Московский физико-технический институт
факультет инноваций и высоких технологий

На правах рукописи

Пономаренко Екатерина Игоревна

ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА И НЕЛСОНА–ХАДВИГЕРА В РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре дискретной математики
факультета инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Райгородский Андрей Михайлович.
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор Ярославского государственного университета им. Г.П. Демидова Дольников Владимир Леонидович; кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИППИ РАН Мусин Олег Рустумович.
Ведущая организация:	Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.

Защита диссертации состоится __________ 2014 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан «___»__________ 2014 г.

Председатель
диссертационного совета А.А. Васин

Актуальность

Диссертация посвящена изучению вопросов, лежащих на стыке нескольких областей. Впервые задачи, рассматриваемые в данной работе, возникли в рамках комбинаторной геометрии. Хотя это достаточно молодая область дискретной математики и даже сам термин "комбинаторная геометрия" появился только в середине прошлого века, сейчас это бурно развивающаяся дисциплина, которая своим развитием во многом обязана именно этим задачам.

Центральными задачами диссертации являются задача Борсука о разрезании тел в пространстве на части меньшего диаметра и задача Нелсона–Хадвигера о разбиении пространства на части без запрещенного расстояния[1,2,3,4,5,6]. Для комбинаторной геометрии эти проблемы действительно являются основополагающими. Задача Борсука состоит в отыскании числа $f(d)$ — минимального количества частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$. В 1933 году К. Борсук высказал гипотезу[7], что $f(d) = d + 1$. Попытки доказать либо опровергнуть эту гипотезу на протяжении шестидесяти лет оказывали сильное влияние на развитие комбинаторной геометрии, пока в 1993 году Дж. Кан и Г. Калаи не опровергли[8] гипотезу Борсука при помощи линейно-алгебраического метода, разработанного П. Франклом и Р. Уилсоном.

Задача о хроматическом числе пространства была сформулирована в 1950 году Э. Нелсоном, который поставил вопрос о том, каково минимальное число $\chi(\mathbb{R}^d)$ цветов, в которые необходимо так раскрасить все евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, чтобы точки, расстояние между которыми в точности равно единице, оказались раскрашенными в разные цвета.

[1] В.Г. Болтянский, И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, "Наука", 1965.

[2] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.

[3] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.

[4] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

[5] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи матем. наук, 56 (2001), вып. 1, 107 - 146.

[6] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Итоги науки и техники, 23 (2007), 147 - 164.

[7] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20 (1933), 177 - 190.

[8] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin (new series) of the AMS, 29 (1993), N1, 60 - 62.

Незадолго до того Г. Хадвигер рассматривал похожую задачу: он доказал, что если евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ покрыто $d+1$ замкнутым множеством, то хотя бы в одном из этих множеств все неотрицательные вещественные числа реализуются как расстояния между парами точек этого множества. При решении именно этой задачи П. Франкл и Р. Уилсон получили один из наиболее ярких результатов[9] за всю историю комбинаторной геометрии. При помощи теоремы Франкла–Уилсона удалось не только совершить прорыв в изучении хроматического числа пространства, а именно доказать гипотезу П. Эрдеша об экспоненциальности роста величины $\chi(\mathbb{R}^d)$, но и, как говорилось выше, опровергнуть гипотезу Борсука, вопрос об истинности которой оставался открытым на протяжении более чем полувека. Улучшению этой теоремы посвящена первая глава диссертационной работы.

Кроме влияния на развитие комбинаторно-геометрических методов, эти проблемы играют важную роль и при изучении других задач. Так, проблема Борсука тесно связана с задачей об освещении тел[10,11], с классической проблемой дискретной геометрии об упаковке шаров и других тел в пространстве[12,13], с проблематикой геометрии чисел, с задачей Грюнбаума о покрытии тел шарами[14,15].

