

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.
ЛОМОНОСОВА, ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Аристов Анатолий Игоревич

**Исследование качественных свойств решений
некоторых нелинейных уравнений соболевского
типа**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на *кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.*

Научный руководитель:

Ильин Александр Владимирович

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН,
профессор кафедры нелинейных динамических систем
и процессов управления факультета вычислительной
математики и кибернетики федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего
профессионального образования «Московский
государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Стернин Борис Юрьевич,

доктор физико-математических наук, академик РАЕН,
профессор кафедры прикладной математики
федерального государственного автономного образовательного
учреждения «Российский университет дружбы народов»;

Шаталов Виктор Евгеньевич,

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Синтезирующего
метеорологического центра «Восток».

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Воронежский государственный университет»

Защита состоится 22 апреля 2015 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», а также на официальном сайте факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова: <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «_____» _____ 2015 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук, профессор

Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория соболевских уравнений относительно молодая, и здесь много нерешенных вопросов.

В последние десятилетия было опубликовано множество работ, посвященных асимптотическим представлениям при больших временах решений нелинейных эволюционных уравнений (и соболевских, и классических). Отметим, что важные результаты в этой области установили И. А. Шишмарев, П. И. Наумкин, Е. И. Кайкина, М. В. Комаров, В. В. Конотоп, М. Цуцуми, С. J. Amick, J. L. Bona, M. E. Schonbek, D. B. Dix, M. Escobedo, N. Hayashi, K. Mochizuki.

Сложность исследования асимптотик связана с тем, что для него требуется не только глобальная по времени разрешимость, но и наличие некоторых априорных оценок разности между решением и приближенным решением. Кроме того, техника обобщенных решений не может применяться — здесь надо изучать классические и «полуклассические» («semiclassical») решения, т. е. те, которые находятся в лебеговых пространствах по пространственным переменным и являются гладкими по времени.

Обширные исследования И. А. Шишмарева и соавторов¹ посвящены асимптотикам задач Коши для эволюционных уравнений. Рассмотрены малые и немалые начальные данные. Сделана классификация асимптотик по случаям, когда главный член асимптотики определяется линейной частью уравнения, нелинейной или обеими (соответственно «суперкритический», «субкритический» и «критический» случаи).

Другой важный класс задач, относящихся к нелинейным эволюционным уравнениям, составляют задачи, где требуется исследовать локальную и глобальную по времени разрешимость, разрушение и опрокидывание решений.

¹ Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I. Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Springer-Verlag. 2006. 564 с.

Поясним, что под разрушением подразумевается существование решения локально по времени, но не глобально, а под опрокидыванием — частный случай разрушения, когда для решения уравнения $u(x, t)$ выполняется соотношение $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\| = \infty$, где T — конечное число, $\|\cdot\|$ — некоторая норма по пространственным переменным. По этой тематике тоже опубликовано множество работ. Здесь важные результаты получили М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, Ю. Д. Плетнер,^{2 3} Е. В. Юшков, Х. А. Левин, А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов,⁴ Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев,⁵ С. А. Габов, Н. Fujita.

Имеется три наиболее распространенных метода исследования разрушения решений: энергетический метод Х. А. Левина; метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери; метод автомодельных решений А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова. Существуют и другие методы, но обычно они основаны на специфике конкретной задачи.

Актуальность работы обусловлена следующими причинами. Исследование разрушения решения помогает определить границы применимости модели, сводящейся к уравнению. А именно, применение модели корректно на определенном временном промежутке — до разрушения. Кроме того, неограниченный рост решения может иметь непосредственную физическую интерпретацию, например, пробой полупроводника или переход от ламинарного течения к турбулентному. Если же речь идет об асимптотике при больших временах, то асимптотические методы — одно из наиболее эффективных средств, позволяющих изучать качественное поведение решений и выявлять такие важные их особенности, как характер возрастания или убывания, осцилляции. Подобные

² Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

³ Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: URSS, 2010.

⁴ Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

⁵ Митидиери Э. Л., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234.

результаты затруднительно получить с помощью численного анализа — поэтому асимптотические методы играют важную роль.

В данной работе сделана попытка продолжить исследования И. А. Шишмарева и М. О. Корпусова. Исследован ряд задач Коши и начально-краевых задач для нелинейных уравнений соболевского типа. Получены теоремы, устанавливающие при соответствующих условиях и асимптотики решений при больших временах, и достаточные условия для разрушения решений (с оценками времени их существования). Подчеркнем, что подобные результаты затруднительно получить с помощью численных методов, поэтому важно устанавливать их аналитически.

Цель работы состоит в следующем. Во-первых, изучение нескольких задач Коши для нелинейных соболевских уравнений. Установление асимптотических представлений решений при больших временах. Во-вторых, исследование начально-краевых задач для ряда нелинейных соболевских уравнений (в частности, нелокальных по времени). Установление достаточных условий для глобальной и для локальной по времени разрешимости. Вывод двусторонних оценок времени существования решения для случая, когда оно существует только локально, в виде явных, неявных и квадратурных формул.

Методы исследования основаны на принципе сжимающих отображений, теории возмущений и энергетических оценках.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и получены автором лично. Изучались задачи, постановки которых основаны на моделировании процессов в полупроводниковых средах. Полученные результаты характеризуют качественное поведение решений этих задач.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Впервые исследованы задачи Коши для некоторых нелинейных соболевских уравнений. Построены асимптотики их решений при больших временах.

2. Впервые исследованы начально-краевые задачи для ряда нелинейных соболевских уравнений, в частности, нелокальных по времени. Установлены достаточные условия для их глобальной и локальной по времени разрешимости. Для случая только локальной разрешимости построены верхние и нижние оценки времени существования решения в виде явных, неявных и квадратурных формул.

Таким образом, работа вносит вклад в понимание качественного поведения решений задач, возникающих при моделировании некоторых нелинейных процессов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, однако ее результаты можно использовать для моделирования нестационарных процессов в полупроводниках.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на научном семинаре профессора И. А. Шишмарева по нелинейным дифференциальным уравнениям; научном семинаре академика С. В. Емельянова и С. К. Коровина по проблемам нелинейной динамики и управления при МГУ им. М. В. Ломоносова; международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009», «Ломоносов-2010», «Ломоносов-2011», «Ломоносов-2012», «Ломоносов-2013»; научных конференциях «Ломоносовские чтения» в 2011 г. (в соавторстве с И. А. Шишмаревым) и «Ломоносовские чтения» в 2013 г. (в соавторстве с А. В. Ильиным); научных конференциях «Тихоновские чтения» в 2010, 2012 и 2013 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 19 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых журналах [1,2,3,4,5,6,7], 8 статей в сборниках трудов конференций и 1 публикация тезисов доклада.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 7 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 213 страниц, из них 213 страниц текста. Библиография включает 108

наименований на 12 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели, аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены положения, выносимые на защиту.

