z} \in \mathscr{X}(k)$. Но тогда $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ и поэтому $\mathcal{X}$ не является минимальным сложным. Получаем противоречие. Поэтому исходное предположение неверно. Теорема 6.3 доказана.

Отметим, что теорема 6.3 является первым примером полного описания минимальных сложных классов. Более того, при любом s семейство $\mathscr{X}(s)$ удается явно описать. Для любых s и $1 \leq i \leq s$ через $\mathcal{X}_i^*$ обозначим наследственное замыкание множества графов $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{\overline{K_i \oplus \overline{K_j} \oplus \overline{K_{s-i}}}\}$. Понятно, что для любого s справедливы равенства $\mathcal{X}_s = \mathcal{X}_1^*$ и $\mathcal{Y}_s = \mathcal{X}_s^*$. Покажем, что на самом деле $\mathscr{X}(s) = \{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_s^*\}$.

Лемма 6.3. *При любом k множество $\mathscr{X}(k)$ совпадает с множеством $\{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что любой собственный наследственный подкласс каждого класса из $\{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$ имеет лишь конечное число графов с числом независимости, равным k. Поэтому $\{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\} \subseteq \mathscr{X}(k)$. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный наследственный класс, содержащий бесконечное множество расщепляемых графов с числом независимости, равным k. Будем предполагать, что с каждым расщепляемым графом $G \in \mathcal{X}$ задано разложение множества $V(G)$ на наибольшее независимое множество $V_1 = V_1(G)$ (мощности k) и на клику V_2. Понятно, что если $V_2 \neq \emptyset$, то каждая вершина из V_2 смежна хотя бы с одной вершиной из V_1, причем есть подмножество $V_2' \subseteq V_2$ мощности не менее чем $[\frac{|V_2|}{2^k-1}]$, что любые две его вершины имеют одинаковые замкнутые окрестности. Отсюда, принципа Дирихле и наследственности $\mathcal{X}$ следует, что для некоторого $1 \leq s \leq k$ имеем $\mathcal{X}_s^* \subseteq \mathcal{X}$. Поэтому, если $\mathcal{X} \notin \{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$, то и $\mathcal{X} \notin \mathscr{X}(k)$. Лемма 6.3 доказана.

Последовательность $\{\Pi_k\}$ из задач на графах содержит первые примеры задач, для которых удается полностью описать все множество минимальных сложных случаев. Нетрудно показать, что для любого k Π_k-граничная система тоже совпадает с $\{\mathcal{X}_1^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$. Тем самым конструктивно доказан любопытный факт: для любого n существует задача на графах, для которой множество минимальных сложных классов и граничная система содержат в точности по n элементов.

6.3 О связи и о независимости понятий минимального сложного и граничного классов графов

Минимальные сложные классы и граничные классы являются экстремальными, «критическими» элементами решетки наследственных классов графов. Интуитивно понятно, что между ними должна быть какая-то связь. Эта связь выражается в формулировках следующих двух утверждений, которые легко могут быть доказаны методом от противного.

Теорема 6.4. Π-*граничный класс является минимальным* Π-*сложным тогда и только тогда, когда он является* Π-*сложным.*

Теорема 6.5. *Минимальный* Π-*сложный класс* $\mathcal{X}$ *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для любого графа* $G \in \mathcal{X}$ *существует такое множество* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$, *что класс* $Free(\mathcal{S} \cup \{G\})$ *является* Π-*простым.*

Все шесть известных минимальных PCP-сложных случаев являются также и PCP-граничными. Можно указать пример, когда минимальный сложный случай не является граничным (т.е. строго включает граничный класс). Именно, во второй главе этой диссертации (конкретно, в теореме 2.12) было доказано, что класс $\mathcal{F}ence$ является минимальным УВСР-сложным, а класс $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{F}ence$ является УВСР-граничным. Любой минимальный сложный класс, строго включающий граничный подкласс, не является конечно определенным классом. Это утверждение является простым следствием леммы 6.4, которая может быть доказана методом от противного с использованием теоремы 1.1.

Лемма 6.4. *Конечно определенный класс является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда он является минимальным* Π-*сложным.*

Литература

[1] Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // В сб. Проблемы кибернетики, вып. 36 / Под ред. С. В. Яблонского. — М.: Наука, 1979. — Стр. 23–32.

[2] Алексеев В.Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1982. — С. 3–13.

[3] Алексеев В. Е. Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1999. — Т.6, №4. — С. 3–19.

[4] Алексеев В.Е., Коробицын Д.В. О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, №4. — С. 34–40.