Проблемы Борсука и Нелсона–Хадвигера, поставленные более полувека назад, за десятилетия, прошедшие со своей постановки, были подвергнуты всестороннему изучению. Интерес представляет как решение этих задач в малых размерностях, так и оценки числа Борсука и хроматического числа в случае растущей размерности. В частности, одним из наиболее важных аспектов является изучение нижних асимптотических оценок. Именно вопросы, связанные с нижними оценками, являются цен-

[9] P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences* , Combinatorica, 1 (1981), 357 - 368.

[10] H. Martini, P.S. Soltan, *Combinatorial problems on the illumination of convex bodies*, Aequationes Mathematicae, Springer-Verlag, 57 (1999), 121 - 152

[11] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Springer, 1997.

[12] Г.А. Кабатянский, В.И. Левенштейн, *О границах для упаковок на сфере и в пространстве*, Проблемы передачи информации., 14 (1978), N1, 3 - 25.

[13] Дж. Конвей, Н. Слоэн *Упаковки шаров, решетки и группы*, Москва, Мир, 1990

[14] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proc. Cambridge Philos. Soc, 53 (1957), 776 - 778.

[15] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, *On covering a set in Rd by balls of the same diameter*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag,Berlin, 1469 (1991), 138 - 144.

тральными в диссертационной работе.

Со временем методы, связанные с изучением проблем Борсука и Нелсона–Хадвигера, изначально сформулированные в комбинаторно-геометрических терминах, оказались исключительно полезными при решении проблем из других областей математики. Так один из наиболее результативных методов в решении указанных задач заключается в рассмотрении систем (0,1)-векторов. Тем самым, возникают естественные приложения в теории кодирования — например, в задачах о равновесных кодах с запрещенными Хэмминговыми расстояниями[16,17]. В то же время (0,1)-векторы можно интерпретировать как ребра гиперграфов, что дает результаты при изучении их экстремальных свойств.

Наконец вышеупомянутые задачи тесно связаны и с обычными графами: с проблемой Борсука связано понятие графа диаметров, а с задачей Нелсона–Хадвигера — понятие дистанционного графа. С одной стороны, идеи и термины теории графов помогают решать эти задачи, с другой — получаемые результаты имеют значение для самой теории графов.

Цель работы

Цель данной диссертации состоит в решении следующих задач: усиление теоремы Франкла–Уилсона и изучение ее приложений; улучшение оценок для хроматического числа рационального пространства; формулировка корректного определения числа Борсука рационального пространства и изучение его поведения.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

1. Усилена теорема Франкла–Уилсона.

2. Получены улучшения нижних оценок хроматических чисел рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями.

[16]L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, *Codes with forbidden distances*, Discrete Mathematics, 213 (2000), 3 - 11.

[17]Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Москва, Радио и связь, 1979.

3. Сформулированы определения корректных аналогов задачи Борсука для рационального пространства.

4. Опровергнут аналог гипотезы Борсука для рационального пространства и исследованы размерности контрпримеров.

5. Изучены верхние и нижние оценки для аналогов числа Борсука.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

Методы исследования

При доказательстве результатов нами использовалась разнообразная техника. Так основным методом работы является линейно–алгебраический метод[18]. Кроме того, в работе используется теорема Алсведе–Хачатряна[19], в которой найден максимум числа ребер в гиперграфе с данной нижней границей для мощностей пересечения ребер. В диссертационной работе введено понятие аффинной размерности. Данное понятие сыграло принципиальную роль в обобщении задачи Борсука на случай рационального пространства.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты дают возможность применять теорему Франкла–Уилсона для более широкого промежутка значений параметра.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

— Международная конференция “Четвертая польская конференция по комбинаторике” (Бедлево, Польша, 17–21 сентября 2012 г.).

— Всероссийская конференция “55-я научная конференция МФТИ” (Долгопрудный, Россия, 19–25 ноября 2012 г.).

[18]А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[19]R. Ahlswede, L.H. Khachatrian, *The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets*, J. Combin. Theory A, 76 (1996), 121 - 138.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

— Семинар под руководством профессора А.М. Райгородского (мехмат МГУ, 2010 г.).