В первой главе рассматриваются математические модели, приводящие к уравнениям соболевского типа.

В разделе 1.1 сделан обзор моделей нелинейных процессов в полупроводниках. На их основе в разделе 1.2 выведены уравнения, которые будут изучаться в следующих главах. В этих уравнениях рассматриваются пространственные переменные размерностью не меньше двух. В разделе 1.3 особое внимание уделено модели с одномерной пространственной переменной; приведено соответствующее уравнение. В разделе 1.4 указаны модели, не связанные с полупроводниковыми явлениями, сводящиеся к соболевским уравнениям.

Вторая глава посвящена изучению задач Коши следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla))u^v = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

где $u(\cdot)$ — действительнoзначная функция, зависящая от вектора пространственных переменных x размерности N и от времени $t > 0$, $v \in \{2; 3\}$. При некоторых условиях выведены асимптотические формулы следующего вида для решений этих задач при $t \rightarrow \infty$:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O\left(t^{-\frac{N}{2}-\theta} e^{-at}\right) \quad (2)$$

(A_0 и θ — постоянные, причем $\theta > 0$). Кроме того, показано, что условия, налагаемые на начальные данные, определяют семейство нетривиальных функций.

Через x , p , q , r были обозначены действительные N -мерные векторы ($N \geq$

$v - 1$). Кроме того, использовались следующие обозначения:

$$M(p) = \max(1, |p|), \quad K(p) = \frac{a + b|p|^2}{1 + |p|^2}, \quad D(p) = \frac{\chi + i(\lambda, p)}{1 + |p|^2}.$$

Преобразование Фурье введено по правилу $\hat{f}(p) = F[f(x)] = \int_{R^N} e^{-i(p,x)} f(x) dx$.

На начальные данные наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} u_0(x) &\in L_1(R^N), \quad |\hat{u}_0(p)| \leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p), \quad p \in R^N, \\ |\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)| &\leq \varepsilon |p - q|^{\sigma_2} M^{-s}(q), \quad p, q \in R^N, \quad |p - q| \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — достаточно малый параметр, $s > N$, $\alpha \geq 0$, $\sigma_2 \in (0; 1]$.

Поясним, что параметр ε характеризует предполагаемую малость начальных данных. В обоих случаях ($v = 2$ и $v = 3$) образ Фурье решения представлен в виде степенного ряда $\hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{(v-1)n+1} v_n(p, t)$, для функций v_n выведены рекуррентные формулы. Затем доказано предложение, представляющее собой оценку на v_n . Из этой оценки следует существование такой постоянной $A_1 \geq 1$, что $|v_n(p, t)| \leq A_1^n \forall n$. Значит, можно утверждать, что существует такая окрестность нуля, что если ε находится в этой окрестности, то ряд, мажорирующий $\hat{u}$, сходится. Поэтому можно перейти от $\hat{u}$ к u и с помощью оценок на v_n получить требуемую асимптотическую формулу.

Прежде чем привести определение обобщенного решения изучаемых задач, сделаем формально следующие преобразования. Применим к левой и правой частям обоих равенств (1) оператор Фурье, домножим первое равенство на $e^{K(p)t} / (1 + |p|^2)$ и проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий. Таким образом, получим при $v = 2$ или $v = 3$ соответственно следующие интегральные уравнения относительно функции $\hat{u}(p, t)$:

$$\hat{u}(p, t) = e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \hat{u}(p - q, \tau) \hat{u}(q, \tau) dq \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{u}(p, t) &= e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + \\ &+ D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \int_{R^N} \hat{u}(p - q, \tau) \hat{u}(q - r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr. \end{aligned} \quad (4)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1) называется прообраз Фурье $u(\cdot)$ решения интегрального уравнения ((3) или (4) соответственно при $v = 2$ или $v = 3$). При этом $u(\cdot)$ удовлетворяет двум условиям:

1. $u(\cdot)$ — непрерывная по всем аргументам и ограниченная функция,
2. $u(\cdot) \in L_1(R^N)$ по x при любом фиксированном t .

Раздел 2.1 посвящен задаче с квадратичной нелинейностью:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla))u^2 = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Здесь a, b, χ — действительные постоянные, λ — постоянный N -мерный вектор, причем $N \geq 1$, $0 < a < b < 3a$.

Теорема 1. При $t \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика вида (2).

(Однозначную разрешимость задачи можно обосновать с помощью принципа сжимающих отображений.)

Результаты раздела опубликованы в [1]. Отметим, что в этой статье на параметры налагалось условие $0 < a < b < 2a$, однако при подготовке диссертации автору удалось ослабить его до следующего: $0 < a < b < 3a$.

Раздел 2.2 посвящен задаче с кубической нелинейностью:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla))u^3 = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Здесь a, b, χ — действительные постоянные, λ — постоянный N -мерный вектор, причем $N \geq 2$, $0 \leq a < b$.

Теорема 2. При $t \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика вида (2).

Раздел основан на исследовании, опубликованном в статье [2], а также в виде тезисов [11].

В разделе 2.3 построен пример нетривиальных начальных данных, удовлетворяющих условиям задач. А именно, показано, что им удовлетворяют функции вида

$$u_0(x) = A \left(\frac{B}{\pi} \right)^N \prod_{k=1}^N \frac{1}{x_k^2 + B^2},$$

где $B > 0$, A — достаточно малое по модулю число.

Соответствующие рассуждения приведены в статье [1], посвященной задаче с квадратичной нелинейностью, однако они применимы и в случае кубической нелинейности.

В **третьей главе** рассмотрена следующая задача Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + f(x, u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (5)$$

Здесь u — действительнoзначная функция, зависящая от пространственной переменной $x \in R^N$ (N — любое натуральное число) и времени $t > 0$. Пусть $a > 0$, $f(\xi, \eta) \in C(R^N \times R)$, причем $|f(\xi, \eta)| \leq \mu(\xi) |\eta|^\alpha \quad \forall \xi \in R^N, \eta \in R$, где $\alpha > 1$, $\mu(\cdot) \in C(R^N) \cap L_q(R^N)$, а множество возможных q зависит от размерности пространственной переменной следующим образом: $2 \leq q \leq \infty$ при $N \leq 3$, $N/2 < q \leq \infty$ при $N \geq 4$. Пусть, кроме того, существует производная $\partial f / \partial \eta \in C(R^N \times R)$, удовлетворяющая условию $|\partial f / \partial \eta| \leq k(\xi) |\eta|^\beta \quad \forall \xi \in R^N, \eta \in R$, где $\beta > 0$, $k(\cdot) \in C(R^N) \cap L_\nu(R^N)$ при некотором $\nu \in [2; \infty]$. Условия на $u_0(\cdot)$ сформулируем позже.

