МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.
ЛОМОНОСОВА, ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Аристов Анатолий Игоревич

**Исследование качественных свойств решений
некоторых нелинейных уравнений соболевского
типа**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф., чл.-корр. РАН
Ильин Александр Владимирович

Москва – 2014

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	11
Глава 1. О математических моделях, приводящих к уравнениям соболевского типа	17
1.1. Предварительные рассмотрения	17
1.2. Вывод уравнений	21
1.3. Модели с одномерной независимой пространственной переменной	26
1.4. Другие модели	27
1.5. Выводы к главе	27
Глава 2. Задачи Коши для уравнений с кубической нелинейно- стью и с квадратичной нелинейностью	29
2.1. Задача с квадратичной нелинейностью	32
2.2. Задача с кубической нелинейностью	49
2.3. Пример нетривиальных начальных данных	53
2.4. Выводы к главе	55
Глава 3. Задачи Коши для уравнений, где коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане равны	57
3.1. Основные утверждения	59
3.2. Выводы к главе	63
Глава 4. Начально-краевые задачи для уравнений с линейным выражением под знаком производной по времени	64
4.1. Модельная задача	68
4.2. Уравнение общего вида	76

4.3.	Уравнение, имеющее равные положительные коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане	88
4.4.	Уравнение, имеющее нулевые коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане	97
4.5.	Выводы к главе	107
Глава 5. Начально-краевые задачи для уравнений с нелинейным выражением под знаком производной по времени		
5.1.	Модельная задача	112
5.2.	Однородное уравнение с двумя нелинейностями	119
5.3.	Однородное уравнение с двумя нелинейностями (дополнение)	128
5.4.	Неоднородное уравнение с двумя нелинейностями	131
5.5.	Неоднородное уравнение с двумя нелинейностями (дополнение)	143
5.6.	Выводы к главе	145
Глава 6. Начально-краевые задачи для уравнений с нелокальными членами по времени членами		
6.1.	Однородное нелокальное уравнение волн	149
6.2.	Неоднородное нелокальное уравнение волн	168
6.3.	Неоднородное нелокальное уравнение волн (дополнение)	184
6.4.	Выводы к главе	189
Глава 7. О начально-краевой задаче для одного неклассического интегродифференциального уравнения		
7.1.	Основные утверждения	192
7.2.	Выводы к главе	199
Заключение		200
Список литературы		202

Введение

Актуальность темы исследования. Теория соболевских уравнений относительно молодая, и здесь много нерешенных вопросов.

Значительный интерес к уравнениям соболевского типа наблюдается с середины XX века. Одной из первых работ на эту тему является статья С. Л. Соболева [69]. Там было выведено уравнение малых колебаний во вращающейся жидкости

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Для него были исследованы разные задачи, в частности, было построено в явном виде решение задачи Коши.

В последние десятилетия было опубликовано множество работ, посвященных асимптотическим представлениям при больших временах решений нелинейных эволюционных уравнений (и соболевских, и классических). Отметим, что важные результаты в этой области установили И. А. Шишмарев, П. И. Наумкин, Е. И. Кайкина, М. В. Комаров, В. В. Конотоп, М. Цуцуми, С. J. Amick, J. L. Bona, M. E. Schonbek, D. B. Dix, M. Escobedo, N. Hayashi, K. Mochizuki.

Сложность исследования асимптотик связана с тем, что для него требуется не только глобальная по времени разрешимость, но и наличие некоторых априорных оценок разности между решением и приближенным решением. Кроме того, техника обобщенных решений не может применяться — здесь надо изучать классические и «полуклассические» («semiclassical») решения, т. е. те, которые находятся в лебеговых пространствах по пространственным переменным и являются гладкими по времени.

В книге [23] дано систематическое изложение асимптотической теории задач Коши для эволюционных уравнений, относящихся к некоторому обширному классу. Рассмотрены случаи малых и немалых начальных данных. Сделана следующая классификация асимптотик:

1. «субкритический» случай: нелинейность существенным образом влияет на асимптотику;
2. «суперкритический» случай: главный член асимптотики определяется линейными членами уравнения;
3. «критический» случай: линейные и нелинейные члены уравнения «уравновешиваются», т. е. и те, и другие делают вклад в главный член асимптотики.

Другой важный класс задач, относящихся к нелинейным эволюционным уравнениям, составляют задачи, где требуется исследовать локальную и глобальную по времени разрешимость, разрушение и опрокидывание решений. Поясним, что под разрушением подразумевается существование решения локально по времени, но не глобально, а под опрокидыванием — частный случай разрушения, когда для решения уравнения $u(x, t)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\| = \infty,$$

где T — конечное число, $\|\cdot\|$ — некоторая норма по пространственным переменным. По этой тематике тоже опубликовано множество работ. Здесь важные результаты получили М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, Ю. Д. Плетнер, Е. В. Юшков, Х. А. Левин, А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, С. И. Похожаев, С. А. Габов, Э. Л. Митидиери, Н. Fujita.

Отметим, что имеется три наиболее распространенных метода исследования разрушения решений:

1. энергетический метод Х. А. Левина;
2. метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери;
3. метод автомодельных решений А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова.

Существуют и другие методы, но обычно они основаны на специфике конкретной задачи.

В исследованиях задач данного класса широко используются обобщенные решения и методы теории пространств Соболева. Эти методы оказались весьма плодотворными: многие важные оценки удается найти с помощью идей функционального анализа и, в частности, с помощью теорем вложения.

Актуальность работы обусловлена следующими причинами. Исследование разрушения решения помогает определить границы применимости модели, сводящейся к уравнению. А именно, применение модели корректно на определенном временном промежутке — до разрушения. Кроме того, неограниченный рост решения может иметь непосредственную физическую интерпретацию, например, пробой полупроводника или переход от ламинарного течения к турбулентному. Если же речь идет об асимптотике при больших временах, то асимптотические методы — одно из наиболее эффективных средств, позволяющих изучать качественное поведение решений и выявлять такие важные их особенности, как характер возрастания или убывания, осцилляции. Подобные результаты затруднительно получить с помощью численного анализа — поэтому асимптотические методы играют важную роль.

В данной работе сделана попытка продолжить исследования И. А. Шишмарева и М. О. Корпусова. Здесь исследован ряд задач Коши и начально-краевых задач для нелинейных уравнений соболевского типа. Получены теоремы, устанавливающие при соответствующих условиях и асимптотические представления решений при больших временах, и достаточные условия для локального по времени существования решений (с оценками времени существования). Подчеркнем, что подобные результаты затруднительно получить с помощью численных методов, поэтому важно устанавливать их аналитически.

Цели и задачи диссертационной работы.

1. Изучение ряда задач Коши для нелинейных соболевских уравнений. Уста-

новление асимптотических представлений решений при больших временах.

2. Исследование начально-краевых задач для нескольких нелинейных соболевских уравнений, в которых дифференцирование по времени применяется к линейному выражению от неизвестной функции. Установление достаточных условий для глобальной и для локальной по времени разрешимости. Вывод двусторонних оценок времени существования решения для случая, когда оно существует только локально.
3. Аналогичное исследование нескольких уравнений, в которых дифференцирование по времени применяется к нелинейному выражению от неизвестной функции.
4. Аналогичное исследование нескольких уравнений, содержащих нелокальные по времени члены и нелинейные выражения под знаком производной по времени.
5. Аналогичное исследование нелокального по времени уравнения, где независимая пространственная переменная имеет размерность 1.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи.

1. Доказательство однозначной разрешимости задач с помощью принципа сжимающих отображений.
2. В тех разделах, где целью был вывод асимптотических формул, — применение оценок, основанных на преобразовании Фурье.
3. В тех разделах, где целью было исследование времени существования решений, — применение энергетических оценок.

Научная новизна. В работе изучались задачи, постановки которых основаны на моделировании процессов в полупроводниковых средах. Отметим, что

некоторые из них могут использоваться и для моделирования гидродинамических процессов. Рассмотрены задачи как в ограниченных, так и в неограниченных областях. Новые результаты состоят в следующем.

1. Впервые исследованы задачи Коши для некоторых нелинейных соболевских уравнений. Построены асимптотики их решений при больших временах.
2. Впервые исследованы начально-краевые задачи для ряда нелинейных соболевских уравнений, в частности, нелокальных по времени. Установлены достаточные условия для их глобальной и локальной по времени разрешимости. Для случая только локальной разрешимости построены верхние и нижние оценки времени существования решения в виде явных, неявных и квадратурных формул.

Таким образом, работа вносит вклад в понимание качественного поведения решений задач, возникающих при моделировании некоторых нелинейных процессов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, однако ее результаты можно использовать для моделирования нестационарных процессов в полупроводниках.

Положения, выносимые на защиту.

1. Впервые исследованы задачи Коши для ряда нелинейных уравнений соболевского типа. Для их решений установлены асимптотические представления при больших временах, что весьма полезно для понимания их качественного поведения.
2. Рассмотрены начально-краевые задачи для ряда нелинейных уравнений соболевского типа, в частности, нелокальных по времени. Установлены достаточные условия для глобальной и для локальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости построены верхние и

нижние оценки времени существования решения. Во-первых, эти результаты важны для понимания качественного поведения решений уравнений. Во-вторых, они дают представление о границах применимости моделей. В-третьих, они могут иметь и непосредственную физическую интерпретацию (например, пробой полупроводника).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на

1. научном семинаре профессора И. А. Шишмарева по нелинейным дифференциальным уравнениям;
2. научном семинаре академика С. В. Емельянова и С. К. Коровина по проблемам нелинейной динамики и управления при МГУ им. М. В. Ломоносова;
3. международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009», «Ломоносов-2010», «Ломоносов-2011», «Ломоносов-2012», «Ломоносов-2013»;
4. научных конференциях «Ломоносовские чтения» в 2011 г. (в соавторстве с И. А. Шишмаревым) и «Ломоносовские чтения» в 2013 г. (в соавторстве с А. В. Ильиным);
5. научных конференциях «Тихоновские чтения» в 2010, 2012 и 2013 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 19 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых журналах [90–93, 97–99], 8 статей в сборниках трудов конференций и 1 публикация тезисов доклада.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводи-

лась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 7 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 213 страниц, из них 213 страниц текста. Библиография включает 108 наименований на 12 страницах.

Обзор литературы

Значительный интерес к уравнениям соболевского типа, т. е. к уравнениям, не являющимся уравнениями типа Коши-Ковалевской, наблюдается с середины XX века. Одной из первых работ по этой тематике является работа С. Л. Соболева [69], где было выведено и исследовано уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

описывающее малые колебания во вращающейся жидкости. Для этого уравнения были рассмотрены разные задачи, в частности, решение задачи Коши было построено явно.

В книге [23] дано систематическое изложение результатов, относящихся к асимптотикам при больших временах решений нелинейных диссипативных уравнений — как классических, так и соболевских. Сделана классификация асимптотик, основанная на влиянии нелинейностей на качественное поведение решений. В частности, рассмотрена задача Коши для соболевского уравнения со степенной нелинейностью. Для нее исследована локальная и глобальная по времени разрешимость, выведена асимптотическая формула для малых и немалых начальных данных.

В [82] и [36] построены асимптотические формулы для решений задачи Коши для обобщенных уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП). В [70] рассмотрена задача Коши для соболевского уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \alpha \Delta u + \beta u^3 = 0,$$

выведена асимптотическая формула при $t \rightarrow \infty$. В [82] и [70] исследованы уравнения с кубическими нелинейностями, при этом были наложены ограничения снизу на размерность N независимой пространственной переменной. В [36] рассматривается нелинейность в виде многочлена, в частности, квадратичная, но только при $N = 1$.

В книге [2] изучались вопросы глобальной по времени разрешимости начально-краевых задач для уравнений, описывающих поведение стратифицированных жидкостей (в частности, вращающихся). Задачи сводились к интегральным уравнениям с помощью так называемых динамических потенциалов. Этот метод помогает как изучать асимптотическое поведение решений, так и проводить численный анализ. Интересно отметить, что было открыто явление квазифронта: в несжимаемой стратифицированной среде, где возмущения должны распространяться мгновенно, при наличии точечного мгновенного источника распространяется волновой фронт, имеющий конечную скорость. В случае только вращающейся жидкости этот эффект не возникает.

В работе [68] впервые с помощью преобразования Фурье было получено фундаментальное решение оператора внутренних гравитационных волн, т. е. изучалось уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \beta^2 u \right) + \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

(β — параметр стратификации, ω_0 — частота Вейселя-Брента).

Работы Ю. Д. Плетнера обнаружили тесную связь между соболевскими уравнениями и эллиптическими уравнениями, т. е. свойства решений соболевского уравнения по пространственным переменным близки к свойствам решений связанного с ним эллиптического уравнения. Эта связь оказалась весьма плодотворной при изучении начально-краевых задач для двумерных уравнений внутренних гравитационных и ионно-звуковых волн в случае областей с негладкой границей. В частности, в работе [60] были предложены уравнения соболевского типа до восьмого порядка, связанные с теорией плазмы и теорией спиновых волн во внешнем магнитном поле.

В статье [26] было получено уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u + cu) + \Delta u = 0, \quad c \neq 0.$$

Это уравнение описывает процесс фильтрации в трещиновато-пористой среде.

Разнообразные уравнения (в основном, соболевские) были получены и исследованы в работах М. О. Корпусова, А. Г. Свешникова и Ю. Д. Плетнера [37–62].

В статье Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова [67] сингулярные соболевские уравнения были исследованы с помощью полугруппового подхода.

Книга Г. В. Демиденко и С. В. Успенского [3] посвящена уравнениям и системам, не разрешенным относительно старшей производной. Рассмотрены задачи Коши и смешанные задачи, получены результаты, связанные с однозначной разрешимостью в лебеговых пространствах.

В исследованиях R. E. Showalter [85–89] классический метод монотонности применялся к разным классам задач математической физики, в частности, к задачам для соболевских уравнений с монотонными нелинейностями.

Некоторые исследования посвящены и задачам оптимального управления для соболевских уравнений: отметим работы С. И. Ляшко [15, 63].

В статье Д. А. Номировского [65] исследованы вопросы обобщенной разрешимости для соболевских уравнений высокого порядка (до восьмого).

В статьях А. И. Кожанова [6, 33–35] рассматривалось нелинейное уравнение

$$u_t - \Delta\psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0.$$

Была исследована глобальная по времени разрешимость. Кроме того, с помощью принципа сравнения показано, что при некоторых условиях положительное решение разрушается.

В статье А. Л. Гладкова [31] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для уравнения

$$u_t = c\Delta u_t + \varphi(u),$$

где $\varphi(\cdot)$ — растущая функция, а u находится в некотором классе корректности.

В классической работе Фуджиты [72] рассматривалось полулинейное параболическое уравнение. Помимо доказательства разрушения, впервые был по-

лучен оптимальный результат типа теоремы существования-несуществования ограниченного классического решения. Кроме того, с помощью свойств фундаментального оператора теплопроводности получен оптимальный результат о разрушении положительного решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^{1+\alpha}.$$

Отметим классические работы Н. А. Levine и соавторов, посвященные проблемам глобальной и локальной разрешимости. В частности, в них рассматривалась абстрактная задача Коши

$$A \frac{du}{dt} + Lu = F(u), \quad u(0) = u_0,$$

где A и L — линейные, самосопряженные и положительно определенные операторы, а F имеет симметричную производную Фреше. С помощью энергетических оценок было исследовано глобальное несуществование сильных и слабых решений задачи. Назовем статьи [73–81]

Отметим, что в уже упоминавшихся работах М. О. Корпусова и соавторов сделано значительное развитие техники Н. А. Levine в следующих направлениях:

- Рассматриваются не только линейные, но и нелинейные операторы A и L .
- Выводятся не только верхние, но и нижние оценки времени существования решений.
- В случае линейного оператора A выводятся оптимальные двусторонние оценки не только времени, но и скорости разрушения.

Кроме того, рассматриваются волновые уравнения, для которых непосредственное применение техники Н. А. Levine невозможно.

В статье Н. Amann, М. Fila [71] предложена новая задача, для нее получен оптимальный результат типа Фуджиты.

Разнообразные результаты из области неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений получены в книге А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова, А. П. Михайлова [17]. Были использованы, например, признаки сравнения и метод неограниченных коэффициентов Фурье. К этой же области относятся труды В. А. Галактионова [27, 29, 30].

В монографии С. И. Похожаева и Э. Митидиери [64] развит метод исследования разрушения решений эллиптических, параболических и гиперболических дифференциальных неравенств. А именно, неравенства этих типов изучаются по одной схеме с помощью так называемой нелинейной емкости.

В монографии Н. Н. Калиткина, А. Б. Альшина, Е. А. Альшиной и Б. В. Рогова [5] рассматривались вопросы численного анализа. Был предложен так называемый метод квазиравномерных сеток для численного решения начально-краевых задач. При этом исследовались и задачи в неограниченных областях.

В работе В. К. Калантарова и О. А. Ладыженской [32] впервые для анализа задач стали рассматриваться неравенства вида

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + C_1\Phi\Phi' + C_2\Phi^2 \geq 0, \quad C_{1,2} \geq 0, \quad \alpha > 0.$$

На его основе делались выводы о разрыве второго рода у функции $\Phi(\cdot)$. Отметим, что во многих работах М. О. Корпусова неравенства такого вида позволяют получить достаточные условия разрушения решений соболевских уравнений.

Книга А. Г. Свешникова, А. Б. Альшина, М. О. Корпусова и Ю. Д. Плетнера [19] посвящена вопросам существования-несуществования решений задач для разнообразных линейных и нелинейных уравнений соболевского типа. При этом изучались как обобщенные, так и классические решения. Кроме того, уделено внимание выводу модельных уравнений и численному анализу.

Книга [10] посвящена вопросам существования-несуществования решений нелинейных соболевских уравнений и систем, где содержатся нелокальные по времени выражения от неизвестных функций. Рассмотрены как диссипативные, так и волновые уравнения.

В книге [12] были рассмотрены классические и неклассические уравнения. Разрушение решений устанавливалось с помощью развитого автором модифицированного метода энергетических оценок.

В книге [11] установлены достаточные условия разрушения решений как классических уравнений и систем, так и неклассических волновых уравнений, возникающих в теории поля. Рассмотрены как малые, так и большие положительные значения начальных энергий.

В книгах [13, 14, 18] изложены обширные результаты и методы, относящиеся к нелинейному функциональному анализу и его применению к изучению уравнений в частных производных.

Отметим и книги [1, 4, 7, 8, 20–22], оказавшиеся полезными при подготовке данной работы. Они посвящены общим вопросам математического анализа и дифференциальных уравнений.

Глава 1

О математических моделях, приводящих к уравнениям соболевского типа

1.1. Предварительные рассмотрения

Опираясь на книгу [10], дадим обзор математических моделей, приводящих к нелинейным уравнениям соболевского типа.

Будем рассматривать полупроводниковую среду. Введем следующие обозначения:

1. $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля;
2. $\mathbf{D}$ — вектор индукции электрического поля;
3. $\mathbf{P}$ — вектор поляризации среды;
4. $\mathbf{J}$ — вектор плотности тока.

Для описания нестационарных процессов, процессов, происходящих в полупроводниках, нужны уравнения квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальные уравнения.

Заряды в теории электричества делятся на свободные (те, которые могут перемещаться на макроскопические расстояния) и связанные (те, которые не могут перемещаться на макроскопические расстояния). Среды делятся на проводники (в них все заряды свободные), диэлектрики (в них все заряды связанные) и полупроводники (в них есть и свободные, и связанные заряды). В дальнейшем будем изучать полупроводниковые среды.

Прежде всего, рассмотрим уравнения квазистационарного электрического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q. \quad (1.1)$$

Здесь n — концентрация свободных зарядов, Q — распределение источников или стоков свободных зарядов.

Кроме того, имеет место равенство

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (1.2)$$

Распределение плотности связанных зарядов в полупроводнике определяется величиной

$$\rho = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

В моделях предполагаемая связь между плотностью связанных зарядов и напряженностью электрического поля обычно передается одним из двух способов: с помощью соотношения между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ (например, $\mathbf{P} = \kappa|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$, $\kappa > 0$) или с помощью явного выражения ρ через потенциал φ поля $\mathbf{E}$ (например, $\rho = |\varphi|^q\varphi$, $q \geq 0$).

Плотность тока свободных зарядов может зависеть как локально (например, $\mathbf{J} = \sigma(|\mathbf{E}|)\mathbf{E}$, где $\sigma(\cdot)$ — коэффициент проводимости среды), так и нелокально:

$$\mathbf{J}(x, t) = \int_0^t \sigma(t-s)\mathbf{E}(x, s)ds, \quad \sigma(\cdot) \in C[0; \infty).$$

Распределение источников или стоков Q будем выражать через потенциал электрического поля:

$$Q = c_1|\varphi|^r\varphi + c_2\varphi. \quad (1.3)$$

Очевидно, эта функция, вообще говоря, нелинейна, но при $c_1 = 0$ переходит в линейную. Интересно проследить, к каким эффектам приводит наличие или отсутствие нелинейности в этом выражении.

В физических моделях рассматриваются следующие два механизма возникновения пробоя в полупроводниках.

1. Пробой, вызванный источниками свободных зарядов, распределенных в соответствии с (1.3).
2. Пробой, вызванный отрицательной дифференциальной проводимостью среды: $\mathbf{J} = \sigma(|\mathbf{E}|)\mathbf{E}$, $\sigma < 0$ на $(0; \infty)$.

Рассмотрим зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$. С учетом формулы (1.2) нам надо выразить $\mathbf{P}$ через $\mathbf{E}$. Помимо так называемой керровской зависимости, т. е. уже приведенной формулы $\mathbf{P} = \kappa|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$ ($\kappa > 0$), зависимость может учитывать пространственную дисперсию среды. Это можно сделать с помощью следующих «физических» соображений. В данном случае связь является операторной:

$$\mathbf{P} = \hat{\kappa}\mathbf{E}, \quad (1.4)$$

где оператор $\hat{\kappa}(\cdot)$, вообще говоря, нелокален:

$$\hat{\kappa}f(x) = \int_{R^3} \bar{\kappa}(x-y)f(y)dy.$$

Формально применим преобразование Фурье к (1.4):

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \kappa(k)\hat{\mathbf{E}}(k), \quad (1.5)$$

где $k \in R^3$ — волновой вектор, соответствующий преобразованию Фурье. Пусть $\kappa(k) \in C^\infty(R^3)$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора:

$$\kappa(k) = \sum_{1 \leq \alpha_1 \leq n_1, 1 \leq \alpha_2 \leq n_2, 1 \leq \alpha_3 \leq n_3} c_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3} + o(k_1^{n_1} k_2^{n_2} k_3^{n_3}).$$

Возьмем «укороченное» разложение

$$\kappa(k) \equiv \sum_{1 \leq \alpha_1 \leq n_1, 1 \leq \alpha_2 \leq n_2, 1 \leq \alpha_3 \leq n_3} c_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3}$$

и подставим его в (1.5) вместо $k(\kappa)$, а затем формально применим обратное преобразование Фурье:

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{1 \leq \alpha_1 \leq n_1, 1 \leq \alpha_2 \leq n_2, 1 \leq \alpha_3 \leq n_3} c_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \left(i \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{\alpha_3} \mathbf{E}(x). \quad (1.6)$$

Таким образом, мы пришли к модельной связи между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$.

Во многих трудах рассматривается модельная укороченная функция

$$\kappa(k) = \kappa_0 |k|^2 \equiv \kappa_0 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2), \quad \kappa_0 > 0.$$

Ему соответствует выражение

$$\mathbf{P}(x) = -\kappa_0 \Delta \mathbf{E}(x). \quad (1.7)$$

Формально выражение (1.6) верно не только в случае, когда x изменяется во всем пространстве R^3 , но и в случае, когда x находится в некотором множестве $\Omega \subset R^3$. Поэтому будем говорить о пространственной дисперсии и в случае, когда $x \in \Omega \subset R^3$, имея в виду формальное соотношение (1.6).

Рассмотрим теперь влияние внешнего электрического поля на процессы в полупроводнике. Если $\mathbf{E}_0$ — внешнее постоянное электрическое поле, то под его действием возникает ток свободных зарядов $\mathbf{J}_0$, направление которого противоположно направлению $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{J}_0 = n_0(\varphi) \mathbf{E}_0,$$

$n_0(\varphi)$ — «квазистационарное» распределение плотности свободных зарядов.

При наличии постоянного внешнего электрического поля в (1.1) надо внести поправку:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_0) + Q.$$

В следующем разделе будем выводить модельные уравнения на основе перечисленных факторов, учитывая их в виде суперпозиции:

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k, \quad \mathbf{P} = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}_k,$$

где каждое слагаемое выражает свой эффект в полупроводнике.

Поясним смысл граничных условий. Их вид, обеспечивающий корректную постановку задачи, может зависеть от наличия пространственной дисперсии.

При изучении начально-краевых задач будем считать, что граница полупроводниковой среды является заземленной и идеально проводящей, а поэтому

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Кроме того, как уже отмечалось, будем исследовать не только начально-краевые задачи, но и задачи Коши.

1.2. Вывод уравнений

Возьмем модельное распределение связанных зарядов

$$\rho = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P} = \varphi. \quad (1.8)$$

Пусть однородное электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = (E_1, E_2, E_3).$$

Пусть в среде имеются источники (или стоки) $Q = Q(\varphi)$. Уравнения общей системы имеют следующий вид:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (1.12)$$

Кроме того, учтем токи свободных зарядов, связанные с электрическими полями

$$\mathbf{J}_0 = n_0(\varphi)\mathbf{E}_0 \quad (1.13)$$

и

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_1\mathbf{E}, \quad (1.14)$$

пока пренебрегая нелокальными эффектами. Возьмем модельное соотношение $n_0 = a_1 \varphi^k$, $k \in N$.

Перейдем в (1.12) и (1.14) от $\mathbf{E}$ к φ с помощью (1.9). Затем подставим $\mathbf{D}$ из (1.12) в (1.10). Кроме того, воспользуемся (1.8). Таким образом,

$$\operatorname{div} \nabla \varphi - \varphi = 4\pi n.$$

Выразим отсюда n и подставим в (1.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi - \frac{1}{4\pi} \varphi \right) = \\ = \sigma_0 a_1 E_1 \frac{\partial (\varphi^k)}{\partial x_1} + \sigma_0 a_1 E_2 \frac{\partial (\varphi^k)}{\partial x_2} + \sigma_0 a_1 E_3 \frac{\partial (\varphi^k)}{\partial x_3} - \sigma_1 \Delta \varphi + Q. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Положим $\lambda = (-4\pi\sigma_0 a_1 E_1, -4\pi\sigma_0 a_1 E_2, -4\pi\sigma_0 a_1 E_3)$, $b = 4\pi\sigma_1$. Рассмотрим несколько модельных функций источников.

1. Если $Q = (4\pi)^{-1}(a\varphi - \mu\varphi^2)$, $k = 2$, то (1.15) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - \varphi) + b\Delta \varphi - a\varphi + (\lambda, \nabla)\varphi^2 + \mu\varphi^2 = 0.$$

Это уравнение будет изучаться в разделе 2.1.

2. Если $Q = (4\pi)^{-1}(a\varphi - \mu\varphi^3)$, $k = 3$, то (1.15) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - \varphi) + b\Delta \varphi - a\varphi + (\lambda, \nabla)\varphi^3 + \mu\varphi^3 = 0.$$

Это уравнение будет изучаться в разделе 2.2.

3. Если $Q = (4\pi)^{-1}(a\varphi - \mu(x, t)|\varphi|^r \varphi)$ (т. е. источники или стоки могут меняться с течением времени), $k = 2$, то (1.15) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - \varphi) + b\Delta \varphi - a\varphi + (\lambda, \nabla)\varphi^2 + \mu(x, t)|\varphi|^r \varphi = 0.$$

Это уравнение будет изучаться в разделе 4.2.

Перейдем к выводу уравнений с нелинейностями под знаком производной по времени.

Пусть модельное распределение связанных зарядов имеет более сложный вид:

$$\rho = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P} = \varphi + |\varphi|^q \varphi. \quad (1.16)$$

Перейдем в (1.12) и (1.14) от $\mathbf{E}$ к φ с помощью (1.9), считая, что $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1$, т. е. пока будем пренебрегать однородным электрическим полем $\mathbf{E}_0$ и соответствующими токами свободных зарядов. С учетом (1.16) получим:

$$\operatorname{div} \nabla \varphi - \varphi - |\varphi|^q \varphi = 4\pi n.$$

Выразим отсюда n и подставим в (1.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi - \frac{1}{4\pi} \varphi - \frac{1}{4\pi} |\varphi|^q \varphi \right) = -\sigma_1 \Delta \varphi + Q. \quad (1.17)$$

Обозначим $b = 4\pi\sigma_1$. Возьмем модельную функцию источников и стоков $Q = (4\pi)^{-1}(a\varphi - \mu(x, t)|\varphi|^r \varphi)$. Тогда (1.17) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - \varphi - |\varphi|^q \varphi) + b\Delta \varphi - a\varphi + \mu(x, t)|\varphi|^r \varphi = 0.$$

Это уравнение будет изучаться в разделах 5.2 и 5.3.

Рассмотрим теперь модифицированное уравнение (1.11):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q + F, \quad (1.18)$$

где F — известная функция от x и t , характеризующая стационарное распределение зарядов. Будем при этом считать величину $\operatorname{div} \mathbf{J}$ малой. Рассуждая так же, как при выводе уравнения (1.17), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi - \frac{1}{4\pi} \varphi - \frac{1}{4\pi} |\varphi|^q \varphi \right) = Q + F. \quad (1.19)$$

Пусть теперь $Q = -(4\pi)^{-1}\mu(x)|\varphi|^r \varphi$, $F = -(4\pi)^{-1}f(x, t)$. Тогда (1.19) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - \varphi - |\varphi|^q \varphi) + \mu(x)|\varphi|^r \varphi + f(x, t) = 0.$$

Это уравнение будет изучаться в разделах 5.4 и 5.5.

Перейдем к выводу нелокальных по времени уравнений. Учтем еще один фактор, влияющий на величину тока свободных зарядов:

$$\mathbf{J}_2 = \sigma_2 \int_0^t h(t-s) \mathbf{E}(s) ds, \quad (1.20)$$

где $h(\cdot)$ — достаточно гладкая функция, характеризующая временную дисперсию (s в выражении $\mathbf{E}(s)$ — переменная интегрирования, соответствующая времени).

Пусть, как и в предыдущих моделях, выполняется соотношение (1.16), откуда

$$n = \frac{1}{4\pi} (\Delta\varphi - \varphi - |\varphi|^q \varphi). \quad (1.21)$$

Учитывая формулы (1.13), (1.14) и (1.20), получим, что, во-первых,

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_0 = a_1 (\mathbf{E}_0, \nabla) \varphi + a_2 (\mathbf{E}_0, \nabla) \varphi^2, \quad (1.22)$$

во-вторых,

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_1 = -\sigma_1 \Delta\varphi, \quad (1.23)$$

в-третьих,

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_2 = -\sigma_2 \int_0^t h(t-s) \Delta\varphi(s) ds. \quad (1.24)$$

Еще раз обратимся к формуле (1.18). Учитывая соотношения (1.21), (1.22), (1.23), (1.24), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - \varphi - |\varphi|^q \varphi) = \\ & = a_1 (\mathbf{E}_0, \nabla) \varphi + a_2 (\mathbf{E}_0, \nabla) \varphi^2 - \sigma_1 \Delta\varphi - \sigma_2 \int_0^t h(t-s) \Delta\varphi(s) ds + Q + F. \end{aligned}$$

Положим $\theta = -4\pi a_1 \mathbf{E}_0$, $\lambda = -4\pi a_2 \mathbf{E}_0$, $b = 4\pi \sigma_1$, $f(x) = 4\pi F(x)$. Кроме того, примем выражение $4\pi \sigma_2 h(\cdot)$ за новую функцию $h(\cdot)$, а в качестве функции

источников и стоков возьмем $Q = (4\pi)^{-1}(a\varphi - \mu(x)|\varphi|^r\varphi)$. Таким образом, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - \varphi - |\varphi|^q\varphi) + b\Delta\varphi - a\varphi + \mu(x)|\varphi|^r\varphi + \\ & + (\lambda, \nabla)\varphi^2 + (\theta, \nabla)\varphi + \int_0^t h(t-s)\Delta\varphi(s)ds = f(x). \end{aligned}$$

Это уравнение будет изучаться в разделах 6.2 и 6.3.

Обсудим еще одну модель, сводящуюся к соболевскому уравнению. В [10, гл. 6, §6] рассматривались волновые процессы в плазме. Были сделаны следующие предположения.

1. Пусть, как и раньше, выполняются соотношения (1.9), (1.10), (1.11), (1.12).
2. Пусть ток свободных зарядов имеет одну составляющую вида (1.14).
3. Пусть функция источников и стоков имеет вид $Q(\varphi) = |\varphi|^r\varphi$.
4. Пусть поляризация определяется двумя факторами: временной дисперсией и распределением связанных зарядов: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Здесь

$$\mathbf{P}_1 = \hat{P}(\mathbf{E}),$$

где $\hat{P}(\cdot)$ — сверточный по времени оператор, характеризующий временную дисперсию, а $\mathbf{P}_2$ учитывает распределение связанных зарядов, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_2 = -n_0|\varphi|^q\varphi.$$

На основе этих предположений с учетом специального вида оператора $\hat{P}(\cdot)$ было выведено уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - |\varphi|^q\varphi) + \int_0^t (\omega_1^2 \cos \omega_2(t-s) + \omega_3^2 \cos \omega_4(t-s))\Delta_2\varphi(s)ds + \\ & + \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} ds + \Delta\varphi + |\varphi|^r\varphi = 0, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где Δ_2 — сумма вторых производных по x_1 и по x_2 , s — переменная интегрирования, соответствующая времени. Мы же рассмотрим уравнение, обобщающее (1.25):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - |\varphi|^q\varphi) + b\Delta\varphi - a\varphi + \mu(x)|\varphi|^r\varphi + \int_0^t (\lambda, \Delta)\varphi(s)ds + \\ & + \int_0^t (\omega_1^2 \cos \omega_2(t-s) + \omega_3^2 \cos \omega_4(t-s))(\theta, \Delta)\varphi(s)ds = 0, \end{aligned}$$

где (λ, Δ) и (θ, Δ) — «лапласианы с весами», т. е. линейные комбинации вторых производных по пространственным переменным. Этому уравнению соответствует более сложная функция источников и стоков: $Q(\varphi)$, имеющая линейное и нелинейное по φ слагаемые. Уравнение будет изучаться в разделе 6.1.

1.3. Модели с одномерной независимой пространственной переменной

Особого внимания заслуживают и модели, сводящиеся к уравнениям с одномерной независимой пространственной переменной.

В [16] и [66] обсуждались следующие модельные уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u - u^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.26)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.27)$$

Они могут описывать взрывную неустойчивость в автоколебательных системах, в частности, в распределенной системе на основе туннельного диода. В [10, с. 296 и 316–322] были получены логически строгие результаты, относящиеся к начально-краевым задачам для (1.26) и (1.27). Было показано, что при некоторых условиях в системах, описываемых этими уравнениями, происходит электрический пробой.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial}{\partial t} (au - bu^n) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Формально проинтегрируем его по времени от 0 до t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + au - bu^n + \mu \int_0^t \frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2} ds = f(x). \quad (1.28)$$

Будем рассматривать «постоянную интегрирования» $f(x)$ общего вида, не предполагая ее тривиальности, как было сделано в [10].

В главе 7 будем изучать начально-краевую задачу для уравнения (1.28). Таким образом, в данной работе получают развитие идеи, использовавшиеся в [10]. А именно, здесь исследуется уравнение, обобщающее (1.26). При этом нам удалось отказаться от некоторых упрощающих предположений, оценить время существования решения не только сверху, но и снизу, а также установить достаточные условия глобальной по времени разрешимости.

1.4. Другие модели

Отметим, что сфера применения соболевских уравнений не ограничивается моделированием электрических и магнитных явлений.

В [70] была установлена асимптотика решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \alpha \Delta u + \beta u^3 = 0.$$

Оно представляет собой обобщение уравнения Буссинеска и может использоваться для описания фильтрации жидкости в пористой среде с трещинами [33, 35] или в теории кристаллических полупроводников [50].

1.5. Выводы к главе

В данной главе рассмотрен ряд моделей физических явлений, сводящихся к нелинейным уравнениям соболевского типа. Составлены уравнения, которые

будут изучаться в следующих главах.

Глава 2

Задачи Коши для уравнений с кубической нелинейностью и с квадратичной нелинейностью

Для понимания качественного поведения решений задач Коши для нелинейных уравнений большое значение имеет исследование их асимптотик при больших временах. Поскольку речь идет о стремлении времени к бесконечности, подобные результаты затруднительно получить в ходе численных экспериментов.

В данной главе будут рассмотрены задачи Коши следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^v = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.1)$$

где $u(\cdot)$ — действительнзначная функция, зависящая от вектора пространственных переменных x размерности N и от времени $t > 0$, $v \in \{2; 3\}$. При некоторых условиях будут выведены асимптотические формулы следующего вида для решений этих задач при $t \rightarrow \infty$:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O\left(t^{-\frac{N}{2}-\theta} e^{-at}\right)$$

(здесь A_0 и θ — постоянные, причем $\theta > 0$). Кроме того, будет показано, что условия, налагаемые на начальные данные, определяют семейство нетривиальных функций.

Всюду в этой главе будем считать, что x, p, q, r — действительные N -мерные векторы ($N \geq v - 1$). Кроме того, будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} m(p) &= \min(1, |p|), \quad M(p) = \max(1, |p|), \\ \bar{k}(p) &= c_1 m^2(p), \quad \bar{k}_n(p) = \bar{k}\left(\frac{p}{n+1}\right), \\ K(p) &= \frac{a+b|p|^2}{1+|p|^2}, \quad D(p) = \frac{\chi+i(\lambda, p)}{1+|p|^2}, \quad \delta = \sup_{p \in R^N} |D(p)|, \end{aligned}$$

где n — целое неотрицательное число. Постоянная c_1 находится в промежутке $(0; \min(1/4, a/2))$ или $(0; 1/4]$, если соответственно $v = 2$ или $v = 3$. Через

C будем обозначать положительные постоянные, возможно, различные. Кроме того, будем использовать для различных положительных постоянных и обозначения c с нижними индексами-номераами. Преобразование Фурье введем по правилу

$$\hat{f}(p) = F[f(x)] = \int_{R^N} e^{-i(p,x)} f(x) dx.$$

На начальные данные наложим следующие ограничения.

$$u_0(x) \in L_1(R^N),$$

$$|\hat{u}_0(p)| \leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p), \quad p \in R^N,$$

$$|\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)| \leq \varepsilon |p - q|^{\sigma_2} M^{-s}(q), \quad p, q \in R^N, \quad |p - q| \leq 1.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — достаточно малый параметр, $s > N$, $\alpha \geq 0$, $\sigma_2 \in (0; 1]$.

Поясним смысл параметра ε . Он характеризует предполагаемую малость начальных данных. В обоих случаях ($v = 2$ и $v = 3$) образ Фурье решения будет представлен в виде степенного ряда $\hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{(v-1)n+1} v_n(p, t)$, для функций v_n будут выведены рекуррентные формулы. Затем будет доказано предложение, представляющее собой оценку на v_n . Из этой оценки будет следовать существование такой постоянной $A_1 \geq 1$, что $|v_n(p, t)| \leq A_1^n \forall n$. Значит, можно будет утверждать, что существует такая окрестность нуля, что если ε находится в этой окрестности, то ряд, мажорирующий $\hat{u}$, сходится. Поэтому можно будет перейти от $\hat{u}$ к u и с помощью оценок на v_n получить требуемую асимптотическую формулу.

Всюду в данной главе будем понимать обобщенное решение задачи Коши следующим образом. Пусть дана задача (2.1). Сделаем формально следующие преобразования. Применим к левой и правой частям обоих равенств (2.1) оператор Фурье, домножим первое равенство на всегда определенную величину $e^{K(p)t} / (1 + |p|^2)$ и проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий. Таким образом, получим при $v = 2$ или $v = 3$ соответственно следующие

интегральные уравнения относительно функции $\hat{u}(p, t)$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(p, t) = & e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + \\ & + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \hat{u}(p-q, \tau) \hat{u}(q, \tau) dq \end{aligned} \quad (2.2)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{u}(p, t) = & e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + \\ & + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \int_{R^N} \hat{u}(p-q, \tau) \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определение. *Обобщенным решением задачи (2.1) будем называть преобраз Фурье $u(\cdot)$ решения интегрального уравнения ((2.2) или (2.3) соответственно при $v = 2$ или $v = 3$), считая, что $u(\cdot)$ удовлетворяет двум условиям:*

1. $u(\cdot)$ — непрерывная по всем аргументам и ограниченная функция,
2. $u(\cdot) \in L_1(R^N)$ по x при любом фиксированном t .

С помощью принципа сжимающих отображений можно доказать, что обобщенное решение каждой из рассматриваемых задач существует и единственно. Подробно этот метод описан в [23, с. 7–8 и 13–14].

Из общих положений математического анализа легко получить следующие два утверждения.

Лемма 1. *$K(p)$ обладает следующими свойствами:*

1. если n — целое и неотрицательное, то $K(p) \geq a + 2\bar{k}(p) \geq a + 2\bar{k}_n(p)$;
2. если $|p_1 - p_2| \leq 1$, то $|K(p_1) - K(p_2)| \leq c_2 |p_1 - p_2| M(p_2)$, где $c_2 = 3(b-a) > 0$.

Лемма 2. *При всех положительных α , μ выполняется соотношение*

$$e^{-\alpha} \leq (\mu^{-1}\alpha)^{-\mu}.$$

Перейдем к изучению конкретных задач.

2.1. Задача с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^2 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Как уже отмечалось, ее обобщенное решение определяется с помощью интегрального уравнения (2.2).

Будем считать, что a, b, χ — действительные постоянные, λ — постоянный N -мерный вектор ($N \geq 1$), причем $0 < a < b < 3a$.

Раздел основан на исследовании, опубликованном в статье [98], но имеет следующее отличие. В названной статье предполагалось, что $0 < a < b < 2a$, однако после ее публикации автору удалось ослабить это требование. Здесь будем рассматривать задачу именно с ослабленным условием: $0 < a < b < 3a$.

Воспользуемся теорией возмущений. Пусть:

$$\begin{cases} \hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t), \\ \hat{u}_0(p) = \varepsilon v(p). \end{cases}$$

Подставим эти выражения в интегральное уравнение (2.2):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t) &= \varepsilon v(p) e^{-K(p)t} + \\ &+ D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{R^N} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p-q, \tau) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k(q, \tau) dq. \end{aligned}$$

Так как ε — достаточно малый параметр, то уравнение можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} v_s(p, t) &= \varepsilon v(p) e^{-K(p)t} + \\ &+ D(p) \sum_{n, k \geq 0} \varepsilon^{n+k+2} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{R^N} v_n(p-q, \tau) v_k(q, \tau) dq. \end{aligned}$$

Будем собирать слагаемые с одинаковыми степенями ε . Первая степень ε и степени $s + 1 \geq 2$ дадут соответственно следующие формулы:

$$\begin{aligned} v_0(p, t) &= v_0(p) e^{-K(p)t}, \\ v_s(p, t) &= \\ &= D(p) \sum \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{R^N} v_n(p-q, \tau) v_k(q, \tau) dq. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этом соотношении индексы суммирования связаны равенством $n+k+2 = s+1$, т. е. $n+k = s-1$. Положим $k = (s-\alpha) \in [0; s-1]$. Тогда $\alpha \in [1; s]$, $n = \alpha-1$. Значит, в уравнении (2.4) $\sum = \sum_{\alpha=1}^s$. Таким образом, имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} v_0(p, t) &= v(p) e^{-K(p)t}, \\ v_n(p, t) &= \\ &= D(p) \sum_{k=1}^n \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{R^N} v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Лемма 3. Для любых положительных γ , s_1 выполняются следующие соотношения:

1. $M^{-s_1}(p-q) M^{-s_1}(q) \leq 2^{s_1} M^{-s_1}(p) (M^{-s_1}(p-q) + M^{-s_1}(q))$;
2. $(n-k+1)^{-\gamma} k^{-\gamma} \leq 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} ((n-k+1)^{-\gamma} + k^{-\gamma})$, где n и k — натуральные числа, причем $k \leq n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(\varphi) = \varphi^h$ ($h > 0$). Оценим выражение $F(\varphi/2 + \psi/2)$, предположив дополнительно, что $\varphi \leq \psi$ (противоположный случай рассматривается аналогично):

$$F(\varphi/2 + \psi/2) \leq F(\psi/2 + \psi/2) = F(\psi) \leq F(\psi) + F(\varphi).$$

Если положить $\varphi = M(p-q)$, $\psi = M(q)$, $h = s_1$, то получим, что $((M(p-q) + M(q))/2)^{s_1} \leq M^{s_1}(p-q) + M^{s_1}(q)$. Кроме того, $M(p-q) +$

$M(q) \geq M(p)$. Следовательно, $(M(p)/2)^{s_1} \leq M^{s_1}(p-q) + M^{s_1}(q)$. А это неравенство равносильно первому утверждению леммы.