Работа автора поддержана грантом РФФИ N 12-01-00683, грантом НШ-2519.2012.1 и грантом Президента МД-6277.2013.1.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора (все они входят в перечень ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 101 наименование. Общий объем диссертации составляет 60 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение к диссертации состоит из четырех частей. В них затрагиваются вопросы, касающиеся истории развития комбинаторной геометрии и двух рассматриваемых классических задач — проблемы Борсука и проблемы Нелсона–Хадвигера. Также приводится краткая история некоторых аналогов и обобщений вышеупомянутых классических задач.

Содержание главы 1

Первая глава посвящена вопросам верхней оценки числа независимости графов. В ней рассматривается теорема Франкла–Уилсона, формулируются и доказываются уточнения этой теоремы, а также приводятся приложения этих уточнений к задаче о хроматическом числе.

В разделе 1.1 приводится классический вариант теоремы Франкла–Уилсона.

Теорема 1.1.1. *Пусть $H = (V, E)$ — k-однородный гиперграф (т.е. в каждом его ребре ровно k вершин) на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ и $k - l$ — степень простого числа, которую мы обозначим q. Тогда имеют место два случая:*

1. *если $2l < k$, то*
$$|E| \leqslant \sum_{i=0}^{q-1} C_n^i;$$
2. *если $2l \geqslant k$, то при $d = k - 2q + 1 = 2l - k + 1$*
$$|E| \leqslant \frac{C_n^d}{C_k^d} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{n-d}^i \right).$$

В разделе 1.2 формулируется новая теорема 1.2.1, в которой получено усиление для второго пункта теоремы 1.1.1.

Теорема 1.2.1. *Пусть $H = (V, E)$ — k-однородный гиперграф на n вершинах, причем $k \leqslant \frac{n}{2}$, для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$, $2l \geqslant k$ и $q = k - l$ — степень простого числа. Положим $d = 2l - k + 1$. Пусть, далее, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ таковы, что $d_1 + d_2 = d$. Положим $n_1 = n - d_1$, $k_1 = k - d_1$. Определим натуральное число r из соотношения*
$$(k_1 - d_2 + 1)\left(2 + \frac{d_2 - 1}{r + 1}\right) \leqslant n_1 < (k_1 - d_2 + 1)\left(2 + \frac{d_2 - 1}{r}\right).$$

Тогда

$$|E| \leqslant \frac{C_{n_1}^{d_2+2r} C_n^{d_1}}{C_{k_1}^{d_2+r} C_{n_1-k_1}^{r} C_k^{d_1}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{n_1}^{i} \right).$$

Доказательство этого утверждения разбито на три этапа. Приведем краткую схему доказательства. Пусть дан гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условию теоремы, и $n, k,\ l, q, d,\ d_1, d_2,\ n_1,\ k_1, r$ — те же самые числа, что и в формулировке. На первом этапе доказывается, что в H есть такой подгиперграф $H_1 = (V, E_1)$ (множество вершин не изменится), что каждые два его ребра пересекаются не менее, чем по d_1, вершинам и число его ребер "не сильно" меньше числа ребер исходного гиперграфа H. На втором этапе мы увеличиваем мощности попарных пересечений, т.е. выделим, в свою очередь, из H_1 такой подгиперграф $H_2 = (V, E_2)$ (множество вершин снова не изменится), что каждые два его ребра пересекаются не менее, чем по $d = d_1 + d_2$, вершинам и число его ребер "не сильно" меньше числа ребер гиперграфа H_1. На третьем этапе за счет условия теоремы, в котором говорится об отсутствии пар ребер в E (а стало быть, и пар ребер в $E_2 \subseteq E_1 \subseteq E$), пересекающихся по l вершинам, получается верхняя оценка мощности множества E_2. Но, поскольку E_1 не сильно больше E_2, а E не сильно больше E_1, то в итоге и возникнет верхняя оценка мощности E.