В предыдущей главе были рассмотрены задачи Коши вида (1). Были выведены асимптотические формулы для решений задач при $t \rightarrow \infty$, из которых видно, что ограничение $a < b$, действовавшее для всех задач главы, существенно. В связи с этим интересен вопрос, каково качественное поведение решений задач Коши в предельном случае $a = b$.

Были введены следующие обозначения:

$$L_q = L_q(R^N), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad H^2 = H^2(R^N), \quad \bar{B}[\cdot] = F^{-1} \left[\frac{1}{1 + |p|^2} F[\cdot] \right],$$

$$U = L_\infty \cap H^2, \quad X = C[0; \infty; U), \quad \|\varphi(x, t)\| = \sup_{t \geq 0} (\|\varphi(x, t)\|_{L_\infty} + \|\varphi(x, t)\|_{H^2})$$

($F[\cdot]$ — преобразование Фурье). Предполагалось, что $u_0(x) \in U$.

Замена $u = ve^{-at}$ сводит задачу (5) к следующей:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta v - v) + e^{at} f(x, ve^{-at}) = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x). \quad (6)$$

Прежде чем дать определение обобщенного решения, формально применим к уравнению в задаче (6) оператор $\overline{B}[\cdot]$, затем проинтегрируем его от 0 до t с учетом начальных условий. Получим следующее уравнение:

$$v(x, t) = u_0(x) + \int_0^t e^{a\tau} \overline{B}[f(x, ve^{-a\tau})] d\tau. \quad (7)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (5) называется элемент $u(\cdot)$ пространства X , определяемый по правилу $u = ve^{-at}$, где v — решение уравнения (7) из пространства X .

Теорема 1. Существует такая окрестность нуля, что если $\|u_0\|$ находится в ней, то существует единственное обобщенное решение задачи (5).

Теорема 2. Существует такая окрестность нуля, что если $\|u_0\|$ находится в этой окрестности, то при $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$u(x, t) = A(x) e^{-at} + O(e^{-\alpha at}),$$

где $A(\cdot)$ зависит только от пространственной переменной.

Глава основана на исследовании, которое было опубликовано кратко в виде хроники семинара [3], а затем — более подробно — в статье [4]. Это исследование обобщает результаты, опубликованные ранее в [8] и [9].

Главы 4–7 посвящены исследованию разрушения решений начально-краевых задач. И здесь речь идет о стремлении некоторых параметров к бесконечности. Следовательно, анализ уравнений позволяет установить результаты, которые затруднительно получить с помощью численных методов.

Общие соображения, относящиеся к этим главам, состоят в следующем. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$D[u] = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

где $u(\cdot)$ — действительнзначная функция, зависящая от N -мерного вектора пространственных переменных x и времени $t > 0$, $D[\cdot]$ — нелинейный дифференциальный оператор. При этом считаем, что $x \in \Omega \subset R^N$ ($N \geq 2$), где Ω —

ограниченное множество с достаточно гладкой границей: $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $0 < \delta \leq 1$. Рассмотрена и задача, где $N = 1$, а x находится в некотором ограниченном промежутке Ω .

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (8) называем такое $u \in X_T \equiv C^1[0; T; H_0^1(\Omega)]$, что*

$$\langle D[u], w \rangle = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (9)$$

при всех $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0; T)$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$, T — некоторое положительное число или бесконечность).

Заметим, что первое равенство в (9) можно переписать в виде интегрального тождества: $\int_{\Omega} D[u] w dx = 0$.

Определение 2. *Говорят, что обобщенное решение задачи (8) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_{∞} . В частности, говорят, что решение разрушается путем опрокидывания, если $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.*

Для всех задач названных глав можно доказать теорему 1 об однозначной разрешимости с помощью принципа сжимающих отображений (ее формулировки для всех задач одинаковы).

Теорема 1. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи. При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

В данных главах используются следующие обозначения: $L_p = L_p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$), $H_0^1 = H_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}$. Штрих означает производную по времени. Под нижним индексом «0» подразумевается, что выражение рассматривается при $t = 0$. Если $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, то $\|x\|_{l_1} = \sum_{k=1}^N |x_k|$, $\|x\|_{l_{\infty}} = \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$.

В исследованиях времени существования решений значительную роль играют функционалы энергии Φ и Ψ . В зависимости от выражения z , стоящего под знаком производной по времени, они вводятся следующим образом:

1. если $z = \Delta u - u$ ($N \geq 2$), то $\Phi = (\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2) / 2$, $\Psi = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) / 2$ где $v = ue^{bt}$, b — неотрицательное число, зависящее от условий конкретной задачи;
2. если, $z = \Delta u - u - |u|^q u$ ($N \geq 2$) то $\Phi = \Psi = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) / 2 + (q + 1)\|u\|_1^{q+2} / (q + 2)$;
3. если, $z = \Delta u - |u|^q u$ ($N \geq 2$) то $\Phi = \Psi = \|\nabla u\|^2 / 2 + (q + 1)\|u\|_1^{q+2} / (q + 2)$;
4. если $z = \Delta u - u$ ($N = 1$), то $\Phi = \Psi = \|u\|^2 + \|\partial u / \partial x\|^2$

(здесь $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L_{q+2}}$). Очевидно, $v_0 = u_0$ и $\Phi_0 = \Psi_0$.

Исследования времени существования решений проводятся по следующей схеме. В теореме 1 фигурирует величина T , которая может быть положительным числом или бесконечностью, и цель дальнейшего исследования — оценить ее. Строятся такие функции $f_{1,2}(\cdot)$, которые конечны и положительны в окрестности нуля и стремятся к бесконечности соответственно при $t \rightarrow T_1 -$ и $t \rightarrow T_2 -$, причем $\Psi \leq f_1(t)$, $\Phi \geq f_2(t)$. Можно показать, что соотношения $\lim_{t \rightarrow T-} \Phi = \infty$ ($T < \infty$) и $\lim_{t \rightarrow T-} \Psi = \infty$ ($T < \infty$) равносильны утверждению, что решение опрокидывается за время $T < \infty$. Поэтому $T \in [T_1; T_2]$. Возможна и ситуация, когда $\Phi < \infty \forall t > 0$ — тогда $T = \infty$, и разрушения решения не происходит.