[5] Алексеев В.Е., Малышев Д.С. Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, №1. — С. 3–10.

[6] Алексеев В.Е., Малышев Д.С. Критерий граничности и его применения // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, №6. — С. 3–11.

[7] Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 320 С.

[8] Визинг В.Г. Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ. — 1964. — Т. 3. — С. 25–30.

[9] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 С.

[10] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — Москва: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 С.

[11] Зыков А. А. Основы теории графов. — Новосибирск: Наука, 1969. — 543 С.

[12] Малышев Д.С. О бесконечности множества граничных классов графов в задаче о реберной 3-раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, №1. — С. 37–43.

[13] Малышев Д.С. Граничные классы графов для некоторых задач распознавания // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, №2. — С. 85–94.

[14] Малышев Д.С. Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, №5. — С. 41–51.

[15] Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, №6. — С. 43–51.

[16] Малышев Д.С. О количестве граничных классов графов в задаче о 3-раскраске // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, №4. — С. 129–134.

[17] Малышев Д.С. Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика», Нижний Новгород. — 2009. — 113 С.

[18] Малышев Д.С. Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, №1. — С. 70–76.

[19] Малышев Д.С., Алексеев В.Е. Граничные классы для задач о списковом ранжировании относительно лесов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, №6. — С. 61–70.

[20] Малышев Д.С. Анализ сложности задачи о реберном списковом ранжировании для наследственных классов графов с не более чем тремя запретами // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, №1. — С. 74–96.

[21] Малышев Д.С. О связи понятий граничного и минимального сложного классов графов // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2012. — №2. — С. 149–151.

[22] Малышев Д.С. О пересечении и симметрической разности семейств граничных классов графов для задач о раскраске и о хроматическом числе // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24, №2. — С. 75–78.

[23] Малышев Д.С. Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в классе графов без порожденных простых пути и цикла с пятью вершинами и большой клики // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, №3. — С. 58–64.

[24] Малышев Д.С. Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для одного класса графов малого диаметра // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, №4. — С. 66–72.

[25] Малышев Д.С. Исследование граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, №6. — С. 37–48.

[26] Малышев Д.С. Экстремальные множества графов при решении задачи демаркации в семействе наследственно замкнутых классов графов // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24, №4. — С. 91–103.

[27] Малышев Д.С. Относительные граничные классы и факторизация семейства наследственных классов графов // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — №3. — С. 181–187.

[28] Малышев Д.С. Расширяющие операторы для задачи о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, №2. — С. 75–87.

[29] Малышев Д.С. Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, №3. — С. 26–44.

[30] Малышев Д.С. «Критические» классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, №6. — С. 59–76.

[31] Харари Ф. Теория графов. — Москва: Мир, 1982. — 300 С.

[32] Alekseev V.E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.

[33] Alekseev V.E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. — 389. — P. 219–236.

[34] Alekseev V.E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.

[35] Alekseev V.E., Lozin V.V., Malyshev D.S., Milanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2008. — V. 5162, №4. — P. 96–107.

[36] Arbib C., Mosca R. On $(P_5, diamond)$-free graphs // Discrete Mathematics. — 2002. — V. 250. — P. 1–22.

[37] Bodlaender H.L. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Lecture Notes in Computer Science. — 1988. — V. 317. — P. 105–118.

[38] Boliac R., Lozin V.V. On the clique-width of graphs in hereditary classes // Lecture Notes in Computer Science. — 2002. — V. 2518. — P. 44–54.

[39] Bondy A, Murty U. Graph theory. — Berlin: Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, 2008. — 654 P.

[40] Brandstadt A., Le H.-O., Mosca R. Chordal co-gem-free and (P_5, gem)-free graphs have bounded clique-width // Discrete Applied Mathematics. — 2005. — V. 145, №2. — P. 232–241.

[41] Brandstadt A., Mosca R. On the structure and stability number of P_5- and co-chair-free graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132. — P. 47-65.

[42] Breu H., Kirkpatrick D.G. Unit disk graph recognition is NP-hard // Computational Geometry. — 1998. — V. 9. — P. 3–24.

[43] Brooks R.L. On colourings the nodes ofa network // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1941. — V. 37. — P. 194–197.

[44] Corneil D.G., Perl Y., Stewart L.K. A linear recognition algorithm for cographs // J. Comput. — 1985. — V. 14. — P. 926–934.

[45] Courcelle B., Engelfriet J., Rozenberg G. Handle-rewriting hypergraph grammars // J. Comput. System Sci. — 1993. — V. 46. — P. 218–270.