Это доказательство объединяет в себе идеи линейно-алгебраического метода П. Франкла и Р. Уилсона и идеи Алсведе и Хачатряна.

В разделе 1.3 формулируются две теоремы для случая (-1,0,1)-векторов. Это аналог теоремы Франкла–Уилсона и новая теорема 1.3.2, являющаяся его усилением.

Теорема 1.3.1. *Пусть n, k_{-1}, k_0, k_1, t таковы, что $k_1 + k_{-1} \leqslant \frac{n}{2}$, $k_{-1} \leqslant k_1$, разность $k_1 + k_{-1} - t$ является степенью простого числа (обозначим ее $q = p^a$) и $k_1 + k_{-1} - 2q < -2k_{-1}$. Тогда*

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \leqslant \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : \ i + j \leqslant n, \ i + 2j \leqslant q - 1\}.$$

Теорема 1.3.2 *Пусть* n, k_{-1}, k_0, k_1, t *таковы, что* $k_1+k_{-1} \leqslant \frac{n}{2}$, $k_{-1} \leqslant k_1$, *разность* $k_1+k_{-1}-t$ *является степенью простого числа (обозначим ее* $q = p^a$*) и* $k_1+k_{-1}-2q \geqslant -2k_{-1}$. *Положим* $d = k_1+k_{-1}-2q+1$. *Пусть* $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3)$,

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{-1,1} & m_{0,1} & m_{1,1} \\ m_{-1,2} & m_{0,2} & m_{1,2} \\ m_{-1,3} & m_{0,3} & m_{1,3} \end{pmatrix},$$

причем все элементы вектора и матрицы — натуральные числа,

$$m_1+m_2+m_3 = n, \;\; m_{-1,1}+m_{0,1}+m_{1,1} = m_1, \;\; m_{-1,2}+m_{0,2}+m_{1,2} = m_2,$$
$$m_{-1,3}+m_{0,3}+m_{1,3} = m_3, m_{-1,1}+m_{-1,2}+m_{-1,3} = k_{-1},$$
$$m_{0,1}+m_{0,2}+m_{0,3} = k_0, \;\; m_{1,1}+m_{1,2}+m_{1,3} = k_1$$

и выполнено еще одно условие, для формулировки которого нам потребуются дополнительные обозначения и термины. А именно, пусть множество $\{1, \ldots, n\}$ *представлено в виде объединения трех непересекающихся частей* M_1, M_2, M_3, *мощности которых равны* m_1, m_2, m_3 *соответственно. Скажем, что вектор* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$ *удовлетворяет разбиению* $T(M_1, M_2, M_3)$, *если*

$$|\{i \in M_1 : \, x_i = -1\}| = m_{-1,1}, \;\; |\{i \in M_1 : \, x_i = 0\}| = m_{0,1},$$
$$|\{i \in M_1 : \, x_i = 1\}| = m_{1,1},$$
$$|\{i \in M_2 : \, x_i = -1\}| = m_{-1,2}, \;\; |\{i \in M_2 : \, x_i = 0\}| = m_{0,2},$$
$$|\{i \in M_2 : \, x_i = 1\}| = m_{1,2},$$
$$|\{i \in M_3 : \, x_i = -1\}| = m_{-1,3}, \;\; |\{i \in M_3 : \, x_i = 0\}| = m_{0,3},$$
$$|\{i \in M_3 : \, x_i = 1\}| = m_{1,3}.$$

Еще одно условие, которому подчиняются параметры $\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$, *состоит в том, что у любых двух векторов* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, *удовлетворяющих одному и тому же разбиению, скалярное произведение не меньше* d. *Тогда*

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \leqslant \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!}.$$

$$\cdot\frac{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!}{k_{-1}!}\cdot\frac{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!}{k_0!}\cdot\frac{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}{k_1!}\cdot\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j\right),$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i,j) : \, i+j \leqslant n, \, i+2j \leqslant q-1\}.$$

Доказательство новой теоремы основано на линейно-алгебраическом методе.