Второе утверждение доказывается аналогично (здесь надо положить $\varphi = n - k + 1$, $\psi = k$, $h = \gamma$). **Лемма доказана.**

2.1.1. Оценки для $v_n(p, t)$

Предложение 1. Если $\gamma > 1$, то существует такая постоянная $A_1 \geq 1$, что

$$|v_n(p, t)| \leq A_1^n (n+1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p) e^{-\bar{k}_n(p)t} e^{-at} \quad \forall n \geq 0$$

($s > N$, $\alpha \geq 0$).

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

Если $n = 0$, то

$$|v_0(p, t)| = |\varepsilon^{-1} \hat{u}_0(p) e^{-K(p)t}| \leq M^{-s-\alpha}(p) e^{-2\bar{k}(p)t} e^{-at}.$$

Здесь использованы лемма 1, выражение теории возмущений (2.5) и условия на начальные данные.

Пусть теперь $n \geq 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} |v_n(p, t)| &= \\ &= \left| D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \leq \\ &\leq \delta \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \cdot \\ &\cdot \int_{R^N} \sum_{k=1}^n A_1^{k-1} k^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p-q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau} e^{-a\tau} A_1^{n-k} (n-k+1)^{-\gamma} \cdot \\ &\cdot M^{-s-\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq \leq \\ &\leq \delta A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} d\tau \cdot \\ &\cdot \int_{R^N} M^{-s-\alpha}(p-q) M^{-s-\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} dq. \end{aligned}$$

С помощью леммы 3 продолжим преобразование. Таким образом,

$$\begin{aligned}
|v_n(p, t)| &\leq \delta A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} d\tau \int_{R^N} 2^{s+\alpha} M^{-s-\alpha}(p) (M^{-s-\alpha}(p-q) + M^{-s-\alpha}(q)) \cdot \\
&\cdot e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} dq.
\end{aligned}$$

Оценим произведение экспонент, учитывая, что $K(p) \geq a + 2\bar{k}(p)$:

$$\begin{aligned}
&e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} \leq \\
&\leq e^{-at+a\tau-2\bar{k}(p)t+2\bar{k}(p)\tau-2a\tau-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} \leq \\
&\leq e^{2\bar{k}(p)\tau-a\tau} e^{-\bar{k}_n(p)t-at}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} e^{-2a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} d\tau \leq \\
&\leq e^{-\bar{k}_n(p)t-at} \int_0^t e^{2\bar{k}(p)\tau-a\tau} d\tau \leq \\
&\leq e^{-\bar{k}_n(p)t-at} \int_0^t e^{2c_1\tau-a\tau} d\tau \leq \frac{e^{-\bar{k}_n(p)t-at}}{a-2c_1}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Замечание. Из оценок (2.6) видно, что требование $a > 0$ существенно: оно обеспечивает существование c_1 .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|v_n(p, t)| &\leq C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot M^{-s-\alpha}(p) \int_{R^N} (M^{-s-\alpha}(p-q) + M^{-s-\alpha}(q)) dq e^{-\bar{k}_n(p)t-at}.
\end{aligned}$$

Интеграл и сумма равномерно ограничены. Отсюда непосредственно получаем требуемое утверждение. **Предложение доказано.**

С помощью предложения 1 и принципа сжимающих отображений можно доказать, что обобщенное решение рассматриваемой задачи существует и единственно. Подробно этот метод описан в [23, с. 7–8 и 13–14].

Лемма 4. Если $|p_2| \leq |p_1|$ и $|p_1 - p_2| \leq 1$, то $\forall n, \forall \nu \in (0; 1]$

$$|e^{-K(p_1)t} - e^{-K(p_2)t}| \leq 2(c_2|p_1 - p_2|t)^\nu M^\alpha(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t-at}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующего утверждения в статье [82].

Предложение 2. Если $|p_2| \leq |p_1|$ и $|p_1 - p_2| \leq 1$, то при всех n

$$|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| \leq c_3 A_2^n (n+1)^{-\gamma} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} M^{-s}(p_2) e^{-\bar{k}_n(p_2)t} e^{-at},$$

где $\nu \in (0; 1]$, $\sigma_1 = \min(\sigma_2, \nu)$, $c_3 = 1 + 2c_2'$, $A_2 = \text{const} \geq 1$.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

Если $n = 0$, то

$$\begin{aligned} & |v_0(p_1, t) - v_0(p_2, t)| = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_1) e^{-K(p_1)t} - \hat{u}_0(p_2) e^{-K(p_2)t}| \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_1) - \hat{u}_0(p_2)| e^{-2k(p_1)t-at} + \frac{1}{\varepsilon} |\hat{u}_0(p_2)| |e^{-K(p_1)t} - e^{-K(p_2)t}| \leq \\ & \leq |p_1 - p_2|^{\sigma_2} M^{-s}(p_2) e^{-2\bar{k}(p_1)t-at} + M^{-s-\alpha}(p_2) 2c_2' |p_1 - p_2|^\nu t^\nu M^\alpha(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t-at} \leq \\ & \leq (1 + 2c_2') |p_1 - p_2|^\sigma (1 + t^\nu) M^{-s}(p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t-at}, \end{aligned}$$

т. е. утверждение верно.

Пусть теперь $n \geq 1$. Учитывая рекуррентную формулу (2.4), преобразуем оцениваемую разность:

$$\begin{aligned} & |v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| = \\ & = \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_1 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ & \left. - D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_1 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_1 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\
&- D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq + \\
&+ D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \\
&- \left. D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| = \\
&= \left| D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n (v_{k-1}(p_1 - q, \tau) - \right. \\
&- v_{k-1}(p_2 - q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau) dq + \\
&+ \left. \left(D(p_1) \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau - D(p_2) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left. \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \leq \\
&\leq \delta \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{k-1} k^{-\gamma} (1 + \tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} M^{-s}(p_2 - q) \cdot \\
&\cdot e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau} e^{-a\tau} A_1^{n-k} (n - k + 1)^{-\gamma} M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq + \\
&+ \left| (D(p_1) - D(p_2)) \int_0^t e^{-K(p_2)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| + \\
&+ \left| D(p_2) \int_0^t \left(e^{-K(p_1)(t-\tau)} - e^{-K(p_2)(t-\tau)} \right) d\tau \cdot \right. \\
&\cdot \left. \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p_2 - q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \leq \\
&\leq \delta \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{n-1} k^{-\gamma} (n - k + 1)^{-\gamma} (1 + \tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \cdot \\
&\cdot M^{-s}(p_2 - q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2 - q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n A_1^{k-1} k^{-\gamma} M^{-s-\alpha} (p_2 - q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau} e^{-a\tau} \cdot \\
& \cdot A_1^{n-k} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha} (q) e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} dq + \\
& + \delta \int_0^t 2c_2^\nu |p_1 - p_2|^\nu (t-\tau)^\nu M^\alpha (p_2) e^{-2\bar{k}(p_2)t+2\bar{k}(p_2)\tau-at+a\tau} d\tau \cdot \\
& \cdot \int_{R^N} \sum_{k=1}^n A_1^{n-1} M^{-s-\alpha} (p_2 - q) M^{-s-\alpha} (q) k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \cdot \\
& \cdot e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq = \delta I_1 + C |p_1 - p_2|^{\sigma_1} I_2 + \delta I_3,
\end{aligned}$$

где I_1 , I_2 и I_3 — соответственно модули первого, второго и третьего интегралов. Здесь использовано соотношение $|D(p_1) - D(p_2)| \leq 3|\lambda| |p_1 - p_2|^{\sigma_1}$. Оно следует непосредственно из определения $D(\cdot)$. Оценим по отдельности выражения I_1 , I_2 и I_3 .

Во-первых,

$$\begin{aligned}
I_1 & = \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n c_3 A_2^{n-1} k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} (1+\tau^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \cdot \\
& \cdot M^{-s} (p_2 - q) M^{-s} (q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \leq \\
& \leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} \int_0^t e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-at} e^{a\tau} d\tau \cdot \\
& \cdot \int_{R^N} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s} (p_2 - q) M^{-s} (q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \leq \\
& \leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \cdot \\
& \cdot \int_{R^N} M^{-s} (p_2 - q) M^{-s} (q) dq \int_0^t e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что интеграл от 0 до t не превышает конечную величину $(a - 2c_1)^{-1}$. Кроме того, воспользуемся леммой 3: интеграл по R^N не превышает $CM^{-s}(p_2)$, а сумма не превышает $C(n+1)^{-\gamma}$. Поэтому

$$I_1 \leq c_3 A_2^{n-1} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^{\sigma_1} e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} (n+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2).$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n A_1^{n-1} k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \cdot \\
&\cdot M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq \leq \\
&\leq A_1^{n-1} \int_0^t e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-at} e^{a\tau} d\tau \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2-q) M^{-s}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq.
\end{aligned}$$

Далее оценка проводится по аналогии с рассуждениями, относящимися к I_1 .

В-третьих,

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2c_2^\nu |p_1 - p_2|^\nu A_1^{n-1} t^\nu e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} M^\alpha(p_2) e^{-at} \sum_{k=1}^n k^{-\gamma} (n-k+1)^{-\gamma} \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} M^{-s-\alpha}(p_2-q) M^{-s-\alpha}(q) dq \int_0^t e^{2\bar{k}_n(p_1)\tau} e^{-a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(p_2-q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} \leq \\
&\leq 2c_2^\nu |p_1 - p_2|^\nu A_1^{n-1} t^\nu e^{-2\bar{k}_n(p_1)t} e^{-at} (n+1)^{-\gamma} M^{-s}(p_2).
\end{aligned}$$

Так как $|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| \leq \delta I_1 + C |p_1 - p_2|^{\sigma_1} I_2 + \delta I_3$, то из доказанных оценок на I_1 , I_2 и I_3 и тривиальных неравенств $1 \leq 1 + t^\nu$ и $t^\nu \leq 1 + t^\nu$ получаем требуемое неравенство. **Предложение доказано.**

Предложение 3. Если $|p| \leq 1$, то при всех n

$$|v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}| \leq c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N+\theta_2} e^{K(p)t-at},$$

где $c_4 > 0$, $\theta_{1,2} > 0$, причем эти числа не зависят от n .

Замечание. Доказательство этого предложения отличается от доказательства, приведенного в [98]. Новый способ рассуждений позволил ослабить требования и рассматривать b из промежутка $(a; 3a)$, а не только $(a; 2a)$.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

Если $n = 0$, то

$$|v_0(p, t) e^{K(p)t} - v_0(0, t) e^{at}| = |v(p) - v(0)| \leq |p|^{\sigma_2} M^{-s}(p).$$

Заметим следующее:

1. $1 = e^{K(p)t} e^{-K(p)t} \leq e^{K(p)t} (\mu^{-1} K(p)t)^{-\mu} \forall \mu > 0;$
2. $K(p) \geq 2k(p) + a = 2c_1 m^2(p) + a.$

Выберем параметры $\theta_{1,2}$, μ , c_4 из условий

$$0 < \theta_1 < \frac{\sigma_2}{2}, \quad \theta_2 = \sigma_2 - 2\theta_1, \quad \mu = \frac{N}{2} + \theta_1, \quad c_4 \geq (2c_1 \mu^{-1})^{-\mu},$$

тогда при $n = 0$ неравенство будет соблюдено.

Пусть теперь $n \geq 1$. Значит,

$$\begin{aligned} & |v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}| = \\ & = \left| D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ & \left. - \chi \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| = \\ & = \left| D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(p-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ & \left. - D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq + \right. \\ & \left. + D(p) \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ & \left. - D(p) \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq + \right. \\ & \left. + D(p) \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ & \left. - \chi \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \leq \\ & \leq |D(p)| I_1 + |D(p)| I_2 + |D(p) - \chi| I_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n |(v_{k-1}(p-q, \tau) - v_{k-1}(-q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau)| dq, \\
I_2 &= \int_0^t |e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n |v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| dq, \\
I_3 &= \int_0^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n |v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| dq.
\end{aligned}$$

Из предложений 1 и 2 получаются соответственно следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&|v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau)| \leq \\
&\leq A_1^{n-1} 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) M^{-2s-2\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&|(v_{k-1}(p-q, \tau) - v_{k-1}(-q, \tau)) v_{n-k}(q, \tau)| \leq \\
&\leq c_3 A_2^{n-1} 2^\gamma (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot M^{-s-\alpha}(q) (1+\tau^\nu) |p|^\sigma e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau}.
\end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 2 следует, что

$$|e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| \leq 2e^{K(p)\tau} (c_2 |p|^{\sigma_1} \tau)^\nu M^\alpha(p) e^{-2\bar{k}(p)\tau - a\tau}.$$

С учетом этих неравенств и леммы 3 можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c_3 \cdot 2^\gamma A_2^{n-1} |p|^\sigma (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} M^{-s-\alpha}(q) dq \int_0^t (1+\tau^\nu) e^{K(p)\tau - \bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} d\tau, \\
I_2 &\leq 2c_2' \cdot 2^\gamma A_1^{n-1} |p|^{\sigma_1 \nu} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_0^t e^{K(p)\tau - 2\bar{k}(p)\tau - a\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} \tau^\nu d\tau, \\
I_3 &\leq 2^\gamma A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_0^t e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Интегралы от 0 до t в этих выражениях обозначим соответственно через J_1 , J_2 и J_3 . Пусть ω — некоторое число из промежутка $(0; (3a - b)/2)$. Легко убедиться, что выражения $(1 + \tau^\nu) e^{-\omega\tau}$ и $\tau^\nu e^{-\omega\tau}$ ограничены. Кроме того, $e^{B(p)}$, где $B(p) = K(p) - a$, не меньше единицы. Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_0^t e^{(\omega-a)\tau} e^{B(p)\tau} e^{-\bar{k}_{n-k}(q)\tau} d\tau, \\ J_2 &\leq C \int_0^t e^{(\omega-a)\tau} e^{B(p)\tau} e^{-2\bar{k}(p)\tau - \bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau - a\tau} d\tau, \\ J_3 &\leq \int_0^t e^{B(p)\tau} e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau - a\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Положим $j = \int_0^t e^{B(p)\tau - (a-\omega)\tau} d\tau$. Тогда $J_{1,2,3} \leq Cj$. Так как рассматриваются p , по модулю не превосходящие единицу, то, как легко проверить, $B(p) \leq (b-a)/2$. Следовательно,

$$j \leq \int_0^t e^{(\omega+b/2-3a/2)\tau} d\tau = \frac{1 - e^{(\omega+b/2-3a/2)t}}{\omega + (b-3a)/2} \leq \left(\omega + \frac{b-3a}{2} \right)^{-1}.$$

Кроме того,

$$1 = e^{B(p)t} e^{-B(p)t} \leq e^{B(p)t} (\mu^{-1} B(p) t)^{-\mu}.$$

Так как рассматриваются p , по модулю не превосходящие единицу, то

$$(B(p))^{-\mu} = (b-a)^{-\mu} (1 + |p|^2)^\mu |p|^{-2\mu} \leq \left(\frac{2}{b-a} \right)^\mu |p|^{-2\mu}.$$

Таким образом,

$$j \leq \frac{1}{2a - b - \omega} \left(\frac{2\mu}{b-a} \right)^\mu e^{B(p)t} t^{-\mu} |p|^{-2\mu}.$$

Положим $\mu = N/2 + \theta_1$. Следовательно,

$$J_{1,2,3} \leq C e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2} - \theta_1} |p|^{-N - 2\theta_1}.$$

Замечание. Условие $b < 3a$ обеспечивает существование числа ω и корректность выведенных оценок для j и $J_{1,2,3}$.

Продолжим оценивать $I_{1,2,3}$. Так как $\sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma})$ равномерно ограничена и $\int_{R^N} M^{-s-\alpha}(q) dq$ сходится, то

$$\begin{aligned} I_1 &\leq CA_2^{n-1} |p|^\sigma (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}, \\ I_2 &\leq CA_1^{n-1} |p|^{\sigma_1\nu} (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}, \\ I_3 &\leq CA_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} e^{B(p)t} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N-2\theta_1}. \end{aligned}$$

Так как

$$|v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}| \leq |D(p)| I_1 + |D(p)| I_2 + |D(p) - \chi| I_3$$

и $|D(p) - \chi| \leq 3|\lambda| |p|^{\sigma_1}$, то, полагая $\theta_2 = \min(\sigma - 2\theta_1, \sigma_1\nu - 2\theta_1, \sigma_1 - 2\theta_1) > 0$, приходим к требуемому неравенству. **Предложение доказано.**

Предложение 4. *Существуют пределы $\varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n(0, t) e^{at}$, причем*

$$|v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n| \leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3},$$

где c_5 и θ_3 — положительные числа, не зависящие от n .

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

Если $n = 0$, то выражение $v_0(0, t) e^{at} = v(0)$ не зависит от t .

Пусть $n \geq 1$.

Пусть $t > t_1 > 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} &|v_n(0, t) e^{at} - v_n(0, t_1) e^{at_1}| = \\ &= \left| D(0) e^{at} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq - \right. \\ &\left. - D(0) e^{at_1} \int_0^{t_1} e^{-a(t_1-\tau)} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\chi| \left| \int_{t_1}^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n v_{k-1}(-q, \tau) v_{n-k}(q, \tau) dq \right| \leq \\
&\leq |\chi| \int_{t_1}^t e^{a\tau} d\tau \int_{R^N} \sum_{k=1}^n 2^\gamma A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot M^{-2s-2\alpha}(q) e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-2a\tau} dq = \\
&= 2^\gamma |\chi| (n+1)^{-\gamma} A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \cdot \\
&\cdot \int_{R^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_{t_1}^t e^{-\bar{k}_{k-1}(q)\tau - \bar{k}_{n-k}(q)\tau} e^{-a\tau} d\tau \leq \\
&\leq 2^\gamma |\chi| (n+1)^{-\gamma} A_1^{n-1} \sum_{k=1}^n (k^{-\gamma} + (n-k+1)^{-\gamma}) \int_{R^N} M^{-2s-2\alpha}(q) dq \int_{t_1}^t e^{-a\tau} d\tau \leq \\
&\leq C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \int_{t_1}^t (\mu^{-1} a \tau)^{-\mu} d\tau = \\
&= C A_1^{n-1} (n+1)^{-\gamma} \frac{1}{1-\mu} \left(t^{1-\mu} - t_1^{1-\mu} \right)
\end{aligned}$$

(здесь была использована ограниченность интеграла по R^N и суммы). Пусть $\mu > 1$. Положим $\theta_3 = \mu - 1$. Тогда, в силу критерия Коши, предел φ_n существует, причем верна требуемая оценка. **Предложение доказано.**

2.1.2. Вывод основной формулы

Предложение 5. При всех n имеют место следующие асимптотики при $t \rightarrow \infty$:

$$(2\pi)^N \psi_n(x, t) = \varphi_n t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + A_3^n O\left(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}\right),$$

где $A_3 \geq 1$, $\theta > 0$, причем эти числа не зависят от n , $\psi_n(x, t) = F^{-1}[v_n(p, t)]$, $y = t^{-1/2}x$.

Доказательство. Представим $(2\pi)^N \psi_n(x, t)$ в виде $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{|p| \geq 1} e^{i(p,x)} v_n(p, t) dp, \quad I_2 = \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} \left(v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at} \right) dp,$$

$$I_3 = \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} \left(v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n \right) dp, \quad I_4 = \varphi_n \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} dp.$$

Рассмотрим подробнее эти выражения.

1. С помощью предложения 1 и определения $\bar{k}_n(p)$ несложно получить следующее неравенство:

$$|I_1| \leq A_1^n (n+1)^{-\gamma} e^{-\frac{c_1 t}{(n+1)^2}} e^{-at} \int_{|p| \geq 1} M^{-s-\alpha}(p) dp.$$

Используем лемму 2. Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C A_1^n (n+1)^{-\gamma} \left(\mu^{-1} \frac{c_1 t}{(n+1)^2} \right)^{-\mu} e^{-at} \leq \\ &\leq C \cdot 2^{2\mu} A_1^n (n+1)^{-\gamma+2\mu} t^{-\mu} e^{-at}. \end{aligned}$$

Положив $\mu = \frac{N}{2} + \theta_1$, получим:

$$|I_1| \leq c_6 A_1^n (n+1)^{N+2\theta_1-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at}.$$

2. С помощью предложения 3 оценим подынтегральное выражение в I_2 .

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} |p|^{-N+\theta_2} e^{K(p)t-at} dp = \\ &= c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at} \int_{|p| \leq 1} |p|^{-N+\theta_2} dp \leq \\ &\leq c_7 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_1} e^{-at}. \end{aligned}$$

3. С помощью предложения 4 оценим подынтегральное выражение в I_3 .

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} dp = \\
&= c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} \int_{|p| \leq 1} e^{-K(p)t} dp \leq \\
&\leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} \int_{|p| \leq 1} e^{-2\bar{k}(p)t-at} dp = \\
&= c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} e^{-at} \int_{|p| \leq 1} e^{-2c_1|p|^2 t} dp \leq \\
&\leq c_5 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3} e^{-at} C (2c_1 t)^{-\frac{N}{2}} = \\
&= c_8 A_1^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\frac{N}{2}-\theta_3} e^{-at}.
\end{aligned}$$

4. Представим I_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \varphi_n \left(\int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t-at} dp + \right. \\
&\left. + \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t-at} \left(e^{O(|p|^4)t} - 1 \right) dp + \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{i(p,x)-K(p)t} dp \right).
\end{aligned}$$

Такое представление верно в силу того, что $K(p) = a + (b-a)|p|^2 + O(|p|^4)$ при достаточно малых $|p|$. Обозначим эти слагаемые (без множителя φ_n) соответственно через J_1 , J_2 и J_3 и оценим их по отдельности.

а. Рассмотрим J_1 :

$$\begin{aligned}
\left| J_1 - e^{-at} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t} dp \right| &\leq e^{-at} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-(b-a)|p|^2 t} dp \leq \\
&\leq e^{-at} e^{-\frac{b-a}{2}\sqrt{t}} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-\frac{b-a}{2}|p|^2 t} dp \leq \\
&\leq e^{-at} \left((\mu')^{-1} \frac{b-a}{2} \sqrt{t} \right)^{-\mu'} C t^{-\frac{N}{2}} \leq C e^{-at} t^{-\frac{N}{2}-\frac{\mu'}{2}}.
\end{aligned}$$

б. Заметим, что при $|p| \leq t^{-1/4}$ $O(|p|^4)t \leq C \Rightarrow |e^{O(|p|^4)t} - 1| \leq C e^C |p|^4 t$.

Поэтому

$$|J_2| \leq Ct \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{-|p|^2 t - at} |p|^4 dp \leq Ct^{-\frac{N}{2}-1} e^{-at}.$$

в. С помощью леммы 1 и определения $\bar{k}(p)$ несложно получить, что

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{-2c_1 |p|^2 t - at} dp \leq C e^{-2c_1 t^{1/2} - at} \leq \\ &\leq C e^{-at} \left(\mu^{-1} \cdot 2c_1 \sqrt{t} \right)^{-\mu} \leq C t^{-\frac{\mu}{2}} e^{-at}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| I_4 - \varphi_n t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta \right| \leq c_9 t^{-\frac{N}{2}-1} e^{-at},$$

где $y = t^{-1/2}x$, $\eta = \sqrt{t}p$. Теперь выберем μ и μ' из условий $\mu/2 = N/2 + \mu'/2 = N/2 + 1$, т. е. $\mu = N + 2$, $\mu' = 2$.

Кроме того, положим $\theta = \min(\theta_1, \theta_3, 1) > 0$, $A_3 = bA_2$, причем

$$b^n \geq \max \left(1, c_6 (n+1)^{N+2\theta_1-\gamma}, c_7 (n+1)^{2N+2-\gamma}, c_8 (n+1)^{2N-\gamma}, A_2^{-n} c_9 \right).$$

Отсюда получаем требуемое утверждение. **Предложение доказано.**

Предложение 6. При $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$u(x, t) = A_0 (2\pi)^{-N} t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + O \left(t^{-\frac{N}{2}-\theta} e^{-at} \right),$$

где $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{R^N} u(x, t) dx$, $y = t^{-1/2}x$, $\theta > 0$.

Замечание. Конкретное значение константы A_0 можно найти с помощью так называемой диаграммной техники, изложенной в [24, с. 159–177] на примере обобщенного уравнения КПП с квадратичной нелинейностью.

Доказательство. Преобразование Фурье решения $\hat{u}(p, t)$ было представлено в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(p, t)$. Из этого соотношения и из Предложения 1 видно,

что при $\varepsilon < 1/A < 1/A_1$ ряд сходится равномерно на $R^N \times [0; \infty)$ и удовлетворяет интегральному уравнению (2.2). Заметим, что $|\varphi_n| = \lim_{t \rightarrow \infty} |v_n(0, t) e^{at}| \leq A_1^n$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}(0, t) e^{at} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{R^N} u(x, t) dx.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} A_3^n$ сходится.

$$u(x, t) = F^{-1}[\hat{u}(p, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \psi_n(x, t),$$

поэтому

$$(2\pi)^N u(x, t) = A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + O\left(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}\right).$$

Предложение доказано.

Приходим к основному утверждению раздела.

Теорема 1. При $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O\left(t^{-\frac{N}{2} - \theta} e^{-at}\right). \quad (2.7)$$

Доказательство. Преобразуем интеграл, стоящий в формулировке предложения б:

$$\begin{aligned} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta &= \int_{R^N} e^{iy_1\eta_1 + \dots + iy_N\eta_N - (b-a)\eta_1^2 - \dots - (b-a)\eta_N^2} d\eta_1 \dots d\eta_N = \\ &= \prod_{k=1}^N \int_R e^{iy_k\eta_k - (b-a)\eta_k^2} d\eta_k = e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} \frac{1}{(\sqrt{b-a})^N} (\sqrt{\pi})^N, \end{aligned}$$

так как линейная замена сводит выражение к произведению интегралов Пуассона. Отсюда непосредственно получаем, что асимптотику, полученную в предложении б, можно привести к виду (2.7). **Теорема доказана.**

2.2. Задача с кубической нелинейностью

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^3 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Как уже отмечалось, ее обобщенное решение определяется с помощью интегрального уравнения (2.3).

Будем считать, что a, b, χ — действительные постоянные, λ — постоянный N -мерный вектор ($N \geq 2$), причем $0 \leq a < b$.

Раздел основан на исследовании, опубликованном в статье [90], а также в виде тезисов [100].

И здесь воспользуемся теорией возмущений. Пусть

$$\begin{cases} \hat{u}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} v_n(p, t) \\ \hat{u}_0(p) = \varepsilon v(p), \end{cases}$$

где ε — достаточно малый параметр, чтобы интегрирование и суммирование можно было менять местами. Существование таких ε будет следовать из предложения 1. Рассуждая по аналогии с предыдущим разделом, получим следующие рекуррентные формулы:

$$v_0(p, t) = v(p) e^{-K(p)t},$$

$$v_n(p, t) =$$

$$= D(p) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} dt \int_{R^N} \int_{R^N} v_{j-1}(p-q, \tau) v_{k-j}(q-r, \tau) v_{n-k}(r, \tau) dq dr$$

($n \geq 1$).

Дальнейшее исследование задачи проводится, в основном, аналогично исследованию задачи из предыдущего раздела, поэтому изложим его кратко.

Обозначим через $\psi_n(x, t)$ прообраз Фурье $v_n(p, t)$. Положим

$$(2\pi)^N \psi_n(x, t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|p| \geq 1} e^{i(p,x)} v_n(p, t) dp, \\
I_2 &= \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} \left(v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at} \right) dp, \\
I_3 &= \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} \left(v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n \right) dp, \\
I_4 &= \varphi_n \int_{|p| \leq 1} e^{i(p,x) - K(p)t} dp,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$\varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n(0, t) e^{at}$. Будет доказано, что главный член асимптотики дает I_4 , а $I_{1,2,3}$ уходят в остаток. Нужные оценки подынтегральных выражений дают предложения 1–4. Их можно доказать методом индукции, как и аналогичные утверждения предыдущего раздела.

Предложение 7. *Если $\gamma > 3$, то существует такая постоянная $A_1 \geq 1$, что*

$$|v_n(p, t)| \leq A_1^n (n+1)^{-\gamma} M^{-s-\alpha}(p) e^{-\bar{k}_n(p)t} e^{-at} \quad \forall n \geq 0$$

($s > N$, $\alpha \geq 0$).

Предложение 8. *Если $|p_2| \leq |p_1|$ и $|p_1 - p_2| \leq 1$, то при всех n*

$$|v_n(p_1, t) - v_n(p_2, t)| \leq c_3 A_2^n (n+1)^{-\gamma} (1+t^\nu) |p_1 - p_2|^\sigma M^{-s}(p_2) e^{-\bar{k}_n(p_2)t} e^{-at},$$

где $\nu \in (0; 1]$, $\sigma = \min(\sigma_2, \nu)$, $c_3 = 1 + 2c_2^\nu$, $A_2 = \text{const} \geq 1$.

Предложение 9. *Если $|p| \leq 1$, то при всех n*

$$|v_n(p, t) e^{K(p)t} - v_n(0, t) e^{at}| \leq c_4 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-N/2-\theta_1} |p|^{-N+\theta_2} e^{K(p)t-at},$$

где $c_4 > 0$, $\theta_{1,2} > 0$, причем эти числа не зависят от n .

Предложение 10. *Существуют пределы $\varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n(0, t) e^{at}$, причем*

$$|v_n(0, t) e^{at} - \varphi_n| \leq c_5 A_2^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-\theta_3},$$

где c_5 и θ_3 — положительные числа, не зависящие от n .

Теперь, как и в предыдущем разделе, воспользуемся предложениями, устанавливающими оценки для $v_n(p, t)$, для вывода предварительных асимптотик, а затем — основного утверждения.

Подставляя оценки из перечисленных предложений в формулы (2.8), получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c_6 A_1^n (n+1)^{N+2\theta_1-\gamma} t^{-N/2-\theta_1} e^{-at}, \\ |I_2| &\leq c_7 A_2^n (n+1)^{2N+2-\gamma} t^{-N/2-\theta_1} e^{-at}, \\ |I_3| &\leq c_8 A_2^n (n+1)^{2N-\gamma} t^{-N/2-\theta_3} e^{-at}, \\ \left| I_4 - \varphi_n t^{-N/2} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y,\eta)-(b-a)|\eta|^2} d\eta \right| &\leq c_9 t^{-N/2-1} e^{-at}, \end{aligned}$$

где $y = t^{-1/2}x$. Действительно, первое, второе и третье неравенства можно проверить непосредственно. Для доказательства четвертого представим I_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_4 = \varphi_n &\left(\int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t - at} dp + \right. \\ &+ \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t - at} \left(e^{O(|p|^4)t} - 1 \right) dp + \left. \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{i(p,x)-K(p)t} dp \right), \end{aligned}$$

что корректно, так как $K(p) = a + (b-a)|p|^2 + O(|p|^4)$ при достаточно малых $|p|$. Обозначим составляющие I_4 (без множителя φ_n) соответственно через J_1 , J_2 и J_3 и оценим их по отдельности.

1. Рассмотрим J_1 :

$$\begin{aligned} \left| J_1 - e^{-at} \int_{R^N} e^{i(p,x)-(b-a)|p|^2 t} dp \right| &\leq e^{-at} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-(b-a)|p|^2 t} dp \leq \\ &\leq e^{-at} e^{-(b-a)\sqrt{t}/2} \int_{|p| \geq t^{-1/4}} e^{-(b-a)|p|^2 t/2} dp \leq \\ &\leq e^{-at} \left((\mu')^{-1} (b-a) \sqrt{t}/2 \right)^{-\mu'} C t^{-N/2} \leq C e^{-at} t^{-N/2-\mu'/2}. \end{aligned}$$

2. Заметим, что если $|p| \leq t^{-1/4}$, то $O(|p|^4)t \leq C$.

Поэтому $|e^{O(|p|^4)t} - 1| \leq C|p|^4t$. Следовательно,

$$|J_2| \leq Ct \int_{|p| \leq t^{-1/4}} e^{-|p|^2t-at} |p|^4 dp \leq Ct^{-N/2-1} e^{-at}.$$

3. С помощью определения $\bar{k}(p)$ и неравенства $K(p) \geq a + 2\bar{k}(p)$, верного $\forall p \in R^N$, несложно получить, что

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \int_{t^{-1/4} \leq |p| \leq 1} e^{-2c_1|p|^2t-at} dp \leq Ce^{-2c_1t^{1/2}-at} \leq \\ &\leq Ce^{-at} \left(\mu^{-1} \cdot 2c_1\sqrt{t} \right)^{-\mu} \leq Ct^{-\mu/2} e^{-at}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| I_4 - \varphi_n t^{-N/2} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y,\eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta \right| \leq c_9 t^{-N/2-1} e^{-at},$$

где $y = t^{-1/2}x$. Теперь выберем μ и μ' из условий $\mu/2 = N/2 + \mu'/2 = N/2 + 1$, т. е. $\mu = N + 2$, $\mu' = 2$.

Кроме того, положим $\eta = \sqrt{t}p$, $\theta = \min(\theta_1, \theta_3, 1) > 0$, $A_3 = bA_2$, причем $b^n \geq \max\left(1, c_6(n+1)^{N+2\theta_1-\gamma}, c_7(n+1)^{2N+2-\gamma}, c_8(n+1)^{2N-\gamma}, A_2^{-n}c_9\right)$. Значит, требуемая оценка для I_4 верна.

Отсюда получим следующее утверждение.

Предложение 11. При всех n имеют место следующие асимптотики при $t \rightarrow \infty$:

$$(2\pi)^N \psi_n(x, t) = \varphi_n t^{-N/2} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y,\eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + A_3^n O\left(t^{-N/2-\theta} e^{-at}\right),$$

где $A_3 \geq 1$, $\theta > 0$, причем эти числа не зависят от n , $\psi_n(x, t) = F^{-1}[v_n(p, t)]$, $y = t^{-1/2}x$.

Образ Фурье решения $\hat{u}(p, t)$ был представлен в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} v_n(p, t)$. Из этого соотношения и из предложения 1 видно, что при $\varepsilon < A^{-1/2} < A_1^{-1/2}$ ряд

сходится равномерно на $R^N \times [0; \infty)$ и удовлетворяет интегральному уравнению (2.3). Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \varphi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{R^N} u(x, t) dx < \infty.$$

Обозначим этот предел через A_0 . С помощью предложения 5 и разложения в ряд по степеням ε получим асимптотику для u .

Предложение 12. *При $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:*

$$u(x, t) = A_0 (2\pi)^{-N} t^{-N/2} e^{-at} \int_{R^N} e^{i(y, \eta) - (b-a)|\eta|^2} d\eta + O\left(t^{-N/2-\theta} e^{-at}\right),$$

где $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{R^N} u(x, t) dx$, $y = t^{-1/2}x$, $\theta > 0$.

Значение константы A_0 можно вычислить с помощью так называемой диаграммной техники, изложенной в [24, с. 159–177] на примере обобщенного уравнения КПП с квадратичной нелинейностью. Линейная замена сводит интеграл, стоящий в полученной формуле, к произведению интегралов Пуассона. Таким образом, приходим к основному утверждению.

Теорема 2. *При $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:*

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-N/2} A_0 t^{-N/2} e^{-|x|^2/(4(b-a)t)} e^{-at} + O\left(t^{-N/2-\theta} e^{-at}\right).$$

2.3. Пример нетривиальных начальных данных

Напомним, что в данной главе на начальные данные задач Коши налагались следующие ограничения:

$$\begin{aligned} u_0(x) &\in L_1(R^N), \\ |\hat{u}_0(p)| &\leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p), p \in R^N, \\ |\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)| &\leq \varepsilon |p - q|^{\sigma_2} M^{-s}(q), p, q \in R^N, |p - q| \leq 1, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малый параметр, $s > N$, $\alpha \geq 0$, $\sigma_2 \in (0; 1]$.

Построим семейство нетривиальных функций $u_0(\cdot)$, удовлетворяющих этим условиям.

Пусть

$$u_0(x) = A \left(\frac{B}{\pi} \right)^N \prod_{k=1}^N \frac{1}{x_k^2 + B^2}, \quad (2.9)$$

где B — произвольное положительное число; условия на действительный параметр A сформулируем позже. Непосредственным вычислением можно убедиться, что $\|u_0\|_{L_1(R^N)} = |A| < \infty$. С помощью леммы Жордана можно доказать, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip_k x_k} (x_k^2 + B^2)^{-1} dx_k = \pi e^{-B|p_k|}/B$, поэтому $\hat{u}_0(p) = A e^{-B(|p_1| + \dots + |p_N|)}$. Докажем, что найденное преобразование Фурье этой начальной функции соответствует перечисленным ограничениям.

1. Перепишем ограничение на $\hat{u}_0$ в следующем виде:

$$M^{s+\alpha}(p) \leq \frac{\varepsilon}{|A|} e^{B(|p_1| + \dots + |p_N|)}. \quad (2.10)$$

Если $|p| \leq 1$, то неравенство будет верно при $\varepsilon/|A| \geq 1$. Пусть $|p| \geq$

1. Пусть ζ — произвольное положительное число. Оценим правую часть (2.10):

$$\frac{\varepsilon}{|A|} e^{B(|p_1| + \dots + |p_N|)} \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \zeta^{-\zeta} B^\zeta (|p_1| + \dots + |p_N|)^\zeta \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \left(\frac{B}{\zeta} \right)^\zeta |p|^\zeta.$$

Последнее выражение (а значит, и правая часть (2.10)) будет больше или равна $|p|^{s+\alpha}$, если взять $\zeta = s + \alpha$ и $\varepsilon |A|^{-1} (B/\zeta)^\zeta \geq 1$. Следовательно, ограничение на $\hat{u}_0$ будет выполняться, если $|A| \max \left(1, ((s + \alpha)/B)^{(s+\alpha)} \right) \leq \varepsilon$.

2. Пусть $p, q \in R^N$, причем $|p - q| \leq 1$. Положим $d = |\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)|$. Применяя теорему Лагранжа, получим: $d = |A| B e^{-B\xi} \left| \sum_{k=1}^N |p_k| - \sum_{k=1}^N |q_k| \right|$, где ξ — число, находящееся между $\sum_{k=1}^N |p_k|$ и $\sum_{k=1}^N |q_k|$. Положим $\rho = \sqrt{N^2 - N + 4}/2$. Заметим, что $|p| \leq \sum_{k=1}^N |p_k| \leq \rho |p| \forall p \in R^N$. Поэтому $d \leq |A| B \rho |p - q| e^{-B\xi}$. Заметим, что $\sum_{k=1}^N (|q_k| - |p_k|) \leq \sum_{k=1}^N |q_k - p_k| \leq$

$\rho |q - p| \leq \rho$. Следовательно, $\xi \geq \max \left(\sum_{k=1}^N |p_k|, \sum_{k=1}^N |q_k| \right) \geq \sum_{k=1}^N |q_k| - \rho$. Следовательно, $e^{B\xi} \geq e^{B(|q_1| + \dots + |q_N| - \rho)} \geq e^{B|q|} e^{-B\rho}$. Для того чтобы продолжить оценку выражения $e^{B\xi}$, рассмотрим два случая. Во-первых, если $|q| \leq 1$, то

$$e^{B|q|} e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} \min(1, (B/s)^s) M^s(q),$$

где $s > N$. Во-вторых, если $|q| \geq 1$, то

$$e^{B|q|} e^{-B\rho} \geq e^{-B\rho} (B|q|/s)^s \geq e^{-B\rho} \min(1, (B/s)^s) M^s(q).$$

С учетом этих оценок получим, что

$$d \leq |A| B\rho |p - q| e^{B\rho} \max(1, (s/B)^s) M^{-s}(q).$$

Значит, требуемая оценка $d \leq \varepsilon M^{-s}(q) |p - q|^{\sigma_2}$ будет верна, если взять $\sigma_2 = 1$ и $|A| B\rho e^{B\rho} \max(1, (s/B)^s) \leq \varepsilon$.

Таким образом, ε и $|A|$ связаны условием

$$|A| \max \left(1, ((s + \alpha)/B)^{(s+\alpha)}, B\rho e^{B\rho} \max(1, (s/B)^s) \right) \leq \varepsilon.$$

Из этой оценки видно, что при любом положительном ε можно подобрать такое значение A , что функция вида (2.9) будет соответствовать предполагаемым ограничениям.

2.4. Выводы к главе

В данной главе исследованы асимптотики при больших временах решений задач Коши для соболевских уравнений, содержащих квадратичную или кубическую нелинейность. Показано, что в обоих случаях главный член асимптотики определяется линейными членами уравнения (в частности, наличие члена au в уравнении дает множитель e^{-at} в асимптотике), тогда как нелинейности не влияют на качественное поведение решений.

Кроме того, построено семейство нетривиальных начальных данных, удовлетворяющих условиям, при которых рассматривались задачи Коши.

Глава 3

Задачи Коши для уравнений, где коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане равны

В данной главе будет рассмотрена следующая задача Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + f(x, u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.1)$$

Здесь u — действительнoзначная функция, зависящая от пространственной переменной $x \in R^N$ (N — любое натуральное число) и времени $t > 0$. Пусть $a > 0$, $f(\cdot) \in C(R^N \times R)$, причем

$$|f(\xi, \eta)| \leq \mu(\xi) |\eta|^\alpha \quad \forall \xi \in R^N, \eta \in R, \quad (3.2)$$

где $\alpha > 1$, $\mu(\cdot) \in C(R^N) \cap L_q(R^N)$, а множество возможных q зависит от размерности пространственной переменной следующим образом: $2 \leq q \leq \infty$ при $N \leq 3$, $N/2 < q \leq \infty$ при $N \geq 4$. Пусть, кроме того, существует производная $\partial f / \partial \eta \in C(R^N \times R)$, удовлетворяющая условию

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \eta} \right| \leq k(\xi) |\eta|^\beta \quad \forall \xi \in R^N, \eta \in R, \quad (3.3)$$

где $\beta > 0$, $k(\cdot) \in C(R^N) \cap L_\nu(R^N)$ при некотором $\nu \in [2; \infty]$. Условия на $u_0(\cdot)$ сформулируем позже.

В предыдущей главе были рассмотрены задачи Коши для следующих двух нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b \Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^3 = 0, \quad 0 \leq a < b, \quad N \geq 2$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b \Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^2 = 0, \quad 0 < a < b < 3a, \quad N \geq 1$$

(N — размерность пространственной переменной). Было показано, что при некоторых условиях решения обеих задач имеют при $t \rightarrow \infty$ следующую асимптотику:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-N/2} A_0 t^{-N/2} e^{-|x|^2/(4(b-a)t)} e^{-at} + O\left(t^{-N/2-\theta} e^{-at}\right), \quad (3.4)$$

где A_0 и $\theta > 0$ — постоянные. Из формулы (3.4) видно, что в обоих случаях ограничение $a < b$ существенно. В связи с этим интересен вопрос, каково качественное поведение решений задач Коши в предельном случае $a = b$. Частично на него отвечают работы [94] и [95]. В этих статьях исследовались задачи Коши для уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + F = 0$$

с нелинейностями вида $F = \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n u^n$ ($k \geq 2$) и $F = \mu(x) |u|^\sigma u$ ($\sigma \geq 1$) соответственно.

Данная глава основана на исследовании, которое было опубликовано кратко в виде хроники семинара [92], а затем — более подробно — в статье [93]. Это исследование обобщает результаты, опубликованные ранее в [94] и [95].