[46] Courcelle B., Makowsky J., Rotics U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. — 2000. — V. 33. — P. 125–150.

[47] Courcelle B. Olariu S. Upper bounds to the clique width of graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2000. — V. 101. — P. 77–144.

[48] Dereniowski D. Edge ranking of weighted trees // Discrete Applied Mathematics. — 2006. — V. 154. — P. 1198–1209.

[49] Dereniowski D. The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — V. 86. — P. 97–114.

[50] Diestel R. Graph theory. — Berlin: Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, 2010. — 415 P.

[51] Ding G. Subgraphs and well-quasi-ordering // J. Graph Theory. — 1992. — V. 16. — P. 489–502.

[52] Faria L., Figueiredo C. H., Gravier S., Mendonça C. F. X., Stolfi J. On maximum planar induced subgraphs // Discrete Applied Mathematics. — 2006. — V. 154. — P. 1774–1782.

[53] Faria L., Figueiredo C. H., Mendonça C. F. X. Splitting number is NP-complete // Discrete Applied Mathematics. — 2001. — V. 108. — P. 65–83.

[54] Goldreich O. P, NP and NP-complereness: the basics of computational complexity. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 214 P.

[55] Halin R. S-functions for graphs // Journal of Geometry. — 1976. — V. 8. — P. 171–186.

[56] Kochol M., Lozin V., Randerath B. The 3-colorability problem on graphs with maximum degree four// SIAM J.Comput. — 2003. — V. 32, №5. — P. 1128–1139.

[57] Korpelainen N., Lozin V.V., Malyshev D.S., Tiskin A. Boundary properties of graphs and algorithmic graph problems // Theoretical Computer Science. — 2011. — V. 412. — P. 3545–3554.

[58] Leiserson C. Area-efficient graph layout (for VLSI) // Proc. 21st Ann IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. — 1980. — P. 270–281.

[59] Liu J. The role of elimination trees in sparse factorization // SIAM J. Matrix Analysis and Appl. — 1990. — V. 11. — P. 134–172.

[60] Lozin V.V. Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295.

[61] Lozin V. V., Millanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of the ACM-SIAM symposium on descrete algorithms (New Orleans, 2007). — P. 874–880.

[62] Lozin V., Mosca R. Maximum independent sets in subclasses of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 2009. — V. 109, №6. — P. 319–324.

[63] Lozin V.V., Rautenbach D. On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.

[64] Machado R., de Figueiredo C.M.H. Complexity separating classes for edge-colouring and total-colouring // J. Brazilian Computer Society. — 2011. — V. 17. — P. 281–285.

[65] Machado R., de Figueiredo C.M.H., Vuskovic K. Chromatic index of graphs with no cycle with a unique chord // Theoretical Computer Science. — 2010. — V. 411. — P. 1221–1234.

[66] Makino K., Uno. Y, Ibaraki T. Minimum edge ranking spanning trees of threshold graphs // Lecture Notes in Computer Scince. — 2002. — V. 2518. — P. 428–440.

[67] Malyshev D.S. Boundary graph classes for some maximum induced subgraph problems // Journal of Combinatorial Optimization. — 2013, doi: 10.1007%2Fs10878-012-9529-0.

[68] Middendorf M., Pfeiffer F. On the complexity of the disjoint path problem // Combinatorica. — 1993. — V. 13, № 1. — P. 97–107.

[69] Minty G. On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. — 1980. — V. 28. — P. 284–304.

[70] Mosca R. Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 1997. — V.61, №3. — P. 137–143.

[71] Mosca R. Some results on maximum stable sets in certain P_5-free graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132. — P. 175–183.

[72] Mosca R. Some observations on maximum weight stable sets in certain P // European Journal of Operational Research. — 2008. — V. 184, №3. — P. 849-859.

[73] Murphy O. Computing independent sets in graphs with large girth // Discrete Applied Mathematics. — 1992. — V. 35. — P. 167–170.

[74] Papadimitriou C. Computational complexity. — New York: Addison Wesley, 1994. — 523 P.

[75] Scheffler P. A practical linear algorithm for vertex disjoint path in graphs with bounded treewidth // Technical report № 396, Department of Mathematics, Technische Universität Berlin, 1994.

[76] Schrijver A. Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency // Berlin: Springer. — 2003. — 1882 P.

[77] Simone C.D., Mosca R. Stable set and clique polytopes of (P_5, gem)-free graphs // Discrete Mathematics. — 2007. — V. 307, №22. — P. 2661–2670.

[78] Yannakakis M. Node- and edge-deletion NP-complete problems // STOC. — 1978. — P. 253–264.