В формулировках теорем фигурируют величины Φ и $d\Phi/dt$ при $t = 0$: их несложно выразить через начальные данные.

В некоторых задачах предполагается принадлежность переменного коэффициента μ множеству L_α по пространственным переменным (α выражается через параметры задачи), а затем используются выражения, содержащие $\|\mu\|_{L_4}$. Применение этой нормы корректно, поскольку при предполагаемых условиях $L_\alpha \subseteq L_4$.

Важную роль играют теоремы вложения Соболева⁶. Через C_p обозначе-

⁶ Корпусов М. О., Свешников А. Г. Нелинейный функциональный анализ и математическое модели-

ны оптимальные константы вложения H_0^1 в L_p (если существуют), т. е. $C_p = \inf\{C \mid \|w\|_{L_p} \leq C\|w\|_{H_0^1} \ \forall w \in H_0^1\}$.

В **четвертой главе** рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений с нелинейностями только в стационарной части.

В **разделе 4.1** рассмотрены основные идеи изучения начально-краевой задачи (8) на примере следующей относительно простой модельной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(t)u^3 = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Здесь $N = 3$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, причем $\mu(t) > 0$ всюду на $[0; \infty)$.

Заметим, что при тривиальных начальных данных единственное решение будет тривиальным. Поэтому рассматриваются решения задачи (10), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Для данной задачи считаем, что $b = 0$, откуда $\Phi \equiv \Psi$.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Если $\int_0^\infty \mu(\tau)d\tau < (2C_4^4\Phi_0)^{-1}$, то $T = \infty$, т. е. решение существует глобально по времени, и его разрушения не происходит.
2. Пусть существуют числа T_1 и T_2 — положительные корни соответственно следующих квадратурных уравнений относительно t : $\int_0^t \mu(\tau)d\tau = (2C_4^4\Phi_0)^{-1}$ и $\int_0^t \mu(\tau)d\tau = (2\|u_0\|_{L_4}^4)^{-1}\Phi_0$. Тогда происходит опрокидывание решения за конечное время $T \in [T_1; T_2]$. В частности, если $\mu = \text{const}$, то $(2C_4^4\mu\Phi_0)^{-1} \leq T \leq (2\mu\|u_0\|_{L_4}^4)^{-1}\Phi_0 < \infty$.

Пункты теоремы не противоречат друг другу: это можно показать с помощью теоремы вложения.

Интересен вопрос, насколько точны оценки T_1 и T_2 . Если дополнительно предположить, что $\inf_{t \geq 0} \mu(t) > 0$, и рассмотреть начальные данные вида $u_0(x) =$

$kv(x)$, где $v(\cdot)$ — нетривиальный элемент H_0^1 , k — положительный числовой параметр, то можно показать, что $T_2 - T_1 = O(k^{-2})$ при $k \rightarrow \infty$.

Раздел основан на исследовании, опубликованном в виде тезисов [12].

Разделы 4.2, 4.3 и 4.4 посвящены исследованию уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^\sigma u = 0. \quad (11)$$

А именно, в **разделе 4.2** рассмотрено уравнение (11) общего вида, а в двух следующих — уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + a(\Delta u - u) + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu |u|^\sigma u = 0 \quad (12)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^\sigma u = 0. \quad (13)$$

Поясним, что результаты, полученные для уравнений (12) и (13), не сводятся к частным случаям результатов, относящихся к (11).

Рассмотрим начально-краевую задачу для (11):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^\sigma u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $N = 3$, $a \in R$, $b \in [0; \infty)$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)}]$, $u_0(x) \in H_0^1$.

Теорема 4. Положим $J = \left(C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \Psi_0^{\sigma/2}\right)^{-1}$. Верны следующие утверждения.

1. Если $\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{-\min(a,b)\sigma\tau} d\tau < J$ при всех конечных t , то решение существует глобально по времени.
2. Пусть уравнение $\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{-\min(a,b)\sigma\tau} d\tau = J$ имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$. (В частности, если μ зависит только от x , то для T_1 легко получить явное выражение.)

Для следующей теоремы список обозначений дополнен: $\varphi(x, t) = \mu(x, t)e^{-\sigma bt}$, $\Lambda = \|\lambda\|_{l_\infty}/2$. Кроме того, параметры $\beta_{1,2,3}$ введены следующим образом: если $\lambda \neq (0; 0; 0)$, то $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$, в противном случае — $\beta_1 = \sigma(2 - b + a)$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = \sigma(2 - b + a)/4$.

Теорема 5. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, кроме того, выполняется соотношение $b - a < 2 - 4/\sigma$. Пусть уравнение $F(t) = -\ln(1 + \beta_2 \Phi_0^{-\beta_3})$, где

$$F(t) = \beta_1 C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \int_0^t \int_0^\tau \|\varphi'\|_{L_4} d\xi d\tau + \\ + \frac{6C_4^4 (\sigma+2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2-b+a)-4} \cdot t^2 - \beta_1 \cdot \frac{(b-a) \|u_0\|^2 + \int_\Omega \mu_0 |u_0|^{\sigma+2} dx}{\Phi_0^{1+\beta_3} + \beta_2 \Phi_0} \cdot t,$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней более одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (14) разрушается за конечное время $T \leq T_2$.

Показано, что условия теоремы непротиворечивы.

Раздел основан на исследовании, которому были посвящены тезисы [14] и статья [5].

В разделе 4.3 рассмотрена следующая задача:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + F(u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $N = 3$, $F(u) = \mu |u|^\sigma u + (\lambda, \nabla) u^2$, $u_0(x) \in H_0^1$, $a > 0$, $\mu \in R$, $\lambda \in R^3$, $\sigma \in (1; 4]$. Пусть $\Lambda = \|\lambda\|_{l_1}$.

Рассмотрены решения, соответствующие нетривиальным начальным данным.

Для этой задачи $b = a$, откуда $v = ue^{at}$.

Теорема 7. Пусть $F(u) = \mu u^3 + (\lambda, \nabla) u^2$, причем $\Lambda > 0$. Верны следующие утверждения.

1. Если коэффициенты и начальные данные удовлетворяют условию $\mu r^2 -$

$2\Lambda\rho - a > 0$, где $\rho = (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2)^{-1/2} \|u_0\|_{L_4}^2$, то решение разрушается за конечное время $T \in [T_1; T_2]$ (для $T_{1,2}$ установлены явные формулы).