Введем обозначения, необходимые для изложения рассуждений:

$$\begin{aligned} L_q &= L_q(R^N), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad H^2 = H^2(R^N), \\ \bar{B}[\cdot] &= F^{-1} \left[\frac{1}{1+|p|^2} F[\cdot] \right], \quad B(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{R^N} \frac{e^{i(p,x)}}{1+|p|^2} dp, \\ U &= L_\infty \cap H^2, \quad X = C[0; \infty; U), \quad \|\varphi(x, t)\| = \sup_{t \geq 0} (\|\varphi(x, t)\|_{L_\infty} + \|\varphi(x, t)\|_{H^2}) \\ X_\rho &= \{\varphi(\cdot) \in X \mid \|\varphi(\cdot)\| < \rho\} \end{aligned}$$

(под $F[\cdot]$ подразумеваем преобразование Фурье). Через C будем обозначать положительные постоянные, возможно, различные.

Будем предполагать, что $u_0(x) \in U$.

Замечание. Несложно убедиться, что $\bar{B}[\varphi] = \int_{R^N} B(x-y) \varphi(y) dy$.

Замена $u = v e^{-at}$ сводит задачу (3.1) к следующей:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta v - v) + e^{at} f(x, v e^{-at}) = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x). \quad (3.5)$$

Формально применим к уравнению в задаче (3.5) оператор $\bar{B}[\cdot]$, затем проинтегрируем его от 0 до t с учетом начальных условий. Получим следующее уравнение:

$$v(x, t) = u_0(x) + \int_0^t e^{a\tau} \bar{B}[f(x, ve^{-a\tau})] d\tau. \quad (3.6)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (3.1) называется элемент $u(\cdot)$ пространства X , определяемый по правилу $u = ve^{-at}$, где v — решение уравнения (3.6) из пространства X .

Как и в [94] и [95], будем пользоваться двумя леммами, основанными на представлении $B(\cdot)$ через функцию Макдональда порядка $(N/2 - 1)$ [25].

Лемма 1. Существует такая постоянная $c_1 > 0$, что $\|\bar{B}[\varphi]\|_{H^2} \leq c_1 \|\varphi\|_{L_2}$ при $\varphi \in L_2$.

Лемма 2. Существует число $I = \sup_{x \in R^N} \int_{R^N} |B(x - y) \mu(y)| dy < \infty$.

3.1. Основные утверждения

Теорема 1. Существует такая окрестность нуля, что если $\|u_0\|$ находится в этой окрестности, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.1).

Пусть $\rho = c_2 \|u_0\|$, где c_2 — пока произвольное положительное число. Обозначим

$$Mv = u_0(x) + \int_0^t e^{a\tau} \bar{B}[f(x, ve^{-a\tau})] d\tau.$$

Достаточно доказать, что оператор M переводит шар X_ρ в себя и является сжимающим отображением при достаточно малых ρ .

Сначала докажем, что если $v \in X_\rho$, то и $Mv \in X_\rho$.

Заметим, что

$$\sup_t \|Mv\|_{L_\infty} \leq \|u_0\|_{L_\infty} + \sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} \bar{B}[f(x, ve^{-a\tau})] d\tau \right\|_{L_\infty}.$$

Воспользуемся (3.2) и леммой 2 для оценки подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} |e^{a\tau} \bar{B} [f(x, ve^{-a\tau})]| &= \left| e^{a\tau} \int_{R^N} B(x-y) f(y, v(y, \tau)e^{-a\tau}) dy \right| \leq \\ &\leq e^{a\tau} \int_{R^N} |B(x-y) \mu(y)| |v|^\alpha e^{-\alpha a\tau} dy \leq \\ &\leq e^{(1-\alpha)a\tau} \sup_t \|v\|_{L^\infty}^\alpha \cdot I \leq I e^{(1-\alpha)a\tau} \rho^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_t \|Mv\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \frac{I\rho^\alpha}{a(\alpha-1)}.$$

Докажем теперь аналогичное соотношение в пространстве H^2 . Так как в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \sup_t \|Mv\|_{H^2} &\leq \|u_0\|_{H^2} + \sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} \bar{B} [f(x, ve^{-a\tau})] d\tau \right\|_{H^2} \leq \\ &\leq \|u_0\|_{H^2} + c_1 \sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} f(x, ve^{-a\tau}) d\tau \right\|_{L_2}, \end{aligned}$$

то достаточно оценить второе слагаемое (без множителя c_1):

$$\begin{aligned} \sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} f(x, ve^{-a\tau}) d\tau \right\|_{L_2} &= \sup_t \sqrt{\int_{R^N} \left(\int_0^t e^{a\tau} f(x, ve^{-a\tau}) d\tau \right)^2 dx} \leq \\ &\leq \sup_t \sqrt{\int_{R^N} \left| \int_0^t e^{a\tau} \mu(x) |v|^\alpha e^{-\alpha a\tau} d\tau \right| \cdot \left| \int_0^t e^{a\tau} \mu(x) |v|^\alpha e^{-\alpha a\tau} d\tau \right| dx} \leq \\ &\leq \sup_t \sqrt{\int_{R^N} \left(\int_0^\infty |\mu| |v|^{2-4/q} |v|^{\alpha-2+4/q} e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty |\mu| |v|^\alpha e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau \right) dx} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_t \sqrt{\int_{R^N} \left(\mu^2 \sup_t \|v\|_{L_\infty}^{2\alpha-2+4/q} \int_0^\infty |v|^{2-4/q} e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau \int_0^\infty e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau \right) dx} = \\
&= \sup_t \|v\|_{L_\infty}^{\alpha-1+2/q} \sup_t \sqrt{\int_{R^N} \mu^2 \int_0^\infty |v|^{2-4/q} e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau \cdot \frac{1}{(\alpha-1)a} dx} = \\
&= \sup_t \|v\|_{L_\infty}^{\alpha-1+2/q} \frac{1}{\sqrt{(\alpha-1)a}} \sup_t \sqrt{\int_0^\infty e^{(1-\alpha)a\tau} \int_{R^N} \mu^2 |v|^{2-4/q} dx d\tau}.
\end{aligned}$$

Положим $\delta = \int_{R^N} \mu^2 |v|^{2-4/q} dx$. Если $q = 2$, то $\delta = \|\mu\|_{L_2}^2$. Пусть $q > 2$.

Применим неравенство Гельдера:

$$\delta \leq \|\mu^2\|_{L_{q/2}} \left\| |v|^{2-4/q} \right\|_{L_{q/(q-2)}} = \left(\int_{R^N} |\mu|^q dx \right)^{2/q} \left(\int_{R^N} v^2 dx \right)^{(q-2)/q},$$

а значит, $\delta \leq \|\mu\|_{L_q}^2 \|v\|_{L_2}^{2(q-2)/q}$. Так как $\|v\|_{L_2} \leq \|v\|_{H^2} \leq \rho$, то $\delta \leq \|\mu\|_{L_q}^2 \rho^{2(q-2)/q}$.

Поэтому

$$\sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} f(x, ve^{-a\tau}) d\tau \right\|_{L_2} \leq \frac{\rho^{\alpha-1+2/q}}{\sqrt{(\alpha-1)a}} \sup_t \sqrt{\int_0^\infty e^{(1-\alpha)a\tau} \|\mu\|_{L_q}^2 \rho^{2(q-2)/q} d\tau}.$$

Непосредственно вычисляя интеграл, получим, что

$$\sup_t \left\| \int_0^t e^{a\tau} f(x, ve^{-a\tau}) d\tau \right\|_{L_2} \leq \frac{\|\mu\|_{L_q} \rho^\alpha}{(\alpha-1)a}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\|Mv\| &\leq \sup_t \|Mv\|_{L_\infty} + \sup_t \|Mv\|_{H^2} \leq \\
&\leq \|u_0\|_{L_\infty} + \frac{I\rho^\alpha}{a(\alpha-1)} + \|u_0\|_{H^2} + \frac{c_1 \|\mu\|_{L_q}^2 \rho^\alpha}{(\alpha-1)a} \leq \frac{\rho}{c_2} + c_3 \rho^\alpha,
\end{aligned}$$

где

$$c_3 = \frac{I + c_1 \|\mu\|_{L_q}^2}{(\alpha-1)a}.$$

Из этой оценки видно, что можно подобрать такое $c_2 > 0$, что для всех достаточно малых ρ будет выполняться соотношение $\|Mv\| \leq \rho/c_2 + c_3\rho^\alpha < \rho$. Значит, оператор M переводит шар X_ρ в себя.

Аналогичным образом можно с помощью условия (3.3) доказать, что оператор M является сжимающим отображением. Значит, существует единственное решение уравнения $Mv = v$ из пространства X , и задача (3.1) однозначно разрешима при достаточно малых по норме начальных данных. **Теорема доказана.**

Теорема 2. *Существует такая окрестность нуля, что если $\|u_0\|$ находится в этой окрестности, то при $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:*

$$u(x, t) = A(x) e^{-at} + O(e^{-\alpha at}),$$

где $A(\cdot)$ зависит только от пространственной переменной.

Пусть задача (3.1) однозначно разрешима: $v \in X_\rho$, с достаточно малым ρ . Учитывая (3.6), представим v в следующем виде:

$$v(x, t) = u_0(x) + \int_0^\infty e^{a\tau} \bar{B} [f(x, v e^{-a\tau})] d\tau - \int_t^\infty e^{a\tau} \bar{B} [f(x, v e^{-a\tau})] d\tau.$$

Обозначим сумму первых двух слагаемых через $A(x)$: эта функция не зависит от времени. Обозначим через R третье слагаемое. Докажем, что $R = O(e^{-(\alpha-1)at})$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$R = \int_t^\infty e^{a\tau} \int_{R^N} B(x-y) f(y, v(y, \tau) e^{-a\tau}) dy d\tau.$$

Оценим R , применяя (3.2):

$$\begin{aligned} |R| &\leq \int_t^\infty e^{a\tau} \int_{R^N} |B(x-y) \mu(y)| |v(y, \tau)|^\alpha e^{-\alpha a\tau} dy d\tau \leq \\ &\leq \sup_t \|v\|_{L^\infty}^\alpha \int_t^\infty e^{(1-\alpha)a\tau} \int_{R^N} |B(x-y) \mu(y)| dy d\tau \leq \rho^\alpha I \int_t^\infty e^{(1-\alpha)a\tau} d\tau = \frac{\rho^\alpha I e^{(1-\alpha)at}}{(\alpha-1)a}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v(x, t) = A(x) + O\left(e^{(1-\alpha)at}\right),$$

откуда

$$u(x, t) = v(x, t) e^{-at} = A(x) e^{-at} + O\left(e^{-\alpha at}\right).$$

Теорема доказана.

Назовем результаты, полученные ранее соответственно в [94] и [95] (они являются частными случаями теоремы 2).

1. Пусть в (3.1) $f(x, u) = \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n u^n$, ($k \geq 2$, степенной ряд сходится в некоторой окрестности нуля). Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$u(x, t) = A(x) e^{-at} + O\left(e^{-kat}\right).$$

2. Пусть в (3.1) $f(x, u) = \mu(x) |u|^\sigma u$, где $\sigma \geq 1$, $\mu(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^N)$. При этом предполагается, что q удовлетворяет следующим условиям: если $N \leq 3$, то $2 \leq q \leq \infty$, иначе — $N/2 < q \leq \infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотика:

$$u(x, t) = A(x) e^{-at} + O\left(e^{-(\sigma+1)at}\right).$$

(В обоих случаях имеется в виду, что $A(\cdot)$ зависит только от пространственной переменной, а $\|u_0\|$ достаточно мала.)

3.2. Выводы к главе

В предыдущей главе рассматривались задачи Коши для уравнений, содержащих член $b\Delta u - au$, причем существенным было ограничение $b > a$. Здесь же исследована задача Коши для уравнения, содержащего слагаемое $a(\Delta u - u)$. При некоторых предположениях выведена асимптотическая формула при $t \rightarrow \infty$ для решения.

Глава 4

Начально-краевые задачи для уравнений с линейным выражением под знаком производной по времени

В данной главе будут рассматриваться начально-краевые задачи для уравнений соболевского типа. Будет исследована их однозначная разрешимость глобально или локально по времени. В случае локальной (но не глобальной) разрешимости будут найдены оценки времени существования решения. И здесь речь идет о стремлении некоторых параметров к бесконечности. Следовательно, анализ уравнений позволяет установить результаты, которые затруднительно получить с помощью численных методов.

Приведем определения и обозначения, общие для всех задач, изучаемых в данной главе. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} D[u] = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $u(\cdot)$ — действительнзначная функция, зависящая от N -мерного вектора пространственных переменных x и времени $t > 0$, $D[\cdot]$ — нелинейный дифференциальный оператор. При этом считаем, что $x \in \Omega \subset R^N$, где Ω — ограниченное множество с достаточно гладкой границей: $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $0 < \delta \leq 1$.

Введем классы $X_T = C^1 [0; T; H_0^1(\Omega)]$, где T — некоторое положительное число или бесконечность.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (4.1) будем называть такое $u \in X_T$, что*

$$\begin{cases} \langle D[u], w \rangle = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

при всех $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0; T)$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$).

Заметим, что первое равенство в (4.2) можно переписать в виде интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} D[u]w dx = 0. \quad (4.3)$$

Определение 2. Говорят, что обобщенное решение задачи (4.1) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_{∞} . В частности, говорят, что решение разрушается путем опрокидывания, если $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_p &= L_p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad H_0^1 = H_0^1(\Omega), \quad H^{-1} = H^{-1}(\Omega), \\ \|\cdot\| &= \|\cdot\|_{L_2}, \quad \|\cdot\|_{+1} = \|\cdot\|_{H_0^1}, \quad \|\cdot\|_{-1} = \|\cdot\|_{H^{-1}}, \\ v &= ue^{bt}, \quad \Psi = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2, \quad \Phi = \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2. \end{aligned}$$

Число b будет фигурировать в постановках конкретных задач; в предварительных рассуждениях будем считать его произвольным неотрицательным параметром. Штрихом будем обозначать производную по времени. Положим $W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2$. Под нижним индексом «0» будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$ (если не будет оговорено противное). Очевидно, $v_0 = u_0$ и $\Phi_0 = \Psi_0$.

В этой и следующих главах важную роль будут играть теоремы вложения Соболева (их формулировки и доказательства приведены, например, в [13, гл. 5, §4]). Обозначим через C_p оптимальную константу вложения H_0^1 в L_p (если существует), т. е.

$$C_p = \inf\{C \mid \|w\|_{L_p} \leq C\|w\|_{H_0^1} \quad \forall w \in H_0^1\}.$$

Там, где не оговорено противное, под C будем подразумевать положительные постоянные, возможно, различные.

Заметим, что

$$\|\nabla u\|^2 \leq \Psi \leq (C_2^2 + 1) \|\nabla u\|^2,$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{C_2^2 + 1}} \leq \|\nabla u\| \leq \sqrt{\Psi},$$

а кроме того,

$$\frac{e^{-bt}\sqrt{\Phi}}{\sqrt{C_2^2 + 1}} \leq \|\nabla u\| \leq e^{-bt}\sqrt{\Phi}.$$

Следовательно, соотношения

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Phi = \infty \quad (T < \infty)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Psi = \infty \quad (T < \infty)$$

равносильны утверждению, что решение опрокидывается за время $T < \infty$.

Задачи вида (4.1) будут изучаться по следующей схеме.

С помощью принципа сжимающих отображений доказываем, что задача однозначно разрешима в некотором пространстве (а именно, в X_T с некоторым $T \in (0; \infty]$). Затем вводим энергетические функционалы $\Phi[u(t)]$ и $\Psi[u(t)]$ и доказываем, что при некоторых условиях $f_2(t) \leq \Phi$, $\Psi \leq f_1(t)$, где $f_{1,2}(\cdot)$ — функции, которые имеют конечные значения в окрестностях нуля и стремятся к бесконечности соответственно при $t \rightarrow T_1^-$ и $t \rightarrow T_2^-$. Значит, происходит опрокидывание решения за время $T \in [T_1; T_2]$. Так выводятся верхние и нижние оценки времени существования. Возможна и ситуация, когда при некоторых значениях параметров $\Psi[u(t)] < \infty$ при всех t , а значит, решение существует глобально по времени.

Лемма 1. *Имеет место неравенство $\Phi'^2/4 \leq \Phi W$.*

Обозначим $y_k = \partial u / \partial x_k$, $k \in \{1, \dots, N\}$. С одной стороны, с помощью неравенств Коши-Буняковского-Шварца можно убедиться, что

$$\left(\|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^N \|y_k\| \|y'_k\| \right)^2 \leq \left(\|u\|^2 + \sum_{k=1}^N \|y_k\|^2 \right) \left(\|u'\|^2 + \sum_{k=1}^N \|y'_k\|^2 \right) = \Phi W.$$

С другой стороны,

$$\left(\|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^N \|y_k\| \|y'_k\| \right)^2 \geq \left(\int_{\Omega} uu' dx + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} y_k y'_k dx \right)^2 = \left(\frac{\Phi'}{2} \right)^2.$$

Следовательно, $(\Phi'/2)^2 \leq \Phi W$. **Лемма доказана.**

Лемма 2. Пусть выполняется неравенство

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + F(t, \Phi, \Phi') \geq 0,$$

где α — положительная постоянная, $F(\cdot)$ — функция, определенная на $[0; \infty) \times (0; \infty) \times R$, $\Phi(t)$ принимает положительные значения в некоторой окрестности нуля. Подстановка $\Phi = z^{-1/\alpha}$ сводит это неравенство к неравенству с единичным коэффициентом при второй производной.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $\Phi > 0$ (а значит, и $z > 0$) неравенство равносильно следующему:

$$z'' \leq \alpha z^{2/\alpha+1} F(t, z^{-1/\alpha}, -\frac{1}{\alpha} z^{-1/\alpha-1} z').$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $\nu(x) \in L_4$, $w(x) \in H_0^1$, $\sigma \in (1; 2]$, то

$$\left| \int_{\Omega} \nu |w|^{\sigma+2} dx \right| \leq C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\nu\|_{L_4} (\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2)^{\sigma/2+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nu |w|^{\sigma+2} dx \right| &\leq \sqrt{\int_{\Omega} \nu^2 w^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |w|^{2\sigma+2} dx} \leq \\ &\leq \sqrt[4]{\int_{\Omega} \nu^4 dx} \sqrt{\int_{\Omega} w^4 dx} \|w\|_{L_{2\sigma+2}}^{\sigma+1} = \|\nu\|_{L_4} \|w\|_{L_4} \|w\|_{L_{2\sigma+2}}^{\sigma+1} \leq \\ &\leq \|\nu\|_{L_4} \cdot C_4 \|\nabla w\|_{L_2} \cdot C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\nabla w\|_{L_2}^{\sigma+1} \leq C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\nu\|_{L_4} (\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2)^{\sigma/2+1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

4.1. Модельная задача

Рассмотрим основные идеи изучения начально-краевой задачи (4.1) на примере следующей относительно простой модельной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \mu(t)u^3 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Это исследование было опубликовано в виде тезисов [101].

Будем предполагать, что $N = 3$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, причем $\mu(t) > 0$ всюду на $[0; \infty)$.

Задача (4.4) является задачей вида (4.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (4.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \mu(t)u^3 \right) w dx = 0$$

для всех $w \in H_0^1$, $t \in [0; T)$.

Теорема 1. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (4.4). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Введем следующие операторы: $Au = u - \Delta u$, $Fu = \mu(t)u^3$. Заметим, что оператор $A : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ имеет липшиц-непрерывный обратный:

$$\|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\|_{-1} \leq \|z_1 - z_2\|_{+1} \quad \forall z_{1,2} \in H^{-1}.$$

Действительно, несложно убедиться, что если $u, v \in H_0^1$, то

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (u - v)^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v)^2 dx = \\ &= \|u - v\|^2 + \|\nabla u - \nabla v\|^2 \geq \|u - v\|_{+1}^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$|\langle Au - Av, u - v \rangle| \leq \|Au - Av\|_{-1} \|u - v\|_{+1}.$$

Следовательно,

$$\|u - v\|_{+1}^2 \leq \|Au - Av\|_{-1} \|u - v\|_{+1},$$

откуда, если положить $u = A^{-1}z_1$, $v = A^{-1}z_2$, $z_{1,2} \in H^{-1}$, получим нужное свойство $A(\cdot)$.

Значит, в обобщенном смысле задача сводится к следующему уравнению:

$$u = Hu \equiv u_0 + \int_0^t A^{-1}Fud\tau. \quad (4.5)$$

Преобразуем величину $\Delta = \|Fu_1 - Fu_2\|_{-1}$, учитывая вложение L_2 в H^{-1} :

$$\begin{aligned} \Delta &= |\mu(t)| \|u_1^3 - u_2^3\|_{-1} \leq C\mu(t) \|u_1^3 - u_2^3\|_{L_2} = \\ &= C\mu(t) \|u_1^3 - u_1^2u_2 + u_1^2u_2 - u_2^3\|_{L_2} \leq C\mu(t)(\delta_1 + \delta_2), \end{aligned}$$

где

$$\delta_1 = \|u_1^3 - u_1^2u_2\|, \quad \delta_2 = \|u_1^2u_2 - u_2^3\|.$$

Оценим δ_1 с помощью неравенства Гельдера:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{\int_{\Omega} u_1^4(u_1 - u_2)^2 dx} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u_1|^{4p} dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} = \|u_1\|_{L_{4p}}^2 \|u_1 - u_2\|_{L_{2q}}, \end{aligned}$$

где $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$. Подберем p и q так, чтобы обеспечить применимость теоремы вложения: $0 < 4p \leq 6$, $0 < 2q \leq 6$, $1/p + 1/q = 1$. Этим условиям удовлетворяют только значения $p = 3/2$, $q = 3$. Таким образом,

$$\delta_1 \leq \|u_1\|_{L_6}^2 \|u_1 - u_2\|_{L_6} \leq C \|u_1\|_{+1}^2 \|u_1 - u_2\|_{+1}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\delta_2 \leq C \|u_2\|_{+1}^2 \|u_1 - u_2\|_{+1}.$$

Следовательно,

$$\Delta \leq C\mu(t)\max^2(\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1})\|u_1 - u_2\|_{+1}.$$

Исследуем сначала разрешимость задачи (4.4) в пространстве L_∞ по времени, а затем установим, что решение имеет нужную гладкость.

Рассмотрим шар $B_R = \left\{ u \in L_\infty[0; T; H_0^1) \mid \|u\|_T \equiv \|\|u\|_{+1}\|_{L_\infty[0; T)} \leq R \right\}$. Докажем, что оператор H переводит этот шар в себя. Пусть $u \in B_R$. В силу найденных оценок, $\|Hu\|_T \leq \|u_0\|_{+1} + CR^3 \int_0^T \mu(\tau)d\tau$. Пусть R достаточно велико, т. е. $\|u_0\|_{+1} \leq R/2$. Тогда

$$\|Hu\|_T \leq \frac{R}{2} + CR^3 \int_0^T \mu(\tau)d\tau.$$

Пусть, кроме того, T достаточно мало, т. е. $\int_0^T \mu(\tau)d\tau \leq (2CR^2)^{-1}$. Таким образом, $\|Hu\|_T \leq R/2 + R/2 = R$, а значит, $Hu \in B_R$ при $u \in B_R$. Аналогично можно доказать, что оператор H является сжимающим отображением. Таким образом, существует единственное решение уравнения (4.5) из класса $L_\infty[0; T; H_0^1)$.

Применим алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Доказано, что уравнение разрешимо при $t \in [0; T)$ — теперь надо доказать, что оно разрешимо и на некотором промежутке $[0; T_0) \supseteq [0; T)$, причем если $T_0 < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|u\|_{+1} = \infty$. Перепишем (4.5) в следующем виде:

$$u = u_0 + \int_0^t G(u)(\tau)d\tau, \quad G(u)(\tau) = \mu(\tau)A^{-1}u^3(\tau).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(T) = \|\|u\|_{+1}\|_{L_\infty(0; T)}.$$

Заметим, что эта функция является неубывающей, а значит, существует предел $\lim_{T \rightarrow T_0^-} \psi(T)$, возможно, бесконечный. Покажем, что этот предел бесконечен, если $T_0 < \infty$. Предположим противное: $\lim_{T \rightarrow T_0^-} \psi(T) < \infty$.

Пусть T' — некоторое число из промежутка $(0; T_0)$. Пусть t достаточно мало, т. е. $T' + t < T_0$. Тогда величины T' и $T' + t$ будут достаточно малы, чтобы корректно было рассмотреть следующие два уравнения:

$$u(T') = u_0 + \int_0^{T'} G(u)(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

и

$$u(T' + t) = u_0 + \int_0^{T'+t} G(u)(\tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Легко убедиться, что из (4.7) и (4.6) следует уравнение

$$u(T' + t) = u(T') + \int_{T'}^{T'+t} G(u)(\tau) d\tau.$$

Положим в этом уравнении $\tau = T' + s$, а затем введем обозначение $v(t) = u(T' + t)$. Таким образом, получим уравнение

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \mu(T' + s) A^{-1} v^3(s) ds.$$

Это уравнение имеет такой же вид, как (4.5), а значит, оно разрешимо относительно $v(\cdot)$ на некотором промежутке $(0; T^*)$. Кроме того, заметим, что $\|u\|_{+1}|_{t=T'} < \infty$. Следовательно, функция $T^* = T^*(T')$ имеет положительное минимальное значение. В дальнейшем будем подразумевать под T^* это минимальное значение. Теперь возьмем в качестве T' величину $T_0 - T^*/2$. Таким образом, уравнение

$$u(t) = u_0 + \int_0^t G(u)(\tau) d\tau$$

разрешимо не только на промежутке $(0; T')$, но и на промежутке $(0; T' + T^*) = (0; T_0 + T^*/2)$. Применяя и далее описанный алгоритм, получим, что $T_0 = \infty$, что противоречит предположению, что $T_0 < \infty$. Значит, $\lim_{T \rightarrow T_0^-} \psi(T) = \infty$. В дальнейшем будем под T подразумевать T_0 .

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty,$$

если T конечно.

Заметим, что оператор H переводит $L_\infty [0; T; H_0^1)$ в $AC [0; T; H_0^1)$, а $AC [0; T; H_0^1) \rightarrow C^1 [0; T; H_0^1)$. Поэтому интегральное уравнение однозначно разрешимо не только в классе $L_\infty [0; T; H_0^1)$, но и в $C^1 [0; T; H_0^1)$. **Теорема доказана.**

Заметим, что при тривиальных начальных данных единственное решение будет тривиальным. В дальнейшем будем рассматривать решения задачи (4.4), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Для данной задачи возьмем для удобства $b = 0$, откуда $\Phi \equiv \Psi$. Из определения Φ следует, что $\Phi_0 = \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2$. В дальнейшем будем считать эту величину данной.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если*

$$\int_0^\infty \mu(\tau) d\tau < \frac{1}{2C_4^4 \Phi_0}, \quad (4.8)$$

то $T = \infty$, т. е. решение существует глобально по времени, и его разрушения не происходит.

2. *Пусть существуют числа T_1 и T_2 — положительные корни соответственно следующих квадратурных уравнений относительно t :*

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{2C_4^4 \Phi_0}$$

и

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|_{L_4}^4}.$$

Тогда происходит опрокидывание решения за конечное время $T \in [T_1; T_2]$.
В частности, $\mu = \text{const}$ является достаточным условием для опрокидывания решения, причем в этом случае

$$\frac{1}{2C_4^4\mu\Phi_0} \leq T \leq \frac{\Phi_0}{2\mu\|u_0\|_{L_4}^4}.$$

Замечание. Пункты этой теоремы не противоречат друг другу, поскольку неравенство из первого пункта и существование T_2 несовместимы. Действительно, если эти утверждения верны одновременно, то

$$\frac{1}{2C_4^4\Phi_0} > \int_0^\infty \mu(\tau)d\tau = \int_0^{T_2} \mu(\tau)d\tau + \int_{T_2}^\infty \mu(\tau)d\tau \geq \int_0^{T_2} \mu(\tau)d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|_{L_4}^4},$$

что противоречит неравенству

$$\frac{1}{2C_4^4\Phi_0} \leq \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|_{L_4}^4},$$

которое следует непосредственно из теоремы вложения.

Полагая в (4.3) $w = u$ и $w = u'$, получим после интегрирования по частям соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad & -\frac{\Phi'}{2} + \mu\|u\|_{L_4}^4 = 0, \\ II. \quad & -W + \frac{\mu}{4}\frac{d}{dt}\|u\|_{L_4}^4 = 0. \end{aligned}$$

Получим следствие из I равенства с помощью теоремы вложения:

$$\Phi' = 2\mu\|u\|_{L_4}^4 \leq 2\mu C_4^4\|\nabla u\|_{L_2}^4 \leq 2C_4^4\mu\Phi^2,$$

откуда

$$\Phi^{-2}\Phi' \leq 2C_4^4\mu(t).$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t . Следовательно,

$$-\Phi^{-1}\Big|_0^t \leq 2C_4^4 \int_0^t \mu(\tau)d\tau \Leftrightarrow \Phi \leq \left[\Phi_0^{-1} - 2C_4^4 \int_0^t \mu(\tau)d\tau \right]^{-1} \quad (4.9)$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Если параметры задачи таковы, что выполняется неравенство (4.8), что из последней оценки видно, что Φ можно оценить сверху конечной величиной при любом конечном t , а значит, разрушения решения не происходит. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть параметры таковы, что выражение в квадратных скобках в (4.9) равно нулю при некотором $t = T_1 > 0$. Значит, Φ можно оценить сверху конечной величиной в окрестности нуля, границей которой является наименьший положительный корень T_1 квадратного уравнения

$$\Phi_0^{-1} - 2C_4^4 \int_0^t \mu(\tau) d\tau = 0. \quad (4.10)$$

В частности, если μ постоянно, то $T_1 = (2C_4^4 \mu \Phi_0)^{-1}$. Значит, $T \geq T_1$.

Перейдем к оцениванию T сверху.

Выразим $\|u\|_{L_4}^4$ из I энергетического тождества и подставим во II:

$$W = \frac{\mu}{8} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi'}{\mu} \right).$$

Подставим это выражение в неравенство леммы 1:

$$\Phi'^2 \leq 4\Phi \frac{\mu}{8} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi'}{\mu} \right) \Leftrightarrow \Phi\Phi'' - 2\Phi'^2 - \frac{\mu'}{\mu} \Phi\Phi' \geq 0.$$

Полагая $\Phi = z^{-1}$, после упрощений получим:

$$z'' \leq \frac{\mu'}{\mu} z' \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{\mu} \right) \leq 0.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$\frac{z'}{\mu} \leq \frac{z'_0}{\mu_0} \Leftrightarrow z' \leq \frac{z'_0}{\mu_0} \mu.$$

Еще раз проинтегрируем неравенство от 0 до t :

$$z - z_0 \leq \frac{z'_0}{\mu_0} \int_0^t \mu(\tau) d\tau.$$

Вернемся к первоначальным обозначениям, учитывая, что $z'_0 = -\Phi_0^{-2}\Phi'_0$:

$$\Phi^{-1} - \Phi_0^{-1} \leq \frac{-\Phi_0^{-2}\Phi'_0}{\mu_0} \int_0^t \mu(\tau) d\tau \Leftrightarrow \Phi \geq \left(\Phi_0^{-1} - \frac{\Phi_0^{-2}\Phi'_0}{\mu_0} \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Таким образом, Φ можно оценить снизу конечной величиной в окрестности нуля, границей которой является наименьший положительный корень T_2 квадратурного уравнения

$$\Phi_0^{-1} - \frac{\Phi_0^{-2}\Phi'_0}{\mu_0} \int_0^t \mu(\tau) d\tau = 0.$$

Из I энергетического тождества видно, что $\Phi'_0 = 2\mu_0\|u_0\|_{L_4}^4$. Значит, уравнение для T_2 можно привести к следующему виду:

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|_{L_4}^4}. \quad (4.11)$$

В частности, если μ постоянно, то $T_2 = (2\mu\|u_0\|_{L_4}^4)^{-1} \Phi_0$. Таким образом, $T \leq T_2$.

Теорема доказана.

Интересен вопрос, насколько точны оценки T_1 и T_2 . Из соотношений (4.10) и (4.11) следует, что

$$\int_{T_1}^{T_2} \mu(\tau) d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|_{L_4}^4} - \frac{1}{2C_4^4\Phi_0}.$$

Преобразуем левую часть равенства с помощью теоремы Лагранжа. Предположим дополнительно, что $\inf_{t \geq 0} \mu(t) > 0$. Таким образом,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2\mu(\xi)} \left(\frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_4}^4} - \frac{1}{C_4^4\Phi_0} \right),$$

где $\xi \in [T_1; T_2]$. Рассмотрим семейство начальных данных вида $u_0(x) = kv(x)$, где $v(\cdot)$ — фиксированный нетривиальный элемент H_0^1 , k — положительный числовой параметр. Так как $\Phi = k^2(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2)$, $\|u_0\|_{L_4}^4 = k^4\|v\|_{L_4}^4$, то

$$T_2 - T_1 = O(k^{-2})$$

при $k \rightarrow \infty$, т. е. длина промежутка, который, как установлено, содержит T , быстро уменьшается при возрастании начальных данных в нормах L_2 и L_4 за счет увеличения параметра k .

4.2. Уравнение общего вида

В данном разделе и двух следующих будет изложено исследование уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^\sigma u = 0. \quad (4.12)$$

А именно, в данном разделе будет рассмотрено уравнение (4.12) общего вида, а в двух следующих — уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a(\Delta u - u) + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu |u|^\sigma u = 0 \quad (4.13)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^\sigma u = 0. \quad (4.14)$$

Поясним, что результаты, полученные для уравнений (4.13) и (4.14), не сводятся к частным случаям результатов, относящихся к (4.12), поскольку на параметры были наложены следующие условия.

1. Для уравнения (4.12): $N = 3$, $a \in R$, $b \in [0; \infty)$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$. Кроме того, для вывода верхней оценки для T дополнительно предполагалось, что $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, $b - a < 2 - 4/\sigma$, откуда следовало, что $b < a$.
2. Для уравнения (4.13): $N = 3$, $a = b > 0$, $\mu = \text{const}$, $\lambda \in R^3$, $\sigma \in (1; 4]$. Кроме того, для вывода верхней оценки для T дополнительно предполагалось, что μ — достаточно большое положительное число, $\sigma = 2$ или σ — произвольное число из множества $(1; 4]$, если соответственно λ — ненулевой вектор или нулевой.

3. Для уравнения (4.14): $N = 3$, $a = b = 0$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$. Кроме того, при выводе верхней оценки для T рассматривались два варианта дополнительных предположений:

- а. $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, $\lambda = (0; 0; 0)$, некоторое квадратурное уравнение разрешимо;
- б. μ зависит только от x и находится в L_4 , а число $\int_{\Omega} \mu_0 |u_0|^{\sigma+2} dx$ достаточно велико.

Перейдем к исследованию (4.12).

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^{\sigma} u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Здесь $N = 3$, $a \in R$, $b \in [0; \infty)$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$, $u_0(x) \in H_0^1$.

Раздел основан на исследовании, которому были посвящены тезисы [106] и статья [91].

Замечание. Так как $6/(2-\sigma) > 4$ при $\sigma \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$ следует, что $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4)$. В дальнейшем это свойство будет использоваться.

Задача (4.15) является задачей вида (4.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (4.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \mu(x, t) |u|^{\sigma} u \right) w dx = 0 \quad (4.16)$$

для всех $w \in H_0^1$, $t \in [0; T)$.

Замечание. Условие $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$ обеспечивает принадлежность слагаемого $(\mu |u|^\sigma u)$ множеству L_2 и, следовательно, корректность сформулированного определения. Действительно, возьмем такие положительные α и β , что $1/\alpha + 1/\beta = 1$, и оценим это слагаемое с помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения:

$$\|\mu |u|^\sigma u\|_{L_2}^2 \leq \left(\int_{\Omega} |\mu|^{2\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |u|^{2(\sigma+1)\beta} dx \right)^{1/\beta} \leq \|\mu\|_{L_{2\alpha}}^2 \cdot C \|u\|_{H_0^1}^{2(\sigma+1)}.$$

Применимость теоремы вложения обеспечивается условием $2(\sigma+2)\beta \leq 6 \Leftrightarrow 2\alpha \geq 6/(2-\sigma)$. Так как $L_{\alpha_1} \subseteq L_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$, то наиболее слабым допустимым условием относительно $\mu(\cdot)$ будет $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$.

Теорема 3. Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (4.15). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.

Введем следующие операторы: $Au = u - \Delta u$, $F_1 u = (\lambda, \nabla) u^2$, $F_2 u = \mu(x, t) |u|^\sigma u$. Заметим, что оператор $A : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ имеет липшиц-непрерывный обратный: $\|A^{-1} z_1 - A^{-1} z_2\|_{-1} \leq \|z_1 - z_2\|_{+1} \forall z_{1,2} \in H_0^1$. В обобщенном смысле задача сводится к следующему уравнению:

$$u = Hu \equiv u_0 e^{-bt} + \int_0^t a^{-b(t-\tau)} A^{-1} ((b-a)u + F_1 u + F_2 u) d\tau. \quad (4.17)$$

Заметим, что

$$\|F_1 u_1 - F_1 u_2\|_{-1} \leq C \max(\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1}$$

(аналогичное соотношение доказано в [19, с. 394]).

С помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения H_0^1 в L_p можно доказать, что

$$\|F_2 u_1 - F_2 u_2\|_{-1} \leq C \|\mu\|_{L_4} \max^\sigma(\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1}.$$

Рассмотрим шар $B_R = \left\{ u \in L_\infty[0; T; H_0^1] \mid \|u\|_T \equiv \|\|u\|_{+1}\|_{L_\infty[0; T]} \leq R \right\}$.

Докажем, что оператор H переводит этот шар в себя. Пусть $u \in B_R$. В силу найденных оценок $\|Hu\|_T \leq \|u_0\|_{+1} + CT(R + R^2 + R^{\sigma+1})$. Пусть R достаточно велико, т. е. $\|u_0\|_{+1} \leq R/2$. Пусть T достаточно мало, т. е. $T \leq (2C(1 + R + R^\sigma))^{-1}$. Следовательно, и $Hu \in B_R$. Аналогично можно доказать, что оператор H является сжимающим. Таким образом, существует единственное решение уравнения (4.17) из класса $L_\infty [0; T; H_0^1]$.

Далее будем рассуждать по аналогии с [19]. Во-первых, применим стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Получим, что существует некоторое максимальное $T \in (0; \infty]$, причем если T конечно, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$. Во-вторых, заметим, что оператор H переводит $L_\infty [0; T; H_0^1]$ в $AC [0; T; H_0^1]$, а это пространство — в $C^1 [0; T; H_0^1]$. Значит, интегральное уравнение (4.17) однозначно разрешимо не только в классе $L_\infty [0; T; H_0^1]$, но и в $C^1 [0; T; H_0^1]$. **Теорема доказана.**

Очевидно, если начальные данные тривиальны, то и единственное решение будет тривиальным. В дальнейшем будем рассматривать решения задачи (4.15), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Теорема 4. Пусть $\mu(x, t) \in C [0; T; L_4]$. Положим

$$J = \frac{\Psi_0^{-\sigma/2}}{C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma}.$$

1. Если

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{-\min(a,b)\sigma\tau} d\tau < J$$

при всех конечных t , то решение существует глобально по времени.

2. Пусть уравнение

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{-\min(a,b)\sigma\tau} d\tau = J \quad (4.18)$$

имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$.

В частности, если μ зависит только от x , то T_1 имеет явное выражение:

$$T_1 = \begin{cases} -\frac{1}{\sigma \min(a,b)} \ln \left(1 - \frac{\min(a,b)\sigma J}{\|\mu\|_{L_4}} \right), & \min(a,b) \neq 0 \\ \frac{J}{\|\mu\|_{L_4}}, & \min(a,b) = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Замечание. Как уже отмечалось, условие $\mu(x,t) \in C[0; T; L_4(\Omega))$ следует из условия $\mu(x,t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)}(\Omega))$, для которого была сформулирована теорема об однозначной разрешимости.

Положим в (4.16) $w = u$, после интегрирования по частям получим:

$$\frac{\Psi'}{2} + b \|\nabla u\|^2 + a \|u\|^2 = \int_{\Omega} \mu |u|^{\sigma+2} dx.$$

Так как $b \|\nabla u\|^2 + a \|u\|^2 \geq \min(a,b) \Psi$, а к интегралу применима лемма 3, то из равенства следует, что

$$\Psi' + 2k\Psi \leq 2g(t) \Psi^{\sigma/2+1},$$

где $k = \min(a,b)$, $g(t) = C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\mu\|_{L_4}$.

Положив $z = \Psi^{-\sigma/2}$, приведем неравенство к виду

$$z' - k\sigma z + \sigma g(t) \geq 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} (ze^{-k\sigma t}) + \sigma g(t) e^{-k\sigma t} \geq 0.$$

Интегрируя от 0 до t , получим:

$$\Psi^{-\sigma/2} = z \geq e^{k\sigma t} \left(z_0 - \sigma \int_0^t g(\tau) e^{-k\sigma\tau} d\tau \right),$$

откуда

$$0 < \Psi \leq e^{-2kt} \left[z_0 - \sigma \int_0^t g(\tau) e^{-k\sigma\tau} d\tau \right]^{-2/\sigma}. \quad (4.20)$$

Из этой оценки видно, что решение гарантированно существует в окрестности нуля, границей которой является наименьший положительный корень уравнения $z_0 - \sigma \int_0^t g(\tau) e^{-k\sigma\tau} d\tau = 0$ (если оно разрешимо). Возвращаясь к первоначальным обозначениям, приведем уравнение к виду (4.18).

Возможна ситуация, когда выражение в квадратных скобках в (4.20) положительно при всех конечных t (например, если $\|\mu\|_{L_4} = \text{const}$, а $\Psi_0^{-\sigma/2}$ велико). Тогда решение существует глобально по времени.

Если дополнительно предположить, что μ зависит только от x , то T_1 легко выразить из (4.18) явно. В этом случае формула (4.18) сведется к (4.19).

Теорема доказана.

Для того чтобы оценить сверху время разрушения решения, наложим более жесткие требования на параметры, входящие в задачу (4.15).

Положим

$$\varphi(x, t) = \mu(x, t) e^{-\sigma b t}, \quad \Lambda = \max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k| / 2.$$

Введем параметры $\beta_{1,2,3}$ следующим образом. Если $\lambda \neq (0, 0, 0)$, то $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$. В противном случае — $\beta_1 = \sigma(2 - b + a)$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = \sigma(2 - b + a)/4$.

Теорема 5. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, кроме того, выполняется соотношение

$$b - a < 2 - 4/\sigma. \quad (4.21)$$

Пусть уравнение

$$F(t) = -\ln\left(1 + \beta_2 \Phi_0^{-\beta_3}\right), \quad (4.22)$$

где

$$F(t) = \beta_1 C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \int_0^t \int_0^\tau \|\varphi'\|_{L_4} d\xi d\tau + \\ + \frac{6C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - b + a) - 4} \cdot t^2 - \beta_1 \cdot \frac{(b - a) \|u_0\|^2 + \int_\Omega \mu_0 |u_0|^{\sigma+2} dx}{\Phi_0^{1+\beta_3} + \beta_2 \Phi_0} \cdot t,$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней более одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (4.15)

разрушается за конечное время $T \leq T_2$.

Замечание. Если параметры задачи удовлетворяют условию теоремы 3, то они удовлетворяют и условию теоремы 2. Поэтому из условий данной теоремы вытекает двусторонняя оценка: $T_1 \leq T \leq T_2$.

Замечание. Покажем, что условия теоремы непротиворечивы. Пусть, например, $\mu(x, t) = (m(x) + n(x) \operatorname{arctg} t) e^{b\sigma t}$, $m(\cdot) \in L_4$, $n(\cdot) \in L_4$ (не исключается случай, когда $\|n\|_{L_4} = b = 0$, т. е. в рассмотрении находится и переменный коэффициент μ , зависящий только от x). Тогда, интегрируя по частям, получим, что

$$F(t) = \beta_1 C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|n\|_{L_4} \left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right) + A\Lambda^2 t^2 - Bt,$$

где A и B — соответственно коэффициенты при t^2 (без множителя Λ^2) и при t в определении F . Заметим, что $F(0) = 0$ и $F(t) \leq S(t) \equiv A\Lambda^2 t^2 - B_1 t$, где

$$B_1 = \beta_1 \left(\frac{(b-a) \|u_0\|^2 + \int_{\Omega} m |u_0|^{\sigma+2} dx}{\Phi_0^{1+\beta_3} + \beta_2 \Phi_0} - \frac{\pi}{2} \cdot C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|n\|_{L_4} \right).$$

Поэтому если $S(t) = -L$ при некотором $t > 0$, то и уравнение $F(t) = -L$ будет иметь положительные корни. Уравнение

$$S(t) + L = 0 \tag{4.23}$$

будет иметь положительные корни, если $B_1 > 0$ и $B_1^2 - 4A\Lambda^2 L > 0$. Эти два неравенства следуют из условия $B_1 > 2\Lambda\sqrt{AL}$. Так как при любом положительном B_1 это условие непротиворечиво при достаточно малых Λ , то достаточно потребовать выполнения условия $B_1 > 0$, что равносильно соотношению

$$\left(\Phi_0^{1+\beta_3} + \beta_2 \Phi_0 \right)^{-1} \left((b-a) \|u_0\|^2 + \int_{\Omega} m |u_0|^{\sigma+2} dx \right) > \pi C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|n\|_{L_4} / 2.$$

Специальным выбором $m(\cdot)$ и $n(\cdot)$ можно добиться того, чтобы левая часть неравенства была достаточно велика, а правая — достаточно мала. Таким

образом, условия теоремы непротиворечивы.