Новые теоремы приводят к неожиданным следствиям в проблеме Нелсона–Хадвигера. Раздел 1.4 содержит в себе результаты приложения усиленных теорем к задаче о хроматическом числе. В частности удается доказать, что оценка Франкла–Уилсона может быть получена не только при $k \sim \frac{2-\sqrt{2}}{2}n$, но и при всех k, $k \sim k'n$, где k' — любое число из отрезка $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. К тому же удается получить усиление оценок для некоторых конфигураций дистанционных графов.

Содержание главы 2

Во второй главе обсуждаются вопросы связанные с рациональным аналогом проблемы Нелсона–Хадвигера. В начале главы приводится обобщение определения хроматического числа для вещественного и рационального пространств с одним или несколькими запрещенными расстояниями.

Определение. *Пусть* $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $k \in \mathbb{N}$. *Положим* $\overline{\chi}_X(Y^n; k) = \max_{a_1,\ldots,a_k \in X} \chi(Y^n; a_1, \ldots, a_k)$, *где* $\chi(Y^n; a_1, \ldots, a_k)$ — *хроматическое число пространства* Y^n *с запрещенными расстояниями* $a_1, \ldots, a_k$.

Для хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями приводятся лучшие известные на сегодняшний день результаты и доказываются новые нижние оценки.

Теорема 2.2.1 *Имеет место оценка*

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_3 + o(1))^n,$$

где $\zeta_3 = 1.199\ldots$

Теорема 2.3.1. *Имеет место оценка*

$$\limsup_{n\to\infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n\to\infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geqslant \zeta_4 + \zeta_3 + \delta_2 = 2.693\ldots, \quad \delta_2 \approx 0.029.$$

Для доказательства этих теорем используется усложнение конструкции классического линейно-алгебраического метода и уточненный выбор параметров для используемых конструкций.

В разделе 2.4 приводится ещё один вариант обобщения понятия хроматического числа. Для точной формулировки результатов этого раздела введем несколько определений.

Определение. *Вещественным дистанционным графом* (или *вещественным графом расстояний*) называется любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \exists a \in \mathbb{R}: \ E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}: \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \ .$$

Определение. *Вполне рациональным дистанционным графом* (или *вполне рациональным графом расстояний*) назовем любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{Q}^n, \quad a \in \mathbb{Q}: \ E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}: \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}.$$

Определение. Назовем *аффинной размерностью* множества A минимальную размерность пространства, которое его содержит, и обозначим ее $\operatorname{affdim} \mathrm{A}$.

Введем новое понятие хроматического числа, а именно $\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) = \max\{\chi(G): \ G -$ конечный вполне рациональный дистанционный граф с $\operatorname{affdim} G \leqslant n\}$.

Теорема 2.4.1. *Имеет место оценка*

$$\chi_{\mathrm{aff}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + o(1))^n. \tag{2.2}$$

А именно, существует такая последовательность конечных вполне рациональных графов расстояний $G_n \subset \mathbb{Q}^{4n}$ с $\operatorname{affdim} G_n \leqslant n$ и такая последовательность чисел $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, что $\chi(G_n) \geqslant \chi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n) \geqslant (\zeta_1 + \delta_n)^n$.

Содержание главы 3

В главе 3 изучаются рациональные аналоги проблемы Борсука.

В первом разделе третьей главы рассматривается тривиальный аналог числа Борсука для рационального пространства. Для него доказывается следующее утверждение

Утверждение. *Выполнена оценка $f_{\mathbb{Q}}(n) \geqslant f(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

То, что неравенство верно и в другую сторону представляется очевидным. Таким образом, этот аналог не является новой величиной. В разделе 3.2 приводятся два правильных аналога задачи Борсука.