2. Если $\mu \leq 0$ или $\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 \leq a\mu^{-1}C_4^{-4}$, то решение существует глобально по времени и ограничено.

Теорема 8. Пусть $F(u) = \mu|u|^\sigma u$. Верны следующие утверждения.

1. Пусть $\mu\|u_0\|_{L_{\sigma+2}}^{2\sigma+4} \geq 2aC_{\sigma+2}^{\sigma+2}\Psi_0^{\sigma/2+2}$. Тогда решение разрушается за конечное время $T \in [T_1; T_2] \subseteq [T_1; T_3]$ (для $T_{1,3}$ установлены явные формулы, для T_2 — неявная).
2. Если $\mu \leq 0$ или $\Psi_0 \leq (\mu\gamma/a)^{-2/\sigma}$, то решение существует глобально по времени и ограничено.

Раздел основан на исследовании, опубликованном в статье [9].

В разделе 4.4 рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(x, t)|u|^\sigma u + (\lambda, \nabla)u^2 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $N = 3$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x; t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)}]$, $u_0(x) \in H_0^1$.

Для данной задачи $b = 0$, откуда $v = u$, $\Phi = \Psi$.

Приведем здесь только теорему о верхней оценке времени разрушения: теорема о нижней оценке сводится к частному случаю формулы, полученной для уравнения общего вида.

Теорема 11. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4]$, $\lambda = (0; 0; 0)$. Пусть уравнение $C_4C_{2\sigma+2}^{\sigma+1}\sigma \int_0^t \int_0^\tau \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau - \sigma\Phi_0^{-\sigma/2-1}\Phi_0't/2 + \Phi_0^{-\sigma/2} = 0$ имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней более одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (15) разрушается за конечное время $T \leq T_2$. (В частности, если μ зависит только от x , то для T_2 легко получить явное выражение.)

Заметим, что достаточным условием разрешимости уравнения из теоремы 11, менее жестким, чем зависимость μ только от x , является, например, сходимость интеграла $\int_0^\infty \int_0^\tau \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau$.

Теорема 12. Положим $\Lambda = \|\lambda\|_{l_\infty}/2$. Пусть μ зависит только от x , причем $\mu(x) \in L_4$, $\mu > 0$ почти всюду на Ω , $\lambda \neq (0; 0; 0)$. Пусть $12C_4^4\Lambda^2(\sigma + 2)^2\Phi_0^3 < (\sigma - 1)\Phi_0^2$. Тогда решение задачи (15) разрушается за конечное время $T \leq T_3$ (для T_3 установлена явная формула).

Раздел основан на исследовании, которому была посвящена статья [10].

В **пятой главе** продолжается исследование локальной и глобальной по времени разрешимости начально-краевых задач для соболевских уравнений. Основное отличие задач, входящих в данную главу, состоит в том, что они содержат нелинейности не только в стационарных выражениях, но и под знаком производной по времени. Как показано в этой главе, новый вид нелинейности может существенно влиять на качественное поведение решений.

В **разделе 5.1** рассмотрена относительно простая модельная задача:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + \mu(t)|u|^r u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Исследование во многом аналогично исследованию модельной задачи из предыдущей главы. Здесь предполагается, что $N = 3$, $q \in [1; 4]$, $r \in (1; 4]$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, $\mu(t) > 0$ всюду на $[0; \infty)$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, причем начальные данные нетривиальны.

Теорема 2. Имеют место следующие утверждения:

1. Для существования решения глобально по времени достаточно выполнение хотя бы одного из двух условий: $\int_0^\infty \mu(\tau) d\tau < (rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2})^{-1}$ и $q \geq r$.
2. Пусть существуют числа T_1 и T_2 — положительные корни соответственно следующих квадратурных уравнений относительно t : $\int_0^t \mu(\tau) d\tau = (rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2})^{-1}$ и $\int_0^t \mu(\tau) d\tau = (r - q)^{-1} \|u_0\|_{L_{r+2}}^{-r-2} (q + 2)\Phi_0$. Тогда проис-

ходит опрокидывание решения за конечное время $T \in [T_1; T_2]$. В частности, $\mu = \text{const}$ является достаточным условием для опрокидывания решения, причем в этом случае

$$C_{r+2}^{-r-2} (2\Phi_0)^{-r/2} / (r\mu) \leq T \leq (r-q)^{-1} \mu^{-1} \|u_0\|_{L_{r+2}}^{-r-2} (q+2) \Phi_0.$$

Интересен вопрос, насколько точны оценки T_1 и T_2 . Если дополнительно предположить, что $\inf_{t \geq 0} \mu(t) > 0$, и рассмотреть начальные данные вида $u_0(x) = \gamma v(x)$, где $v(\cdot)$ — нетривиальный элемент H_0^1 , γ — положительный числовой параметр, то можно показать, что $T_2 - T_1 = O(\gamma^{q-r})$ при $\gamma \rightarrow \infty$, т. е. нелинейности двух видов по-разному влияют на точность найденных оценок.

В разделах 5.2 и 5.3 рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu(x, t) |u|^r u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $N = 3$, $a, b \in R$, $q \in [1; 4]$, $r \in (1; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}]$, $u_0(x) \in H_0^1$, причем начальные данные нетривиальны.

Теорема 4. Пусть $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4]$. Положим $k = |\min(a, b, 0)|$, $J = (2\Phi_0)^{-r/2} / (C_4 C_{2r+2}^{r+1} r)$.

1. Достаточным для существования решения глобально по времени является каждое из следующих трех условий: $\mu(x, t) \leq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , $q \geq 2r$ и $\int_0^\infty \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau < J$.
2. Пусть уравнение $\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau = J$ имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$. (В частности, если μ зависит только от x , то для T_1 легко получить явное выражение.)

В следующих теоремах используются обозначения $m = \max(|a|, |b|)$ и $\alpha = (r - rm/2 - q) / (q + 2)$.

Теорема 5. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4]$, причем $\mu'(x, t) \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t . Пусть $1 < r \leq 2$, $q \geq 1$. Кроме того,

предположим, что $m < 2(r - q)/r$ и $\Phi'_0 > \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}$. Тогда обобщенное решение задачи (16) разрушается за конечное время $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

Раздел 5.2 основан на исследовании, которому была посвящена статья [6]. После ее публикации автору удалось расширить установленные там результаты.

Утверждение. Теоремы 3–5 остаются в силе, если считать, что $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, а $\mu(\cdot)$ находится в пространстве $C[0; T; L_4)$ или $C^1[0; T; L_4)$ соответственно для теорем 3 и 4 или для теоремы 5 (при тех же ограничениях на другие параметры).