Заметим, что T_2 не превосходит наименьший положительный корень T_3 квадратного уравнения (4.23). Значит, данный подкласс коэффициентов μ допускает верхнюю оценку для T и в виде явной формулы: $T \leq T_2 \leq T_3$.

Перейдем к доказательству теоремы.

Перейдем в (4.16) к переменной $v = ue^{bt}$. Если брать $w = v$ и $w = v'$, то после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$I. \frac{\Phi'}{2} = (b - a) \|v\|^2 + \int_{\Omega} e^{-\sigma bt} \mu |v|^{\sigma+2} dx,$$

$$II. W = \frac{b - a}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|v\|^2 + e^{-bt} \int_{\Omega} v' (\lambda, \nabla) v^2 dx + \int_{\Omega} e^{-\sigma bt} \mu |v|^{\sigma} v v' dx.$$

Положим $\delta = b - a$, $\varphi = \mu e^{-\sigma bt}$, $J = \int_{\Omega} \varphi |v|^{\sigma+2} dx$. Учитывая тождество $\int_{\Omega} \varphi |v|^{\sigma} v v' dx = (\sigma + 2)^{-1} \left(J' - \int_{\Omega} \varphi' |v|^{\sigma+2} dx \right)$, перепишем энергетические равенства в следующем виде:

$$I. \frac{\Phi'}{2} = \delta \|v\|^2 + J,$$

$$II. W = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|v\|^2 - e^{-bt} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx + \frac{J'}{\sigma + 2} - \frac{1}{\sigma + 2} \int_{\Omega} \varphi' |v|^{\sigma+2} dx.$$

Выразим J из I равенства и подставим во II. После алгебраических преобразований получим:

$$W = \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \frac{\sigma \delta}{2(\sigma + 2)} \cdot \frac{d}{dt} \|v\|^2 - e^{-bt} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx - \frac{1}{\sigma + 2} \int_{\Omega} \varphi' |v|^{\sigma+2} dx.$$

Рассмотрим по отдельности члены этого равенства.

1. Легко убедиться, что $\left| d \|v\|^2 / dt \right| \leq \|v\|^2 + \|v'\|^2 \leq \Phi + W$.

2. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| e^{-bt} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx \right| &\leq e^{-bt} \max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k| \sum_{k=1}^3 \left| \int_{\Omega} v^2 \frac{\partial}{\partial x_k} v' dx \right| \leq \\ &\leq e^{-bt} \Lambda \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\varepsilon(t)} \int_{\Omega} v^4 dx + \varepsilon(t) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v' \right)^2 dx \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция с положительными значениями. Так как $\int_{\Omega} v^4 dx = \|v\|_{L_4}^4 \leq C_4^4 \|\nabla v\|^4 \leq C_4^4 \Phi^2$ и $\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} (\partial v' / \partial x_k)^2 dx = \|\nabla v'\|^2 \leq W$, то

$$\left| e^{-bt} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx \right| \leq e^{-bt} \Lambda \left(\varepsilon(t) W + \frac{3C_4^4}{\varepsilon(t)} \cdot \Phi^2 \right).$$

Положим $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{bt}$, $\varepsilon_0 > 0$. Таким образом,

$$\left| e^{-bt} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx \right| \leq \varepsilon_0 \Lambda W + \frac{3C_4^4 \Lambda}{\varepsilon_0} \cdot \Phi^2.$$

3. К выражению $\int_{\Omega} \varphi' |v|^{\sigma+2} dx$ применима лемма 3.

С учетом сделанных оценок получим:

$$\begin{aligned} W &\leq \frac{\Phi''}{2(\sigma+2)} + \frac{\sigma\delta\Phi}{2(\sigma+2)} + \frac{\sigma\delta W}{2(\sigma+2)} + \Lambda\varepsilon_0 W + \\ &+ \frac{3C_4^4 \Lambda}{\varepsilon_0} \cdot \Phi^2 + \frac{C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1}}{\sigma+2} \|\varphi'\|_{L_4} \Phi^{\sigma/2+1}. \end{aligned}$$

Соберем в левой части члены, содержащие W , а затем применим лемму 1. Этот переход корректен, поскольку, как будет видно из дальнейших рассуждений, множитель при W положителен. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{\sigma\delta}{2(\sigma+2)} - \Lambda\varepsilon_0 \right) &\leq \\ &\leq \frac{\Phi\Phi''}{2(\sigma+2)} + \frac{\sigma\delta\Phi^2}{2(\sigma+2)} + \frac{3C_4^4 \Lambda \Phi^3}{\varepsilon_0} + \frac{C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1}}{\sigma+2} \|\varphi'\|_{L_4} \Phi^{\sigma/2+2}. \end{aligned}$$

Перепишем неравенство в следующем виде:

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + \sigma\delta\Phi^2 + \frac{6(\sigma+2)C_4^4 \Lambda}{\varepsilon_0} \cdot \Phi^3 + \psi(t)\Phi^{\sigma/2+2} \geq 0, \quad (4.24)$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\Lambda \varepsilon_0 (\sigma + 2)}{2}, \quad \psi(t) = 2C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\varphi'\|_{L_4}.$$

Заметим, что если $\delta < 2$, что вытекает из (4.21), а число $(\Lambda \varepsilon_0)$ достаточно мало, то $\alpha > 0$. Так как $\Phi^{\sigma/2+2} \leq \Phi^2 + \Phi^3$ при $\Phi \geq 0$ и $1 < \sigma \leq 2$, то из (4.24) вытекает следующее неравенство:

$$\Phi \Phi'' - (1 + \alpha) \Phi'^2 + (\sigma \delta + \psi(t)) \Phi^2 + \left(\frac{6(\sigma + 2)C_4^4 \Lambda}{\varepsilon_0} + \psi(t) \right) \Phi^3 \geq 0.$$

Полагая $\Phi = z^{-1/\alpha}$, после алгебраических преобразований получим:

$$z'' \leq \alpha (\sigma \delta + \psi(t)) z + \alpha \left(\frac{6C_4^4 (\sigma + 2) \Lambda}{\varepsilon_0} + \psi(t) \right) z^{1-1/\alpha}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим отдельно случаи $\Lambda \neq 0$ и $\Lambda = 0$.

1. Пусть $\Lambda \neq 0$. Уточним требования на ε_0 , а именно, пусть $1 - 1/\alpha = 0$. Таким образом, $\varepsilon_0 = (\sigma(2 - \delta) - 4) / (2(\sigma + 2)\Lambda)$ (это число положительно в силу (4.21)). Тогда неравенство (4.25) станет линейным неоднородным по z :

$$z'' \leq (\sigma \delta + \psi(t)) z + \left(\frac{12C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - \delta) - 4} + \psi(t) \right). \quad (4.26)$$

Из условия (4.21) следует, что $\sigma \delta < 0$, поэтому из (4.26) вытекает, что

$$z'' \leq \left(\frac{12C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - \delta) - 4} + \psi(t) \right) (z + 1). \quad (4.27)$$

2. Пусть $\Lambda = 0$. В этом случае неравенство не допускает линеаризацию с помощью подбора произвольного параметра; воспользуемся более грубыми оценками. Условие (4.21) равносильно условию $\alpha \equiv \sigma(2 - \delta)/4 > 1$, откуда $0 < 1 - 1/\alpha < 1$. Следовательно, $z^{1-1/\alpha} \leq 1 + z \quad \forall z \geq 0$. Поэтому из (4.25) вытекает, что

$$z'' \leq \alpha (\sigma \delta + 2\psi(t)) z + \alpha \psi(t),$$

откуда

$$z'' \leq 2\alpha \psi(t) (z + 1/2). \quad (4.28)$$

Неравенства (4.27) и (4.28), соответствующие случаям $\Lambda \neq 0$ и $\Lambda = 0$, можно записать единообразно:

$$z'' \leq \bar{\alpha} \left(\frac{12C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - \delta) - 4} + \psi(t) \right) (z + \bar{\beta}), \quad (4.29)$$

где

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} 1, \Lambda \neq 0 \\ \frac{\sigma(2-\delta)}{2}, \Lambda = 0 \end{cases}, \quad \bar{\beta} = \begin{cases} 1, \Lambda \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \Lambda = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим неравенство (4.29). Положим

$$z = e^v - \bar{\beta}, \quad f(t) = \bar{\alpha} \left(\frac{12C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - \delta) - 4} + \psi(t) \right).$$

Тогда

$$v'^2 + v'' \leq f(t),$$

откуда следует, что

$$v'' \leq f(t).$$

Дважды проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$v - v_0 \leq v'_0 t + \int_0^t \int_0^\tau f(\xi) d\xi d\tau.$$

Вернемся к первоначальным обозначениям.

1. Пусть $\Lambda \neq 0$. Так как $e^v = z + 1 = \Phi^{-1/\alpha} + 1 = \Phi^{-1} + 1$, а значит,

$$v' = -\frac{\Phi'}{\Phi^2 + \Phi}, \text{ то}$$

$$\frac{\Phi^{-1} + 1}{\Phi_0^{-1} + 1} \leq \exp \left(\int_0^t \int_0^\tau f(\xi) d\xi d\tau - \frac{\Phi'_0}{\Phi_0^2 + \Phi_0} \cdot t \right),$$

откуда

$$\Phi \geq \left[(\Phi_0^{-1} + 1) e^{F(t)} - 1 \right]^{-1}, \quad F(t) \equiv \int_0^t \int_0^\tau f(\xi) d\xi d\tau - \frac{\Phi'_0}{\Phi_0^2 + \Phi_0} \cdot t.$$

Выражение в квадратных скобках положительно в некоторой окрестности нуля. Если оно обращается в нуль при некотором конечном t , то это значение времени и будет верхней оценкой времени разрушения, т. е. T_2 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi_0^{-1} + 1) e^{F(t)} - 1 = 0 \Leftrightarrow F(t) = -\ln(1 + \Phi_0^{-1}).$$

Заметим, что Φ'_0 можно выразить из I энергетического равенства, а значит, эта величина однозначно определяется начальными данными. Таким образом, T_2 — наименьший положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} & 2C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \int_0^t \int_0^\tau \|\varphi'\|_{L_4} d\xi d\tau + \frac{6C_4^4 (\sigma + 2)^2 \Lambda^2}{\sigma(2 - \delta) - 4} \cdot t^2 - \\ & - \frac{\Phi'_0}{\Phi_0^2 + \Phi_0} \cdot t = -\ln(1 + \Phi_0^{-1}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

2. Случай $\Lambda = 0$ можно рассмотреть аналогично. Здесь для T_2 получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \sigma(2 - \delta) C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \int_0^t \int_0^\tau \|\varphi'\|_{L_4} d\xi d\tau - \\ & - \frac{\sigma(2 - \delta)}{2} \cdot \frac{\Phi'_0}{\Phi_0^{1+\sigma(2-\delta)/4} + 2\Phi_0} \cdot t = -\ln\left(1 + \Phi_0^{-\sigma(2-\delta)/4}\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Уравнения (4.30) и (4.31) легко свести к одному уравнению (4.22), если ввести коэффициенты $\beta_{1,2,3}$, принимающие два значения в зависимости от выполнения условия $\lambda \neq (0, 0, 0)$, а Φ'_0 выразить через начальные данные с помощью I энергетического тождества. **Теорема доказана.**

4.3. Уравнение, имеющее равные положительные коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + F(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Здесь $N = 3$, $F(u) = \mu |u|^\sigma u + (\lambda, \nabla) u^2$, $u_0(x) \in H_0^1$, $a > 0$, $\mu \in R$, $\lambda \in R^3$, $\sigma \in (1; 4]$.

Раздел основан на исследовании, опубликованном в статье [95].

Будем рассматривать решения этой задачи, соответствующие нетривиальным начальным данным.

Задача (4.32) является задачей вида (4.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (4.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + a (\Delta u - u) + F(u) \right) w dx = 0 \quad (4.33)$$

для всех $\forall w \in H_0^1$, $t \in [0; T)$.

Возьмем для данной задачи $b = a$, откуда $v = ue^{at}$. Кроме того, положим $\Lambda = \|\lambda\|_{l_1}$.

Теорема 6. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (4.32). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и аналогично доказательству теоремы 3.

Для нахождения оценок времени разрушения решения в виде явных формул ограничимся рассмотрением следующих двух подклассов нелинейностей, входящих в уравнение:

$$F(u) = F_1(u) \equiv \mu u^3 + (\lambda, \nabla) u^2$$

и

$$F(u) = F_2(u) \equiv \mu |u|^\sigma u.$$

Теорема 7. Пусть $F(u) = F_1(u)$, причем $\Lambda > 0$.

Если коэффициенты и начальные данные удовлетворяют условию

$$\mu \rho^2 - 2\Lambda \rho - a > 0, \quad (4.34)$$

где, $\rho = \frac{\|u_0\|_{L_4}^2}{\sqrt{\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2}}$, то решение разрушается за конечное время $T \in [T_1; T_2]$, где

$$T_1 = -\frac{1}{2a} \ln \left(1 - \frac{a}{\mu C_4^4 (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2)} \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2\alpha \mu (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2)}{2\alpha \mu (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2) - \beta},$$

где $\alpha = 1 - \Lambda/(\mu\rho)$, $\beta = 2(a + \Lambda\rho)$.

Если $\mu \leq 0$ или $\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 \leq a\mu^{-1}C_4^{-4}$, то решение существует глобально по времени и ограничено.

Замечание. Несложно убедиться, что из условия (4.34) следует неравенство $\mu > 0$. Кроме того, из доказательства будет видно, что из (4.34) следует, что $\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 > a\mu^{-1}C_4^{-4}$. Значит, названные оценки времени разрушения не противоречат второй части теоремы, утверждающей, что решение глобально ограничено, если $\mu \leq 0$ или $\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 \leq a\mu^{-1}C_4^{-4}$.

Перейдем в (4.33) к переменной $v = ue^{at}$. Затем, если брать $w = v$ и $w = v'$, то после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$I. \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} = \mu e^{-2at} \|v\|_{L_4}^4,$$

$$II. W = \frac{\mu}{4} e^{-2at} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_4}^4 - e^{-at} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx.$$

Из I энергетического равенства видно, что при $\mu \leq 0$ решение существует глобально по времени и ограничено в смысле нормы H_0^1 для всех начальных данных и для всех значений $\lambda \in R^3$. (Действительно, в этом случае из равенства следует, что $\Phi \leq \Phi_0 < \infty$.) В дальнейшем будем считать, что $\mu > 0$.

Найдем оценку сверху для времени разрушения.

Выразим $\mu \|u\|_{L_4}^4$ из I равенства и подставим во II:

$$W = \frac{e^{-2at}}{8} \frac{d}{dt} \left(e^{2at} \frac{d\Phi}{dt} \right) - e^{-at} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx. \quad (4.35)$$

Оценим интеграл, учитывая выражение для $\|v\|_{L_4}^4$ из I энергетического равенства:

$$\begin{aligned} \left| e^{-at} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx \right| &\leq \\ &\leq \Lambda e^{-at} \left(\frac{\varepsilon(t)}{2} \|\nabla v'\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon(t)} \|v\|_{L_4}^4 \right) \leq \Lambda e^{-at} \left(\frac{\varepsilon(t)}{2} W + \frac{e^{2at}}{4\mu\varepsilon(t)} \Phi' \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $\varepsilon(t)$ — некоторая непрерывная функция с положительными значениями. А именно, возьмем $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{at}$, $\varepsilon_0 > 0$, и подставим это выражение в (4.36). Таким образом,

$$\left| e^{-at} \int_{\Omega} v^2 (\lambda, \nabla) v' dx \right| \leq \frac{\Lambda\varepsilon_0}{2} W + \frac{\Lambda}{4\mu\varepsilon_0} \Phi'.$$

Подставим эту оценку в (4.35):

$$\left(1 - \frac{\Lambda\varepsilon_0}{2} \right) W \leq \frac{\Phi''}{8} + \left(\frac{a}{4} + \frac{\Lambda}{4\mu\varepsilon_0} \right) \Phi'. \quad (4.37)$$

Позже будет выбрано значение ε_0 , обеспечивающее положительность коэффициента при W . Поэтому из (4.37) и леммы 1 следует, что

$$\Phi\Phi'' - 2 \left(1 - \frac{\Lambda\varepsilon_0}{2} \right) \Phi'^2 + 2 \left(a + \frac{\Lambda}{\mu\varepsilon_0} \right) \Phi\Phi' \geq 0.$$

Пусть коэффициент при Φ'^2 больше единицы, т. е. $\varepsilon_0 < 1/\Lambda$ (тогда и коэффициент при W в (4.37) будет положителен). Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$, где $\alpha = 1 - \Lambda\varepsilon_0 > 0$.

После упрощений получим:

$$z'' + \beta z' \leq 0, \quad (4.38)$$

где $\beta = 2(a + \Lambda / (\mu\varepsilon_0)) > 0$. Интегрируя (4.38) от 0 до t , получим неравенство $z' + \beta z \leq z'_0 + \beta z_0$, что равносильно следующему:

$$\frac{d}{dt} (ze^{\beta t}) \leq (z'_0 + \beta z_0) e^{\beta t}.$$

Интегрируя это неравенство, получим:

$$z \leq \frac{z'_0 + \beta z_0}{\beta} - \frac{z'_0}{\beta} e^{-\beta t},$$

откуда

$$\Phi \geq \left(\frac{z'_0 + \beta z_0}{\beta} - \frac{z'_0}{\beta} e^{-\beta t} \right)^{-1/\alpha}.$$

Заметим, что выражение в скобках положительно в некоторой окрестности $t = 0$ и обращается в 0 при

$$t = T_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{z'_0}{z'_0 + \beta z_0}.$$

Условие $T_2 > 0$ равносильно неравенству $z'_0 + \beta z_0 < 0$. Вернемся к первоначальным обозначениям, учитывая, что $\Phi'_0 = 2\mu \|u_0\|_{L_4}^4$:

$$\beta < 2\alpha\mu \|u_0\|_{L_4}^4 \Phi_0^{-1},$$

т. е.

$$a + \frac{\Lambda}{\mu\varepsilon_0} < \mu(1 - \Lambda\varepsilon_0)\rho^2.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{1}{\mu\rho\varepsilon_0} + \mu\rho\varepsilon_0 < \frac{\mu\rho^2 - a}{\Lambda\rho}.$$

Соотношение заведомо будет выполняться, если взять $\mu\rho\varepsilon_0 = 1$ и потребовать, чтобы правая часть была строго больше двух. Это требование равносильно условию (4.34). Значит, $\varepsilon_0 = (\mu\rho)^{-1}$. Возвращаясь к обозначениям, которые были введены в формулировке теоремы, получим:

$$T_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2\alpha\mu (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2)}{2\alpha\mu (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2) - \beta}.$$

Найдем оценку снизу для времени разрушения.

Положим в (4.33) $w = u$ и после интегрирования по частям получим III энергетическое равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dt} + a\Psi = \mu \|u\|_{L_4}^4.$$

Воспользуемся теоремой вложения H_0^1 в L_4 :

$$\frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dt} + a\Psi \leq \mu C_4^4 \Psi^2,$$

откуда

$$\Psi' + A\Psi \leq B\Psi^2,$$

где $A = 2a$ и $B = 2\mu C_4^4$. Поделим это неравенство на Ψ^2 и положим $\frac{1}{\Psi} = y$. Тогда $-y' + Ay \leq B$, т. е.

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} y) \geq -B e^{-At}.$$

После интегрирования левой и правой частей от 0 до t получим:

$$y \geq y_0 e^{At} - \frac{B}{A} (e^{At} - 1) = \left(y_0 - \frac{B}{A} \right) e^{At} + \frac{B}{A}.$$

Заметим, что правая часть положительна в некоторой окрестности $t = 0$. Правая граница этой окрестности T_1 и будет нижней оценкой времени разрушения T . Таким образом,

$$0 < \Psi \leq \frac{1}{\left(y_0 - \frac{B}{A} \right) e^{At} + \frac{B}{A}} = \frac{\Psi_0}{\frac{B}{A} \Psi_0 + \left(1 - \frac{B}{A} \Psi_0 \right) e^{At}}. \quad (4.39)$$

Если выполняется (4.34), то выражение в скобках в последней дроби отрицательно. Действительно, многочлен $P(\rho) = \mu\rho^2 - 2\Lambda\rho - a$ имеет корни разных знаков, поэтому условие $P(\rho) > 0$ равносильно неравенству

$$\frac{\Lambda}{\mu} + \sqrt{\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{a}{\mu}} < \rho \equiv \frac{\|u_0\|_{L_4}^2}{\sqrt{\Psi_0}}.$$

Заметим, что $\Lambda/\mu + \sqrt{\Lambda^2/\mu^2 + a/\mu} > \sqrt{a/\mu}$ и $\|u_0\|_{L_4}^2/\sqrt{\Psi_0} \leq C_4^2 \sqrt{\Psi_0}$. Значит, из (4.34) следует, что $\sqrt{a/\mu} < C_4^2 \sqrt{\Psi_0} \Leftrightarrow a/\mu < C_4^4 \Psi_0$. Следовательно, функция,

оценивающая Ψ в (4.39), возрастает и обращается в бесконечность при $t = T_1$, где

$$T_1 = -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{B\Psi_0} \right).$$

Итак,

$$T_1 = -\frac{1}{2a} \ln \left(1 - \frac{a}{\mu C_4^4 (\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2)} \right).$$

Если же $\Psi_0 \leq a\mu^{-1}C_4^{-4}$, то из (4.39) следует, что величина Ψ ограничена глобально по времени, т. е. решение не разрушается. **Теорема доказана.**

Лемма 4. Если $0 < \omega < 1$, то $0 < (1 - \omega)^2 / 2 < 1 - \omega + \omega \ln \omega < 1$.

Утверждение проверяется непосредственным исследованием указанных функций.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = C_{\sigma+2}^{\sigma+2}, \quad \omega = 1 - \Psi_0^{-\sigma/2-1} \|u_0\|_{L_{\sigma+2}}^{\sigma+2} / \gamma.$$

Лемма 5. Рассмотрим следующие условия:

$$\Psi_0 > (\mu\gamma/a)^{-2/\sigma}, \quad (4.40)$$

$$\Psi_0^{-\sigma/2} \leq (1 - \omega + \omega \ln \omega) \cdot \mu\gamma/a, \quad (4.41)$$

$$\mu \|u_0\|_{L_{\sigma+2}}^{2\sigma+4} \geq 2a\gamma \Psi_0^{\sigma/2+2}, \quad (4.42)$$

Из (4.42) следует (4.41), а из (4.41) следует (4.40).

С учетом определения величины ω перепишем (4.42) в следующем виде

$$\Psi_0^{-\sigma/2} \leq \frac{\mu\gamma}{a} \cdot \frac{(1 - \omega)^2}{2}.$$

Оценивая правую часть с помощью леммы 4, приходим к утверждению, что из (4.42) следует (4.41). Затем, оценивая правую часть (4.41) с помощью леммы 4, получим вторую часть леммы. **Лемма доказана.**

Теорема 8. Пусть $F(u) = F_2(u)$.

Пусть выполняется условие (4.42). Тогда решение разрушается за конечное время $T \in [T_1; T_2] \subseteq [T_1; T_3]$, где

$$T_1 = \frac{1}{\sigma a} \ln \frac{\mu \gamma}{\mu \gamma - a \Psi_0^{-\sigma/2}},$$

T_2 — единственное решение уравнения $A + Bt + Ce^{-\sigma at} = 0$, где

$$A = \Psi_0^{-\sigma/2} - \frac{\gamma \mu}{a}, \quad B = \mu \sigma \left(\gamma - \frac{\|u_0\|_{L^{\sigma+2}}^{\sigma+2}}{\Psi_0^{\sigma/2+1}} \right), \quad C = \frac{\gamma \mu}{a},$$

$$T_3 = \frac{\Psi_0^{-\sigma/2-1} \|u_0\|_{L^{\sigma+2}}^{\sigma+2} - \sqrt{\Psi_0^{-\sigma-2} \|u_0\|_{L^{\sigma+2}}^{2\sigma+4} - 2a\mu^{-1}\gamma\Psi_0^{-\sigma/2}}}{\gamma a \sigma}.$$

Если $\mu \leq 0$ или $\Psi_0 \leq (\mu \gamma / a)^{-2/\sigma}$, то решение существует глобально по времени и ограничено.

Таким образом, теорема дает грубую верхнюю оценку времени разрушения решения в виде формулы и более точную оценку в неявном виде.

Замечание. Из доказательства будет видно, что в первой части теоремы можно ослабить условия, а именно, потребовать (4.41) вместо (4.42). Тогда будет гарантировано выполнение оценки $T \in [T_1; T_2]$, но не $T \in [T_1; T_3]$.

Замечание. Из условия (4.42) (или (4.41)) следует, что $\mu > 0$. Кроме того, из (4.42) (или (4.41)) следует (4.40) в силу леммы 5. Значит, названные оценки времени разрушения не противоречат второй части теоремы, утверждающей, что решение глобально ограничено при $\mu \leq 0$ или $\Psi_0 \leq (\mu \gamma / a)^{-2/\sigma}$.

Перейдем в (4.33) к переменной $v = ue^{at}$. Затем, если брать $w = v$ и $w = v'$, то после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad & \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} = \mu e^{-\sigma at} \|v\|_{L^{\sigma+2}}^{\sigma+2}, \\ II. \quad & W = \mu e^{-\sigma at} \int_{\Omega} |v|^{\sigma} v v' dx. \end{aligned}$$

Из I энергетического равенства видно, что при $\mu \leq 0$ решение существует глобально по времени и ограничено в смысле нормы H_0^1 для всех начальных

данных. (Действительно, в этом случае из равенства следует, что $\Phi \leq \Phi_0 < \infty$.)

В дальнейшем будем считать, что $\mu > 0$.

Найдем оценку сверху для времени разрушения.

Из I энергетического равенства следует, что

$$\Phi'' = -\sigma a e^{-\sigma a t} \cdot 2\mu \int_{\Omega} |v|^{\sigma+2} dx + 2\mu e^{-\sigma a t} \int_{\Omega} (\sigma + 2) |v|^{\sigma} v v' dx.$$

Последнее слагаемое, как видно из II энергетического равенства, равно $2(\sigma + 2)W$. Поэтому

$$W = \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \frac{\mu \sigma a}{\sigma + 2} e^{-\sigma a t} \|v\|_{L^{\sigma+2}}^{\sigma+2} \leq \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \frac{\mu \sigma a}{\sigma + 2} e^{-\sigma a t} \gamma \Phi^{\sigma/2+1}.$$

Из последнего неравенства и леммы 1 следует, что

$$\Phi \Phi'' - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Phi'^2 + 2\mu \sigma a \gamma e^{-\sigma a t} \Phi^{\sigma/2+2} \geq 0.$$

Положим $\Phi = z^{-2/\sigma}$. После упрощений получим:

$$z'' \leq \gamma \mu \sigma^2 a e^{-\sigma a t}. \quad (4.43)$$

Дважды проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$z \leq f(t) \equiv A + Bt + Ce^{-\sigma a t},$$

где

$$A = \Phi_0^{-\sigma/2} - \frac{\gamma \mu}{a}, \quad B = \mu \sigma \left(\gamma - \frac{\|v_0\|_{L^{\sigma+2}}^{\sigma+2}}{\Phi_0^{\sigma/2+1}} \right), \quad C = \frac{\gamma \mu}{a}.$$

Несложно убедиться, что $f(\cdot)$ достигает минимума при $t = (\sigma a)^{-1} \ln(C\sigma a/B)$, причем это значение t положительно. Соответствующее значение $f(t) = \Phi_0^{-\sigma/2} - \gamma \mu/a + B(\sigma a)^{-1} (1 + \ln(C\sigma a/B))$.

Итак, положительная функция $z(t)$ оценивается сверху функцией $f(t)$, которая положительна в некоторой окрестности нуля. Значит, решение заведомо будет разрушаться, если $f(t)$ положительна в ограниченной окрестности нуля,

но не на всей положительной полупрямой, т. е. если ее минимальное значение неположительно.

В силу леммы 4 выполняется соотношение $0 < 1 - \omega + \omega \ln \omega < 1$. Поэтому условие неположительности минимального значения $f(\cdot)$ можно привести к виду

$$\Phi_0^{-\sigma/2} \leq C(1 - \omega + \omega \ln \omega).$$

В силу леммы 5 это условие следует из предполагаемого условия (4.42).

Таким образом, T_2 — решение уравнения $f(t) = 0$.

Кроме того, можно получить в виде явной формулы более грубую верхнюю оценку для T . Действительно, из (4.43) следует, что $z'' \leq 2D \equiv \gamma\mu\sigma^2 a$. Дважды интегрируя, получим: $z(t) \leq z_0 + z_0' t + Dt^2$. Правая часть положительна в некоторой окрестности нуля и обращается в 0 при

$$t = T_3 = \frac{\Phi_0^{-\sigma/2-1} \|v_0\|_{L_{\sigma+2}}^{\sigma+2} - \sqrt{\Phi_0^{-\sigma-2} \|v_0\|_{L_{\sigma+2}}^{2\sigma+4} - 2a\mu^{-1}\gamma\Phi_0^{-\sigma/2}}}{\gamma a \sigma}.$$

Такое число существует в силу (4.42).

Несложно убедиться, что $f(t) \leq z_0 + z_0' t + Dt^2 \forall t \geq 0$, следовательно, $T_2 \leq T_3$ (если эти числа существуют).

Найдем оценку снизу для времени разрушения.

Положим в (4.33) $w = u$ и после интегрирования по частям получим III энергетическое равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dt} + a\Psi = \mu \|u\|_{L_{\sigma+2}}^{\sigma+2}.$$

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 4, найдем следующую оценку:

$$\Psi \leq \left[\frac{\mu\gamma}{a} - \left(\frac{\mu\gamma}{a} - \Psi_0^{-\sigma/2} \right) e^{\sigma a t} \right]^{-2/\sigma}.$$

Выражение в квадратных скобках положительно в некоторой окрестности нуля и обращается в 0 при

$$t = T_1 = \frac{1}{\sigma a} \ln \frac{\mu\gamma}{\mu\gamma - a\Psi_0^{-\sigma/2}},$$

если выполняется условие (4.40), которое следует из (4.42) в силу леммы 5. Если же $\Psi_0 \leq (\mu\gamma/a)^{-2/\sigma}$, то величина Ψ ограничена глобально по времени, т. е. решение не разрушается. **Теорема доказана.**

4.4. Уравнение, имеющее нулевые коэффициенты при неизвестной функции и при ее лапласиане

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \mu(x, t) |u|^\sigma u + (\lambda, \nabla) u^2 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Здесь $N = 3$, $\sigma \in (1; 2]$, $\lambda \in R^3$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$, $u_0(x) \in H_0^1$.

Раздел основан на исследовании, которому была посвящена статья [96].

Замечание. Так как $6/(2-\sigma) > 4$ при $\sigma \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-\sigma)})$ следует, что $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4)$. В дальнейшем это свойство будет использоваться.

Напомним, что в [91] была рассмотрена аналогичная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + \mu(x, t) |u|^\sigma u + (\lambda, \nabla) u^2 = 0.$$

И в [96], и в [91] были доказаны теоремы об однозначной разрешимости задач и о верхних и нижних оценках времени существования решения. Работа [91] была выполнена позже, чем [96], и в ней теоремы об однозначной разрешимости и о нижних оценках обобщили соответствующие теоремы из [96], однако теоремы о верхних оценках в [96] не сводятся к частным случаям результатов из [91]. Приведем здесь результаты из [96] (с доказательствами — только теоремы о верхних оценках).

Задача (4.44) является задачей вида (4.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно

из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (4.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \mu(x, t) |u|^{\sigma} u + (\lambda, \nabla) u^2 \right) w dx = 0 \quad (4.45)$$

для всех $\forall w \in H_0^1, t \in [0; T)$.

В данной задаче $b = 0$, откуда $v = u, \Phi = \Psi$.

Полагая в (4.45) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad \frac{\Phi'}{2} &= \int_{\Omega} \mu |u|^{\sigma+2} dx, \\ II. \quad W &= \int_{\Omega} \mu |u|^{\sigma} u u' dx + \int_{\Omega} u' (\lambda, \nabla) u^2 dx. \end{aligned}$$

Эти тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Заметим, что Φ'_0 можно однозначно выразить через начальные данные с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

Теорема 9. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (4.44). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Утверждение является частным случаем теоремы 3, соответствующим соотношению $a = b = 0$.

В дальнейшем будем рассматривать обобщенные решения задачи (4.44), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Лемма 6. *Пусть $0 < \gamma < 1$. Тогда $b = \gamma^{-\gamma} (1 - \gamma)^{\gamma-1}$ — наибольшее значение константы b , при котором $v^{\gamma} \geq bv / (v + 1) \quad \forall v \geq 0$.*

Рассмотрим функцию $f(v) = k(v + 1) - v^{\beta}$, где $\beta \in (0; 1)$. Несложно убедиться, что $k = \beta^{\beta} (1 - \beta)^{1-\beta}$ — оптимальная константа в неравенстве $f(v) \geq 0$.

Положим $\beta = 1 - \gamma$, где $\gamma \in (0; 1)$. Тогда неравенство можно привести к виду

$$v^\gamma \geq \frac{1}{\gamma^\gamma (1 - \gamma)^{1-\gamma}} \cdot \frac{v}{v + 1}.$$

Лемма доказана.

Теорема 10. Пусть $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4)$. Положим

$$J = \frac{\Phi_0^{-\sigma/2}}{C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma}.$$

1. Если

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} d\tau < J$$

при всех конечных t , то решение существует глобально по времени, т. е. $T = \infty$.

2. Пусть уравнение

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} d\tau = J$$

имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$.

В частности, если μ зависит только от x , то T_1 имеет явное выражение:

$$T_1 = \frac{J}{\|\mu\|_{L_4}}.$$

Утверждение является частным случаем теоремы 4, соответствующим соотношению $a = b = 0$.

Для того чтобы оценить сверху время разрушения решения, наложим более жесткие требования на параметры, входящие в задачу (4.44).

Теорема 11. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, $\lambda = (0, 0, 0)$.

Пусть уравнение

$$C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \int_0^t \int_0^\tau \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau - \frac{\sigma}{2} \Phi_0^{-\sigma/2-1} \Phi_0' t + \Phi_0^{-\sigma/2} = 0 \quad (4.46)$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней более одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (4.44) разрушается за конечное время $T \leq T_2$.

В частности, если μ зависит только от x , то T_2 имеет явное выражение:

$$T_2 = \frac{2\Phi_0}{\sigma\Phi_0'}. \quad (4.47)$$

Замечание. Достаточным условием разрешимости уравнения (4.46), менее жестким, чем зависимость μ только от x , является, например, сходимость интеграла $\int_0^\infty \int_0^\tau \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau$. Действительно, пусть этот интеграл равен положительной постоянной M . Тогда, обозначая левую часть уравнения через $F(t)$, а свободный член и множитель при t соответственно через A и B , получим:

$$A - Bt \leq F(t) \leq A - Bt + C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma M.$$

Из этой оценки видно, что при положительных A и B функция $F(t)$ положительна в некоторой окрестности нуля и равна нулю при $t = T_2 \in [A/B; (A + C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma M) / B]$. В данном случае явной верхней оценкой для T , более грубой, чем T_2 , может служить величина $(A + C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma M) / B$.

Перейдем к доказательству теоремы.

Из I энергетического равенства следует, что

$$\frac{\Phi''}{2} = \int_{\Omega} \mu' |u|^{\sigma+2} dx + (\sigma + 2) \int_{\Omega} \mu |u|^\sigma u u' dx.$$

Поэтому II равенство можно переписать в следующем виде:

$$W = \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} - \frac{1}{\sigma + 2} \int_{\Omega} \mu' |u|^{\sigma+2} dx.$$

Воспользуемся леммой 1:

$$\frac{\Phi'^2}{4} \leq \Phi W = \frac{\Phi\Phi''}{2(\sigma+2)} - \frac{\Phi}{\sigma+2} \int_{\Omega} \mu' |u|^{\sigma+2} dx.$$

Продолжим оценку с помощью леммы 3:

$$\frac{\Phi'^2}{4} \leq \frac{\Phi\Phi''}{2(\sigma+2)} + \frac{\Phi}{\sigma+2} \cdot C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\mu'\|_{L_4} \Phi^{\sigma/2+1},$$

откуда

$$\Phi\Phi'' - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Phi'^2 + 2C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \|\mu'\|_{L_4} \Phi^{\sigma/2+2} \geq 0.$$

Положим $\Phi = z^{-2/\sigma}$. После упрощений получим:

$$z'' \leq C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \|\mu'\|_{L_4}.$$

Дважды проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$z - z_0 - z'_0 t \leq C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \int_0^t \int_0^{\tau} \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau.$$

Вернемся к первоначальным обозначениям:

$$\Phi \geq \left(C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \int_0^t \int_0^{\tau} \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau - \frac{\sigma}{2} \Phi_0^{-\sigma/2-1} \Phi'_0 t + \Phi_0^{-\sigma/2} \right)^{-2/\sigma}.$$

Заметим, что Φ'_0 можно выразить из I энергетического равенства, а значит, эта величина однозначно определяется начальными данными. Таким образом, T_2 — наименьший положительный корень уравнения

$$C_4 C_{2\sigma+2}^{\sigma+1} \sigma \int_0^t \int_0^{\tau} \|\mu'\|_{L_4} d\xi d\tau - \frac{\sigma}{2} \Phi_0^{-\sigma/2-1} \Phi'_0 t + \Phi_0^{-\sigma/2} = 0. \quad (4.48)$$

Если дополнительно предположить, что μ зависит только от x , то T_2 легко выразить из (4.48) явно. В этом случае придем к формуле (4.47). **Теорема доказана.**

Дополним список используемых обозначений. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число. Формально положим

$$\Lambda = \frac{\max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k|}{2}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{2} - \Lambda \varepsilon \left(\frac{\sigma}{2} + 1 \right), \quad \gamma = 2 - \frac{1}{\alpha},$$

$$b = \gamma^{-\gamma} (1 - \gamma)^{\gamma-1}, \quad A = \frac{6C_4^4 \Lambda (\sigma + 2) \alpha}{\varepsilon}.$$

Пусть, кроме того, $z = \Phi^{-\alpha}$, откуда $z' = -\alpha \Phi^{-\alpha-1} \Phi'$. Так как Φ_0 и Φ'_0 однозначно определяются начальными данными, то и величины z_0 и z'_0 при фиксированном α можно считать известными. Обозначим

$$B = \frac{\gamma}{2A} z_0'^2 - z_0^\gamma, \quad q = \frac{B}{B + b}.$$

Введем функцию

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{B + b}} \cdot \left(\sqrt{(z + q)(z + 1)} + \operatorname{arch} \frac{2z + 1 + q}{1 - q} \right).$$

Теорема 12. Пусть μ зависит только от x , причем $\mu(x) \in L_4$, $\mu > 0$ почти всюду на Ω , $\lambda \neq (0, 0, 0)$. Пусть

$$12C_4^4 \Lambda^2 (\sigma + 2)^2 \Phi_0^3 < (\sigma - 1) \Phi_0'^2. \quad (4.49)$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2\Lambda(\sigma + 2)} - \sqrt{\frac{\sigma^2 - 2\sigma + 2}{4\Lambda^2(\sigma + 2)^2} - \frac{6C_4^4 \Phi_0^3}{\Phi_0'^2}}.$$

Тогда решение задачи (4.44) разрушается за конечное время $T \leq T_3$, где

$$T_3 = \sqrt{\frac{\gamma}{2A}} \cdot (F(z_0) - F(0)).$$

Из I энергетического равенства следует, что

$$\frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} = \int_{\Omega} \mu |u|^\sigma uu' dx.$$

С учетом этого соотношения преобразуем II энергетическое равенство:

$$W = \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \int_{\Omega} u'(\lambda, \nabla) u^2 dx.$$

Оценим второе слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u'(\lambda, \nabla) u^2 dx \right| &= \left| \int_{\Omega} u^2(\lambda, \nabla) u' dx \right| \leq \max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k| \sum_{k=1}^3 \left| \int_{\Omega} u^2 \frac{\partial}{\partial x_k} u' dx \right| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k| \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^4 dx + \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u' \right)^2 dx \right), \end{aligned}$$

где ε — пока произвольное положительное число. Так как $\int_{\Omega} u^4 dx = \|u\|_{L_4}^4 \leq C_4^4 \|\nabla u\|^4 \leq C_4^4 \Phi^2$ и $\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} (\partial u' / \partial x_k)^2 dx = \|\nabla u'\|^2 \leq W$, то

$$\left| \int_{\Omega} u'(\lambda, \nabla) u^2 dx \right| \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k|}{2} \cdot \left(\frac{3C_4^4}{\varepsilon} \cdot \Phi^2 + \varepsilon W \right).$$

Следовательно,

$$W(1 - \Lambda\varepsilon) \leq \frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \frac{3C_4^4 \Lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi^2,$$

где $\Lambda = \max_{1 \leq k \leq 3} |\lambda_k| / 2$. Пусть множитель при W положителен, т. е. $0 < \varepsilon < 1/\Lambda$.

Тогда из этой оценки и леммы 1 следует, что

$$\Phi'^2/4 \leq \frac{\Phi}{1 - \Lambda\varepsilon} \cdot \left(\frac{\Phi''}{2(\sigma + 2)} + \frac{3C_4^4 \Lambda}{\varepsilon} \cdot \Phi^2 \right),$$

откуда

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + \frac{6C_4^4 \Lambda(\sigma + 2)}{\varepsilon} \cdot \Phi^3 \geq 0,$$

где $\alpha = (1 - \Lambda\varepsilon)\sigma/2 - \Lambda\varepsilon$. Пусть $\alpha > 0$. Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$. Тогда неравенство можно привести к следующему виду:

$$-\frac{1}{\alpha} z^{-2/\alpha-1} z'' + \frac{6C_4^4 \Lambda(\sigma + 2)}{\varepsilon} \cdot z^{-3/\alpha} \geq 0.$$

Таким образом,

$$z'' \leq Az^{-\beta},$$

где $A = 6C_4^4 \Lambda(\sigma + 2)\alpha/\varepsilon$, $\beta = 1/\alpha - 1$. Из I энергетического равенства следует, что $\Phi' > 0 \forall t$, а значит, $z' = -\alpha\Phi^{-\alpha-1}\Phi' < 0 \forall t$. Умножим левую и правую части неравенства на $z' < 0$:

$$z'z'' \geq Az^{-\beta}z'.$$

Проинтегрируем неравенство от 0 до t . Будем при этом предполагать, что $\beta < 1$:

$$\frac{z'^2}{2} - \frac{z_0'^2}{2} \geq \frac{Az^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{Az_0^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Положим $B = (2A)^{-1} (1 - \beta) z_0'^2 - z_0^{1-\beta}$ и потребуем выполнения условия $B > 0$.

Таким образом, получим:

$$|z'| \geq \sqrt{\frac{2A}{1-\beta}} \cdot \sqrt{z^{1-\beta} + B}.$$

Так как $|z'| = -z'$, то неравенство равносильно следующему:

$$\frac{z'}{\sqrt{z^\gamma + B}} + \sqrt{\frac{2A}{\gamma}} \leq 0, \quad (4.50)$$

где $\gamma = 1 - \beta$. Из леммы 6 следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{z^\gamma + B}} \geq \frac{1}{\sqrt{bz/(z+1) + B}}.$$

Учитывая знак z' , получим следствие из (4.50):

$$\frac{z'}{\sqrt{bz/(z+1) + B}} + \sqrt{\frac{2A}{1-\beta}} \leq 0.$$

Рассмотрим это неравенство в общем виде:

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \rho \leq 0, \quad (4.51)$$

где $\rho = \sqrt{2A/\gamma}$, $F(z)$ — первообразная для функции, являющейся множителем при z' , причем $dF/dz > 0 \forall z$, а значит, $F(z)$ — возрастающая функция. Пусть $\gamma > 0$.