Первый аналог:

$$\chi_{\mathbb{Q},1}(n) = \max_{A \subset \mathbb{Q}^n,\ \mathrm{diam}\, A = 1} \chi_{\mathbb{Q}}(A).$$

Второй предложенный к рассмотрению аналог использует введенное ранее понятие аффинной размерности:

$$\chi^{\mathrm{aff}}_{\mathbb{Q},1}(n) = \max_{A:\ \mathrm{affdim\, A=n,\ diam\, A=1}} \chi_{\mathbb{Q}}(A).$$

Для построенных чисел изучаются те же вопросы, что и для классического числа Борсука. А именно формулируются (и опровергается) аналоги гипотезы Борсука, доказываются нижние оценки при растущей размерности n, исследуются минимальные размерности контрпримера к аналогам гипотезы Борсука.

Основные результаты отражены в следующих теоремах

Теорема 3.2.1. *Имеет место неравенство*

$$\chi_{\mathbb{Q},1}(n) \geqslant \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} + \delta_1(n) \right)^{\sqrt{n}} = (1.225... + \delta_1(n))^{\sqrt{n}}, \quad \delta_1 = o(1)$$

при $n \to \infty$.

Теорема 3.2.2. *Имеет место неравенство*

$$\chi^{\mathrm{aff}}_{\mathbb{Q},1}(n) \geqslant \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} + \delta_2(n) \right)^{\sqrt{n}} = (1.225... + \delta_2(n))^{\sqrt{n}}, \quad \delta_2 = o(1)$$

при $n \to \infty$.

Теорема 3.3.1. *Для величины $\chi_{\mathbb{Q},1}(n)$ гипотеза неверна при всех $n \geqslant 946$.*

Теорема 3.3.2. *Для величины $\chi^{\mathrm{aff}}_{\mathbb{Q},1}(n)$ гипотеза неверна при $n \in [561, 757]$ и при всех $n \geqslant 903$.*

Все эти результаты используют идеи линейно-алгебраического метода. Однако для доказательства этих теорем требуется усложнение конструкций, для сохранения рациональности рассматриваемых точек.

В последнем разделе третьей главы приводится еще одно обобщение понятия рационального числа Борсука, а именно предлагается рассмотреть его для других вариантов метрики. Для метрики l_p число Борсука обозначим $\chi_{\mathbb{Q},1}(n,p)$, а в аффинном случае — $\chi^{\text{aff}}_{\mathbb{Q},1}(n,p)$.

Для случая, когда $p \in \mathbb{N}$, в диссертации приводится доказательство следующих асимптотических оценок:

$$\chi_{\mathbb{Q},1}(n,p) \geqslant \frac{|\Sigma|}{|M|} = (1.203... + \delta_1(n))^{\sqrt{n}}, \quad \delta_2 = o(1).$$

$$\chi^{\text{aff}}_{\mathbb{Q},1}(n,p) \geqslant \frac{|\Sigma|}{|M|} = (1.203... + \delta_2(n))^{\sqrt{n}}, \quad \delta_2 = o(1).$$

Благодарности. Автор признателен профессору А.М. Райгородскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе. Автор также благодарен А.Б. Купавскому за полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

[1] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Доклады РАН, 2013. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[2] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые оценки в задаче о числе ребер в гиперграфе с запретами на пересечение*, Проблемы передачи информации, 2013. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[3] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространтсва*, УМН, 2013. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[4] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства* $\mathbb{Q}^n$, Труды МФТИ, 4(2012), N1, 127-130. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[5] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *О некоторых аналогах проблемы Борсука в пространстве* $\mathbb{Q}^n$, Доклады РАН, 436 (2011), N3, 306-310. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)

[6] А.Б. Купавский, Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *О некоторых аналогах проблемы Борсука в пространстве* $\mathbb{Q}^n$, Труды МФТИ, 4(2012), N1, 81-90. (А.М. Райгородскому принадлежит постановка задачи и редакция введения, А.Б. Купавскому принадлежит редакция доказательства основной теоремы, Е.И. Пономаренко принадлежит доказательство всех основных результатов.)