Теорема 6. Пусть $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; T; L_4)$, причем $\mu \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , а a и b — неположительные и достаточно малые по модулю числа, $1 \leq q < 19/10$, $r(19/10 - q) > 4q$. Пусть $\|\mu\|_{L_4}$ — ограниченная функция от t . Пусть величина $\int_{\Omega} \mu_0 |u_0|^{r+2} dx$ достаточно большая. Тогда $T \leq T_3$ (для T_3 найдена явная формула).

Теорема 7. Пусть $N \in \{2; 3\}$, $m > 0$. Пусть задача однозначно разрешима. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; T; L_4)$, причем $\mu' \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , кроме того,

$$\frac{\Phi'_0}{\Phi_0} > \frac{rm}{r - q} \sqrt{2(q + 2)}.$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2^*$ (для T_2^* установлена явная формула).

Эти дополнительные результаты были опубликованы в виде тезисов [18].

В разделах 5.4 и 5.5 рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + \mu(x) |u|^r u + f(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$, $q \in [1; 4]$, $f(x, t) \in C[0; T; L_2)$, $u_0(x) \in H_0^1$. Кроме того, если $N = 2$ или $N = 3$, то соответственно $r \in (1; \infty)$, $\mu(x) \in L_4$ или $r \in (1; 2]$, $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$.

Теорема 9. Имеют место следующие утверждения.

1. Достаточным для существования решения глобально по времени является каждое из следующих двух условий: $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω и $q \geq 2r$.
2. Пусть коэффициент μ нетривиален. Пусть k — такое натуральное число, что $2k - 2 < r \leq 2k$. Пусть уравнение

$$\int_0^t e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \|f\| d\xi} d\tau = \frac{(1 + \Phi_0)^{-k}}{gk} \quad (18)$$

имеет корень $t = T_1 > 0$, где

$$g = 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} (r/2 - k + 1)^{r/2-k+1} (k - r/2)^{k-r/2}$$

(будем считать, что $0^0 = 1$). Тогда имеет место оценка $T \geq T_1$. (В частности, если f зависит только от x , то для T_1 легко получить явное выражение.)

3. Если выражение в левой части (18) меньше выражения в правой части при всех конечных t , то решение существует глобально по времени.

Теорема 10. Пусть $r \in (1; 2]$. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$ или $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Пусть $q \in [1; 4]$, $f(\cdot)$ зависит только от x , причем $f(\cdot) \in L_2$. Пусть, кроме того, хотя бы одно из чисел Φ_0 и $\|f\|$ не равно нулю. Тогда имеет место оценка $T \geq T_1^* > T_1$ (для T_1^* установлена явная формула).

Пусть $\alpha = (r - 2q - 1)/(2q + 4)$,

$$G(t) = \alpha \left(\frac{1}{e} + \frac{(r+1)\|f\|^2 + \|f'\|^2}{2} \cdot \left(\frac{\alpha+1}{e\alpha} \right)^{1+1/\alpha} \right).$$

Теорема 11. Пусть $N = 2$, $1 \leq q \leq 4$, $f(\cdot) \in C^1[0; T; L_2)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $2q + 1 < r$. Пусть, кроме того, уравнение

$$\int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau - \alpha \exp(-\Phi_0^{-\alpha}) \Phi_0^{-\alpha-1} \Phi_0' t = \exp(-\Phi_0^{-\alpha}) - 1$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней больше одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (17) разрушается за конечное время $T \leq T_2$. (В частности, если f зависит только от x , то для T_2 легко получить явное выражение.)

Раздел 5.4 основан на исследовании, которому была посвящена статья [7]. В **разделе 5.5** приведена теорема, относящаяся к задаче (17), но не вошедшая в эту статью. Она отвечает на вопрос, каковы достаточные условия разрушения решения в случае $N = 3$.

Пусть теперь $\alpha = (r - q)/(2q + 4)$,

$$G(t) = \frac{r - q}{2(q + 2)} \left(\frac{1}{e} + \frac{(r + 1)^2 \|f\|^2 + (r - q) \|f'\|^2}{2(r - q)} \left(\frac{r + q + 4}{e(r - q)} \right)^{(r+q+4)/(r-q)} \right).$$

Теорема 12. Пусть $N = 2$ или $N = 3$, $1 \leq q \leq 4$, $f(\cdot) \in C^1[0; T; L_2)$, $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, причем $q < r$. Пусть, кроме того, уравнение $\int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau - \alpha \exp(-\Phi_0^{-\alpha}) \Phi_0^{-\alpha-1} \Phi_0' t = \exp(-\Phi_0^{-\alpha}) - 1$ имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2^*$ (если положительных корней больше одного, то T_2^* — наименьший из них). Тогда решение задачи (17) разрушается за конечное время $T \leq T_2^*$. (В частности, если f зависит только от x , то для T_2^* легко получить явное выражение.)

В **главе 6** продолжается изучение начально-краевых задач для уравнений соболевского типа. Важным отличием задач, которые рассмотрены здесь, является то, что они содержат нелокальные по времени члены.

В **разделе 6.1** рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + b \Delta u - au + \mu(x) |u|^r u + \int_0^t (\lambda, \Delta) u(s) ds + \\ + \int_0^t (\omega_1^2 \cos \omega_2(t - s) + \omega_3^2 \cos \omega_4(t - s)) (\theta, \Delta) u(s) ds = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$. Если $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in R^N$ — ненулевой вектор, то под выражением (ν, Δ) подразумевается «лапласиан с весами»: $(\nu, \Delta) = \sum_{k=1}^N \nu_k \partial^2 / \partial x_k^2$.

Параметры задачи удовлетворяют следующим условиям: $a \in R$, $b \in R$, $q \in [1; 4]$, $\omega_{1,2,3,4} \in (0; \infty)$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, λ и θ — ненулевые векторы из R^N . Кроме того, при $N = 2$ или $N = 3$ соответственно $(r, \mu(\cdot)) \in (1; \infty) \times L_4$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1; 2] \times L_{6/(2-r)}$. Под s в выражении $u(s)$ подразумевается переменная интегрирования, соответствующая времени. Пусть $\Phi_0 \neq 0$ (в противном случае единственное решение будет тривиальным).

Теорема 2. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$.

1. Достаточным для существования решения глобально по времени является каждое из следующих двух условий: $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω и $q \geq 2r$.
2. Для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1 > 0$ (для T_1 установлена неявная формула).