Проинтегрируем (4.51) от 0 до t :

$$F(z(t)) - F(z(0)) + \rho t \leq 0. \quad (4.52)$$

Так как функция $F(z)$ возрастает на множестве $[0; \infty)$, то неравенство (4.52) можно равносильным переходом преобразовать с помощью функции, обратной к $F(\cdot)$:

$$z \leq F^{-1}(F(z_0) - \rho t) \Leftrightarrow \Phi \geq [F^{-1}(F(z_0) - \rho t)]^{-1/\alpha}.$$

Выражение в квадратных скобках положительно в некоторой окрестности нуля и равно нулю, если t удовлетворяет уравнению

$$F^{-1}(F(z_0) - \rho t) = 0 \Leftrightarrow F(z_0) - \rho t = F(0),$$

откуда

$$t = T_3 \equiv \frac{1}{\rho} (F(z_0) - F(0)). \quad (4.53)$$

Значит, Φ оценивается снизу функцией, конечной при $t < T_3$ и бесконечной при $t = T_3$. Следовательно, T_3 может служить верхней оценкой для T .

Таким образом, задача построения верхней оценки для T сводится к отысканию функции $F(z)$. Найдем ее с точностью до постоянной интегрирования:

$$F(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{bz/(z+1) + B}} = \frac{1}{\sqrt{B+b}} \int \sqrt{\frac{z+1}{z+q}} dz,$$

где $q = B/(B+b) < 1$. Воспользуемся заменой переменной:

$$z = \frac{1-q}{2} \cdot \operatorname{ch} \varphi - \frac{1+q}{2},$$

откуда $dz = \frac{1-q}{2} \cdot \operatorname{sh} \varphi d\varphi$. Заметим, что множеству $\{z\} = (0; \infty)$ соответствует множество $\{\varphi\} = \left(\operatorname{arch} \frac{1+q}{1-q}; \infty\right) \subset (0; \infty)$. Значит,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{B+b}} \int \sqrt{\frac{z+1}{z+q}} dz = \\ &= \frac{1-q}{2\sqrt{B+b}} \int \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \varphi + 1}{\operatorname{ch} \varphi - 1}} \operatorname{sh} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1-q}{2\sqrt{B+b}} \int \operatorname{cth} \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1-q}{2\sqrt{B+b}} \int 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{1-q}{2\sqrt{B+b}} \int (\operatorname{ch} \varphi + 1) d\varphi = \frac{1-q}{2\sqrt{B+b}} (\operatorname{sh} \varphi + \varphi). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi &= +\sqrt{(\operatorname{ch} \varphi - 1)(\operatorname{ch} \varphi + 1)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2z+1+q}{1-q} - 1\right) \left(\frac{2z+1+q}{1-q} + 1\right)} = \frac{2\sqrt{(z+q)(z+1)}}{1-q}, \end{aligned}$$

то

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{B+b}} \left(\sqrt{(z+q)(z+1)} + \operatorname{arch} \frac{2z+1+q}{1-q} \right).$$

В формулу (4.53) неявно входит параметр ε , который может принимать произвольные значения из некоторого множества, а именно, при выведении данной формулы на ε и параметры, зависящие от него, были наложены следующие ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 0, \\ 1 - \Lambda\varepsilon > 0, \\ \alpha > 0, \\ \beta > 0, \\ B > 0, \\ \gamma > 0, \end{array} \right.$$

т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 0, \\ \varepsilon < \Lambda^{-1}, \\ \varepsilon < \Lambda^{-1} \cdot \frac{\sigma}{\sigma+2}, \\ \alpha \equiv \frac{\sigma}{2} - \Lambda\varepsilon \left(\frac{\sigma}{2} + 1 \right) < 1, \\ M(\varepsilon) \equiv \frac{\alpha^2(1-\beta)}{2A} > \frac{\Phi_0^3}{\Phi_0'^2}, \\ \varepsilon < \Lambda^{-1} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma+2}. \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Четвертое неравенство следует из того, что $\varepsilon > 0$ и $1 < \sigma \leq 2$. Первое, второе, третье и шестое дают условие

$$\varepsilon \in E \equiv \left(0; \Lambda^{-1} \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma+2} \right).$$

В пятом неравенстве правая часть зависит от начальных данных, но не зависит от ε , и может быть, вообще говоря, сколь угодно большой. Значит, нужно выбрать такое значение ε из промежутка E , при котором величина $M(\varepsilon)$ достаточно велика, чтобы пятое неравенство было непротиворечиво (если это возможно).

Выражая M через ε , получим:

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{12C_4^4} \left(\frac{\sigma}{\Lambda(\sigma+2)} \cdot \varepsilon - \varepsilon^2 \right).$$

Легко убедиться, что на промежутке E функция $M(\varepsilon)$ возрастает, причем

$$\sup_{\varepsilon} M(\varepsilon) = M|_{\varepsilon=(\sigma-1)/(\Lambda(\sigma+2))} = \frac{\sigma-1}{12C_4^4 \Lambda^2(\sigma+2)^2}.$$

Обозначим $M_0 = \sup_{\varepsilon} M(\varepsilon)$, $D_0 = \Phi_0^3 \Phi_0'^{-2}$. Значит, если $M_0 \leq D_0$, система (4.54) противоречива $\forall \varepsilon$. Если же $M_0 > D_0$, то решениями системы будут такие ε , что $D_0 < M(\varepsilon) < M_0$. Заметим, что условие $M_0 > D_0$ равносильно предполагаемому соотношению (4.49). Пусть для определенности $M(\varepsilon) = (D_0 + M_0)/2$. Так как промежутку E соответствует меньший корень этого квадратного относительно ε уравнения, то

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2\Lambda(\sigma+2)} - \sqrt{\frac{\sigma^2 - 2\sigma + 2}{4\Lambda^2(\sigma+2)^2} - \frac{6C_4^4 \Phi_0^3}{\Phi_0'^2}}.$$

Таким образом, формула (4.53) дает однозначную верхнюю оценку для T . **Теорема доказана.**

4.5. Выводы к главе

В данной главе исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для ряда нелинейных уравнений соболевского типа. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных, неявных и квадратурных формул.

Глава 5

Начально-краевые задачи для уравнений с нелинейным выражением под знаком производной по времени

В данной главе продолжим изучение начально-краевых задач для уравнений соболевского типа. Как и в предыдущей главе, будет исследована их однозначная разрешимость глобально или локально по времени. В случае локальной (но не глобальной) разрешимости будут найдены оценки времени существования решения. Важное отличие задач, которые будут рассмотрены здесь, состоит в том, что они содержат нелинейности не только в стационарной части уравнения, но и под знаком производной по времени. Как будет показано, этот новый вид нелинейности может существенно влиять на глобальную по времени разрешимость или разрушение решения.

Приведем определения и обозначения, общие для всех задач, изучаемых в данной главе. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} D[u] = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $u(\cdot)$ — действительнoзначная функция, зависящая от N -мерного вектора пространственных переменных x и времени $t > 0$, $D[\cdot]$ — нелинейный дифференциальный оператор. При этом считаем, что $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, где Ω — ограниченное множество с достаточно гладкой границей: $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $0 < \delta \leq 1$. Будут рассматриваться размерности $N = 3$ и $N = 2$.

Введем классы $X_T = C^1[0; T; H_0^1(\Omega)]$, где T — некоторое положительное число или бесконечность.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (5.1) будем называть*

такое $u \in X_T$, что

$$\begin{cases} \langle D[u], w \rangle = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

при всех $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0; T)$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$).

Заметим, что первое равенство в (5.2) можно переписать в виде интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} D[u]w dx = 0. \quad (5.3)$$

Определение 2. Говорят, что обобщенное решение задачи (5.1) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_{∞} . В частности, говорят, что решение разрушается путем опрокидывания, если $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.

В задачах будет фигурировать параметр $q \in [1; 4]$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_p &= L_p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad H_0^1 = H_0^1(\Omega), \quad H^{-1} = H^{-1}(\Omega), \\ \|\cdot\| &= \|\cdot\|_{L_2}, \quad \|\cdot\|_{+1} = \|\cdot\|_{H_0^1}, \quad \|\cdot\|_{-1} = \|\cdot\|_{H^{-1}}, \\ \Phi &= \frac{\theta \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \end{aligned}$$

где θ принимает одно из двух значений: 0 или 1. Штрихом будем обозначать производную по времени. Положим $W = \theta \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx$. Под нижним индексом «0» будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$ (если не будет оговорено противное). C_p – оптимальная константа вложения H_0^1 в L_p (если существует), т. е.

$$C_p = \inf \{ C \mid \|w\|_{L_p} \leq C \|w\|_{H_0^1} \quad \forall w \in H_0^1 \}.$$

Под C будем подразумевать положительные постоянные, возможно, различные.

Заметим, что из теоремы вложения вытекает оценка

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{2} \leq \Phi \leq f(\|\nabla u\|), \quad f(y) = \frac{\theta C_2^2 + 1}{2} y^2 + \frac{q+1}{q+2} y^{q+2}$$

(корректность применения теоремы вложения обеспечивается выбором q). При этом $f(\cdot)$ монотонно возрастает от нуля до бесконечности на множестве $[0; \infty)$. Следовательно,

$$f^{-1}(\Phi) \leq \|\nabla u\| \leq \sqrt{2\Phi},$$

Значит, соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T-} \Phi = \infty \quad (T < \infty)$$

равносильно утверждению, что решение опрокидывается за время $T < \infty$.

Основные идеи исследования задач вида (5.1) будут теми же, что и в исследованиях предыдущей главы.

С помощью принципа сжимающих отображений доказываем, что задача однозначно разрешима в некотором пространстве. Затем вводим энергетический функционал $\Phi[u(t)]$ и оцениваем его сверху и снизу функциями, которые имеют конечные значения в окрестностях нуля и стремятся к бесконечности при стремлении времени слева к некоторым числам, которые найти относительно просто. Эти числа и будут границами промежутка, содержащего T . Возможна и ситуация, когда при некоторых значениях параметров $\Phi[u(t)] < \infty$ при всех t — тогда решение существует глобально по времени.

Лемма 1. *Имеет место неравенство $\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi W$.*

Обозначим $y_k = \partial u / \partial x_k$, $1 \leq k \leq N$,

$$R_1 = \sqrt{q+1} \cdot \|u\|_{L_{q+2}}^{q/2+1}, \quad R_2 = \sqrt{q+1} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |u|^q |u'|^2 dx}.$$

Тогда

$$(q+2)\Phi = (1+q/2)\|u\|^2 + (1+q/2)\sum_{k=1}^N \|y_k\|^2 + R_1^2$$

и

$$W = \|u'\|^2 + \sum_{k=1}^N \|y_k'\|^2 + R_2^2.$$

Кроме того,

$$\Phi' = \int_{\Omega} uu' dx + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} y_k y'_k dx + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q uu' dx.$$

Из неравенств Коши-Буняковского-Шварца вытекают следующие оценки.

Во-первых,

$$|\Phi'| \leq \|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^N \|y_k\| \|y'_k\| + R_1 R_2,$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} (q+2) \Phi W &\geq \left(\|u\|^2 + \sum_{k=1}^N \|y_k\|^2 + R_1^2 \right) \left(\|u'\|^2 + \sum_{k=1}^N \|y'_k\|^2 + R_2^2 \right) \geq \\ &\geq \left(\|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^N \|y_k\| \|y'_k\| + R_1 R_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi'^2 \leq (q+2) \Phi W$. **Лемма доказана.**

Лемма 2. Пусть выполняется неравенство

$$\Phi \Phi'' - (1 + \alpha) \Phi'^2 + F(t, \Phi, \Phi') \geq 0,$$

где α — положительная постоянная, $F(\cdot)$ — функция, определенная на $[0; \infty) \times (0; \infty) \times R$, $\Phi(t)$ принимает положительные значения в некоторой окрестности нуля. Подстановка $\Phi = z^{-1/\alpha}$ сводит это неравенство к неравенству с единичным коэффициентом при второй производной.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $\Phi > 0$ (а значит, и $z > 0$) неравенство равносильно следующему:

$$z'' \leq \alpha z^{2/\alpha+1} F(t, z^{-1/\alpha}, -\frac{1}{\alpha} z^{-1/\alpha-1} z').$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $\nu(x) \in L_4$, $w(x) \in H_0^1$, то

$$\left| \int_{\Omega} \nu |w|^{r+2} dx \right| \leq C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\nu\|_{L_4} \|\nabla w\|^{r+2}.$$

Формально можно провести доказательство по аналогии с доказательством леммы 3 из предыдущей главы: оно основано на теореме вложения. В задачах, где будет использоваться лемма, будут рассматриваться комбинации размерности N и показателя r , обеспечивающие корректность этих рассуждений.

5.1. Модельная задача

Рассмотрим основные идеи изучения начально-краевой задачи (5.1) на примере следующей относительно простой модельной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + \mu(t)|u|^r u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Исследование во многом аналогично исследованию модельной задачи из предыдущей главы; изложим его схематично. Будем предполагать, что $N = 3$, $q \in [1; 4]$, $r \in (1; 4]$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, причем $\mu(t) > 0$ всюду на $[0; \infty)$.

Задача (5.4) является задачей вида (5.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (5.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + \mu(t)|u|^r u \right) w dx = 0 \quad (5.5)$$

для всех $w \in H_0^1$, $t \in [0; T)$.

Возьмем для этой задачи $\theta = 0$, откуда

$$\Phi = \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \quad W = \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Теорема 1. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (5.4). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Введем следующие операторы: $A_1 u = -\Delta u$, $A_2 u = |u|^q u$, $Au = A_1 u + A_2 u$,
 $Fu = \mu(t)|u|^r u$.

Несложно убедиться, что

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_{-1} \leq C|\mu| \max^r (\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1} \quad \forall u_{1,2} \in H_0^1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle &= \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2) (u_1 - u_2) dx \geq \|u_1 - u_2\|_{+1}^2 \end{aligned}$$

Следовательно, существует липшиц-непрерывный обратный оператор $A^{-1} : H^{-1} \rightarrow H_0^1$ с постоянной Липшица, равной единице. Поэтому можно сделать замену переменных $w = Au$ и после этой замены исследовать разрешимость задачи в классе $C^1 [0; T; H^{-1}]$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = FA^{-1}w, \quad w|_{t=0} = w_0 \equiv Au_0, \quad w \in C^1 [0; T; H^{-1}].$$

Проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий:

$$w = Hw \equiv w_0 + \int_0^t FA^{-1}w d\tau. \quad (5.6)$$

Рассмотрим пространство $L_{\infty} [0; T; H^{-1}]$ и следующий шар в нем:

$$B_{\rho} = \left\{ v \in L_{\infty} [0; T; H^{-1}) \mid \|v\|_T \equiv \|\|v\|_{-1}\|_{L_{\infty}[0; T)} \leq \rho \right\}.$$

Несложно доказать, что оператор H переводит B_{ρ} в себя и является сжимающим отображением, если ρ достаточно велико, а T достаточно мало. Значит, уравнение (5.6) однозначно разрешимо в классе $L_{\infty} [0; T; H^{-1}]$, по крайней мере, при достаточно малых T . Применяя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом, получим, что существует некоторое максимальное значение T , возможно, бесконечное, причем если $T = \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T^-} \|w\|_{-1} = \infty$.

Оператор H является сглаживающим, т. е. переводит $L_\infty [0; T; H^{-1})$ в $AC_\infty [0; T; H^{-1})$, а это множество — в $C^1 [0; T; H^{-1})$. Значит, задача относительно w однозначно разрешима не только в $L_\infty [0; T; H^{-1})$, но и в $C^1 [0; T; H^{-1})$.

Таким образом, задача сводится к уравнению $Au = w$, где $w \in C^1 [0; T; H^{-1})$. В [10, с. 62–72] показано, что это уравнение имеет единственное решение $u \in C^1 [0; T; H_0^1)$, причем если $T < \infty$, то имеет место опрокидывание решения.

Теорема доказана.

В дальнейшем будем рассматривать решения задачи (5.4), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1. Если

$$\int_0^\infty \mu(\tau) d\tau < \frac{1}{rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2}}, \quad (5.7)$$

то $T = \infty$, т. е. решение существует глобально по времени, и его разрушения не происходит.

2. Если $q \geq r$, то $T = \infty$, т. е. решение существует глобально по времени, и его разрушения не происходит.

3. Пусть существуют числа T_1 и T_2 — положительные корни соответственно следующих квадратурных уравнений относительно t :

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2}} \quad (5.8)$$

и

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}}. \quad (5.9)$$

Тогда происходит опрокидывание решения за конечное время $T \in [T_1; T_2]$.

В частности, $\mu = \text{const}$ является достаточным условием для опрокидывания решения, причем в этом случае

$$\frac{1}{rC_{r+2}^{r+2}\mu(2\Phi_0)^{r/2}} \leq T \leq \frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\mu\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}}. \quad (5.10)$$

Замечание. Поясним, что первые два пункта этой теоремы не противоречат третьему.

1. Условие первого пункта и существование T_2 несовместимы. Действительно, из теоремы вложения следует, что

$$\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2} \leq C_{r+2}^{r+2} \cdot 2^{r/2+1} \Phi_0^{r/2+1},$$

откуда, учитывая, что $2 \leq r(q+2)/(r-q)$, легко получить неравенство

$$\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2} \leq \frac{r(q+2)}{r-q} \cdot 2^{r/2} C_{r+2}^{r+2} \Phi_0^{r/2+1},$$

что равносильно

$$\frac{1}{r C_{r+2}^{r+2} (2\Phi_0)^{r/2}} \leq \frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}}. \quad (5.11)$$

С другой стороны, если утверждения первого и третьего пунктов верны одновременно, то

$$\frac{1}{r C_{r+2}^{r+2} (2\Phi_0)^{r/2}} > \int_0^\infty \mu(\tau) d\tau \geq \int_0^{T_2} \mu(\tau) d\tau = \frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}},$$

что противоречит (5.11).

2. Условие второго пункта, очевидно, противоречит существованию положительного T_2 , определяемого уравнением (5.9).

Полагая в (5.5) $w = u$ и $w = u'$, получим после интегрирования по частям соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad & -\Phi' + \mu \|u\|_{L_{r+2}}^{r+2} = 0, \\ II. \quad & -W + \mu \int_{\Omega} |u|^r u u' dx = 0 \end{aligned}$$

(θ определений Φ и W равно нулю). Получим следствие из I тождества с помощью теоремы вложения:

$$\Phi' \leq \mu C_{r+2}^{r+2} \|\nabla u\|_{L_2}^{r+2} \leq \mu C_{r+2}^{r+2} (2\Phi)^{(r+2)/2} = 2^{r/2+1} \mu C_{r+2}^{r+2} \Phi^{r/2+1},$$

откуда

$$\Phi^{-r/2-1}\Phi' \leq 2^{r/2+1}C_{r+2}^{r+2}\mu.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t . Следовательно,

$$-\frac{2}{r}\Phi^{-r/2}\Big|_0^t \leq 2^{r/2+1}C_{r+2}^{r+2}\int_0^t\mu(\tau)d\tau,$$

что при достаточно малых t равносильно неравенству

$$\Phi \leq \left[\Phi_0^{-r/2} - \frac{2^{r/2+1}C_{r+2}^{r+2}r}{2} \int_0^t \mu(\tau)d\tau \right]^{-2/r}. \quad (5.12)$$

Если параметры задачи таковы, что выполняется неравенство (5.7), что из последней оценки видно, что Φ можно оценить сверху конечной величиной при любом конечном t , а значит, разрушения решения не происходит. Первое утверждение теоремы доказано. Если же выражение в квадратных скобках в (5.12) достигает нулевого значения при некотором конечном $t = T_1$, то это значение T_1 будет нижней оценкой для T , т. е. приходим к уравнению (5.8).

Отметим, что квадратурная формула (5.8) гарантирует однозначную разрешимость задачи, по крайней мере, на временном промежутке $[0; T_1)$, не исключая возможность глобальной по времени разрешимости. Покажем, что некоторое соотношение между q и r является достаточным условием для глобальной разрешимости.

Пусть выполняется условие второго пункта теоремы, т. е. $q \geq r$. С помощью неравенства Гельдера можно показать, что $\|u\|_{L_{r+2}} \leq C\|u\|_{L_{q+2}}$. Поэтому из I энергетического равенства следует, что

$$\Phi' \leq C\mu\|u\|_{L_{q+2}}^{(q+2)(r+2)/(q+2)} \leq C\mu\Phi^{(r+2)/(q+2)} \leq C\mu(\Phi + 1),$$

откуда

$$\frac{\Phi'}{\Phi + 1} \leq C\mu.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$\ln(\Phi + 1) - \ln(\Phi_0 + 1) \leq C \int_0^t \mu(\tau) d\tau,$$

что равносильно неравенству

$$\Phi \leq (\Phi_0 + 1)e^{C \int_0^t \mu(\tau) d\tau} - 1,$$

т. е. Φ можно оценить сверху конечной величиной при всех конечных t . Приходим ко второму утверждению теоремы.

Перейдем к доказательству третьего пункта теоремы. Выражение для T_1 уже получено — выведем формулу для T_2 .

Из I энергетического равенства видно, что

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_{r+2}}^{r+2} \equiv (r+2) \int_{\Omega} |u|^r uu' dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi'}{\mu} \right).$$

Поэтому II равенство можно переписать следующим образом:

$$W = \frac{\mu}{r+2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi'}{\mu} \right).$$

Значит, из леммы 1 следует, что

$$\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi W = (q+2)\Phi \frac{\mu}{r+2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi'}{\mu} \right),$$

откуда получим неравенство

$$\Phi\Phi'' - (1+\alpha)\Phi'^2 - \frac{\mu'}{\mu}\Phi\Phi' \geq 0, \quad \alpha = \frac{r-q}{q+2}.$$

Заметим, что из условия (5.9) следует соотношение $r > q$, что обеспечивает положительность α . Поэтому, полагая $\Phi = z^{-1/\alpha}$, получим равносильное неравенство:

$$z'' - \frac{\mu'}{\mu}z' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{\mu} \right) \leq 0.$$

Проинтегрируем неравенство от 0 до t :

$$\frac{z'}{\mu} - \frac{z'_0}{\mu_0} \leq 0 \Leftrightarrow z' \leq \frac{z'_0}{\mu_0}\mu.$$

Еще раз проинтегрируем неравенство от 0 до t , а затем вернемся к обозначению Φ , учитывая, что $z = \Phi^{-\alpha}$, откуда $z' = -\alpha\Phi^{-\alpha-1}\Phi'$:

$$\Phi \geq \left(\Phi_0^{-\alpha} - \alpha\Phi_0^{-\alpha-1} \|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2} \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right)^{-1/\alpha}$$

(переход равносильно при достаточно малых t). Из этого неравенства легко получить, что $T \leq T_2$, где T_2 — наименьший положительный корень уравнения (5.9).

В частности, при постоянном μ из уравнений (5.8) и (5.9) легко найти явные оценки (5.10). **Теорема доказана.**

Обсудим вопрос, насколько точны оценки T_1 и T_2 . Из соотношений (5.8) и (5.9) следует, что

$$\int_{T_1}^{T_2} \mu(\tau) d\tau = \frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}} - \frac{1}{rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2}}.$$

Преобразуем левую часть равенства с помощью теоремы Лагранжа. Предположим дополнительно, что $\inf_{t \geq 0} \mu(t) > 0$. Таким образом,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{\mu(\xi)} \left(\frac{q+2}{r-q} \cdot \frac{\Phi_0}{\|u_0\|_{L_{r+2}}^{r+2}} - \frac{1}{rC_{r+2}^{r+2}(2\Phi_0)^{r/2}} \right),$$

где $\xi \in [T_1; T_2]$. Рассмотрим семейство начальных данных вида $u_0(x) = \gamma v(x)$, где $v(\cdot)$ — фиксированный нетривиальный элемент H_0^1 , γ — положительный числовой параметр. Так как $\Phi = \gamma^2(c_1 + c_2\gamma^q)$, где $c_1 = (\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2)/2$, $c_2 = (q+1)\|v\|_{L_{q+2}}^{q+2}/(q+2)$, то, как несложно убедиться,

$$T_2 - T_1 = O\left(\frac{1}{\gamma^{r-q}}\right)$$

при $\gamma \rightarrow \infty$, т. е. длина промежутка, содержащего T , уменьшается при возрастании начальных данных в нормах L_2 , L_{q+2} и L_{r+2} за счет увеличения параметра γ , причем скорость сжатия этого промежутка зависит от разности показателей нелинейностей.

5.2. Однородное уравнение с двумя нелинейностями

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu(x, t) |u|^r u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Здесь $N = 3$, $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in [1; 4]$, $r \in (1; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}]$, $u_0(x) \in H_0^1$.

Раздел основан на исследовании, которому была посвящена статья [99].

Замечание. Так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}]$ следует, что $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4]$. В дальнейшем это свойство будет использоваться.

Задача (5.13) является задачей вида (5.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (5.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu |u|^r u \right) w dx = 0 \quad (5.14)$$

для всех $\forall w \in H_0^1$, $t \in [0; T]$.

Замечание. Условие $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}]$ обеспечивает принадлежность слагаемого $\mu |u|^r$ и множеству L_2 и, следовательно, корректность определения обобщенного решения. Действительно, возьмем такие положительные α и β , что $1/\alpha + 1/\beta = 1$, и оценим это слагаемое с помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения:

$$\|\mu |u|^r u\|_{L_2}^2 \leq \left(\int_{\Omega} |\mu|^{2\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |u|^{2(r+1)\beta} dx \right)^{1/\beta} \leq \|\mu\|_{L_{2\alpha}}^2 \cdot C \|u\|_{H_0^1}^{2(r+1)}.$$

Применимость теоремы вложения обеспечивается условием $2(r+2)\beta \leq 6 \Leftrightarrow$

$2\alpha \geq 6/(2-r)$. Так как $L_{\alpha_1} \subseteq L_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$, то наиболее слабым допустимым условием относительно $\mu(\cdot)$ будет $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)})$.

Возьмем для задачи (5.13) $\theta = 1$, откуда

$$\Phi = \frac{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \quad W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Полагая в (5.14) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad \Phi' &= -b \|\nabla u\|^2 - a \|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx, \\ II. \quad W &= -\frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 - \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Эти тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Замечание. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

Теорема 3. Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (5.13). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.

Введем следующие операторы: $A_1 u = u - \Delta u$, $A_2 u = |u|^q u$, $Au = A_1 u + A_2 u$, $Lu = -\Delta u$, $Fu = \mu(x, t) |u|^r u$.

С помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения H_0^1 в L_p можно доказать, что

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_{-1} \leq C \|\mu\|_{L_4} \max^r (\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1} \quad \forall u_{1,2} \in H_0^1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle &= \|u_1 - u_2\|^2 + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2) (u_1 - u_2) dx \geq \|u_1 - u_2\|_{+1}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует липшиц-непрерывный обратный оператор

$A^{-1} : H^{-1} \rightarrow H_0^1$ с постоянной Липшица, равной единице. Поэтому можно сделать замену переменных $w = Au$ и после этой замены исследовать разрешимость задачи в классе $C^1 [0; T; H^{-1})$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w, \quad w|_{t=0} = w_0 \equiv Au_0, \quad w \in C^1 [0; T; H^{-1}).$$

Проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий:

$$w = Hw \equiv w_0 + \int_0^t (-bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w) d\tau. \quad (5.16)$$

Докажем однозначную разрешимость уравнения (5.16) с помощью принципа сжимающих отображений. Рассмотрим пространство $L_\infty [0; T; H^{-1})$ и следующий шар в нем:

$$B_\rho = \left\{ v \in L_\infty [0; T; H^{-1}) \mid \|v\|_T \equiv \|\|v\|_{-1}\|_{L_\infty[0; T)} \leq \rho \right\}.$$

Достаточно доказать, что оператор H переводит B_ρ в себя и является сжимающим.

С помощью оценки $\|A^{-1}w\|_{-1} \leq \|w\|_{+1}$ и неравенства

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + \left\| \int_0^t (-bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w) d\tau \right\|_T$$

получим, что при $w \in B_\rho$

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + CT\rho + C' \int_0^T \|\mu\|_{L_4} d\tau \cdot \rho^{r+1}, \quad C, C' > 0.$$

Пусть ρ достаточно велико, т. е. $\|w_0\|_{-1} \leq \rho/3$. Пусть T достаточно мало, т. е. $CT \leq 1/3$ и $\int_0^T \|\mu\|_{L_4} d\tau \leq (3C'\rho^r)^{-1}$. Тогда $\|Hw\|_T \leq \rho/3 + \rho/3 + \rho/3 = \rho$, а следовательно, H переводит B_ρ в себя. Аналогично можно доказать, что этот оператор является сжимающим. Значит, уравнение (5.16) однозначно разрешимо в классе $L_\infty [0; T; H^{-1})$. Как и в [19, гл. 5, §14], применим стандартный

алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Получим, что существует некоторое максимальное значение T , возможно, бесконечное, причем если $T = \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T} \|w\|_{-1} = \infty$.

Оператор H является сглаживающим, т. е. переводит $L_\infty [0; T; H^{-1})$ в $AC_\infty [0; T; H^{-1})$, а это множество — в $C^1 [0; T; H^{-1})$.

Таким образом, задача сводится к уравнению $Au = w$, где $w \in C^1 [0; T; H^{-1})$. В [19, с. 425–428] показано, что это уравнение имеет единственное решение $u \in C^1 [0; T; H_0^1)$, причем если $T < \infty$, то имеет место опрокидывание решения. **Теорема доказана.**

В дальнейшем будем рассматривать решения задачи (5.13), соответствующие нетривиальным начальным данным.

Теорема 4. Пусть $\mu(x, t) \in C [0; T; L_4)$. Положим $k = |\min(a, b, 0)|$, $J = (2\Phi_0)^{-r/2} / (C_4 C_{2r+2}^{r+1} r)$.

1. Если $\mu(x, t) \leq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , то обобщенное решение задачи (5.13) существует глобально по времени.
2. Если $q \geq 2r$, то обобщенное решение задачи (5.13) существует глобально по времени.

3. Если

$$\int_0^\infty \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau < J, \quad (5.17)$$

то обобщенное решение задачи (5.13) существует глобально по времени.

4. Пусть уравнение

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau = J \quad (5.18)$$

имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$.

В частности, если μ зависит только от x , то T_1 имеет явное выражение:

$$T_1 = \begin{cases} \frac{1}{rk} \ln \left(1 + \frac{rkJ}{\|\mu\|_{L_4}} \right), & k > 0, \\ \frac{J}{\|\mu\|_{L_4}}, & k = 0. \end{cases}$$

Замечание. Как уже отмечалось, условие $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4)$ следует из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)})$, для которого была сформулирована теорема об однозначной разрешимости.

Замечание. В теореме пункт 4 не противоречит пунктам 1 и 2, устанавливающим глобальную разрешимость, поскольку в нем утверждается только существование обобщенного решения, по крайней мере, в классе X_{T_1} ; при этом не исключается, что величина T может быть бесконечной.

Заметим, что $-b \|\nabla u\|^2 - a \|u\|^2 \leq |\min(a, b, 0)| (\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2) \leq 2k\Phi$.

Достаточное условие существования обобщенного решения глобально по времени, указанное в пункте 1, можно обосновать непосредственно с помощью I энергетического равенства (5.15). Пусть $\mu(x, t) \leq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t . Тогда из I равенства следует, что

$$\Phi' \leq 2k\Phi,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (e^{-2kt}\Phi) \leq 0.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t , получим, что

$$e^{-2kt}\Phi - \Phi_0 \leq 0,$$

а значит, $\Phi \leq \Phi_0 e^{2kt} < \infty$ при всех конечных t . Следовательно, разрушения решения не происходит.

Докажем утверждение пункта 2.

Несложно убедиться, что

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \right| \leq \|\mu\|_{L_4} \|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1}.$$

Так как из условий данного пункта следует, что $q + 2 \geq 2r + 2$ и $q + 2 > 4$, то существует такая постоянная γ , что

$$\|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1} \leq \gamma \|u\|_{L_{q+2}}^{r+2} \leq \gamma \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \Phi^{(r+2)/(q+2)}.$$

Кроме того, заметим, что так как $(r+2)/(q+2) < 1$, то $\Phi^{(r+2)/(q+2)} \leq \Phi + 1$. Поэтому, полагая

$$m(t) = \gamma \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \|\mu\|_{L_4},$$

получим:

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \right| \leq m(t) (\Phi + 1).$$

Таким образом, из I энергетического равенства вытекает, что

$$\Phi' \leq 2k\Phi + m(t)(\Phi + 1) \Rightarrow \Phi' \leq (2k + m(t))(\Phi + 1),$$

откуда

$$\Phi' / (\Phi + 1) \leq 2k + m(t).$$

После интегрирования этого неравенства от 0 до t придем к следующей оценке:

$$\Phi \leq (\Phi_0 + 1) e^{2kt + \int_0^t m(\tau) d\tau} - 1 < \infty \quad \forall t < \infty.$$

Значит, решение существует глобально по времени.

Перейдем к обоснованию пунктов 3 и 4 теоремы.

Интеграл в I энергетическом равенстве оценим с помощью леммы 3. Таким образом,

$$\Phi' \leq 2k\Phi + 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} \Phi^{r/2+1}.$$

Обозначим $g(t) = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4}$. Тогда

$$-\frac{2}{r} \frac{d}{dt} \Phi^{-r/2} \leq 2k\Phi^{-r/2} + 2g(t).$$

Положим $y = \Phi^{-r/2}$. Тогда неравенство легко привести к следующему виду:

$$y' + rky + rg(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (ye^{rkt}) + rg(t) e^{rkt} \geq 0.$$

Проинтегрировав левую и правую части неравенства от 0 до t , получим:

$$ye^{rkt} - y_0 + \int_0^t rg(\tau) e^{rk\tau} d\tau \geq 0,$$

откуда

$$\Phi^{-r/2} \geq \frac{\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(\tau) e^{rk\tau} d\tau}{e^{rkt}}.$$

В этом неравенстве левая и правая части положительны в некоторой окрестности нуля, следовательно, их можно возвести в степень $-2/r$:

$$\Phi \leq e^{2kt} \left[\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(\tau) e^{rk\tau} d\tau \right]^{-2/r}.$$

Таким образом, если выполняется условие (5.17), обеспечивающее положительность выражения в квадратных скобках при всех конечных t , то величина Φ может быть оценена сверху функцией, принимающей конечные значения при всех конечных t , а значит, решение существует глобально по времени. Если же выражение в квадратных скобках достигает нулевого значения при некотором $t = T_1 > 0$, то неравенство гарантирует существование решения только при $t \in [0; T_1)$. Поэтому наименьший положительный корень уравнения $\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(t) e^{rk\tau} d\tau = 0$, равносильного (5.18), является нижней оценкой параметра T (при этом не исключается случай $T = \infty$).

В частности, если μ зависит только от x , то из уравнения (5.18) легко получить явное выражение для T_1 . **Теорема доказана.**

Перейдем к оцениванию величины T сверху.

Дополним список используемых обозначений:

$$m = \max(|a|, |b|), \quad \alpha = \frac{1}{q+2} \left(r - \frac{rm}{2} - q \right).$$

Теорема 5. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4)$, причем $\mu'(x, t) \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t . Пусть $1 < r \leq 2$, $q \geq 1$. Кроме того, предположим, что

$$m < \frac{2(r-q)}{r} \tag{5.19}$$

u

$$\Phi'_0 > \Phi_0 \sqrt{\frac{rm}{\alpha}}. \quad (5.20)$$

Тогда обобщенное решение задачи (5.13) разрушается за конечное время $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha rm}} \cdot \ln \frac{\Phi'_0 + \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}{\Phi'_0 - \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}, & m > 0, \\ \frac{\Phi_0}{\alpha \Phi'_0}, & m = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся тождеством

$$\int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx = (r+2)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx - \int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx \right).$$

Выразим $\int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx$ и $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ соответственно из II и I энергетических равенств (5.15) и подставим в это тождество. Положим $I = a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2$.

После упрощений получим:

$$W = \frac{1}{r+2} \Phi'' - \frac{r}{2(r+2)} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{r+2} \int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx.$$

Несложно убедиться, что $\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| \leq \int_{\Omega} (u^2 + u'^2) dx = \|u\|^2 + \|u'\|^2$. Аналогично можно оценить производную от $\|\nabla u\|^2$. Следовательно,

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \leq |a| (\|u\|^2 + \|u'\|^2) + |b| (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u'\|^2) \leq \max(|a|, |b|) (2\Phi + W).$$

Так как $\mu'(x, t) \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , то величина $\int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx$ неотрицательна. Поэтому

$$W \leq \frac{1}{r+2} \Phi'' + \frac{rm}{2(r+2)} (2\Phi + W),$$

откуда

$$W \left(1 - \frac{rm}{2(r+2)} \right) \leq \frac{1}{r+2} \Phi'' + \frac{rm}{r+2} \Phi. \quad (5.21)$$

Заметим, что положительность множителя при W следует из предполагаемого условия (5.19). Поэтому, сопоставляя неравенство (5.21) с леммой 1, получим:

$$\Phi^2 \left(1 - \frac{rm}{2(r+2)} \right) \leq \frac{q+2}{r+2} \Phi (\Phi'' + rm\Phi),$$

что равносильно

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + rm\Phi^2 \geq 0,$$

где $\alpha = \frac{1}{q+2} \left(r - \frac{rm}{2} - q \right)$. Заметим, что $\alpha > 0$ в силу условия (5.19).

Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$. После упрощений получим:

$$z'' \leq \alpha rmz. \quad (5.22)$$

Рассмотрим по отдельности случаи $m > 0$ и $m = 0$.

1. Пусть $m > 0$. Положим $\rho = \sqrt{\alpha rm}$, $z = e^{\rho t}w$. Неравенство (5.22) примет следующий вид:

$$w'' + 2\rho w' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (w' e^{2\rho t}) \leq 0.$$

После интегрирования от 0 до t получим:

$$w' \leq w'_0 e^{-2\rho t}.$$

Еще раз проинтегрируем от 0 до t . Так как $w_0 = z_0$ и $w'_0 = z'_0 - \rho z_0$, то

$$z \leq \frac{e^{\rho t}}{2\rho} \cdot [(z'_0 + \rho z_0) - (z'_0 - \rho z_0) e^{-2\rho t}].$$

Выражение в квадратных скобках положительно при достаточно малых t и достигает нулевого значения при

$$t = T_2 \equiv \frac{1}{2\rho} \cdot \ln \frac{z'_0 - \rho z_0}{z'_0 + \rho z_0}.$$

Поэтому Φ обращается в бесконечность при $T \leq T_2$, а значит, T_2 является верхней оценкой для T . Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим:

$$T_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha rm}} \cdot \ln \frac{\Phi'_0 + \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}{\Phi'_0 - \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}.$$

2. Пусть $m = 0$. Дважды интегрируя неравенство (5.22) от 0 до t , получим:

$$z \leq z_0 + z'_0 t,$$

откуда

$$\Phi \geq (z_0 + z'_0 t)^{-1/\alpha}.$$

Выражение в скобках положительно при достаточно малых t и достигает нулевого значения при

$$t = T_2 \equiv -\frac{z_0}{z'_0}.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим:

$$T_2 = \frac{\Phi_0}{\alpha \Phi'_0}.$$

Несложно убедиться, что и при $m > 0$, и при $m = 0$ предполагаемое условие (5.20) равносильно положительности T_2 , т. е. оно обеспечивает корректность сделанных оценок. **Теорема доказана.**

5.3. Однородное уравнение с двумя нелинейностями (дополнение)

После публикации статьи [99] автору удалось расширить изложенные там результаты. Приведем здесь результаты, относящиеся к задаче (5.13), но не вошедшие в названную статью.

Напомним постановку задачи из [99]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b \Delta u - a u + \mu(x, t) |u|^r u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in [1; 4]$, $u_0(x) \in H_0^1$. Кроме того, предполагалось, что $N = 3$, $r \in (1; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}]$.

В [105] были установлены следующие результаты.

Утверждение. Теоремы 3–5 остаются в силе, если считать, что $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, а $\mu(\cdot)$ находится в пространстве $C[0; T; L_4]$ или $C^1[0; T; L_4]$

соответственно для теорем 3 и 4 или для теоремы 5 (при тех же ограничениях на другие параметры).

Названные комбинации параметров N , r , μ обеспечивают применимость соответствующих теорем вложения, поэтому доказательства дословно повторяют доказательства теорем 3–5.

Теорема 6. Пусть $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; T; L_4)$, причем $\mu \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , а a и b — неположительные и достаточно малые по модулю числа, $1 \leq q < 19/10$, $r(19/10 - q) > 4q$. Пусть $\|\mu\|_{L_4}$ — ограниченная функция от t . Пусть величина $\int_{\Omega} \mu_0 |u_0|^{r+2} dx$ достаточно большая. Тогда $T \leq T_3$ (для T_3 найдена явная формула).

Доказательство во многом повторяет рассуждения, относящиеся к теореме 5. Более интересна следующая теорема, не вошедшая ни в статью [99], ни в тезисы [105]: здесь более тонкие оценки позволяют ослабить ранее рассматривавшиеся условия на параметры.

Пусть, как и раньше, $m = \max(|a|, |b|)$, причем $m > 0$ (противоположный случай был разобран в теореме 5).

Теорема 7. Пусть $N = 2$ или $N = 3$. Пусть задача однозначно разрешима. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, $\mu(\cdot) \in C^1[0; T; L_4)$, причем $\mu' \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , кроме того,

$$\Phi'_0/\Phi_0 > R, \quad (5.23)$$

где $R = \frac{rm}{r-q} \sqrt{2(q+2)}$. Тогда имеет место оценка $T \leq T_2^*$, где

$$T_2^* = \frac{1}{rm} \sqrt{\frac{q+2}{2}} \ln \frac{\Phi'_0/\Phi_0 + R}{\Phi'_0/\Phi_0 - R}. \quad (5.24)$$

Напомним, что в теореме 5 было получено следствие из энергетических равенств

$$W = \frac{1}{r+2} \Phi'' - \frac{r}{2(r+2)} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{r+2} \int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx, \quad (5.25)$$

где $I = a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2$ (вывод этого соотношения можно повторить в условиях данной теоремы). Заметим, что $\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| \leq \int_{\Omega} \left(\frac{u^2}{\varepsilon} + \varepsilon u'^2 \right) dx = \frac{\|u\|^2}{\varepsilon} + \varepsilon \|u'\|^2$ (ε — пока произвольное положительное число). Аналогично можно оценить производную от $\|\nabla u\|^2$. Следовательно,

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \leq m \left(\frac{2\Phi}{\varepsilon} + \varepsilon W \right).$$

Учитывая эту оценку и знак μ' , найдем следствие из (5.25):

$$W \leq \frac{1}{r+2} \Phi'' + \frac{rm}{2(r+2)} \left(\frac{2\Phi}{\varepsilon} + \varepsilon W \right),$$

что равносильно

$$W \left(1 - \frac{rm\varepsilon}{2(r+2)} \right) \leq \frac{\Phi''}{r+2} + \frac{rm}{\varepsilon(r+2)} \Phi.$$

Как и раньше, сопоставим неравенство, оценивающее W с постоянным множителем, и лемму 1. Получим соотношение

$$\Phi \Phi'' - (1 + \alpha) \Phi'^2 + \frac{rm}{\varepsilon} \Phi^2 \geq 0,$$

где $\alpha = (r+2 - rm\varepsilon/2)/(q+2) - 1$. Перейдя к переменной $z = \Phi^{-\alpha}$, получим:

$$z'' \leq \frac{\alpha rm}{\varepsilon} z.$$

Затем, рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 5, получим, что $T \leq T_2^*$, где

$$T_2^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha rm}} \ln \frac{\Phi'_0/\Phi_0 + \sqrt{rm/(\alpha\varepsilon)}}{\Phi'_0/\Phi_0 - \sqrt{rm/(\alpha\varepsilon)}}.$$

Рассуждения будут корректны, если на ε и $\alpha(\varepsilon)$ наложены следующие ограничения:

1. $1 - rm\varepsilon/(2(r+2)) > 0$,
2. $\alpha > 0 \Leftrightarrow r - q > rm\varepsilon/2$,
3. $\Phi'_0 > \Phi_0 \sqrt{\frac{rm}{\alpha\varepsilon}}$.

