Отзыв
научного руководителя
на диссертацию Е.И. Пономаренко
“Проблемы Борсука и Нелсона–Хадвигера
в рациональных пространствах”,
представленную к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 — дискретная математика и математическая
кибернетика

Диссертация Е.И. Пономаренко посвящена актуальным задачам теории графов и гиперграфов, приложения которых одинаково значимы для комбинаторной геометрии и теории кодирования.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

Первая глава диссертации посвящена улучшению классической теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением. Теорема Франкла–Уилсона — это результат 1981 года, который активно применялся для решения таких разных задач, как задачи о максимальной мощности равновесного кода с запрещенным Хэмминговым расстоянием, проблемы получения конструктивных оценок чисел Рамсея, задачи типа Нелсона–Хадвигера о раскрасках метрических пространств, проблема Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Пономаренко удалось значительно усилить оценку Франкла–Уилсона в случае, когда величина запрещенного пересечения больше половины от числа вершин в каждом ребре гиперграфа. Это исключительно яркий результат.

Улучшение теоремы Франкла–Уилсона дается в *параграфе 1.2*, а в *параграфе 1.3* новая техника переносится на случай, когда вместо гиперграфа, который естественно интерпретировать как систему (0,1)-векторов, рассматривается совокупность векторов с координатами $-1, 0, 1$.

В *параграфе 1.4* даются нетривиальные приложения новых результатов к задаче Нелсона–Хадвигера о раскраске пространства в наименьшее число цветов $\chi(\mathbb{R}^n)$ без пар точек одного цвета на расстоянии 1. Задача Нелсона–Хадвигера классическая, и приложения, которые удается получить Пономаренко, довольно неожиданны. Оказывается, известную оценку Франкла–Уилсона

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207\ldots + o(1))^n$$

можно получить с использованием отнюдь не только гиперграфов с $(1+o(1))\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n$ вершинами в каждом ребре, но и любых гиперграфов с $(1+o(1))an$ вершинами, где a пробегает целый отрезок. Кроме того, за счет новой техники удается гораздо точнее оценить снизу максимальное хроматическое число дистанционного графа, принадлежащего определенному широкому классу графов такого типа.

Во **второй главе** речь идет о различных обобщениях хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ на случай рационального пространства $\mathbb{Q}^n$. В классическом случае, которому посвящен *параграф 2.2*, $\chi(\mathbb{Q}^n)$ — это снова минимальное число цветов, в которые можно так покрасить все точки с рациональными координатами, что расстояние между точками одного цвета не равно 1. Результат параграфа не менее ярок, нежели результат главы 1: автору удается улучшить нижнюю оценку величины $\chi(\mathbb{Q}^n)$, которая была получена 13 лет назад и до сих пор улучшению не поддавалась. Благодаря этому прорыву возник и результат *параграфа 2.3*, в котором доказывается новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с двумя запрещенными расстояниями. Наконец, в *параграфе 2.4* дается иной взгляд на раскраски рациональных пространств. Если обычное хроматическое число — это, по сути, максимум хроматческих чисел графов расстояний с рациональными вершинами и рациональными длинами ребер, то новое хроматическое число, определение которого мотивирует и вводит Пономаренко, — это максимум хроматических чисел таких же графов расстояний, которые, однако, имеют данную "аффинную размерность" (располагаются на плоскости данной размерности в большом пространстве и во внутренних координатах этой плоскости, вообще говоря, перестают быть рациональными). Для новых хроматических чисел автору также удается получить сильные нижние оценки.

В **третьей главе** диссертации рассматриваются рациональные аналоги классической проблемы Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. По аналогии с известной гипотезой Борсука формулируется предположение о том, что каждое множество точек в рациональном пространстве, имеющее диаметр 1, может быть покрашено в k цветов без пар точек одного цвета на расстоянии 1, где k — это число вершин в максимальном симплексе с длинами сторон 1 в $\mathbb{Q}^n$. В отличие от "вещественной" проблемы Борсука, в которой контрпримеры к гипотезе имеются сейчас во всех размерностях $d \geq 64$, здесь все еще сложнее, и Пономаренко в *параграфе 3.3* строит контрпримеры лишь при $d \geq 903$ и $d \in [561, 757]$ (а также в несколько ином похожем диапазоне для "аффинного" аналога рационального числа Борсука, идея которого такая же, как в случае аффинного хроматического числа из второй главы). И эти контрпримеры уже весьма нетривиальны. Наконец, в *параграфе 3.4* рациональная проблема Борсука решается не в случае евклидовой метрики, но в более общем случае метрики l_p с натуральным p.

Диссертация представляет собой цельное исследование, вызвавшее большой резонанс среди специалистов (результаты докладывались на крупных конференциях в России и за рубежом). Очевидны дальнейшие перспективы развития такой тематики. Многие из результатов диссертации уместно включить в спецкурсы по комбинаторной геометрии и теории кодирования. В этом ключе, а также в ключе различных приложений использованной Пономаренко техники диссертация может быть полезна специалистам МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, ИППИ РАН, МИРАН им. В.А. Стеклова, ВЦ РАН, ИПМ ДВО РАН и т.д.

Таким образом, диссертационная работа Е.И. Пономаренко полностью соответствует требованиям п. 7 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Екатерина Игоревна Пономаренко заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор

15.02.2014

А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

Ученый секретарь МФТИ,
доцент

Ю.И. Скалько