В частности, если $1 < r \leq 2$, то выполняется и более грубая оценка: $T \geq T_1 \geq T_1^* > 0$ (для T_1^* установлена явная формула).

Пусть

$$\alpha = \frac{8r - 9q - 3}{9(q + 2)}, \quad h_0 = \omega_1^2 + \omega_3^2, \quad k_1 = 9r(C_2^2|a| + |b|)^2/2 + h_1 + 1,$$

$$k_2 = 3(r + 1)^2 \left(\|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2)^2 + \|\lambda\|_{l_\infty}^2 \right) + \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 \omega_2 + \omega_3^2 \omega_4)^2,$$

где h_1 равно $2\|h_0\theta + \lambda\|_{l_\infty}$ или 0, если соответственно хотя бы одна составляющая вектора $h_0\theta + \lambda$ положительна или если все его составляющие неположительны.

Теорема 3. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$; $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть, кроме того, $\alpha > 0$ и $\Phi'_0 \geq \alpha^{-1}\Phi_0\sqrt{\alpha k_1 + 2\sqrt{\alpha k_2}}$. Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

Раздел основан на исследовании, которое было опубликовано в виде тезисов [19].

В разделе 6.2 рассмотрена следующая задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b \Delta u + \mu(x) |u|^r u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \\ \quad + (\theta, \nabla) u + \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = f(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right.$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$, $a, b \in R$, $q \in [1; 4]$, $\lambda, \theta \in R^N$, $f(\cdot) \in L_2$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$.

Пусть, кроме того при $N = 2$ или $N = 3$ соответственно $(r, \mu(\cdot)) \in (1; \infty) \times L_4$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1; 2] \times L_{6/(2-r)}$. Условия, относящиеся к функции $h(\cdot)$, приведем позже. Под s в выражении $u(s)$ подразумевается переменная интегрирования, соответствующая времени.

Определение 3. Говорят, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(*)$, если $h(\cdot) \in C[0; \infty)$, причем существуют числа $\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$, $\eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty$.

Теорема 5. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$, $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(*)$. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$.

1. Достаточным для существования решения глобально по времени является каждое из следующих трех условий: $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , $q \geq 2r$ и $\Phi_0 = \|f\| = 0$.
2. По крайней мере, имеет место оценка $T \geq T_1 > 0$ (для T_1 установлена неявная формула).

Определение 4. Говорят, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(**)$, если $h(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, причем существуют числа $\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$, $\eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty$, и $\delta = \int_0^\infty |h'(t)| dt < \infty$.

Пусть

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r+1 - (r+2) \|\theta\|_{l_\infty} - r(|a| + |b|)}{2}, \\ k_2 &= r(|a| + |b|) + N(r+2) \|\theta\|_{l_\infty} + \delta + 2|h_0|, \\ k_3 &= \frac{r+1}{2} \|f\|^2, \quad \alpha = \frac{k_1}{q+2} - 1, \quad H(t) = \frac{\gamma(r+1)^2}{2} |h(t)| + |h'(t)|. \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть $N = 2$, $\lambda = (0; 0)$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $\Phi_0 > 0$. Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(^{**})$, причем существует такая функция $\omega(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, принимающая неположительные значения, что $|H(t)| \leq \omega'(t)$ при всех неотрицательных t . Пусть, кроме того, $\alpha > 0$ и

$$\alpha\Phi'_0 - \Phi_0 > \sqrt{(\alpha(k_2 + |\omega_0|) - 1)\Phi_0^2 + 2\alpha^2k_3\Phi_0/(2\alpha + 1)}.$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

Дополним список обозначений:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{r + 3 - (r + 2)(\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - r(|a| + |b|)}{2}, \\ m_2 &= r(|a| + |b|) + N(r + 2)\|\theta\|_{l_\infty}, \quad m_3 = 2NC_4^4(r + 2)\|\lambda\|_{l_\infty}, \\ m_4 &= \frac{r + 1}{2}\|f\|^2. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть теперь $\alpha = m_1/(q + 2) - 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha}, \\ p_1 &= \alpha\alpha_1m_4 + \frac{1}{2}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2(m_2 + \alpha_1m_3 + \alpha_1m_4)^2 + 2\alpha\alpha_1m_3}{2p_1}}. \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $h(t) \equiv 0$. Пусть, кроме того, $\Phi_0 > 0$, $\alpha \geq 1$ и

$$\alpha\Phi'_0 \geq (\Phi_0^{1-\alpha} + p_2^2\Phi_0^{1+\alpha}) \sqrt{\frac{2p_1}{p_2} \arctg \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{p_2}}.$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

Раздел 6.3 дополняет исследование задачи из предыдущего раздела.

Определение 5. Будем говорить, что четверка чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ удовлетворяет условиям $(\#)$, если она задана следующим образом:

1. если $\|\theta\|_{l_\infty} = \max(|a|, |b|) = 0$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (2(r+1))^{-1}(r-q)$,
2. если $\|\theta\|_{l_\infty} \neq 0$, $\max(|a|, |b|) = 0$, то $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = (3\|\theta\|_{l_\infty}(r+2))^{-1}(r-q)$,
 $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (3(r+1))^{-1}(r-q)$,

3. если $\|\theta\|_{l_\infty} = 0$, $\max(|a|, |b|) \neq 0$, то $\varepsilon_1 = (3r \max(|a|, |b|))^{-1}(r - q)$,
 $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (3(r + 1))^{-1}(r - q)$,

4. если $\|\theta\|_{l_\infty} \neq 0$, $\max(|a|, |b|) \neq 0$, то $\varepsilon_1 = (4r \max(|a|, |b|))^{-1}(r - q)$,
 $\varepsilon_2 = (4\|\theta\|_{l_\infty}(r + 2))^{-1}(r - q)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (4(r + 1))^{-1}(r - q)$.