Легко убедиться, что первое следует из второго. Третье перепишем в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \mu_0 |u_0|^{r+2} dx - I_0 > \Phi_0 \sqrt{\frac{rm(q+2)}{\varepsilon(r-q-rm\varepsilon/2)}}. \quad (5.26)$$

Желательно сделать это ограничение наиболее слабым относительно параметров задачи. Для этого минимизируем правую часть неравенства по произвольному параметру ε . Таким образом, легко найти значение

$$\varepsilon = \frac{r-q}{rm}.$$

Тогда, очевидно, другие условия на ε будут выполняться. Неравенство (5.26) примет вид (5.23), а требуемая оценка — (5.24).

5.4. Неоднородное уравнение с двумя нелинейностями

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + \mu(x) |u|^r u + f(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$, $q \in [1; 4]$, $f(x, t) \in C[0; T; L_2)$, $u_0(x) \in H_0^1$. Кроме того, параметры r и $\mu(x)$ удовлетворяют, в зависимости от размерности Ω , следующим условиям. Если $N = 2$, то $r \in (1; \infty)$, $\mu(x) \in L_4$; если $N = 3$, то $r \in (1; 2]$, $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$.

Раздел основан на исследовании, которому была посвящена статья [97].

Замечание. Так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ следует, что $\mu(x) \in L_4$. Поэтому использование выражений с $\|\mu\|_{L_4}$ будет корректно не только при $N = 2$, но и при $N = 3$.

Задача (5.27) является задачей вида (5.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно

из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (5.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + \mu |u|^r u + f \right) w dx = 0 \quad (5.28)$$

для всех $\forall w \in H_0^1, t \in [0; T)$.

Замечание. Как было показано в разделе, посвященном однородному уравнению, условие $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ в случае $N = 3$ обеспечивает принадлежность слагаемого $(\mu |u|^r u)$ множеству L_2 и, следовательно, корректность определения обобщенного решения.

Возьмем для этой задачи $\theta = 1$, откуда

$$\Phi = \frac{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \quad W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Полагая в (5.28) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad \Phi' &= \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx + \int_{\Omega} f u dx, \\ II. \quad W &= \int_{\Omega} \mu |u|^r u u' dx + \int_{\Omega} f u' dx. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Как и раньше, энергетические тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Замечание. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

Лемма 4. Имеют место следующие утверждения:

1. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда $b = \beta^\beta (1 - \beta)^{1-\beta}$ — наименьшее значение константы b , при котором $v^\beta \leq b(v+1) \quad \forall v \geq 0$ (при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ имеются в виду предельные значения: $b|_{\beta=0} = b|_{\beta=1} = 1$).

2. Пусть $k \geq 0$. Тогда $b = (k/e)^k$ — наименьшее значение константы b , при котором $v^k \leq be^v \forall v \geq 0$.

Утверждения следуют непосредственно из свойств функций $\varphi_1(v) = b(v+1) - v^k$ и $\varphi_2(v) = be^v - v^k$.

Лемма 5. Рассмотрим неравенство

$$\lambda(\Phi) \cdot \frac{d\Phi}{dt} \leq \chi(t), \quad (5.30)$$

где $\Phi \in C^1[0; T)$, $\lambda(\cdot) \in C[0; \infty)$, $\chi(\cdot) \in C[0; T)$, причем $\lambda(\Phi) > 0 \forall \Phi \in [0; \infty)$. Пусть $\Lambda(\Phi)$ — некоторая первообразная $\lambda(\Phi)$. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если $\int_0^t \chi(\tau) d\tau < \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \Lambda(\Phi) - \Lambda(\Phi_0)$ при всех конечных t , то $T = \infty$.
2. Пусть уравнение $\int_0^t \chi(\tau) d\tau = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \Lambda(\Phi) - \Lambda(\Phi_0)$ имеет положительный корень $t = T_1$. Тогда, по крайней мере, $T \geq T_1$.

В частности, если $\chi = \text{const}$, то $T_1 = \left(\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \Lambda(\Phi) - \Lambda(\Phi_0) \right) / \chi$.

Замечание. В лемме не исключается случай, когда указанный предел бесконечен.

Проинтегрируем неравенство (5.30) от 0 до t :

$$\Lambda(\Phi(t)) - \Lambda(\Phi(0)) \leq \int_0^t \chi(\tau) d\tau.$$

Заметим, что, по крайней мере, при достаточно малых t можно провести следующее равносильное преобразование с помощью функции, обратной к Λ :

$$\Phi \leq \Lambda^{-1} \left(\Lambda(\Phi_0) + \int_0^t \chi(\tau) d\tau \right).$$

Из этого неравенства видно, что Φ принимает конечные значения в некоторой окрестности нуля (возможно, неограниченной), где принимает конечные значения правая часть неравенства. Граница этой окрестности (если существует)

определяется уравнением

$$\Lambda(\Phi_0) + \int_0^t \chi(\tau) d\tau = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \Lambda(\Phi).$$

Лемма доказана.

Теорема 8. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (5.27). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Введем следующие операторы: $A_1 u = u - \Delta u$, $A_2 u = |u|^q u$, $Au = A_1 u + A_2 u$, $Fu = \mu(x) |u|^r u$.

С помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения H_0^1 в L_p можно доказать, что

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_{-1} \leq C \max^r (\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1} \quad \forall u_{1,2} \in H_0^1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle &= \|u_1 - u_2\|^2 + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2) (u_1 - u_2) dx \geq \|u_1 - u_2\|_{+1}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует липшиц-непрерывный обратный оператор $A^{-1} : H^{-1} \rightarrow H_0^1$ с постоянной Липшица, равной единице. Поэтому можно сделать замену переменных $w = Au$ и после этой замены исследовать разрешимость задачи в классе $C^1 [0; T; H^{-1}]$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = FA^{-1}w + f, \quad w|_{t=0} = w_0 \equiv Au_0, \quad w \in C^1 [0; T; H^{-1}].$$

Проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий:

$$w = Hw \equiv w_0 + \int_0^t (FA^{-1}w + f) d\tau. \quad (5.31)$$

Докажем однозначную разрешимость уравнения (5.31) с помощью принципа сжимающих отображений. Рассмотрим пространство $L_\infty [0; T; H^{-1})$ и следующий шар в нем:

$$B_\rho = \left\{ v \in L_\infty [0; T; H^{-1}) \mid \|v\|_T \equiv \left\| \|v\|_{-1} \right\|_{L_\infty [0; T)} \leq \rho \right\}.$$

Достаточно доказать, что оператор H переводит B_ρ в себя и является сжимающим.

С помощью оценки $\|A^{-1}w\|_{-1} \leq \|w\|_{+1}$ и неравенства

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + \left\| \int_0^t FA^{-1}wd\tau \right\|_T + \left\| \int_0^t fd\tau \right\|_T$$

получим, что при $w \in B_\rho$

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + f_0(T),$$

где функция $f_0(\cdot)$ непрерывна и возрастает на $[0; \infty)$, причем $f_0(0) = 0$. Пусть ρ достаточно велико, т. е. $\|w_0\|_{-1} \leq \rho/2$. Пусть T достаточно мало, т. е. $f_0(T) \leq \rho/2$. Тогда $\|Hw\|_T \leq \rho/2 + \rho/2 = \rho$, а следовательно, H переводит B_ρ в себя. Аналогично можно доказать, что этот оператор является сжимающим. Значит, уравнение (5.31) однозначно разрешимо в классе $L_\infty [0; T; H^{-1})$. Применим стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Получим, что существует некоторое максимальное значение T , возможно, бесконечное, причем если $T = \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T^-} \|w\|_{-1} = \infty$.

Оператор H является сглаживающим, т. е. переводит $L_\infty [0; T; H^{-1})$ в $AC_\infty [0; T; H^{-1})$, а это множество — в $C^1 [0; T; H^{-1})$.

Таким образом, задача сводится к уравнению $Au = w$, где $w \in C^1 [0; T; H^{-1})$. В [19, с. 425–428] показано, что это уравнение имеет единственное решение $u \in C^1 [0; T; H_0^1)$, причем если $T < \infty$, то имеет место опрокидывание решения. **Теорема доказана.**

Теорема 9. Пусть $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$ или $r \in (1; 2]$, $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Пусть, кроме того, $q \in [1; 4]$, $f(x, t) \in C[0; T; L_2)$.

1. Если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то решение существует глобально по времени.
2. Если $q \geq 2r$, то решение существует глобально по времени.
3. Пусть коэффициент μ нетривиален. Пусть k — такое натуральное число, что $2k - 2 < r \leq 2k$. Пусть уравнение

$$\int_0^t e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \|f\| d\xi} d\tau = \frac{(1 + \Phi_0)^{-k}}{gk} \quad (5.32)$$

имеет корень $t = T_1 > 0$, где

$$g = 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} (r/2 - k + 1)^{r/2-k+1} (k - r/2)^{k-r/2}$$

(будем считать, что $0^0 = 1$). Тогда имеет место оценка $T \geq T_1$.

В частности, если f зависит только от x , то

$$T_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{k\|f\|} \ln \left(1 + \frac{\|f\|(1+\Phi_0)^{-k}}{g\sqrt{2}} \right), & \|f\| \neq 0, \\ \frac{(1+\Phi_0)^{-k}}{gk}, & \|f\| = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

4. Если выражение в левой части (5.32) меньше выражения в правой части при всех конечных t , то решение существует глобально по времени.

Замечание. Из пункта 1 данной теоремы видно, что условие $\|\mu\|_{L_4} = 0$ является достаточным для того, чтобы решение не разрушалось. Поэтому далее везде (кроме этого пункта) будем считать, что $\|\mu\|_{L_4} \neq 0$.

Докажем утверждение первого пункта теоремы.

Если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то из I энергетического равенства следует,

что

$$\Phi' = \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx + \int_{\Omega} f u dx \leq \|f\| \|u\| \leq \|f\| \sqrt{2\Phi},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\Phi} \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Phi \leq \left(\sqrt{\Phi_0} + \int_0^t \frac{\|f\|}{\sqrt{2}} d\tau \right)^2.$$

Значит, Φ принимает конечные значения при всех конечных t , и разрушения не происходит.

Докажем утверждение второго пункта теоремы.

В доказательстве теоремы 4 было показано, что если $q \geq 2r$, то

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \right| \leq C \|\mu\|_{L_4} (\Phi + 1).$$

Поэтому из I энергетического равенства вытекает, что

$$\Phi' \leq C \|\mu\|_{L_4} (\Phi + 1) + \|f\| \sqrt{2\Phi} \leq C \|\mu\|_{L_4} (\Phi + 1) + \frac{\|f\|^2}{2} + \Phi,$$

а следовательно,

$$\Phi' \leq m(t)(\Phi + 1), \quad m(t) = C \|\mu\|_{L_4} + \max \left(1, \frac{\|f\|^2}{2} \right).$$

Приведем неравенство к виду

$$\frac{\Phi'}{\Phi + 1} \leq m(t)$$

и проинтегрируем от 0 до t :

$$\ln(\Phi + 1)|_0^t \leq \int_0^t m(\tau) d\tau \Leftrightarrow \Phi \leq (\Phi_0 + 1) e^{\int_0^t m(\tau) d\tau} - 1 < \infty \quad \forall t > 0.$$

Следовательно, $T = \infty$.

Перейдем к доказательству третьего и четвертого пунктов теоремы.

Лемма 3 позволяет найти следствие из I энергетического равенства (5.29):

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx + \int_{\Omega} f u dx \leq \\ &\leq C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} \|\nabla u\|^{r+2} + \|f\| \|u\| \leq \\ &\leq 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} \Phi^{r/2+1} + \|f\| \sqrt{2\Phi}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\Phi' \leq 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} \Phi^{r/2+1} + \|f\| \sqrt{2} \cdot \Phi^{1/2}, \quad (5.34)$$

Пусть k — такое натуральное число, что $2k - 2 < r \leq 2k$, а значит, $0 < r/2 - k + 1 \leq 1$. Оценивая $\Phi^{r/2+1}$ и $\Phi^{1/2}$ с помощью леммы 4, получим следствие из (5.34):

$$\Phi' \leq g(\Phi + 1)\Phi^k + h(t)(\Phi + 1), \quad (5.35)$$

где $g = 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} (r/2 - k + 1)^{r/2-k+1} (k - r/2)^{k-r/2}$, $h(t) = \|f\| / \sqrt{2}$.

Полагая $\Phi(t) = e^{\psi(t)} - 1$, получим

$$\psi' \leq g(e^\psi - 1)^k + h(t).$$

Следовательно,

$$\psi' \leq g e^{k\psi} + h(t).$$

Полагая $\psi(t) = y(t) + \int_0^t h(\tau) d\tau$, получим:

$$e^{-ky} y' \leq g e^{k \int_0^t h(\tau) d\tau}.$$

К этому неравенству применима лемма 5, а значит, $y(t)$ принимает конечные значения, по крайней мере, на промежутке $[0; T_1)$, где T_1 определяется уравнением

$$\int_0^t g e^{k \int_0^\tau h(\xi) d\xi} d\tau = \frac{e^{-ky_0}}{k} \quad (5.36)$$

(если существует). Возвращаясь к первоначальным обозначениям, перепишем уравнение в виде

$$\int_0^t e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \|f\| d\xi} d\tau = \frac{(1 + \Phi_0)^{-k}}{gk}. \quad (5.37)$$

При этом $\Phi \equiv e^{y + \int_0^t h(\tau) d\tau} - 1$, а следовательно, если y имеет конечное значение, то и величина Φ конечна. Значит, $T \geq T_1$. Возможна ситуация, когда левая часть (5.36) меньше правой при всех конечных t . Тогда по лемме 5 y (а следовательно, и Φ) имеет конечные значения при всех t .

В частности, если f зависит только от x , то из (5.37) несложно выразить T_1 явно:

$$T_1 = \frac{\sqrt{2}}{k \|f\|} \ln \left(1 + \frac{\|f\| (1 + \Phi_0)^{-k}}{g\sqrt{2}} \right)$$

или

$$T_1 = \frac{(1 + \Phi_0)^{-k}}{gk}$$

соответственно при $\|f\| \neq 0$ или $\|f\| = 0$. **Теорема доказана.**

Сужение множества параметров, рассматриваемых в теореме 2, позволяет вывести нижнюю оценку для T , более точную, чем T_1 .

Теорема 10. Пусть $r \in (1; 2]$. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$ или $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Пусть $q \in [1; 4]$, $f(\cdot)$ зависит только от x , причем $f(\cdot) \in L_2$. Пусть, кроме того, хотя бы одно из чисел Φ_0 и $\|f\|$ не равно нулю. Тогда имеет место оценка $T \geq T_1^* > T_1$, где

$$T_1^* = \begin{cases} \frac{1}{\|f\|/\sqrt{2}-g} \ln \frac{\Phi_0 + \|f\|/(g\sqrt{2})}{\Phi_0 + 1}, & \|f\| \neq g\sqrt{2}, \\ \frac{1}{g(1+\Phi_0)}, & \|f\| = g\sqrt{2}, \end{cases}$$

где $g = 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} (r/2)^{r/2} (1 - r/2)^{1-r/2}$ (при этом будем считать, что $0^0 = 1$).

В доказательстве теоремы 2 было выведено неравенство (5.35). Учитывая, что здесь $k = 1$, $h \equiv \|f\|/\sqrt{2} = \text{const}$, перепишем его в следующем виде:

$$\frac{\Phi'}{(\Phi + 1)(\Phi + l)} \leq g,$$

где $l = h/g$. Интегрируя левую и правую части неравенства от 0 до t , получим при $l \neq 1$ или $l = 1$ соответственно

$$\frac{1}{l-1} \left(\ln \frac{\Phi+1}{\Phi+l} - \ln \frac{\Phi_0+1}{\Phi_0+l} \right) \leq gt$$

или

$$-\frac{1}{\Phi+1} + \frac{1}{\Phi_0+1} \leq gt.$$

Проводя преобразования, равносильные при достаточно малых t , получим соответственно

$$\Phi \leq \frac{l-1}{1 - (\Phi_0 + l)^{-1} (\Phi_0 + 1) e^{g(l-1)t}} - l$$

или

$$\Phi \leq \frac{1}{(\Phi_0 + 1)^{-1} - gt} - 1.$$

В обоих случаях получаем, что Φ не превосходит функцию, принимающую конечные значения при $t < T_1^*$, где

$$T_1^* = \begin{cases} \frac{1}{\|f\|/\sqrt{2}-g} \ln \frac{\Phi_0 + \|f\|/(g\sqrt{2})}{\Phi_0 + 1}, & \|f\| \neq g\sqrt{2}, \\ \frac{1}{g(1+\Phi_0)}, & \|f\| = g\sqrt{2}, \end{cases}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $T_1^* > T_1$, где T_1 определяется формулой (5.33). **Теорема доказана.**

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{r-2q-1}{2q+4}, \quad z = \Phi^{-\alpha},$$

откуда $z'_0 = -\alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0$. Значит, z_0 и z'_0 можно считать известными.

Положим

$$G(t) = \alpha \left(\frac{1}{e} + \frac{(r+1)\|f\|^2 + \|f'\|^2}{2} \cdot \left(\frac{\alpha+1}{e\alpha} \right)^{1+1/\alpha} \right).$$

Теорема 11. Пусть $N = 2$, $1 \leq q \leq 4$, $f(\cdot) \in C^1[0; T; L_2)$, $\mu(\cdot) \in L_4$,

$$2q+1 < r \tag{5.38}$$

Пусть, кроме того, уравнение

$$\int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau + e^{-z_0} z'_0 t = e^{-z_0} - 1 \tag{5.39}$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2$ (если положительных корней больше одного, то T_2 — наименьший из них). Тогда решение задачи (5.27) разрушается за конечное время $T \leq T_2$.

В частности, если f зависит только от x , то

$$T_2 = \frac{-e^{-z_0} z'_0 - \sqrt{e^{-2z_0} z'^2_0 + 2G(e^{-z_0} - 1)}}{G}.$$

Замечание. В случае зависимости f только от x величина G является постоянной, а условие существования положительных корней уравнения (5.39) равносильно следующему:

$$z'_0 + \sqrt{2Ge^{z_0}(e^{z_0} - 1)} \leq 0.$$

Применим к I энергетическому равенству оператор d/dt , в полученное следствие вместо $\int_{\Omega} \mu |u|^r uu'dx$ подставим соответствующее выражение из II энергетического равенства. Получим:

$$(r+2)W = \Phi'' + (r+1) \int_{\Omega} fu'dx - \int_{\Omega} f'udx. \quad (5.40)$$

Заметим, что

$$\left| \int_{\Omega} fu'dx \right| \leq \|f\| \|u'\| \leq \frac{\|f\|^2 + \|u'\|^2}{2} \leq \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{W}{2}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\left| \int_{\Omega} f'udx \right| \leq \frac{\|f'\|^2}{2} + \Phi.$$

Подставляя эти оценки в (5.40) и собирая члены с W , получим:

$$W \leq \frac{2}{r+3} (\Phi'' + \Phi + F(t)),$$

где $F(t) = ((r+1)\|f\|^2 + \|f'\|^2)/2$. Сопоставляя это неравенство с леммой 1, получим:

$$\Phi'^2 \leq \frac{2(q+2)}{r+3} \cdot \Phi (\Phi'' + \Phi + F),$$

откуда

$$\Phi\Phi'' - \frac{r+3}{2(q+2)} \cdot \Phi'^2 + \Phi^2 + F\Phi \geq 0.$$

Теперь преобразуем это соотношение, учитывая, что $\alpha = (r - 2q - 1) / (2q + 4) = (r + 3) / (2q + 4) - 1$ и $\Phi = z^{-1/\alpha}$. Заметим, что условие (5.38) равносильно положительности α . Таким образом,

$$z'' \leq \alpha z + \alpha F z^{1+1/\alpha}.$$

Оценим правую часть с помощью леммы 4:

$$z'' \leq \alpha \left(1/e + \left(\frac{\alpha + 1}{e\alpha} \right)^{1+1/\alpha} F \right) e^z.$$

Обозначив множитель при экспоненте через $G(t)$, перепишем неравенство в следующем виде:

$$e^{-z} z'' \leq G(t).$$

Проинтегрируем его от 0 до t , учитывая, что $\int_0^t e^{-z} z'' d\tau = e^{-z} z'|_0^t + \int_0^t e^{-z} z'^2 d\tau \geq e^{-z} z' - e^{-z_0} z'_0$. Следовательно,

$$e^{-z} z' - e^{-z_0} z'_0 \leq \int_0^t G(\tau) d\tau.$$

Еще раз интегрируя неравенство от 0 до t , получим:

$$-e^{-z} + e^{-z_0} \leq e^{-z_0} z'_0 t + \int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau. \quad (5.41)$$

Обозначая правую часть (5.41) через $I(t)$, получим соотношение, равносильное (5.41) при достаточно малых t :

$$z \leq -\ln(e^{-z_0} - I(t)).$$

Поскольку правая часть этого неравенства положительна, по крайней мере, при достаточно малых t , оно равносильно следующему:

$$\Phi \geq \left(-\ln(e^{-z_0} - I(t)) \right)^{-1/\alpha}.$$

Таким образом, Φ можно оценить снизу функцией, принимающей конечные значения, по крайней мере, в некоторой окрестности нуля. Значит, если эта

окрестность ограничена, то ее правая граница может служить верхней оценкой для T , т. е. T_2 — наименьший положительный корень уравнения

$$-\ln(e^{-z_0} - I(t)) = 0 \Leftrightarrow I(t) \equiv e^{-z_0} z'_0 t + \int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau = e^{-z_0} - 1.$$

В частности, если f не зависит от t , то $G = \text{const}$, и уравнение становится квадратным относительно t :

$$Gt^2 + 2e^{-z_0} z'_0 t + 2(1 - e^{-z_0}) = 0.$$

Оно имеет два положительных корня, меньший из них — T_2 . **Теорема доказана.**

5.5. Неоднородное уравнение с двумя нелинейностями (дополнение)

Приведем здесь теорему, относящуюся к задаче (5.27), но не вошедшую в статью [97]. Она отвечает на вопрос, каковы достаточные условия разрушения решения в случае $N = 3$.

Переопределим величины α , z , $G(\cdot)$, а именно, пусть

$$\alpha = \frac{r - q}{2(q + 2)}, \quad z = \Phi^{-\alpha},$$

$$G(t) = \frac{r - q}{2(q + 2)} \left(\frac{1}{e} + \frac{(r + 1)^2 \|f\|^2 + (r - q) \|f'\|^2}{2(r - q)} \left(\frac{r + q + 4}{e(r - q)} \right)^{(r+q+4)/(r-q)} \right).$$

Очевидно, и здесь z_0 и $z'_0 = -\alpha \Phi_0^{-\alpha-1} \Phi'_0$ можно однозначно выразить через начальные данные.

Теорема 12. Пусть задача (5.27) однозначно разрешима. Пусть $N = 2$ или $N = 3$, $1 \leq q \leq 4$, $f(\cdot) \in C^1[0; T; L_2)$, $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, причем

$$q < r. \tag{5.42}$$

Пусть, кроме того, уравнение

$$\int_0^t \int_0^\tau G(\xi) d\xi d\tau + e^{-z_0} z_0' t = e^{-z_0} - 1 \quad (5.43)$$

имеет хотя бы один положительный корень $t = T_2^*$ (если положительных корней больше одного, то T_2^* — наименьший из них). Тогда решение задачи (5.27) разрушается за конечное время $T \leq T_2^*$.

В частности, если f зависит только от x , то

$$T_2^* = \frac{-e^{-z_0} z_0' - \sqrt{e^{-2z_0} z_0'^2 + 2G(e^{-z_0} - 1)}}{G}. \quad (5.44)$$

Замечание. В случае зависимости f только от x величина G является постоянной, а условие существования положительных корней уравнения (5.43) равносильно следующему:

$$z_0' + \sqrt{2Ge^{z_0}(e^{z_0} - 1)} \leq 0.$$

В условиях данной теоремы можно повторить вывод равенства (5.40). Кроме того, заметим, что, во-первых,

$$\left| \int_{\Omega} f u' dx \right| \leq \int_{\Omega} \left(\frac{f^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon u'^2}{2} \right) dx \leq \frac{\|f\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon W}{2},$$

где ε — пока произвольное положительное число, во-вторых,

$$\left| \int_{\Omega} f' u dx \right| \leq \frac{\|f'\|^2}{2} + \Phi.$$

Поэтому из (5.40) следует, что

$$W \leq \frac{\Phi''}{r+2} + \frac{r+1}{r+2} \left(\frac{\|f\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon W}{2} \right) + \frac{1}{r+2} \left(\frac{\|f'\|^2}{2} + \Phi \right),$$

что равносильно

$$W \left(1 - \frac{r+1}{r+2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\Phi''}{r+2} + \frac{\Phi}{r+2} + \frac{h(t)}{r+2},$$

где $h(t) = (r + 1)\|f\|^2/(2\varepsilon) + \|f'\|^2/2$. Позже будет выбрано значение ε , обеспечивающее положительность множителя при W . Значит, из этого неравенства и леммы 1 следует, что

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + \Phi^2 + h(t)\Phi \geq 0, \quad \alpha = \frac{r + 2 - \varepsilon(r + 1)/2}{q + 2} - 1.$$

Позже выберем такой ε , что будет выполнено соотношение $\alpha(\varepsilon) > 0$. Таким образом, перейдя к переменной $z = \Phi^{-\alpha}$, после упрощений получим:

$$z'' \leq \alpha z + \alpha h(t)z^{1+1/\alpha}.$$

Оценим одночлены в правой части этого неравенства с помощью леммы 4. Таким образом,

$$z'' \leq G(t)e^z, \quad G(t) = \alpha \left(\frac{1}{e} + \left(\frac{\alpha + 1}{e\alpha} \right)^{1+1/\alpha} h(t) \right).$$

Затем, рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 11, получим, что поиск T_2^* сводится к квадратурному уравнению (5.43).

Проведенные рассуждения будут корректны, если взять

$$\varepsilon < \min \left(\frac{2(r + 2)}{r + 1}, \frac{2(r - q)}{r + 1} \right) = \frac{2(r - q)}{r + 1}.$$

Пусть для определенности $\varepsilon = (r - q)/(r + 1)$, откуда $\alpha = (r - q)/(2(q + 2))$. Существование таких ε и α обеспечивается условием (5.42). Таким образом, величина T_2^* построена однозначно. В частности, если f зависит только от x , то для T_2^* легко получить явное выражение (5.44). **Теорема доказана.**

5.6. Выводы к главе

В данной главе исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для ряда нелинейных уравнений соболевского типа. Основное отличие этих задач от задач предыдущей главы

состоит в том, что они содержат нелинейные выражения не только в стационарной части, но и под знаком производной по времени. Показано, что новый вид нелинейности может существенно влиять на качественное поведение решений.

Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости задач. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных и квадратурных формул.

Глава 6

Начально-краевые задачи для уравнений с нелокальными по времени членами

В данной главе продолжим изучение начально-краевых задач для уравнений соболевского типа. Как и в предыдущих главах, будет исследована их однозначная разрешимость глобально или локально по времени. В случае локальной (но не глобальной) разрешимости будут найдены оценки времени существования решения. Важным отличием задач, которые будут рассмотрены здесь, является то, что они содержат нелокальные по времени члены.

Приведем определения и обозначения, общие для всех задач, изучаемых в данной главе. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} D[u] = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $u(\cdot)$ — действительнoзначная функция, зависящая от N -мерного вектора пространственных переменных x и времени $t > 0$, $D[\cdot]$ — нелинейный интегродифференциальный оператор. При этом считаем, что $x \in \Omega \subset R^N$, где Ω — ограниченное множество с достаточно гладкой границей: $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $0 < \delta \leq 1$. Будут рассматриваться размерности $N = 3$ и $N = 2$.

Введем классы $X_T = C^1[0; T; H_0^1(\Omega)]$, где T — некоторое положительное число или бесконечность.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (6.1) будем называть такое $u \in X_T$, что*

$$\begin{cases} \langle D[u], w \rangle = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

при всех $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0; T)$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$).

Заметим, что первое равенство в (6.2) можно переписать в виде интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} D[u]w dx = 0. \quad (6.3)$$

Определение 2. Говорят, что обобщенное решение задачи (6.1) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_{∞} . В частности, говорят, что решение разрушается путем опрокидывания, если $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.

В задачах будет фигурировать параметр $q \in [1; 4]$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_p &= L_p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad H_0^1 = H_0^1(\Omega), \quad H^{-1} = H^{-1}(\Omega), \\ \|\cdot\| &= \|\cdot\|_{L_2}, \quad \|\cdot\|_{+1} = \|\cdot\|_{H_0^1}, \quad \|\cdot\|_{-1} = \|\cdot\|_{H^{-1}}, \\ \Phi &= \frac{\theta \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \end{aligned}$$

где θ принимает одно из двух значений: 0 или 1. Штрихом будем обозначать производную по времени. Положим $W = \theta \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx$. Под нижним индексом «0» будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$ (если не будет оговорено противное). C_p — оптимальная константа вложения H_0^1 в L_p (если существует), т. е.

$$C_p = \inf \{ C \mid \|w\|_{L_p} \leq C \|w\|_{H_0^1} \quad \forall w \in H_0^1 \}.$$

Под C будем подразумевать положительные постоянные, возможно, различные. К числовым векторам будем применять обозначение $\|\cdot\|_{l_{\infty}}$: если $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in R^N$, то $\|\nu\|_{l_{\infty}} = \max_{1 \leq k \leq N} |\nu_k|$.

Остается верным рассуждение из предыдущей главы о том, что соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Phi = \infty \quad (T < \infty)$$

равносильно утверждению, что решение опрокидывается за время $T < \infty$.

Как и раньше, основные результаты будут получены с помощью оценок энергетического функционала $\Phi[u(t)]$.

Здесь понадобятся леммы из предыдущей главы. Напомним их формулировки.

Лемма 1. *Имеет место неравенство $\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi W$.*

Лемма 2. *Пусть выполняется неравенство*

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + F(t, \Phi, \Phi') \geq 0,$$

где α — положительная постоянная, $F(\cdot)$ — функция, определенная на $[0; \infty) \times (0; \infty) \times R$, $\Phi(t)$ принимает положительные значения в некоторой окрестности нуля. Подстановка $\Phi = z^{-1/\alpha}$ сводит это неравенство к неравенству с единичным коэффициентом при второй производной.

Лемма 3. *Если $\nu(x) \in L_4$, $w(x) \in H_0^1$, то*

$$\left| \int_{\Omega} \nu |w|^{r+2} dx \right| \leq C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\nu\|_{L_4} \|\nabla w\|^{r+2}.$$

(В задачах, где будет использоваться лемма, будут рассматриваться комбинации размерности N и показателя r , обеспечивающие корректность ее доказательства.)

6.1. Однородное нелокальное уравнение волн

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu(x) |u|^r u + \int_0^t (\lambda, \Delta) u(s) ds + \\ + \int_0^t (\omega_1^2 \cos \omega_2(t-s) + \omega_3^2 \cos \omega_4(t-s)) (\theta, \Delta) u(s) ds = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$. Если $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in R^N$ — ненулевой вектор, то под выражением (ν, Δ) подразумевается «лапласиан с весами»:

$$(\nu, \Delta) = \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Параметры задачи удовлетворяют следующим условиям: $a \in R$, $b \in R$, $q \in [1; 4]$, $\omega_{1,2,3,4} \in (0; \infty)$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, λ и θ — ненулевые векторы из R^N . Кроме того, будем предполагать, что, в зависимости от размерности N , параметры r и $\mu(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям. При $N = 2$ или $N = 3$ соответственно $(r, \mu(\cdot)) \in (1; \infty) \times L_4$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1; 2] \times L_{6/(2-r)}$. Под s в задаче (6.4) подразумевается переменная интегрирования, соответствующая времени.

Раздел основан на исследовании, которое было опубликовано в виде тезисов [107].

Обозначим

$$h(t) = \omega_1^2 \cos \omega_2 t + \omega_3^2 \cos \omega_4 t.$$

Задача (6.4) является задачей вида (6.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (6.3) — в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + b \Delta u - a u + \mu(x) |u|^r u + \int_0^t (\lambda, \Delta) u(s) ds + \int_0^t h(t-s) (\theta, \Delta) u(s) ds \right) w dx = 0 \quad (6.5)$$

для всех $\forall w \in H_0^1$, $t \in [0; T)$.

Замечание. Как было показано в предыдущей главе, условие $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ в трехмерном случае обеспечивает принадлежность слагаемого $(\mu |u|^r u)$ множеству L_2 и, следовательно, корректность определения обобщенного решения. Так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ следует, что $\mu(x) \in L_4$. В дальнейшем будут использоваться оценки и в норме L_4 .

Возьмем для задачи (6.4) $\theta = 0$, откуда

$$\Phi = \frac{\|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \quad W = \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Полагая в (6.5) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} I. \quad & \Phi' + a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2 + \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds = \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx, \\ II. \quad & W + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \\ & + \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds = \int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Как и раньше, энергетические тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Замечание. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

Теорема 1. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (6.4). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и, в основном, аналогично доказательству соответствующего утверждения в [10, гл. 2, §2].

Очевидно, при тривиальных начальных данных единственное решение будет тривиальным. В дальнейшем будем считать, что $\Phi_0 \neq 0$.

Обозначим

$$k = |\min(0, b - |\min(0, C_2^2 a)|)|, \quad g = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4},$$

$$\alpha = (\omega_1^2 + \omega_3^2)^2 \|\theta\|_{l_\infty} + \|\lambda\|_{l_\infty}, \quad \beta = 2k + \|\theta\|_{l_\infty} + \|\lambda\|_{l_\infty}.$$

Теорема 2. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$.

1. Если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то решение существует глобально по времени.
2. Если $q \geq 2r$, то решение существует глобально по времени.
3. Для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$, где T_1 — единственный положительный корень уравнения

$$\left[\frac{r\alpha}{r+2} T_1^3 + \frac{r\beta}{r+2} T_1 + \Phi_0 \right]^{r/2} \left[\frac{\alpha}{r+2} T_1^2 + \left(\frac{\beta}{r+2} + g \right) \right] T_1 = \frac{1}{r}. \quad (6.7)$$

В частности, если $1 < r \leq 2$, то выполняется и более грубая явная оценка: $T \geq T_1 \geq T_1^* > 0$, где

$$T_1^* = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}},$$

где

$$P = \frac{\max(r\beta, \beta + g(r+2))}{r\alpha}, \quad Q = \frac{r+2}{2r\alpha} \left(\sqrt{\Phi_0^2 + 4\Phi_0^{1-r/2}/r} - \Phi_0 \right)$$

(и для $N = 2$, и для $N = 3$).

Замечание. Как уже отмечалось, условие $\mu(\cdot) \in L_4$ следует из условия $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}$, которое обеспечивает однозначную обобщенную разрешимость задачи (6.4) при $N = 3$.

Замечание. Пункт теоремы, дающий оценку вида $T \geq T_1$, не противоречит пунктам, где утверждается, что решение существует глобально по

времени: он гарантирует существование решения, по крайней мере, в некоторой окрестности нуля, при этом не исключается случай $T = \infty$.

Воспользуемся I энергетическим равенством (6.6). Рассмотрим подробнее слагаемые, входящие в него.

1. Если $a \geq 0$, то

$$-b \|\nabla u\|^2 - a \|u\|^2 \leq -b \|\nabla u\|^2 \leq |\min(0, b)| \|\nabla u\|^2.$$

Если $a < 0$, то

$$-b \|\nabla u\|^2 - a \|u\|^2 \leq -b \|\nabla u\|^2 + C_2^2 |a| \|\nabla u\|^2 \leq |\min(0, b - C_2^2 |a|)| \|\nabla u\|^2.$$

Случаи $a \geq 0$ и $a < 0$ можно объединить с использованием обозначения $k \equiv |\min(0, b - |\min(0, C_2^2 a)|)|$:

$$-b \|\nabla u\|^2 - a \|u\|^2 \leq k \|\nabla u\|^2 \leq 2k\Phi.$$

2. Положим

$$S_1 = - \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds.$$

Оценим это выражение:

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \|\theta\|_{l_\infty} \sum_{k=1}^N \int_0^t |h(t-s)| \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} \right| dx ds \leq \\ &\leq \|\theta\|_{l_\infty} \sum_{k=1}^N \int_0^t |h(t-s)| \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon(t)}{2} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon(t)} \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_k} \right)^2 \right) dx ds = \\ &= \|\theta\|_{l_\infty} \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^t |h(t-s)| \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 dx ds + \\ &+ \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{2\varepsilon(t)} \int_0^t |h(t-s)| \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_k} \right)^2 dx ds \leq \\ &\leq \|\theta\|_{l_\infty} \varepsilon(t) \int_0^t |h(t-s)| ds \cdot \Phi(t) + \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{\varepsilon(t)} \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция одного аргумента с положительными значениями. А именно, возьмем $\varepsilon(t) = \left(\int_0^t |h(t-s)| ds \right)^{-1}$. Тогда оценку можно продолжить следующим образом (при $t = 0$ правую часть можно доопределить по непрерывности):

$$|S_1| \leq \|\theta\|_{l_\infty} \Phi(t) + \|\theta\|_{l_\infty} \int_0^t |h(t-s)| ds \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds,$$

а следовательно,

$$|S_1| \leq \|\theta\|_{l_\infty} \Phi(t) + \|\theta\|_{l_\infty} \sup_{t>0} |h(\cdot)| t \int_0^t \Phi(s) ds.$$

3. Рассмотрим выражение

$$S_2 = - \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds.$$

В предыдущем пункте не использовался конкретный вид функции $h(\cdot)$ — для рассуждений было достаточно ее непрерывности и ограниченности. Поэтому, заменив $h(\cdot)$ на 1 и θ на λ , выведем оценку для S_2 из оценки для S_1 :

$$|S_2| \leq \|\lambda\|_{l_\infty} \Phi(t) + \|\lambda\|_{l_\infty} t \int_0^t \Phi(s) ds.$$

Таким образом, учитывая, что $\sup_{t>0} |h(\cdot)| = \omega \equiv \omega_1^2 + \omega_3^2$, получим следствие из I энергетического равенства:

$$\begin{aligned} \Phi' &\leq 2k\Phi + \|\theta\|_{l_\infty} \Phi(t) + \|\theta\|_{l_\infty} \omega^2 t \int_0^t \Phi(s) ds + \\ &+ \|\lambda\|_{l_\infty} \Phi(t) + \|\lambda\|_{l_\infty} t \int_0^t \Phi(s) ds + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx. \end{aligned}$$

Обозначая $\alpha = \omega^2 \|\theta\|_{l_\infty} + \|\lambda\|_{l_\infty}$, $\beta = 2k + \|\theta\|_{l_\infty} + \|\lambda\|_{l_\infty}$, получим:

$$\Phi' \leq \alpha t \int_0^t \Phi(s) ds + \beta \Phi + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx. \quad (6.8)$$

Покажем, что при предположениях первого или второго пункта теоремы можно вывести оценку следующего вида:

$$\Phi' \leq \alpha t \int_0^t \Phi(s) ds + B_1 \Phi + B_2, \quad (6.9)$$

где $B_{1,2}$ — неотрицательные постоянные.

Если выполняются предположения пункта 1, т. е. $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \leq 0$. Если выполняется предположение пункта 2, т. е. $q \geq 2r$, то, как и в теореме 4 предыдущей главы, можно показать, что $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \leq C \|\mu\|_{L_4} (\Phi + 1)$. Таким образом, в обоих случаях выражение $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ можно оценить сверху линейной функцией от Φ с неотрицательными коэффициентами, а значит, выполняется неравенство (6.9). Исследуем его. Пусть $t \in [0; t_1]$, где t_1 — произвольное положительное число. Следовательно,

$$\Phi' \leq \alpha t_1 \int_0^t \Phi(s) ds + B_1 \Phi + B_2.$$

Полагая $\Phi = \psi e^{B_1 t}$, после несложных преобразований получим:

$$\psi' \leq \alpha t_1 \int_0^t \psi(s) e^{B_1(s-t)} ds + B_2 e^{-B_1 t} \Rightarrow \psi' \leq \alpha t_1 \int_0^t \psi(s) ds + B_2.$$

Проинтегрировав это неравенство от 0 до t и заметив, что

$$\int_0^t \int_0^s \psi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s) \psi(s) ds \leq t_1 \int_0^t \psi(s) ds,$$

получим:

$$\psi \leq \psi_0 + \alpha t_1^2 \int_0^t \psi(s) ds + B_2 t \leq \alpha t_1^2 \int_0^t \psi(s) ds + \psi_0 + B_2 t_1.$$

Применим к неравенству лемму Гронуолла-Беллмана. Таким образом,

$$\psi \leq \alpha t_1^2 \int_0^t (\psi_0 + B_2 t_1) e^{\alpha t_1^2(t-s)} ds + \psi_0 + B_2 t_1 = (\psi_0 + B_2 t_1) e^{\alpha t_1^2 t}.$$

В силу произвольности t_1 приходим к выводу, что ψ (а значит, и Φ) принимает конечные значения при всех положительных t . Таким образом, первые два утверждения теоремы доказаны.

Докажем утверждение пункта 3.

Оценивая $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ с помощью леммы 3, получим следствие из (6.8):

$$\Phi' \leq \alpha t \int_0^t \Phi(s) ds + \beta \Phi + 2g \Phi^{r/2+1}, \quad (6.10)$$

где $g = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4}$. Пусть $0 \leq t \leq \rho$, где ρ — пока произвольное положительное число. Проинтегрируем неравенство (6.10) от 0 до t , воспользовавшись оценкой $\alpha t \leq \alpha \rho$:

$$\Phi \leq \Phi_0 + \alpha \rho \int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds + \beta \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds, \quad (6.11)$$

Тогда, учитывая, что

$$\int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s) \Phi(s) ds \leq \rho \int_0^t \Phi(s) ds,$$

получим следствие из (6.11):

$$\Phi \leq \Phi_0 + (\alpha \rho^2 + \beta) \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds. \quad (6.12)$$

Воспользуемся неравенством Юнга: $\Phi \leq 2\Phi^{r/2+1}/(r+2) + r/(r+2)$. Таким образом, из (6.12) следует, что

$$\Phi \leq \Phi_0 + (\alpha \rho^2 + \beta) \int_0^t \left(\frac{2\Phi^{r/2+1}(s)}{r+2} + \frac{r}{r+2} \right) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds.$$

Так как $\int_0^t ds \leq \rho$, то

$$\Phi \leq A + \int_0^t Bw(\Phi(s)) ds, \quad (6.13)$$

где

$$A = \Phi_0 + \frac{r\rho}{r+2} (\alpha\rho^2 + \beta), \quad B = \frac{2}{r+2} (\alpha\rho^2 + \beta) + 2g,$$

$$w(\Phi) = \Phi^{r/2+1}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в [10, с. 75], применим к неравенству (6.13) лемму Гронуолла-Беллмана-Бихари. Таким образом, получим:

$$\Phi \leq \left(A^{-r/2} - \frac{rBt}{2} \right)^{-2/r}. \quad (6.14)$$

Пусть ρ — достаточно малое число, т. е. $rB\rho/2 < A^{-r/2}$. Тогда при $t \leq \rho$, как видно из (6.14), величина Φ оценивается сверху функцией, принимающей конечные значения, а значит, разрушения не происходит. Поэтому нижней оценкой ρ времени существования T может служить любое положительное решение неравенства $rB\rho/2 < A^{-r/2}$. С учетом первоначальных обозначений приведем его к следующему виду:

$$F(\rho) \equiv \left[\frac{r\alpha}{r+2}\rho^3 + \frac{r\beta}{r+2}\rho + \Phi_0 \right]^{r/2} \left[\frac{\alpha}{r+2}\rho^2 + \left(\frac{\beta}{r+2} + g \right) \right] \rho < \frac{1}{r}.$$

Заметим, что функция $F(\cdot)$ непрерывна и возрастает на множестве $[0; \infty)$, причем $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$. Значит, уравнение $F(\rho) = 1/r$ имеет единственный положительный корень ρ_1 . Таким образом, T превосходит любое число из промежутка $(0; \rho_1)$. Поэтому $T \geq T_1 \equiv \sup(0; \rho_1) = \rho_1$, а значит, T_1 может служить нижней оценкой для T . Приходим к неявной формуле (6.7).