Пусть

$$\begin{aligned} h_1 &= \max(2h_0, 0), \\ \beta_1 &= \frac{r \max(|a|, |b|)}{\varepsilon_1} + \frac{(r + 2)\|\theta\|_{l_1}}{\varepsilon_2} + 1 + h_1, \quad \beta_2 = \frac{(r + 1)\|f\|^2}{2\varepsilon_3}, \\ H(t) &= \frac{(r + 1)\gamma}{\varepsilon_4}|h(t)| + \delta|h'(t)|. \end{aligned} \quad (19)$$

Теорема 8. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, $\mu(\cdot) \in L_4$, λ — нулевой вектор. Пусть, кроме того, $\Phi_0 > 0$, $r > q$. Пусть четверка чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ удовлетворяет условиям $(\#)$, а параметры $\beta_1, \beta_2, h_1, H(\cdot)$ определяются формулами (19). Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(**)$, причем существует такая функция $\omega(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, принимающая неположительные значения, что $|H(t)| \leq \omega'(t)$ при всех неотрицательных t . Пусть

$$\Phi'_0 > \sqrt{\frac{2(q + 2)(\beta_1 + |\omega_0|)}{r - q}\Phi_0^2 + \frac{\beta_2(q + 2)}{r + 2}\Phi_0}.$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

В главе 7 методы, применявшиеся ранее к задачам с многомерной пространственной переменной, дают результаты, относящиеся к задаче, моделирующей одномерный процесс. А именно, здесь рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + au - bu^n + \mu \int_0^t \frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2} ds = f(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases}$$

Здесь $u \in R$ — функция от времени $t > 0$ и пространственной переменной $x \in \Omega = (0; l)$, $l > 0$. Пусть $a, b, \mu \in R$, $n \in N \setminus \{1\}$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $f(\cdot) \in L_2$.

Теорема 2. Имеют место следующие утверждения.

1. Достаточным для существования решения глобально по времени является каждое из двух условий: $b \geq 0$ при нечетном n и $\Phi_0 = \|f\| = 0$.
2. По крайней мере, имеет место оценка вида $T \geq T_1 \geq T_1^* > 0$ (для T_1 установлена неявная формула, для T_1^* — явная).

Теорема 3. Положим $n_1 = (n - 1)/2$. Пусть $\Phi_0 > 0$,

$$\frac{n_1}{2}\Phi'_0 > \sqrt{\left(3a^2n_1^2 + |\mu|n_1 + \sqrt{3}n|\mu|\right)\Phi_0^2 + \frac{3n^2n_1\|f\|^2}{2(n+1)}\Phi_0}.$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$ (для T_2 установлена явная формула).

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Впервые изучены асимптотики решений задач Коши для нескольких нелинейных уравнений соболевского типа. Показано, какие члены уравнения определяют качественное поведение решений.
2. Впервые исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для ряда нелинейных уравнений соболевского типа. Некоторые уравнения содержат нелинейные выражения не только в стационарной части, но и под знаком производной по времени. Кроме того, некоторые уравнения имеют нелокальные по времени члены. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных, неявных и квадратурных формул. Разрешимость исследована с помощью принципа сжимающих отображений. Требуемые оценки найдены энергетическим методом.
3. Впервые проведено аналогичное исследование и для начально-краевой задачи для одного неклассического нелинейного эволюционного уравнения, содержащего нелокальный по времени член. Важная особенность

этого уравнении состоит в том, что в нем независимая пространственная переменная имеет размерность 1. И к этой задаче удастся применить принцип сжимающих отображений и метод энергетических оценок.

В заключение автор выражает огромную благодарность члену-корреспонденту Российской академии наук, доктору физико-математических наук, профессору И. А. Шишмареву и доктору физико-математических наук, доценту М. О. Корпусову за постановку задач и высказанные замечания.

Автор глубоко благодарен члену-корреспонденту Российской академии наук, доктору физико-математических наук, профессору А. В. Ильину за постоянную поддержку в работе.

Автор благодарен кандидату физико-математических наук, старшему преподавателю М. В. Комарову за ценные советы по теме диссертации.

Публикации по теме диссертации

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК

- [1] **Аристов А. И.** О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью // Известия РАН. Серия математическая. 2011. Т. 75. №5. С. 3–18.
- [2] **Аристов А. И.** Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с кубической нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. №9. С. 1354–1358.
- [3] **Аристов А. И.** Асимптотики при больших временах решений задач Коши для некоторых соболевских уравнений (в статье «О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при МГУ им. М. В. Ломоносова») // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №8. С. 1209–1210.
- [4] **Аристов А. И.** О задаче Коши для одного нелинейного соболевского уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. №1. С. 117–120.

- [5] **Аристов А. И.** Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения с переменным коэффициентом// Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №6. С. 781–789.
- [6] **Аристов А. И.** О начально-краевой задаче для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент// Математические заметки. 2012. Т. 91. Выпуск 5. С. 643–653.
- [7] **Аристов А. И.** О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. №10. С. 1855–1865.

Публикации в других журналах

- [8] **Аристов А. И.** Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с аналитической нелинейностью// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2009. С. 17–22.
- [9] **Аристов А. И.** Исследование качественных свойств решений одного нелинейного соболевского уравнения// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2010. С. 11–22.
- [10] **Аристов А. И.** Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного уравнения соболевского типа// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2011. С. 42–53.
- [11] **Аристов А. И.** Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с двойной нелинейностью// Сборник тезисов лучших дипломных работ 2008 года. С. 42–43. М.: Макс-Пресс, 2008.
- [12] **Аристов А. И.** О существовании и разрушении решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения соболевского типа с переменным коэффициентом// Сборник тезисов XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 12. М.: Макс-Пресс, 2009.
- [13] **Аристов А. И.** О задаче Коши для нелинейного уравнения соболевско-

го типа с переменным коэффициентом// Сборник тезисов XVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 40–41. М.: Макс-Пресс, 2010.

[14] **Аристов А. И.** Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения// Научная конференция «Тихоновские чтения», 25–29 октября 2010 г. С. 27–28. М.: Макс-Пресс, 2010.

[15] **Аристов А. И.** О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа// Сборник тезисов XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 28–29. М.: Макс-Пресс, 2011.

[16] **Аристов А. И., Шишмарев И. А.** О начально-краевой задаче для одного нелинейного нелокального по времени уравнения соболевского типа// Научная конференция «Ломоносовские чтения», 14–23 ноября 2011 г. С. 73–74. М.: Макс-Пресс, 2011.

[17] **Аристов А. И.** Об одном нелинейном неоднородном соболевском уравнении// Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 72–73. М.: Макс-Пресс, 2012.

[18] **Аристов А. И.** Об одном нелинейном соболевском уравнении// Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 126–127. М.: Макс-Пресс, 2013.

[19] **Аристов А. И.** Об одном нелинейном волновом уравнении соболевского типа// Научная конференция «Тихоновские чтения», 29–31 октября 2012 г. С. 15–16. М.: Макс-Пресс, 2012.

Научное издание

Аристов Анатолий Игоревич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Исследование качественных свойств решений некоторых нелинейных
уравнений соболевского типа

Подписано в печать 25.01.2011. Формат 60 × 90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1, <http://www.naukaspb.spb.ru>