Выведем более грубую оценку для T в виде явной формулы. Ограничимся рассмотрением малых r , т. е. $r \leq 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \left[\frac{r\alpha}{r+2}\rho^3 + \frac{r\beta}{r+2}\rho + \Phi_0 \right]^{r/2} = \Phi_0^{r/2} \left[\frac{r\alpha}{\Phi_0(r+2)}\rho^3 + \frac{r\beta}{\Phi_0(r+2)}\rho + 1 \right]^{r/2} \leq \\ & \leq \Phi_0^{r/2} \left[\frac{r\alpha}{\Phi_0(r+2)}\rho^3 + \frac{r\beta}{\Phi_0(r+2)}\rho + 1 \right], \end{aligned}$$

а следовательно,

$$F(\rho) \leq \Phi_0^{r/2-1} \left[\frac{r\alpha}{r+2}\rho^3 + \frac{r\beta}{r+2}\rho + \Phi_0 \right] \left[\frac{\alpha}{r+2}\rho^2 + \left(\frac{\beta}{r+2} + g \right) \rho \right].$$

Полагая

$$F_3(\rho) = \frac{r\alpha}{r+2}\rho^3 + \max\left(\frac{r\beta}{r+2}, \frac{\beta}{r+2} + g\right)\rho,$$

получим, что

$$F(\rho) \leq \Phi_0^{r/2-1} [F_3(\rho) + \Phi_0] F_3(\rho) \equiv F^*(\rho).$$

Несложно убедиться, что функция $F^*(\cdot)$ непрерывна и возрастает на множестве $[0; \infty)$, причем $F^*(0) = 0$, $F^*(\infty) = \infty$. Значит, уравнение $F^*(\rho) = 1/r$ имеет единственный положительный корень ρ^* . Кроме того, $F^*(\rho) \geq F(\rho)$ всюду на $[0; \infty)$. Таким образом, $F^*(\rho)$ достигает значения $1/r$ раньше, чем $F(\rho)$, т. е. корень уравнения $F^*(\rho) = 1/r$ не больше, чем корень уравнения $F(\rho) = 1/r$. Заметим, что уравнение $F^*(\rho) = 1/r$ является квадратным относительно $F_3(\rho)$ и имеет корни разных знаков. Следовательно,

$$F_3(\rho) = \frac{\sqrt{\Phi_0^2 + 4\Phi_0^{1-r/2}/r} - \Phi_0}{2} \Leftrightarrow \rho^3 + P\rho - Q = 0,$$

где

$$P = \frac{\max(r\beta, \beta + g(r+2))}{r\alpha}, \quad Q = \frac{r+2}{2r\alpha} \left(\sqrt{\Phi_0^2 + 4\Phi_0^{1-r/2}/r} - \Phi_0 \right).$$

Выразим ρ с помощью формулы Кардано:

$$\rho = T_1^* \equiv \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}.$$

Таким образом, $T_1^* \leq T_1 \leq T$. **Теорема доказана.**

Перейдем к оцениванию сверху времени существования решения.

Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} k_1 &= 9r (C_2^2|a| + |b|)^2 / 2 + h_1 + 1, \\ k_2 &= 3(r+1)^2 \left(\|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2)^2 + \|\lambda\|_{l_\infty}^2 \right) + \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2\omega_2 + \omega_3^2\omega_4)^2, \\ \alpha &= \frac{8r - 9q - 3}{9(q+2)}, \quad c_1 = \frac{\alpha^2\Phi_0'^2}{\Phi_0^2} - \alpha k_1, \quad c_2 = \alpha k_2, \end{aligned}$$

где h_1 равно $2\|h_0\theta + \lambda\|_{l_\infty}$ или 0, если соответственно хотя бы одна составляющая вектора $h_0\theta + \lambda$ положительна или если все его составляющие неположительны.

Теорема 3. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$; $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть, кроме того,

$$\alpha > 0 \quad (6.15)$$

и

$$\Phi'_0 \geq \frac{\Phi_0}{\alpha} \sqrt{\alpha k_1 + 2\sqrt{\alpha k_2}}. \quad (6.16)$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \sqrt{\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2c_2}}. \quad (6.17)$$

Замечание. Из I энергетического равенства (6.6) видно, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать величину Φ'_0 сколь угодно большой, тогда как правая часть (6.16) не зависит от $\mu(\cdot)$. Поэтому условие (6.16) непротиворечиво.

Положим $I = a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2$. Дифференцируя I энергетическое равенство (6.6), получим:

$$\begin{aligned} & \Phi'' + I' + \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h'(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \theta_k h_0 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 dx + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 dx = (r+2) \int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx. \end{aligned} \quad (6.18)$$

II энергетическое равенство (6.6) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & W + \frac{I'}{2} + \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds + \\ & + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds = \int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Подставим в (6.18) выражение для $\int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx$ из (6.19). Таким образом,

$$(r+2)W = \Phi'' - \frac{r}{2} \cdot I' - (r+1)I_1 - (r+1)I_2 + I_3 + I_4, \quad (6.20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds, \\ I_2 &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds, \\ I_3 &= \sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^t h'(t-s) \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} dx ds, \\ I_4 &= \sum_{k=1}^N (h_0 \theta_k + \lambda_k) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Оценим по отдельности слагаемые, входящие в (6.20).

1. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| &= \left| \int_{\Omega} 2uu' dx \right| \leq \int_{\Omega} \left(\varepsilon u^2 + \frac{u'^2}{\varepsilon} \right) dx = \\ &= \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u'\|^2 \leq \varepsilon C_2^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{C_2^2}{\varepsilon} \|\nabla u'\|^2, \end{aligned}$$

где ε — произвольное положительное число. Аналогично можно показать, что

$$\left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla u'\|^2.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \leq 2\varepsilon (C_2^2 |a| + |b|) \Phi + \frac{C_2^2 |a| + |b|}{\varepsilon} W$$

(при $a = b = 0$ возьмем $\varepsilon = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$).

2. Оценим слагаемое I_1 :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \max_k |\theta_k| \sum_{k=1}^N \int_0^t |h(t-s)| \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \frac{\partial u(s)}{\partial x_k} \right| dx ds \leq \\
&\leq \|\theta\|_{l_\infty} \sum_{k=1}^N \int_0^t |h(t-s)| \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_1(t)}{2} \left(\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1(t)} \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_k} \right)^2 \right) dx ds = \\
&= \|\theta\|_{l_\infty} \frac{\varepsilon_1(t)}{2} \int_0^t |h(t-s)| ds \cdot \|\nabla u'(t)\|^2 + \\
&+ \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{2\varepsilon_1(t)} \int_0^t |h(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds \leq \\
&\leq \|\theta\|_{l_\infty} W \frac{\varepsilon_1(t)}{2} \int_0^t |h(t-s)| ds + \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{\varepsilon_1(t)} \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds,
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1(\cdot) \in C(0; \infty)$ — некоторая функция одного аргумента с положительными значениями, причем $\varepsilon_1(t) \cdot \int_0^t |h(t-s)| ds$ стремится к конечной величине при бесконечно малых t .

3. В предыдущем пункте не использовался конкретный вид функции $h(\cdot)$. Поэтому можно вывести оценку для I_2 из оценки для I_1 , заменяя θ на λ , $h(\cdot)$ на 1 и индекс 1 на индекс 2:

$$|I_2| \leq \|\lambda\|_{l_\infty} W \frac{\varepsilon_2(t)}{2} t + \|\lambda\|_{l_\infty} \frac{1}{\varepsilon_2(t)} \int_0^t \Phi(s) ds,$$

где $\varepsilon_2(\cdot) \in C(0; \infty)$ — некоторая функция одного аргумента с положительными значениями, причем $\varepsilon_2(t) \cdot t$ стремится к конечной величине при бесконечно малых t .

4. Рассмотрим выражение I_3 . Рассуждая по аналогии с пунктом, где была

выведена оценка для I_1 , получим:

$$|I_3| \leq \|\theta\|_{l_\infty} \frac{\varepsilon_3(t)}{2} \int_0^t |h'(t-s)| ds \cdot \|\nabla u(t)\|^2 + \\ + \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{2\varepsilon_3(t)} \int_0^t |h'(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds,$$

где $\varepsilon_3(\cdot) \in C(0; \infty)$ — некоторая функция одного аргумента с положительными значениями, причем $\varepsilon_3(t) \cdot \int_0^t |h'(t-s)| ds$ стремится к конечной величине при бесконечно малых t . Учитывая определение Φ , получим:

$$|I_3| \leq \|\theta\|_{l_\infty} \varepsilon_3(t) \int_0^t |h'(t-s)| ds \cdot \Phi(t) + \|\theta\|_{l_\infty} \frac{1}{\varepsilon_3(t)} \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds.$$

5. Рассмотрим выражение I_4 . Если все составляющие вектора $h_0\theta + \lambda$ неположительны, то $I_4 \leq 0$. В противном случае

$$I_4 \leq \max_k |h_0\theta_k + \lambda_k| \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq 2 \|h_0\theta + \lambda\|_{l_\infty} \Phi.$$

Таким образом, $I_4 \leq h_1\Phi$, где коэффициент h_1 равен $2 \|h_0\theta + \lambda\|_{l_\infty}$ или 0, если соответственно хотя бы одна составляющая вектора $h_0\theta + \lambda$ положительна или если все его составляющие неположительны.

Применим найденные оценки в (6.20) и соберем в левой части члены с W .

Придем к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}
& \left(r + 2 - \frac{r C_2^2 |a| + |b|}{\varepsilon} - \right. \\
& \left. - (r + 1) \|\theta\|_{l_\infty} \frac{\varepsilon_1(t)}{2} \int_0^t |h(t-s)| ds - (r + 1) \|\lambda\|_{l_\infty} \frac{\varepsilon_2(t)}{2} t \right) W \leq \\
& \leq \Phi'' + r\varepsilon (C_2^2 |a| + |b|) \Phi + \frac{(r + 1) \|\theta\|_{l_\infty}}{\varepsilon_1(t)} \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds + \\
& + \frac{(r + 1) \|\lambda\|_{l_\infty}}{\varepsilon_2(t)} \int_0^t \Phi(s) ds + \|\theta\|_{l_\infty} \varepsilon_3(t) \int_0^t |h'(t-s)| ds \cdot \Phi(t) + \\
& + \frac{\|\theta\|_{l_\infty}}{\varepsilon_3(t)} \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds + h_1 \Phi.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Возьмем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(t) &= \frac{2\gamma_1}{(r + 1) \|\theta\|_{l_\infty} \int_0^t |h(t-s)| ds}, \\
\varepsilon_2(t) &= \frac{2\gamma_2}{(r + 1) \|\lambda\|_{l_\infty} t}, \quad \varepsilon_3(t) = \frac{1}{\|\theta\|_{l_\infty} \int_0^t |h'(t-s)| ds},
\end{aligned}$$

где $\gamma_{1,2}$ — пока произвольные положительные постоянные. Обозначая $k_1 = r\varepsilon (C_2^2 |a| + |b|) + h_1 + 1$, приведем (6.21) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \left(r + 2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{r C_2^2 |a| + |b|}{\varepsilon} \right) W \leq \\
& \leq \Phi'' + k_1 \Phi + \frac{(r + 1)^2 \|\theta\|_{l_\infty}^2}{2\gamma_1} \int_0^t |h(t-s)| ds \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds + \\
& + \frac{(r + 1)^2 \|\lambda\|_{l_\infty}^2 t}{2\gamma_2} \int_0^t \Phi(s) ds + \\
& + \|\theta\|_{l_\infty}^2 \int_0^t |h'(t-s)| ds \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Несложно убедиться, что $|h(t)| \leq \omega_1^2 + \omega_3^2$, $|h'(t)| \leq \omega_1^2 \omega_2 + \omega_3^2 \omega_4$, а значит, из

(6.22) следует, что

$$\begin{aligned}
& \left(r + 2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{r C_2^2 |a| + |b|}{2\varepsilon} \right) W \leq \\
& \leq \Phi'' + k_1 \Phi + \frac{(r+1)^2 \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2)^2 t}{2\gamma_1} \int_0^t \Phi(s) ds + \\
& + \frac{(r+1)^2 \|\lambda\|_{l_\infty}^2 t}{2\gamma_2} \int_0^t \Phi(s) ds + \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 \omega_2 + \omega_3^2 \omega_4)^2 t \int_0^t \Phi(s) ds.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Позже будет сделан выбор параметров $\gamma_{1,2}$ и ε , при котором положительность множителя при W будет следовать из условия (6.15). Считая этот множитель положительным, воспользуемся леммой 1. Таким образом, из (6.23) следует, что

$$\begin{aligned}
& \left(r + 2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{r C_2^2 |a| + |b|}{2\varepsilon} \right) \Phi'^2 \leq \\
& \leq (q+2) \Phi \left(\Phi'' + k_1 \Phi + k_2 t \int_0^t \Phi(s) ds \right),
\end{aligned} \tag{6.24}$$

где

$$k_2 = \frac{(r+1)^2 \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 + \omega_3^2)^2}{2\gamma_1} + \frac{(r+1)^2 \|\lambda\|_{l_\infty}^2}{2\gamma_2} + \|\theta\|_{l_\infty}^2 (\omega_1^2 \omega_2 + \omega_3^2 \omega_4)^2.$$

Неравенство (6.24) легко привести к следующему виду:

$$\Phi \Phi'' - (1 + \alpha) \Phi'^2 + k_1 \Phi^2 + k_2 t \Phi \int_0^t \Phi(s) ds \geq 0, \tag{6.25}$$

где

$$\alpha = (q+2)^{-1} \left(r + 2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{r C_2^2 |a| + |b|}{2\varepsilon} \right) - 1.$$

Пусть числа $\gamma_{1,2}$ и $C_2^2 |a| + |b| / (2\varepsilon)$ достаточно малы. Выберем для определенности $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/6$, $(C_2^2 |a| + |b|) / (2\varepsilon) = 1/9 \Leftrightarrow \varepsilon = 9(C_2^2 |a| + |b|) / 2$. Тогда

$$\alpha = \frac{8r - 9q - 3}{9(q+2)},$$

и условие (6.15) непротиворечиво.

Рассмотрим неравенство (6.25) на промежутке $[0; \xi]$, где ξ — пока произвольное достаточно большое число. Покажем, что $\Phi'(t) > 0$ при всех значениях $t \in [0; \xi]$. Из условия (6.16) следует, что $\Phi'(0) > 0$. В силу непрерывности $\Phi'(\cdot)$ существует такое $t_1 \in (0; T]$, что $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \leq t_1$. Поэтому

$$\max_{0 \leq s \leq t} \Phi(s) = \Phi(t) \Rightarrow \int_0^t \Phi(s) ds \leq t\Phi(t)$$

при $t \leq t_1$. Значит, из (6.25) следует, что

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + k_1\Phi^2 + k_2t^2\Phi^2 \geq 0 \quad (t \leq t_1).$$

Полагая $\Phi = z^{-1/\alpha}$, после упрощений получим:

$$z'' \leq \alpha(k_1 + k_2t^2)z. \quad (6.26)$$

Так как ξ — достаточно большое число, то из (6.26) следует, что

$$z'' \leq \delta z, \quad \delta = \alpha(k_1 + k_2\xi^2).$$

Умножим это неравенство на величину $z' = -\alpha\Phi^{-\alpha-1}\Phi'$, отрицательную при $t \leq t_1$:

$$z'z'' \geq \delta z z'.$$

Теперь проинтегрируем неравенство от 0 до t :

$$z'^2 \Big|_0^t \geq \delta z^2 \Big|_0^t \Leftrightarrow z'^2 \geq z_0'^2 + \delta z^2 - \delta z_0^2 \Rightarrow z'^2 \geq A,$$

где $A = z_0'^2 - \delta z_0^2$ (позже будет выбрано такое ξ , что соответствующее значение δ будет обеспечивать положительность A). Так как $z' < 0$, то при $t \leq t_1$ следующий переход будет равносильным:

$$z' \leq -\sqrt{A}. \quad (6.27)$$

Возвращаясь к функции Φ , приведем это неравенство к виду

$$\Phi' \geq \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \Phi^{\alpha+1}.$$

Так как $\Phi_0 > 0$ и $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \leq t_1$, то $\sqrt{A}\Phi^{\alpha+1}/\alpha$ нигде не равно нулю. Следовательно, $\Phi' > 0$ при $t \leq t_1$ и, в частности, при $t = t_1$. Если $t_1 < T$, возьмем t_1 за начальный момент и снова рассмотрим неравенство (6.25). Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для окрестности нуля, получим, что из него следует (6.26) и при $t \leq t_2$, где $t_2 > t_1$. Так как ξ — достаточно большое число, то по-прежнему из (6.26) следует, что

$$z'' \leq \delta z.$$

Таким же образом можно показать, что $\Phi(t_2) > 0$ и $\Phi'(t_2) > 0$. Значит, неравенство $z' < 0$ можно продолжить на весь промежуток $[0; \min(T, \xi)]$. Поэтому соотношение (6.27) остается верным при всех $t \in [0; \min(T, \xi)]$. Проинтегрируем его от 0 до t :

$$z - z_0 \leq -\sqrt{A}t \Leftrightarrow \Phi \geq \left(\Phi_0^{-\alpha} - \sqrt{A}t\right)^{-1/\alpha}$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Таким образом, функция $\Phi(t)$ оценивается снизу функцией, которая имеет конечные значения в окрестности нуля и обращается в бесконечность на границе этой окрестности, т. е. при

$$t = T_2 = \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{\sqrt{A}}. \quad (6.28)$$

Поэтому $T \leq T_2$. Определенная таким образом величина T_2 зависит от произвольного параметра ξ . Выберем его оптимальным образом, установив условия, при которых это возможно.

Возвращаясь к обозначениям Φ_0 и Φ'_0 , приведем формулу (6.28) к следующему виду:

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi - \delta(\xi)}}, \quad \varphi = \alpha^2 \Phi_0'^2 \Phi_0^{-2}.$$

Формализуем требования к параметру ξ . Он должен быть достаточно велик, чтобы проведенные рассуждения были корректны, но при этом не слишком велик, т. е. выражение для T_2 должно быть определено. Величина T_2 оценивает

T сверху, поэтому наиболее точной оценкой будет ее минимум. Приходим к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi - \alpha k_1 - \alpha k_2 \xi^2}}, \\ 0 < T_2 \leq \xi, \\ T_2 \rightarrow \min_{\xi} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_2^2 (c_1 - c_2 \xi^2) = 1, \\ T_2^2 \leq \xi^2, T_2 > 0, \xi > 0, \\ T_2^2 \rightarrow \min_{\xi} \end{array} \right.$$

где $c_1 = \varphi - \alpha k_1$, $c_2 = \alpha k_2$. Полагая $y = T_2^2 > 0$, $v = \xi^2 > 0$, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(c_1 - c_2 v) = 1, \\ 0 < y \leq v, \\ y \rightarrow \min. \end{array} \right.$$

Выразив v из уравнения и подставив в неравенство, получим, что y — наименьшее положительное решение неравенства

$$c_2 y^2 - c_1 y + 1 \leq 0,$$

которое сводится к соотношению

$$0 < \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2c_2} \leq y \leq \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2c_2}.$$

Проведенное преобразование корректно, если $c_1^2 - 4c_2 \geq 0$ и $c_1 > 0$, что равносильно одному неравенству: $c_1 \geq 2\sqrt{c_2}$. Несложно убедиться, что это неравенство следует из предполагаемого неравенства (6.16). Таким образом, искомая оптимальная оценка равна

$$T_2 = \sqrt{\min\{y\}} = \sqrt{\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2c_2}}.$$

Приходим к формуле (6.17).

Замечание. Как уже отмечалось, для корректности проведенных рассуждений величина A должна быть положительна, что равносильно условию

$$\Phi'_0 > \frac{\sqrt{\delta}}{\alpha} \Phi_0.$$

При значении ξ , обеспечивающем оптимальность T_2 , это неравенство можно привести к виду

$$\Phi'_0 > \frac{\Phi_0}{\alpha} \sqrt{\alpha \left(k_1 + k_2 \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2c_2} \right)}. \quad (6.29)$$

Несложно убедиться, что (6.29) следует из (6.16). Теорема доказана.

6.2. Неоднородное нелокальное уравнение волн

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u + \mu(x) |u|^r u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \\ \quad + (\theta, \nabla) u + \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = f(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Здесь $N \in \{2; 3\}$, $a \in R$, $b \in R$, $q \in [1; 4]$, $\lambda \in R^N$, $\theta \in R^N$, $f(\cdot) \in L_2$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$.

Кроме того, будем предполагать, что, в зависимости от размерности N , параметры r и $\mu(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям. При $N = 2$ или $N = 3$ соответственно $(r, \mu(\cdot)) \in (1; \infty) \times L_4$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1; 2] \times L_{6/(2-r)}$. Условия, относящиеся к функции $h(\cdot)$, приведем позже. Поясним, что s в выражении $u(s)$ в (6.30) — переменная интегрирования, соответствующая независимой переменной, обозначающей время.

Задача (6.30) является задачей вида (6.1), и к ней применимо введенное в определении 1 понятие обобщенного решения из класса X_T . Непосредственно из определения обобщенного решения получается интегральное тождество (6.3)

— в данном случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u + \mu(x) |u|^r u - au + (\lambda, \nabla) u^2 + \right. \\ \left. + (\theta, \nabla) u + \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds - f \right) w dx = 0 \quad (6.31)$$

для всех $\forall w \in H_0^1, t \in [0; T)$.

Замечание. Как было показано в предыдущей главе, условие $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ в трехмерном случае обеспечивает принадлежность слагаемого $(\mu |u|^r u)$ множеству L_2 и, следовательно, корректность определения обобщенного решения. Так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (1; 2]$, то из условия $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}$ следует, что $\mu(x) \in L_4$. В дальнейшем будут использоваться оценки и в норме L_4 .

Возьмем для задачи (6.30) $\theta = 1$, откуда

$$\Phi = \frac{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}, \quad W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Полагая в (6.31) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$I. \Phi' + a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2 + \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds = \\ = \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx - \int_{\Omega} f u dx, \quad (6.32) \\ II. W + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds = \\ = \int_{\Omega} \mu |u|^r u u' dx - \int_{\Omega} u^2 (\lambda, \nabla) u' dx - \int_{\Omega} u (\theta, \nabla) u' dx - \int_{\Omega} f u' dx.$$

Как и раньше, энергетические тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Замечание. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

Теорема 4. Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (6.30). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{+1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и, в основном, аналогично доказательству соответствующего утверждения в [10, гл. 2, §2].

Лемма 4. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда $B = \beta^\beta (1 - \beta)^{1-\beta}$ — наименьшее значение константы B , при котором неравенство $v^\beta \leq B(v + 1)$ выполняется при всех неотрицательных v (при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ имеются в виду предельные значения: $B|_{\beta=0} = B|_{\beta=1} = 1$).

Утверждение следует из свойств функции $\varphi(v) = B(v + 1) - v^\beta$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (*), если $h(\cdot) \in C[0; \infty)$, причем существуют числа

$$\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty, \quad \eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty.$$

Теорема 5. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$, $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (*). Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Обозначим $k = |\min(a, b, 0)|$.

1. Если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то решение существует глобально по времени.
2. Если $q \geq 2r$, то решение существует глобально по времени.
3. Если $\Phi_0 = \|f\| = 0$, то решение существует глобально по времени.
4. По крайней мере, имеет место оценка $T \geq T_1$, где T_1 — единственный

положительный корень уравнения

$$\left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2} \right) T_1 + \frac{r\sqrt{\gamma\eta}T_1^2}{r+2} \right]^{r/2} \cdot \left[2^{r/2+1}C_4C_{2r+2}^{r+1}\|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{2\sqrt{\gamma\eta}T_1}{r+2} \right] T_1 = \frac{2}{r}.$$

Замечание. Последний пункт теоремы не противоречит пунктам, где утверждается, что решение существует глобально по времени: он гарантирует существование решения, по крайней мере, в некоторой окрестности нуля, при этом не исключается случай $T = \infty$.

Перепишем I энергетическое равенство (6.32) в следующем виде:

$$\Phi' = -b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx - \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds - \int_{\Omega} f u dx.$$

Рассмотрим подробнее слагаемые, входящие в правую часть этого соотношения.

1. Заметим, что

$$-b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 \leq |\min(a, b, 0)| \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \right) \leq k \cdot 2\Phi.$$

2. Нелокальное выражение при $\gamma \neq 0$ оценим следующим образом:

$$\left| \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| \leq \int_0^t |h(t-s)| \left(\frac{\varepsilon}{2\gamma} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds,$$

где ε — некоторый (пока произвольный) положительный параметр. Применяя введенные ранее обозначения γ и η , а также тривиальное неравенство $\|\nabla u\|^2/2 \leq \Phi$, получим:

$$\left| \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| \leq \varepsilon\Phi + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds.$$

При $\gamma = 0$ возьмем $\varepsilon = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$.

3. Кроме того, $|\int_{\Omega} f u dx| \leq \|f\|^2/2 + \|u\|^2/2 \leq \|f\|^2/2 + \Phi$.

Поэтому

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1)\Phi + \frac{\|f\|^2}{2} + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds. \quad (6.33)$$

Покажем, что при предположениях первого или второго пункта теоремы можно вывести оценку следующего вида:

$$\Phi' \leq A \int_0^t \Phi(s) ds + B\Phi + C, \quad (6.34)$$

где A , B и C — неотрицательные постоянные.

Пусть выполняются предположения пункта 1: если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то из (6.33) следует, что

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1)\Phi + \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds. \quad (6.35)$$

Если выполняется предположение пункта 2, т. е. $q \geq 2r$, то, как и в теореме 4 предыдущей главы, можно показать, что $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \leq C(\Phi + 1)$. В этом случае из (6.33) следует, что

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1 + C)\Phi + \left(\frac{\|f\|^2}{2} + C \right) + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds. \quad (6.36)$$

Записывая (6.35) и (6.36) единообразно, приходим к (6.34). Проинтегрировав это неравенство от 0 до t и заметив, что

$$\int_0^t \int_0^s \psi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s)\psi(s) ds,$$

получим:

$$\Phi \leq \Phi_0 + \int_0^t (A(t-s) + B)\Phi(s) ds + Ct. \quad (6.37)$$

Пусть $t \in [0; t^*]$, где t^* — произвольное положительное число. Тогда $t-s \leq t \leq t^*$, и из (6.37) следует, что

$$\Phi \leq (\Phi_0 + Ct^*) + (At^* + B) \int_0^t \Phi(s) ds.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получим:

$$\Phi \leq (\Phi_0 + Ct^*) e^{(At^*+B)t} \leq (\Phi_0 + Ct^*) e^{(At^*+B)t^*}.$$

В силу произвольности t^* приходим к выводу, что Φ принимает конечные значения при всех положительных t . Таким образом, первые два утверждения теоремы доказаны.

Утверждение пункта 3 очевидно: в этом случае задача (6.30) имеет тривиальное решение, причем оно единственно в силу теоремы 4.

Докажем утверждение пункта 4.

Оценивая $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ с помощью леммы 3, получим следствие из (6.33):

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1)\Phi + 2g\Phi^{r/2+1} + \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds,$$

где $g = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4}$. Проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$\begin{aligned} \Phi \leq & \Phi_0 + (2k + \varepsilon + 1) \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds + \frac{\|f\|^2 t}{2} + \\ & + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Пусть $0 \leq t \leq T_1^*$, где T_1^* — пока произвольное положительное число. Тогда, учитывая, что

$$\int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s)\Phi(s) ds \leq \int_0^t t\Phi(s) ds \leq T_1^* \int_0^t \Phi(s) ds,$$

получим следствие из (6.38):

$$\Phi \leq \Phi_0 + \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds + \frac{\|f\|^2 T_1^*}{2}. \quad (6.39)$$

Воспользуемся неравенством Юнга:

$$\Phi \leq \frac{2\Phi^{r/2+1}}{r+2} + \frac{r}{r+2}.$$

Таким образом, из (6.39) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi &\leq \Phi_0 + \left(2g + \frac{2}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right)\right) \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds + \\ &+ \left(\frac{r}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) + \frac{\|f\|^2}{2}\right) T_1^*. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} A &= \Phi_0 + \left(\frac{r}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) + \frac{\|f\|^2}{2}\right) T_1^*, \\ B &= 2g + \frac{2}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right), \\ w(\Phi) &= \Phi^{r/2+1}, \quad G(\Phi) = \int_A^\Phi \frac{dy}{w(y)}, \end{aligned}$$

придем к неравенству

$$\Phi \leq A + \int_0^t Bw(\Phi(s)) ds.$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в [10, с. 75], применим к этому неравенству лемму Гронуолла-Беллмана-Бихари. Учитывая, что

$$G(\Phi) = \frac{2}{r} \left(A^{-r/2} - \Phi^{-r/2}\right),$$

получим:

$$\Phi \leq \left(A^{-r/2} - \frac{rBt}{2}\right)^{-2/r}. \quad (6.40)$$

Пусть T_1^* — достаточно малое число, т. е. $rBT_1^*/2 < A^{-r/2}$. Тогда при $t \leq T_1^*$, как видно из (6.40), величина Φ оценивается сверху функцией, принимающей конечные значения, а значит, разрушения не происходит. Таким образом, нижней оценкой времени существования T_1^* может служить любое положительное решение неравенства $rBT_1^*/2 < A^{-r/2}$. С учетом первоначальных обозначений приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1)}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2}\right) T_1^* + \frac{r\varepsilon T_1^*}{r+2} + \frac{r\gamma\eta T_1^{*2}}{(r+2)\varepsilon}\right]^{r/2} \\ &\cdot \left[2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1)}{r+2} + \frac{2\varepsilon}{r+2} + \frac{2\gamma\eta T_1^*}{(r+2)\varepsilon}\right] T_1^* < \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Возьмем для простоты $\varepsilon = \sqrt{\gamma\eta}$ (если это выражение равно нулю, будем формально считать, что $0/0 = 0$). Тогда

$$F(T_1^*) \equiv \left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2} \right) T_1^* + \frac{r\sqrt{\gamma\eta}T_1^{*2}}{r+2} \right]^{r/2} \cdot \left[2^{r/2+1}C_4C_{2r+2}^{r+1}\|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{2\sqrt{\gamma\eta}T_1^*}{r+2} \right] T_1^* < \frac{2}{r}.$$

Заметим, что $F(\cdot)$ непрерывна и возрастает от 0 до ∞ на $[0; \infty)$. Поэтому $T \geq T_1^*$, где T_1^* — любое число из промежутка $[0; F^{-1}(2/r))$. Значит, $T \geq T_1 \equiv \sup [0; F^{-1}(2/r)) = F^{-1}(2/r)$. Таким образом, нижней оценкой для T может служить единственный положительный корень уравнения $F(T_1) = \frac{2}{r}$ относительно T_1 . **Теорема доказана.**

Перейдем к оцениванию сверху времени существования решения. Ограничимся рассмотрением двух частных случаев задачи.

Определение 4. Будем говорить, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**), если $h(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, причем существуют числа

$$\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty, \quad \eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty, \quad \delta = \int_0^\infty |h'(t)| dt < \infty.$$

Лемма 5. Пусть $\mu(\cdot) \in L_4$, $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**). Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r+3}{2} - \frac{r+1}{2}\varepsilon_1 - \frac{r+2}{2} (\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - \frac{r}{2} (|a| + |b|) \right) W \leq \\ & \leq \Phi'' + \frac{r+1}{2} \|f\|^2 + 2NC_4^4(r+2) \|\lambda\|_{l_\infty} \Phi^2 + \\ & + (r(|a| + |b|) + N(r+2) \|\theta\|_{l_\infty} + \varepsilon_2 + 2|h_0|) \Phi + \\ & + \frac{\gamma(r+1)}{\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \cdot \Phi(s) ds + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \cdot \Phi(s) ds, \end{aligned} \tag{6.41}$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — произвольные положительные параметры. При этом если $h(t) \equiv 0$, то возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$.

Положим

$$I = a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2, \quad I_1 = \int_{\Omega} \mu |u|^r uu' dx,$$

$$I_2 = \int_{\Omega} u^2 (\lambda, \nabla) u' dx, \quad I_3 = \int_{\Omega} u (\theta, \nabla) u' dx, \quad I_4 = \int_{\Omega} f u' dx.$$

Дифференцируя первое энергетическое равенство (6.32), получим:

$$\begin{aligned} \Phi'' = & -I' + (r+2) I_1 - I_4 - \int_0^t h'(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds - \\ & - \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds - h(0) (\nabla u(t), \nabla u(t)). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Второе равенство (6.32) перепишем в следующем виде:

$$W = -\frac{I'}{2} + I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds. \quad (6.43)$$

Выразим I_1 из (6.43) и подставим в (6.42). Придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} (r+2)W = & \Phi'' - \frac{r}{2} \cdot I' - (r+2)I_2 - (r+2)I_3 - (r+1)I_4 - \\ & - (r+1) \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds + \\ & + \int_0^t h'(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds + h(0) (\nabla u(t), \nabla u(t)). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Оценим по отдельности слагаемые, входящие в (6.44).

1. Заметим, что

$$\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| = \left| \int_{\Omega} 2uu' dx \right| \leq \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} u'^2 dx \leq 2\Phi + W.$$

Аналогично можно показать, что $\left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq 2\Phi + W$. Следовательно,

$$|I'| \leq |a| \cdot \left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| + |b| \cdot \left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq 2(|a| + |b|) \Phi + (|a| + |b|) W.$$

2. Оценим I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{\Omega} u^2 (\lambda, \nabla) u' dx \right| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k| \sum_{k=1}^N \left| \int_{\Omega} u^2 \frac{\partial}{\partial x_k} u' dx \right| \leq \\ &\leq \|\lambda\|_{l_{\infty}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega} u^4 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u' \right)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Так как $\int_{\Omega} u^4 dx = \|u\|_{L_4}^4 \leq C_4^4 \|\nabla u\|^4 \leq 4C_4^4 \Phi^2$ и $\sum_{k=1}^N \int_{\Omega} (\partial u' / \partial x_k)^2 dx = \|\nabla u'\|^2 \leq W$, то

$$|I_2| \leq 2N \|\lambda\|_{l_{\infty}} C_4^4 \Phi^2 + \frac{\|\lambda\|_{l_{\infty}}}{2} W.$$

3. Проводя аналогичные рассуждения для I_3 , получим:

$$|I_3| \leq N \|\theta\|_{l_{\infty}} \Phi + \frac{\|\theta\|_{l_{\infty}}}{2} W.$$

4. Заметим, что $|I_4| \leq \|f\|^2 / 2 + \|u'\|^2 / 2 \leq \|f\|^2 / 2 + W/2$.

5. Оценим слагаемое $\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds$, считая, что $\gamma \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds \right| \leq \int_0^t |h(t-s)| |(\nabla u(s), \nabla u'(t))| ds \leq \\ &\leq \int_0^t |h(t-s)| \left(\frac{\varepsilon_1}{2\gamma} \|\nabla u'(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2\gamma} \|\nabla u'(t)\|^2 \int_0^t |h(t-s)| ds + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2\gamma} \cdot W\gamma + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \cdot 2\Phi(s) ds = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot W + \frac{\gamma}{\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \cdot \Phi(s) ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$.

6. Оценим слагаемое $\int_0^t h'(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds$, считая, что $\gamma \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t h'(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| \leq \int_0^t |h'(t-s)| |(\nabla u(s), \nabla u(t))| ds \leq \\ & \leq \int_0^t |h'(t-s)| \left(\frac{\varepsilon_2}{2\delta} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon_2} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_2}{2\delta} \|\nabla u(t)\|^2 \int_0^t |h'(t-s)| ds + \frac{\delta}{2\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_2}{\delta} \cdot \Phi\delta + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \cdot \Phi(s) ds = \varepsilon_2\Phi + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \cdot \Phi(s) ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2 > 0$.

Применим найденные оценки в (6.44) и соберем в левой части члены с W . Таким образом, при $\gamma \neq 0$ приходим к неравенству (6.41).

Заметим, что если $\gamma = 0$, то нелокальные члены равны нулю. Значит, и в этом случае неравенство (6.41) будет выполняться, если взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$. **Лемма доказана.**

Обозначим

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r+1 - (r+2) \|\theta\|_{l_\infty} - r(|a| + |b|)}{2}, \\ k_2 &= r(|a| + |b|) + N(r+2) \|\theta\|_{l_\infty} + \delta + 2|h_0|, \\ k_3 &= \frac{r+1}{2} \|f\|^2, \quad \alpha = \frac{k_1}{q+2} - 1, \\ H(t) &= \frac{\gamma(r+1)^2}{2} |h(t)| + |h'(t)|. \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть $N = 2$, $\lambda = (0; 0)$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $\Phi_0 > 0$. Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**), причем существует такая функция $\omega(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, принимающая неположительные значения, что

$$|H(t)| \leq \omega'(t)$$

при всех неотрицательных t . Пусть, кроме того,

$$\alpha > 0 \tag{6.45}$$

и

$$\alpha\Phi'_0 - \Phi_0 > \sqrt{(\alpha(k_2 + |\omega_0|) - 1)\Phi_0^2 + \frac{2\alpha^2k_3}{2\alpha + 1}\Phi_0}. \quad (6.46)$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\Phi'_0/\Phi_0 - 1)^2 - \alpha(k_2 + |\omega_0|) + 1 - 2(2\alpha + 1)^{-1}\alpha^2k_3\Phi_0^{-1}}}. \quad (6.47)$$

Замечание. Из I энергетического равенства (6.32) видно, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать величину Φ'_0 сколь угодно большой, тогда как правая часть (6.46) не зависит от $\mu(\cdot)$. Поэтому условие (6.46) непротиворечиво. Условие (6.45) будет непротиворечивым, если $|a| + |b| + \|\theta\|_{l_\infty} < 1$, а число r достаточно велико.

Воспользуемся леммой 5, полагая $\varepsilon_1 = 2/(r + 1)$, $\varepsilon_2 = \delta$. Таким образом, (6.41) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r+1}{2} - \frac{r+2}{2} \|\theta\|_{l_\infty} - \frac{r}{2} (|a| + |b|) \right) W \leq \\ & \leq \Phi'' + \frac{r+1}{2} \|f\|^2 + \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds + \\ & + (r(|a| + |b|) + N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty} + \delta + 2|h(0)|)\Phi. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Выражения, являющиеся соответственно множителями при W и Φ , были обозначены через k_1 и k_2 , а свободный член — через k_3 . Из условия (6.45) следует, что $k_1 > 0$. Сопоставляя неравенство (6.48) с леммой 1, получим:

$$\Phi\Phi'' - \frac{k_1}{q+2} \cdot \Phi'^2 + k_2\Phi^2 + k_3\Phi + \Phi \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds \geq 0. \quad (6.49)$$

Оценим интегральное выражение в этом неравенстве:

$$J \equiv \left| \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds \right| \leq \int_0^t \omega'(t-s)\Phi(s)ds.$$

Сделав замену переменной $\tau = t - s$, проинтегрируем по частям. Таким образом,

$$J \leq \omega(t)\Phi_0 - \omega_0\Phi(t) + \int_0^t \omega(\tau)\Phi'(t-\tau)d\tau. \quad (6.50)$$

Так как функция $\Phi'(\cdot)$ положительна в начальный момент и непрерывна, то существует такой момент $t_1 \in (0; T]$, что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0; t_1]$. Поэтому из (6.50) следует, что

$$J \leq |\omega_0| \Phi(t)$$

при $t \in [0; t_1]$.

Значит, из (6.49) следует, что

$$\Phi\Phi'' - \frac{k_1}{q+2} \cdot \Phi'^2 + k_2\Phi^2 + k_3\Phi + |\omega_0|\Phi^2 \geq 0.$$

Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$. После упрощений получим:

$$z'' \leq \alpha(k_2 + |\omega_0|)z + \alpha k_3 z^{1+1/\alpha}. \quad (6.51)$$

Положим $l_1 = \alpha(k_2 + |\omega_0|)$, $l_2 = \alpha k_3$. Кроме того, введем новую переменную $y = ze^t$. При таких обозначениях (6.51) примет следующий вид:

$$y'' \leq 2y' + (l_1 - 1)y + l_2 e^{-t/\alpha} y^{1+1/\alpha}. \quad (6.52)$$

Несложно убедиться, что $y'_0 = z'_0 + z_0 = \Phi_0^{-\alpha} - \alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0$. Значит, $y'_0 < 0$ в силу (6.46), и, кроме того, в силу непрерывности $y(\cdot)$ существует такое число $t_2 \in (0; t_1]$, что $y'(t) < 0$ при $t \leq t_2$. Поэтому при $t \leq t_2$ из (6.52) следует, что

$$y'' \leq (l_1 - 1)y + l_2 y^{1+1/\alpha}.$$

Умножим это неравенство на $y'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t :

$$\frac{y'^2}{2} \Big|_0^t \geq \frac{(l_1 - 1)y^2}{2} \Big|_0^t + l_2 \frac{y^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha} \Big|_0^t.$$

Следовательно,

$$y'^2 \geq A, \quad (6.53)$$

где

$$A = y_0'^2 - (l_1 - 1)y_0^2 - 2l_2 \frac{y_0^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha}.$$

Выразим A через Φ_0 :

$$A = (\Phi_0 - \alpha\Phi'_0)^2 \Phi_0^{-2\alpha-2} - (l_1 - 1) \Phi_0^{-2\alpha} - \frac{2l_2\Phi_0^{-2\alpha-1}}{2 + 1/\alpha}.$$

Таким образом, из (6.46) следует, что $A > 0$. Учитывая знак y' , перепишем (6.53) в виде

$$y' \leq -\sqrt{A}. \quad (6.54)$$

Возвращаясь к функции Φ , приведем это неравенство к виду

$$\alpha\Phi' - \Phi \geq \sqrt{A}\Phi^{\alpha+1}/e^t.$$

Так как $\Phi_0 > 0$ и $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \leq t_2$, то $\sqrt{A}\Phi^{\alpha+1}/e^t$ нигде не равно нулю. Следовательно, $\alpha\Phi' - \Phi > 0$ при $t \leq t_2$ и, в частности, при $t = t_2$. Поэтому $\Phi'(t_2) > 0$. Если $t_2 < T$, возьмем t_2 за начальный момент и проведем аналогичные рассуждения. Получим, что существует такой момент $t_3 > t_2$, что $\alpha\Phi'(t) \geq \Phi(t)$ при $t \leq t_3$, откуда $\Phi'(t) \geq 0$. Аналогичным образом проводя продолжения временных промежутков, получим, что (6.54) выполняется на достаточно большом промежутке времени. Проинтегрируем (6.54) от 0 до t и вернемся к функции Φ :

$$y \leq y_0 - \sqrt{A}t,$$

откуда

$$\Phi^{-\alpha}e^t \leq \Phi_0^{-\alpha} - \sqrt{A}t \Leftrightarrow \Phi \geq e^{t/\alpha} \left(\Phi_0^{-\alpha} - \sqrt{A}t \right)^{-1/\alpha}$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Таким образом, функция $\Phi(t)$ оценивается снизу функцией, которая имеет конечные значения в окрестности нуля и обращается в бесконечность на границе этой окрестности, т. е. при

$$t = T_2 = \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{\sqrt{A}}.$$

Поэтому $T \leq T_2$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим формулу (6.47). **Теорема доказана.**

Положим

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{r+3 - (r+2)(\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - r(|a| + |b|)}{2}, \\ m_2 &= r(|a| + |b|) + N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty}, \quad m_3 = 2NC_4^4(r+2)\|\lambda\|_{l_\infty}, \\ m_4 &= \frac{r+1}{2}\|f\|^2. \end{aligned}$$

Сделаем переобозначение:

$$\alpha = \frac{m_1}{q+2} - 1.$$

Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha}, \\ p_1 &= \alpha\alpha_1 m_4 + \frac{1}{2}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2(m_2 + \alpha_1 m_3 + \alpha_1 m_4)^2 + 2\alpha\alpha_1 m_3}{2p_1}}. \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть $N = 2$, $r \in (1; \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $h(t) \equiv 0$. Пусть, кроме того, $\Phi_0 > 0$,

$$\alpha \geq 1 \tag{6.55}$$

и

$$\alpha\Phi'_0 \geq (\Phi_0^{1-\alpha} + p_2^2\Phi_0^{1+\alpha}) \sqrt{\frac{2p_1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{p_2}}. \tag{6.56}$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \frac{\alpha\Phi_0^{\alpha-1}\Phi'_0}{p_1(1+p_2^2\Phi_0^{2\alpha})} - \sqrt{\frac{\alpha^2\Phi_0^{2\alpha-2}\Phi_0'^2}{p_1^2(1+p_2^2\Phi_0^{2\alpha})^2} - \frac{2}{p_1p_2} \operatorname{arctg} \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{p_2}}.$$

Замечание. Из I энергетического равенства (6.32) видно, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать величину $\alpha\Phi'_0$ сколь угодно большой, тогда как правая часть (6.56) не зависит от $\mu(\cdot)$. Поэтому условие (6.56) непротиворечиво. Условие (6.55) будет непротиворечивым, если $|a| + |b| + \|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty} < 1$, а число r достаточно велико.

Воспользуемся оценкой леммы 5:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{r+3}{2} - \frac{r+2}{2}(\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - \frac{r}{2}(|a| + |b|)\right) W \leq \\ &\leq \Phi'' + \frac{r+1}{2}\|f\|^2 + 2NC_4^4(r+2)\|\lambda\|_{l_\infty}\Phi^2 + \\ &+ (r(|a| + |b|) + N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty})\Phi. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Для коэффициентов при W , Φ , Φ^2 и свободного члена были введены соответственно обозначения m_1 , m_2 , m_3 , m_4 . Сопоставляя (6.57) с леммой 1, получим:

$$\Phi\Phi'' - \frac{m_1}{q+2}\Phi'^2 + m_2\Phi^2 + m_3\Phi^3 + m_4\Phi \geq 0.$$

Полагая $\alpha = m_1/(q+2) - 1$, $\Phi = z^{-1/\alpha}$, после упрощений приходим к неравенству

$$z'' \leq \alpha m_2 z + \alpha m_3 z^{1-1/\alpha} + \alpha m_4 z^{1+1/\alpha}. \quad (6.58)$$

Заметим, что $0 < 1/\alpha \leq 1$ и $0 \leq 1 - 1/\alpha < 1$ в силу (6.55). Применим лемму 4 к членам с множителями m_3 и m_4 в правой части (6.58), а затем — неравенство $Cz \leq C^2/2 + z^2/2$:

$$\begin{aligned} & \alpha m_2 z + \alpha m_3 z^{1-1/\alpha} + \alpha m_4 z^{1+1/\alpha} \leq \\ & \leq \alpha m_2 z + \alpha m_3 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} (z+1) + \\ & + \alpha m_4 z \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha} (z+1) \leq p_1 (z^2 + p_2^2). \end{aligned}$$

Значит, из (6.58) следует, что

$$z'' \leq p_1 (z^2 + p_2^2),$$

откуда

$$\frac{z''}{z^2 + p_2^2} \leq p_1. \quad (6.59)$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t , заметив, что

$$\int_0^t \frac{z'' d\tau}{z^2 + p_2^2} = \frac{z'}{z^2 + p_2^2} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{2zz' d\tau}{(z^2 + p_2^2)^2} \geq \frac{z'}{z^2 + p_2^2} \Big|_0^t.$$

Значит,

$$\frac{z'}{z^2 + p_2^2} \leq \frac{z'_0}{z_0^2 + p_2^2} + p_1 t.$$

Интегрируя от 0 до t , получим:

$$\frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{z}{p_2} - \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} \leq \frac{z'_0 t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 t^2}{2}.$$

При достаточно малых t следующие два перехода будут равносильными:

$$z \leq p_2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} + \frac{p_2 z_0' t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 p_2 t^2}{2} \right),$$

откуда

$$\Phi \geq p_2^{-1/\alpha} \left(\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} + \frac{p_2 z_0' t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 p_2 t^2}{2} \right) \right)^{-1/\alpha}.$$

Таким образом, Φ можно оценить снизу величиной, принимающей конечные значения в окрестности нуля, причем границей этой окрестности будет наименьшее положительное t , при котором выражение под знаком тангенса равно нулю. Поэтому построение верхней оценки для T сводится к нахождению меньшего положительного корня уравнения

$$\frac{p_1 p_2 t^2}{2} + \frac{p_2 z_0' t}{z_0^2 + p_2^2} + \operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} = 0$$

(его существование обеспечивается условием (6.56)). Выражая z_0 и z_0' через Φ_0 и α , придем к требуемой формуле для T_2 . **Теорема доказана.**

6.3. Неоднородное нелокальное уравнение волн

(дополнение)

Приведем здесь теорему, относящуюся к задаче (6.30) и дополняющую результаты предыдущего раздела. Она отвечает на вопрос, каковы достаточные условия разрушения решения в случае $N = 3$.

Определение 5. Будем говорить, что четверка чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ удовлетворяет условиям ($\#$), если она задана следующим образом:

1. если $\|\theta\|_{l_\infty} = \max(|a|, |b|) = 0$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (2(r+1))^{-1}(r-q)$,
2. если $\|\theta\|_{l_\infty} \neq 0$, $\max(|a|, |b|) = 0$, то $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = (3\|\theta\|_{l_\infty}(r+2))^{-1}(r-q)$,
 $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (3(r+1))^{-1}(r-q)$,
3. если $\|\theta\|_{l_\infty} = 0$, $\max(|a|, |b|) \neq 0$, то $\varepsilon_1 = (3r \max(|a|, |b|))^{-1}(r-q)$,
 $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (3(r+1))^{-1}(r-q)$,

4. если $\|\theta\|_{l_\infty} \neq 0$, $\max(|a|, |b|) \neq 0$, то $\varepsilon_1 = (4r \max(|a|, |b|))^{-1}(r - q)$,
 $\varepsilon_2 = (4\|\theta\|_{l_\infty}(r + 2))^{-1}(r - q)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (4(r + 1))^{-1}(r - q)$.

Будем применять к векторам $\theta \in R^N$ обозначение $\|\theta\|_{l_1} = \sum_{k=1}^N |\theta_k|$.

Формально положим

$$\begin{aligned} h_1 &= \max(2h_0, 0), \\ \beta_1 &= \frac{r \max(|a|, |b|)}{\varepsilon_1} + \frac{(r + 2)\|\theta\|_{l_1}}{\varepsilon_2} + 1 + h_1, \quad \beta_2 = \frac{(r + 1)\|f\|^2}{2\varepsilon_3}, \\ H(t) &= \frac{(r + 1)\gamma}{\varepsilon_4} |h(t)| + \delta |h'(t)|. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Теорема 8. Пусть $r \in (1; \infty)$ или $r \in (1; 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, $\mu(\cdot) \in L_4$, λ — нулевой вектор. Пусть, кроме того, $\Phi_0 > 0$,

$$r > q. \quad (6.61)$$

Пусть четверка чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ удовлетворяет условиям ($\#$), а параметры $\beta_1, \beta_2, h_1, H(\cdot)$ определяются формулами (6.60). Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**), причем существует такая функция $\omega(\cdot) \in C^1[0; \infty)$, принимающая неположительные значения, что

$$|H(t)| \leq \omega'(t)$$

при всех неотрицательных t . Пусть

$$\Phi'_0 > \sqrt{\frac{2(q + 2)(\beta_1 + |\omega_0|)}{r - q} \Phi_0^2 + \frac{\beta_2(q + 2)}{r + 2} \Phi_0}. \quad (6.62)$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \left(\left(\frac{(r - q)\Phi'_0}{2(q + 2)\Phi_0} \right)^2 - \frac{(r - q)(\beta_1 + |\omega_0|)}{2(q + 2)} - \frac{\beta_2(r - q)^2 \Phi_0^{-1}}{4(q + 2)(r + 2)} \right)^{-1/2}. \quad (6.63)$$

Замечание. Как и в предыдущих теоремах, непротиворечивость условий следует из того, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать значение Φ'_0 сколь угодно большим.

Пусть

$$I_1 = a \|u\|^2 + b \|\nabla u\|^2, \quad I_2 = \int_{\Omega} u(\theta, \nabla) u' dx, \quad I_3 = \int_{\Omega} f u' dx,$$

$$I_4 = \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds, \quad I_5 = \int_0^t h'(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds,$$

$$I_6 = h(0)(\nabla u(t), \nabla u(t)),$$

$\varepsilon_{1,2,3,4}$ — пока произвольные положительные числа.

В условиях теоремы можно повторить вывод равенства (6.44). С учетом новых обозначений и тривиальности λ оно примет следующий вид:

$$(r+2)W = \Phi'' - \frac{r}{2} \cdot I_1' - (r+2)I_2 - (r+1)I_3 - (r+1)I_4 + I_5 + I_6. \quad (6.64)$$

Применим к слагаемым более тонкие оценки, чем в лемме 5.

1. Заметим, что

$$\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| = \left| \int_{\Omega} 2uu' dx \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Omega} u^2 dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} u'^2 dx = \frac{\|u\|^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \|u'\|^2.$$

Аналогично можно показать, что $\left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq \|\nabla u\|^2/\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \|\nabla u'\|^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_1'| &\leq \frac{2 \max(|a|, |b|)}{\varepsilon_1} \left(\frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u\|^2}{2} \right) + \\ &+ \varepsilon_1 \max(|a|, |b|) (\|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2) \leq \\ &\leq \frac{2 \max(|a|, |b|)}{\varepsilon_1} \Phi + \varepsilon_1 \max(|a|, |b|) W. \end{aligned}$$

2. Оценим I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{\Omega} u(\theta, \nabla) u' dx \right| \leq \sum_{k=1}^N |\theta_k| \int_{\Omega} \left(\frac{u^2}{2\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x_k} \right)^2 \right) dx \leq \\ &\leq \frac{\|\theta\|_{l_1}}{2\varepsilon_2} \|u\|^2 + \frac{\varepsilon_2 \|\theta\|_{l_\infty}}{2} \|\nabla u'\|^2 \leq \frac{\|\theta\|_{l_1}}{\varepsilon_2} \Phi + \frac{\varepsilon_2 \|\theta\|_{l_\infty}}{2} W. \end{aligned}$$

3. Легко убедиться, что $|I_3| \leq \|f\|^2/(2\varepsilon_3) + \varepsilon_3 W/2$.

4. Повторяя рассуждения из леммы 5, получим, что, во-первых, $|I_4| \leq \varepsilon_4 W/2 + \varepsilon_4^{-1} \gamma \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds$, во-вторых, $|I_5| \leq \Phi + \delta \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds$.
5. Если $h_0 \leq 0$, то и $I_6 \leq 0$, в противном случае $-I_6 \leq 2h_0\Phi$. Значит, $I_6 \leq h_1\Phi$, где $h_1 = \max(2h_0, 0)$.

Применим выведенные оценки в (6.64) и соберем в левой части члены с W . Таким образом,

$$(r+2-E)W \leq \Phi'' + \beta_1\Phi + \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds + \beta_2, \quad (6.65)$$

где

$$E = \frac{r \max(|a|, |b|)\varepsilon_1}{2} + \frac{(r+2)\|\theta\|_{l_\infty}\varepsilon_2}{2} + \frac{(r+1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{2},$$

$$\beta_1 = \frac{r \max(|a|, |b|)}{\varepsilon_1} + \frac{(r+2)\|\theta\|_{l_1}}{\varepsilon_2} + 1 + h_1, \quad \beta_2 = \frac{(r+1)\|f\|^2}{2\varepsilon_3},$$

$$H(t) = \frac{(r+1)\gamma}{\varepsilon_4} |h(t)| + \delta |h'(t)|.$$

В дальнейшем будут выбраны произвольные параметры, при которых $r+2-E > 0$. При таких параметрах из (6.65) и леммы 1 следует, что

$$(r+2-E)\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi \left(\Phi'' + \beta_1\Phi + \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds + \beta_2 \right),$$

что равносильно неравенству

$$\Phi\Phi'' - (1+\alpha)\Phi'^2 + \beta_1\Phi^2 + \beta_2\Phi + \Phi \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds \geq 0. \quad (6.66)$$

Оценим интегральное выражение в этом неравенстве:

$$J \equiv \left| \int_0^t H(t-s)\Phi(s)ds \right| \leq \int_0^t \omega'(t-s)\Phi(s)ds.$$

Перейдем к переменной $\tau = t-s$, затем проинтегрируем по частям. Следовательно,

$$J \leq \omega(t)\Phi_0 - \omega_0\Phi(t) + \int_0^t \omega(\tau)\Phi'(t-\tau)d\tau. \quad (6.67)$$

Так как функция $\Phi'(\cdot)$ положительна в начальный момент и непрерывна, то существует такой момент $t_1 \in (0; T]$, что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0; t_1]$. Поэтому из (6.67) следует, что $J \leq |\omega_0|\Phi(t)$ при $t \in [0; t_1]$.

Таким образом, из (6.66) следует, что

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + (\beta_1 + |\omega_0|)\Phi^2 + \beta_2\Phi \geq 0 \quad (t \leq t_1).$$

Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$, $l_1 = \alpha(\beta_1 + |\omega_0|)$, $l_2 = \alpha\beta_2$. После упрощений получим:

$$z'' \leq l_1z + l_2z^{1+1/\alpha}. \quad (6.68)$$

Так как при малых t (т. е. при $t \leq t_1$) $\Phi' > 0$, то $z' < 0$. Поэтому, умножив (6.68) на z' , получим:

$$z'z'' \geq l_1zz' + l_2z^{1+1/\alpha}z'.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$\frac{z'^2}{2} \Big|_0^t \geq l_1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^t + l_2 \frac{z^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha} \Big|_0^t,$$

откуда следует, что $z'^2 \geq A^2$, где

$$A = \sqrt{z_0'^2 - l_1z_0^2 - l_2 \frac{z_0^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha}}$$

(позже выберем произвольные параметры, обеспечивающие существование и положительность этого числа). Учитывая знак z' , получим:

$$z' \leq -A \Leftrightarrow \Phi' \geq \frac{A}{\alpha}\Phi^{\alpha+1}.$$

Из этого неравенства видно, что $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \leq t_1$. Кроме того, по условию, $\Phi_0 > 0$. Поэтому $\Phi(t) \geq \Phi_0 > 0$. Значит, $A\Phi^{\alpha+1}/\alpha$ нигде не равно нулю. Следовательно, имеет место и строгое неравенство: $\Phi'(t) > 0$ при $t \leq t_1$ и, в частности, при $t = t_1$. Если $t_1 < T$, то можно принять t_1 за начальный момент и повторить рассуждения. Таким образом, Φ' и z' сохраняют знак на достаточно большом промежутке, а значит, и неравенство $z' \leq -A$ остается верным

достаточно долго. Проинтегрируем его от 0 до t :

$$z - z_0 \leq -At \Leftrightarrow \Phi^{-\alpha} \leq \Phi_0^{-\alpha} - At \Leftrightarrow \Phi \geq (\Phi_0^{-\alpha} - At)^{-1/\alpha}$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Из этого неравенства получим, что $T \leq T_2 \equiv \Phi_0^{-\alpha}/A$. Заметим, что если перейти от переменной z к Φ , то

$$A = \alpha \Phi_0^{-\alpha-1} \sqrt{\Phi_0'^2 - \alpha(\beta_1 + |\omega_0|)\Phi_0^2 - \alpha\beta_2\Phi_0}.$$

Пусть параметры $\varepsilon_{1,2,3,4}$ удовлетворяют условиям (#) (их положительность следует из (6.61)). Тогда существование и положительность A следуют из (6.62). При этом $E = (r - q)/2 < r + 2$, $\alpha = (r - q)/(2(q + 2)) > 0$, а следовательно, проведенные рассуждения корректны. Выбранные произвольные параметры дают однозначное выражение для T_2 , а именно, формулу (6.63). **Теорема доказана.**

6.4. Выводы к главе

В данной главе исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для ряда нелинейных уравнений соболевского типа, содержащих нелокальные по времени члены. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости задач. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных и неявных формул.

Глава 7

О начально-краевой задаче для одного неклассического интегродифференциального уравнения

Методы, использованные ранее для исследования уравнений с многомерной независимой пространственной переменной, могут быть успешно применены и в одномерном случае. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + au - bu^n + \mu \int_0^t \frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2} ds = f(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Здесь $u \in R$ — функция от времени $t > 0$ и пространственной переменной $x \in (0; l)$, $l > 0$. Будем считать, что a, b, μ и n — постоянные, причем $a, b, \mu \in R$, $n \in N \setminus \{1\}$. Кроме того, $u_0(\cdot) \in H_0^1(0; l)$, $f(\cdot) \in L_2(0; l)$.

Будем исследовать решение в классе $X_T = C^1 [0; T; H_0^1(0; l)]$, $0 < T \leq \infty$. Как и в предыдущих главах, основная цель исследования — найти достаточные условия для того, чтобы величина T , характеризующая время существования решения, была конечной или бесконечной, а в случае, когда она конечна, оценить ее сверху и снизу.

В данной главе получают развитие идеи из [10, с. 296 и 316–322]: здесь изучается уравнение, обобщающее исследованное там уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u - u^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

При этом нам удалось отказаться от некоторых упрощающих предположений, оценить время существования решения не только сверху, но и снизу, а также установить достаточные условия глобальной по времени разрешимости.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial}{\partial t} (au - bu^n) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Формально проинтегрируем его по времени от 0 до t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + au - bu^n + \mu \int_0^t \frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2} ds = f(x).$$

Дополнив это уравнение начальными и граничными условиями, получим задачу (7.1), которую и будем изучать. Будем рассматривать «постоянную интегрирования» $f(x)$ общего вида, не предполагая ее тривиальности, как было сделано в [10].

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (7.1) будем называть такое $u \in X_T$, что выполняется равенство*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + au - bu^n + \mu \int_0^t \frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2} ds - f, w \right\rangle = 0 \quad (7.2)$$

с начальным условием $u|_{t=0} = u_0$ для всех $w \in H_0^1(0; l)$, $t \in [0; T)$. (Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между $H_0^1(0; l)$ и $H^{-1}(0; l)$.)

Замечание. *С помощью теоремы вложения можно показать, что $(u^n) \in H^{-1}(0; l)$, а значит, определение 1 корректно.*

Определение 2. *Говорят, что обобщенное решение задачи (7.1) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из X_∞ . В частности, говорят, что решение разрушается путем опрокидывания, если $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{H_0^1(0; l)} = \infty$.*

Введем необходимые обозначения:

$$L_p = L_p(0; l) \quad (1 \leq p \leq \infty), \quad H_0^1 = H_0^1(0; l), \quad W_0^{1;1} = W_0^{1;1}(0; l), \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}.$$

Штрихом будем обозначать производную по времени. Положим $\Phi = \|u\|^2 + \|\partial u / \partial x\|^2$, $W = \|u'\|^2 + \|\partial u' / \partial x\|^2$. Под нижним индексом «0» будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$. Пусть k — оптимальная константа вложения $W_0^{1;1}$ в L_{n+1} , т. е. $\inf\{C \|w\|_{L_{n+1}} \leq C \|w\|_{W_0^{1;1}} \forall w \in W_0^{1;1}\}$.

Полагая в (7.2) $w = u$ и $w = u'$, а затем интегрируя по частям, получим соответственно I и II энергетические равенства:

$$\begin{aligned}
 I. \quad \frac{\Phi'}{2} &= a \|u\|^2 - b \int_0^l u^{n+1} dx - \mu \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} dx ds - \int_0^l f u dx, \\
 II. \quad W &= \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 - \frac{b}{n+1} \frac{d}{dt} \int_0^l u^{n+1} dx - \\
 &- \mu \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u'(x, t)}{\partial x} \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} dx ds - \int_0^l f u' dx.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Эти тождества будут использоваться для вывода оценок для T .

Замечание. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства (7.3). Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

7.1. Основные утверждения

Теорема 1. *Существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное решение задачи (7.1). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{H_0^1} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.*

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Если $b \geq 0$, а n нечетно, то решение существует глобально по времени.
2. Если $\Phi_0 = \|f\| = 0$, то решение существует глобально по времени.
3. По крайней мере, имеет место оценка вида $T \geq T_1 \geq T_1^* > 0$, где T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$\begin{aligned}
 & \left[\Phi_0 + (\|f\|^2 + (n-1)P) T_1 + (n-1)Q T_1^2 \right]^{(n-1)/2} \cdot \\
 & \cdot \left[P + |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} + Q T_1 \right] T_1 = \frac{1}{n-1},
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

а для T_1^* выведена явная формула:

$$T_1^* = \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{M_1 M_2^{(n-1)/2} + (n+1)/2}. \quad (7.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \left(P + |b|k^{n+1}l^{(n+1)/2}, Q \right), \\ M_2 &= \max \left(\Phi_0, \|f\|^2 + (n-1)P, 2(n-1)Q \right), \\ P &= \frac{2 \max(a, 0) + 1}{n+1}, \quad Q = \frac{|\mu|}{n+1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в I энергетическое равенство (7.3).

1. Заметим, что $\left| \int_0^l u^{n+1} dx \right| \leq \|u\|_{L_{n+1}}^{n+1} \leq k^{n+1} \|u\|_{W_0^{1,1}}^{n+1}$. Кроме того,

$$\|u\|_{W_0^{1,1}} = \int_0^l 1 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \leq \sqrt{\int_0^l 1^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx} \leq \sqrt{l} \sqrt{\Phi}.$$

Значит, $\left| \int_0^l u^{n+1} dx \right| \leq k^{n+1} l^{(n+1)/2} \Phi^{(n+1)/2}$. Если же $b \geq 0$, а n нечетно, то, очевидно, $b \int_0^l u^{n+1} dx \geq 0$. Поэтому $-b \int_0^l u^{n+1} dx \leq \omega |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} \Phi^{(n+1)/2}$, где ω равно нулю при выполнении условий первого пункта теоремы и единице в противном случае.

2. Оценим повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} dx ds \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \left(\left(\frac{\partial u(t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x} \right)^2 \right) dx ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t (\Phi(t) + \Phi(s)) ds = \frac{t\Phi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(s) ds. \end{aligned}$$

3. Очевидно, $\left| \int_0^l f u dx \right| \leq \|f\|^2/2 + \Phi/2$, $a \|u\|^2 \leq \max(a, 0) \Phi$.

Подставим эти оценки в I энергетическое равенство (7.3). После упрощений получим:

$$\Phi' \leq (2 \max(a, 0) + 1) \Phi + 2\omega |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} \Phi^{(n+1)/2} + |\mu| \left(t\Phi + \int_0^t \Phi(s) ds \right) + \|f\|^2.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t :

$$\begin{aligned} \Phi \leq & \Phi_0 + (2 \max(a, 0) + 1) \int_0^t \Phi(s) ds + 2\omega |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} \int_0^t \Phi^{(n+1)/2}(s) ds + \\ & + |\mu| \int_0^t \left[s\Phi(s) + \int_0^s \Phi(\tau) d\tau \right] ds + \|f\|^2 t. \end{aligned}$$

Интеграл от выражения в квадратных скобках равен $t \int_0^t \Phi(s) ds$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi \leq & \Phi_0 + (2 \max(a, 0) + 1) \int_0^t \Phi(s) ds + \\ & + 2\omega |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} \int_0^t \Phi^{(n+1)/2}(s) ds + |\mu| t \int_0^t \Phi(s) ds + \|f\|^2 t. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Рассмотрим неравенство при $t \in [0; \rho]$, где ρ — пока произвольное положительное число. В этом случае из (7.6) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi \leq & (\Phi_0 + \|f\|^2 \rho) + (2 \max(a, 0) + 1 + |\mu| \rho) \int_0^t \Phi(s) ds + \\ & + 2\omega |b| k^{n+1} l^{(n+1)/2} \int_0^t \Phi^{(n+1)/2}(s) ds. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Пусть выполняются условия первого пункта теоремы, а значит, $\omega = 0$.

Применим к (7.7) лемму Гронуолла-Беллмана:

$$\Phi \leq (\Phi_0 + \|f\|^2 \rho) e^{(2 \max(a, 0) + 1 + |\mu| \rho) t} \leq (\Phi_0 + \|f\|^2 \rho) e^{(2 \max(a, 0) + 1 + |\mu| \rho) \rho}.$$

В силу произвольности ρ получим, что $\Phi < \infty$ в любой момент времени, т. е. разрушения не происходит.

Если выполняются условия второго пункта теоремы, то, очевидно, единственное решение будет тривиальным.

Перейдем к доказательству утверждения третьего пункта теоремы. Будем исследовать неравенство (7.7) с $\omega = 1$. Как и раньше, $t \in [0; \rho]$, где ρ — пока произвольное положительное число.

Воспользуемся неравенством Юнга: $\Phi \leq 2\Phi^{(n+1)/2}/(n+1) + (n-1)/(n+1)$.

Таким образом, из (7.7) следует, что

$$\Phi \leq A + \int_0^t BF(\Phi(s)) ds, \quad (7.8)$$

где

$$A = \Phi_0 + \left(\|f\|^2 + \frac{n-1}{n+1}(2 \max(a, 0) + 1) \right) \rho + \frac{n-1}{n+1} |\mu| \rho^2,$$

$$B = \frac{2(2 \max(a, 0) + 1)}{n+1} + 2|b|k^{n+1}l^{(n+1)/2} + \frac{2|\mu|\rho}{n+1},$$

$$F(w) = w^{(n+1)/2}, \quad G(w) = \int_A^w \frac{dy}{F(y)}.$$

Применим к (7.8) лемму Гронуолла-Беллмана-Бихари, учитывая, что $G(w) = \frac{2}{n-1} (A^{(1-n)/2} - w^{(1-n)/2})$:

$$\Phi \leq G^{-1} \left(G(A) + \int_0^t B ds \right) = G^{-1}(Bt) = \left(A^{(1-n)/2} - \frac{n-1}{2} Bt \right)^{2/(1-n)}.$$

Положим $H(\rho, t) = A^{(1-n)/2}(\rho) - \frac{n-1}{2} B(\rho)t$. Заметим, что, во-первых, $H(\rho, \rho) > 0$ при малых ρ , во-вторых, $H(\rho, t)$ убывает по t . Поэтому если $t \leq \rho$, а ρ достаточно мало, то $\Phi(t) \leq H^{2/(1-n)}(\rho, \rho) < \infty$. Значит, выполняется оценка $T \geq \rho > 0$, где ρ — любое положительное число из окрестности нуля, где $H(\rho, \rho) > 0$. Таким образом, $\rho \in (0; \rho_0)$, где ρ_0 — наименьший положительный корень уравнения $H(\rho, \rho) = 0$. Следовательно, $T \geq T_1 = \sup(0; \rho_0) = \rho_0$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим для T_1 уравнение (7.4).

Выведем на основе уравнения для T_1 более грубую явную оценку. Перепишем уравнение $H(\rho, \rho) = 0$ в следующем виде:

$$F_1(\rho) \equiv 1 + \rho(A_1 + A_2\rho)(A_3 + A_4\rho + A_5\rho^2)^\sigma = \frac{n}{n-1},$$

где $\sigma = (n-1)/2$, $A_{1,2,3,4,5}$ — коэффициенты при ρ в соответствующих степенях (все они неотрицательны). Несложно убедиться, что функция $F_1(\cdot)$ возрастает на множестве $[0; \infty)$, причем $F_1(0) = 1$, $F_1(\infty) = \infty$. Построим такую функцию

$F_2(\cdot)$, которая тоже возрастает на $[0; \infty)$, проходя значения от единицы до бесконечности, причем $F_2(\rho) \geq F_1(\rho) \forall \rho$, и которую можно обратить явно. Тогда $F_2(\cdot)$ достигнет значения $n/(n-1)$ раньше, чем $F_1(\cdot)$, а значит, корень уравнения $F_2(\rho) = n/(n-1)$ будет в промежутке $(0; T_1)$.

Заметим, что, во-первых,

$$A_1 + A_2\rho \leq \max(A_1, A_2)(1 + \rho) \leq \max(A_1, A_2)e^\rho,$$

во-вторых,

$$A_3 + A_4\rho + A_5\rho^2 \leq \max(A_3, A_4, 2A_5) \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) \leq \max(A_3, A_4, 2A_5)e^\rho.$$

Значит,

$$F_1(\rho) \leq 1 + M\rho e^{(\sigma+1)\rho},$$

где $M = \max(A_1, A_2)\max^\sigma(A_3, A_4, 2A_5)$. Подберем такое θ , что $1 + M\rho e^{(\sigma+1)\rho} \leq e^{\theta\rho}$, что равносильно неравенству

$$1 + M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma+1)^{k-1}\rho^k}{(k-1)!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k \rho^k}{k!}.$$

Методом индукции можно показать, что это условие будет выполняться, если θ достаточно велико, а именно, достаточно взять $\theta = M + \sigma + 1$. Таким образом, приходим к выражению $F_2(\rho) = e^{\theta\rho}$, откуда легко найти, что корнем уравнения $F_2(\rho) = n/(n-1)$ будет $T_1^* = \theta^{-1} \ln(n/(n-1))$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим явную формулу (7.5). **Теорема доказана.**

Теорема 3. Положим $n_1 = (n-1)/2$. Пусть $\Phi_0 > 0$,

$$\frac{n_1}{2}\Phi'_0 > \sqrt{\left(3a^2n_1^2 + |\mu|n_1 + \sqrt{3}n|\mu|\right)\Phi_0^2 + \frac{3n^2n_1\|f\|^2}{2(n+1)}\Phi_0}. \quad (7.9)$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \Phi_0 \sqrt{\frac{2}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 3n^2\mu^2\Phi_0^4}}}, \quad (7.10)$$

где

$$\varphi = \frac{n_1^2}{4} \Phi_0'^2 - \frac{n_1}{2} (6a^2 n_1 + 2|\mu|) \Phi_0^2 - \frac{3n^2 n_1 \|f\|^2}{2(n+1)} \Phi_0.$$

Выразим $b \int_0^l u^{n+1} dx$ из I тождества (7.3) и подставим во II. После упрощений получим:

$$\begin{aligned} W = & \frac{\Phi''}{2(n+1)} + \frac{a(n-1)}{2(n+1)} \frac{d}{dt} \|u\|^2 - \frac{n\mu}{n+1} \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u'(t)}{\partial x} \frac{\partial u(s)}{\partial x} dx ds + \\ & + \frac{\mu}{n+1} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{n}{n+1} \int_0^l f u' dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рассмотрим по отдельности слагаемые, входящие в (7.11).

1. Заметим, что $\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| \leq \int_0^l \left(u^2/\varepsilon_1 + \varepsilon_1 u'^2 \right) dx \leq \Phi/\varepsilon_1 + \varepsilon_1 W$, где ε_1 — пока произвольное положительное число.
2. Оценим повторный интеграл:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u'(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} dx d\tau \right| \leq \\ & \leq \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\varepsilon_2(t)}{2} \left(\frac{\partial u'(t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2(t)} \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right)^2 \right) dx d\tau = \\ & = \frac{\varepsilon_2(t)}{2} t \int_0^l \left(\frac{\partial u'(t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_2(t)} \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \leq \\ & \leq \frac{t\varepsilon_2(t)}{2} W + \frac{1}{2\varepsilon_2(t)} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где функция $\varepsilon_2(t)$ непрерывна и положительна на $(0; \infty)$, причем величина $t\varepsilon_2(t)$ при бесконечно малых t конечна.

3. Легко убедиться, что $\left| \int_0^l f u' dx \right| \leq \varepsilon_3 W/2 + (2\varepsilon_3)^{-1} \int_0^l f^2 dx$, где ε_3 — пока произвольное положительное число.

4. Очевидно, $\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leq \Phi$.

Подставим эти оценки в (7.11). После приведения подобных получим:

$$W(1 - E) \leq \frac{\Phi''}{2(n+1)} + \left(\frac{|a|(n-1)}{2(n+1)\varepsilon_1} + \frac{|\mu|}{n+1}\right)\Phi + \frac{n|\mu|}{2(n+1)\varepsilon_2(t)} \int_0^t \Phi(s)ds + \frac{n\|f\|^2}{2(n+1)\varepsilon_3}, \quad (7.12)$$

где

$$E = \frac{|a|(n-1)\varepsilon_1}{2(n+1)} + \frac{n|\mu|t\varepsilon_2(t)}{2(n+1)} + \frac{n\varepsilon_3}{2(n+1)}. \quad (7.13)$$

Пусть $\varepsilon_{1,3}$ и $\varepsilon_2(t)$ таковы, что множитель при W положителен. С помощью неравенств Коши-Буняковского-Шварца можно показать, что $\Phi'^2 \leq 4\Phi W$. Из этого неравенства и (7.12) следует, что

$$\frac{\Phi'^2}{4}(1 - E) \leq \frac{\Phi\Phi''}{2(n+1)} + \left(\frac{|a|(n-1)}{2(n+1)\varepsilon_1} + \frac{|\mu|}{n+1}\right)\Phi^2 + \frac{n|\mu|}{2(n+1)\varepsilon_2(t)}\Phi \int_0^t \Phi(s)ds + \frac{n\|f\|^2}{2(n+1)\varepsilon_3}\Phi,$$

откуда

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)\Phi'^2 + \beta\Phi^2 + \gamma(t)\Phi \int_0^t \Phi(s)ds + \delta\Phi \geq 0, \quad (7.14)$$

где

$$\alpha = \frac{n+1}{2}(1 - E) - 1, \quad \beta = |a|(n-1)/\varepsilon_1 + 2|\mu|, \quad \gamma(t) = n\mu/\varepsilon_2(t), \quad \delta = n\|f\|^2/\varepsilon_3.$$

Пусть для определенности произвольные параметры таковы, что каждое слагаемое в правой части (7.13) равно $(n-1)/(6(n+1))$, откуда $\varepsilon_1 = (3|a|)^{-1}$, $\varepsilon_2(t) = (3n|\mu|t)^{-1}(n-1)$, $\varepsilon_3 = (3n)^{-1}(n-1)$ (при $a = 0$ доопределим ε_1 значением 1). Тогда, как легко убедиться, $\alpha = (n-1)/4$, а значит, обеспечена положительность α . Этот выбор параметров обеспечивает и положительность множителя при W в (7.12). Другие параметры в (7.14) примут следующий вид: $\beta = 3a^2(n-1) + 2|\mu|$, $\gamma(t) = 3n^2\mu^2t/(n-1)$, $\delta = 3n^2\|f\|^2/(n-1)$, причем выражение для β останется верным и при $a = 0$.

Рассмотрим неравенство (7.14). Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 6 приложения А в [10], получим, что $\Phi(t)$ оценивается снизу функцией, которая имеет конечные значения в окрестности нуля и обращается в бесконечность на границе этой окрестности, т. е. при $t = T_2$, где T_2 определяется формулой (7.10). Предполагаемое неравенство (7.9) является достаточным условием, чтобы эти рассуждения были корректны. **Теорема доказана.**

7.2. Выводы к главе

В данной главе исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевой задачи для одного неклассического нелинейного уравнения, содержащего нелокальный по времени член. Основное отличие этой задачи от рассматривавшихся ранее задач о глобальной и локальной разрешимости состоит в том, что здесь независимая пространственная переменная имеет размерность 1. И здесь удается успешно применить методы, с помощью которых были исследованы многомерные задачи.

Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости задачи. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решения в виде явных и неявных формул.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Составлены задачи, описывающие ряд нестационарных процессов, относящихся, в основном, к физике полупроводников.
2. Впервые изучены асимптотики решений задач Коши для нескольких нелинейных уравнений соболевского типа. Показано, какие члены уравнения определяют качественное поведение решений.
3. Впервые исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для ряда нелинейных уравнений соболевского типа. В частности, рассмотрены уравнения, содержащие нелинейные выражения под знаком производной по времени. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных, неявных и квадратурных формул. Разрешимость исследована с помощью принципа сжимающих отображений. Требуемые оценки найдены энергетическим методом.
4. Впервые исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевых задач для нескольких нелинейных соболевских уравнений, содержащих нелокальные по времени члены. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных и неявных формул. Эти результаты получены с помощью принципа сжимающих отображений и энергетического метода.
5. Впервые исследованы вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости для начально-краевой задачи для одного неклассическо-

го нелинейного эволюционного уравнения, содержащего нелокальный по времени член. Важная особенность этого уравнения состоит в том, что в нем независимая пространственная переменная имеет размерность 1. И к этой задаче удастся применить принцип сжимающих отображений и метод энергетических оценок. Установлены достаточные условия для локальной и для глобальной по времени разрешимости. В случае только локальной разрешимости найдены оценки времени существования решений в виде явных и неявных формул.

6. Таким образом, в диссертационной работе установлены новые результаты, относящиеся к качественной теории нелинейных уравнений в частных производных.

Список литературы

1. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: URSS, 2007.
2. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Физико-математическая литература, 1993.
5. *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Rogov Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
6. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 1990.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Лань, 2003.
9. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Книжный дом «Либроком», 2010.
10. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: URSS, 2010.
11. *Корпусов М. О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
12. *Корпусов М. О.* Разрушение в параболических и псевдопараболических уравнениях с двойной нелинейностью. М.: Книжный дом «Либроком», 2012.
13. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный ана-

- лиз и математическое моделирование в физике. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. М.: URSS, 2011.
14. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Методы исследования нелинейных операторов. М.: URSS, 2011.
 15. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. Киев: Наукова думка, 1998.
 16. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
 17. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
 18. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М.: Научный мир, 2008.
 19. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
 20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Издательство Московского университета, 2004.
 21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Физматлит, 2003.
 22. Янпольский А. Р. Гиперболические функции. М., Физматгиз, 1960.
 23. Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I. Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Springer-Verlag. 2006. 564 с.
 24. Shishmarev I., Naumkin P. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. Providence. AMS. 1994. V. 133.
 25. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1944.

26. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах// ПММ. 1960. Т. 24. №5. С. 58–73.
27. Галактионов В. А. О неразрешимых в целом задачах Коши для квазилинейных параболических уравнений// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. №5. С. 1072–1087.
28. Галактионов В. А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u^{1+\sigma} + u^\beta$ // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. №5. С. 836–842.
29. Галактионов В. А. Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т. 22. №2. С. 322–338.
30. Галактионов В. А., Похожаев С. П. Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. №10. С. 1819–1846.
31. Гладков А. Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений// Математические заметки. 1996. Т. 60. №3. С. 356–362.
32. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов// Записки ЛОМИ. 1977 г. Т. 69. С. 77–102.
33. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником// Математические заметки. 1999 г. Т. 65. №1. С. 70–75.
34. Кожанов А. И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений// ДАН. 1992. Т. 326. №5. С. 781–786.
35. Кожанов А. И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным

- источником// Сибирский математический журнал. 1994 г. Т. 35. №5. С. 1062–1073.
36. *Конотоп В. В., Шиммарев И. А.* Об асимптотике решений обобщенного уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова при больших временах// Дифференциальные уравнения, 1998 г., том 34, номер 5. С. 668-681.
37. *Корпусов М. О.* Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. №6. С. 849–866.
38. *Корпусов М. О.* Глобальная разрешимость начально-краевой задачи для одной полулинейной системы уравнений// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. №7. С. 1039–1050.
39. *Корпусов М. О.* К вопросу о разрушении за конечное время решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения $Au_t = F(u)$ // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №12. С. 1–6.
40. *Корпусов М. О.* О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева// Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68. №4. С. 151–204.
41. *Корпусов М. О.* О разрушении решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения псевдопараболического типа// Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. №6. С. 1–4.
42. *Корпусов М. О.* Пробой полупроводников// Радиотехника и электроника. 2004. Т. 50. №2. С. 252–255.
43. *Корпусов М. О.* Разрушение решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. №12. С. 1717–1724.

44. Корпусов М. О. Условия глобальной разрешимости задачи Коши для полулинейного уравнения псевдопараболического типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №8. С. 1159–1172.
45. Корпусов М. О. Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа// Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. №5. С. 1–8.
46. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. Нестационарные волны в стратифицированной жидкости, возбуждаемые изменением нормальной компоненты скорости на криволинейном отрезке// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. №9. С. 1112–1121.
47. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №8. С. 1237–1249.
48. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39. №6. С. 968–984.
49. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №7. С. 944–962.
50. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003 г. Т. 43. №12. С. 987–1004.
51. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения состав-

- ного типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №11. С. 1647–1654.
52. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками// Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. №4. С. 89–128.
53. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений нелинейных волновых уравнений типа Соболева с кубическими источниками// Математические заметки. 2005. Т. 78. №3. С. 559–578.
54. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений одного класса квазалинейных диссипативных волновых уравнений типа Соболева с источниками// ДАН. 2005. Т. 404. №1. С. 1–3.
55. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений полулинейных уравнений псевдопараболического типа с быстро растущими нелинейностями// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. №2. С. 272–286.
56. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решения начально-краевой задачи для нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №12. С. 2104–2111.
57. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решения уравнения типа Соболева с нелокальным источником// Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. №3. С. 567–578.
58. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №1. С. 113–128.
59. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Разрушение решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений// ДАН. 2005. Т. 401. №2. С. 168–171.

60. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №12. С. 1835–1869.
61. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. 2// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №11. С. 2041–2048.
62. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Энергетическая оценка при больших временах для решения нелинейного уравнения псевдопараболического типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. №8. С. 1200–1206.
63. Ляшко С. И. Приближенное решение уравнений псевдопараболического типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31. №12. С. 1906–1911.
64. Митидиери Э. Л., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных// Труды МИАН. 2001. Т. 234.
65. Номировский Д. А. О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными// Украинский математический журнал. 2004. №12. С. 1243–1252.
66. Рабинович М. И. Автоколебания распределенных систем// Известия вузов. Радиофизика. 1974 г., том 17, №4, с. 477–510.
67. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева// Сибирский математический журнал. 1995. Т. 36. №5. С. 1130–1145.
68. Секерж-Зенькович С. Я. Построение фундаментального решения оператора внутренних волн// ДАН СССР. 1979. Т. 246. №2. С. 286–288.
69. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изве-

- стия АН СССР. Серия математическая. 1954 г. Т. 18. №1. С. 3–50.
70. *И. А. Шилмарев*. Об одном нелинейном уравнении типа Соболева// Дифференциальные уравнения, 2005 г., том 41, номер 1. С. 138-140.
71. *Amann H., Fila M.* A Fujita-type theorem for the laplace equation with a dynamical boundary condition// Acta Math. Univ. Comenianae. 1997. V. LXVI. №2. P. 321–328.
72. *Fujita H.* On the blowing up of the solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Univ. Tokyo. 1966. Sect. IA. V. 13. P. 109–124.
73. *Levine H. A.* Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$ // Transactions of the American mathematical society. 1974. V. 192. P. 1–21.
74. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.
75. *Levine H. A.* The role of critical exponents in blowup problems// SIAM Rev. 1990. V. 32. P. 262–288.
76. *Levine H. A., Park S. R., Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinear damped wave equation. J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 228. P. 181–205.
77. *Levine H. A., Park S. R., Serrin J.* Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type// J. differ. equations. 1998. V. 142. P. 212–229.
78. *Levine H. A., Payne L. E.* Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time// J. differ. equations. 1974. V. 16. P. 319–334.
79. *Levine H. A., Payne L. E.* Some nonexistence theorems for initial-boundary value problems with nonlinear boundary constraints// Proc. of AMS. 1974. V. 46. №7. P. 277–281.
80. *Levine H. A., Pucci P and Serrin J.* Some remarks on the global

- nonexistence problems for nonautonomous abstract evolution equations// Contemporary Math. 208 (1997). P. 253–263.
81. *Levine H. A., Serrin J.* Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation// Arch. rat. mech. analys. 1997. V. 137. P. 341–361.
 82. *Kiyoshi Mochizuki, Ilya A. Shishmarev.* Large Time Asymptotics of Small Solutions to Generalized Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation// Funkcialaj Ekvacioj, 2001 г., том 44, номер 1. С. 99-117.
 83. *Pucci P., Serrin J.* Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy// J. Diff. Equations. 150 (1998). P. 203–214.
 84. *Pucci P., Serrin J.* Some new results on global nonexistence for abstract evolution equation with positive integral energy// Topological Methods in Nonlinear Analys., Journal of J. Schauder Center for Nonlinear Studies. 10 (1997). P. 241–247.
 85. *Showalter R. E.* Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space// SIAM J. Math. Analys. 1972. V. 3. №3. P. 527–543.
 86. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear differential equations// Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society. 1997. V. 49.
 87. *Showalter R. E.* Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type// SIAM J. Math. Analys. 1975. V. 6. №1. P. 25–42.
 88. *Showalter R. E.* Partial differential equations of Sobolev-Galpern type// Pacific J. Math. 1963. V. 31. №3. P. 787–793.
 89. *Showalter R. E.* The Sobolev type equations. I(II)// Appl. analys. 1975. V. 5. №1. P. 15–22 (№2. – P. 81–99.)
 90. *Апустов А. И.* Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с кубической нелинейностью//

- Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. №9. С. 1354–1358.
91. *Аристов А. И.* Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения с переменным коэффициентом// Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №6. С. 781–789.
92. *Аристов А. И.* Асимптотики при больших временах решений задач Коши для некоторых соболевских уравнений (в статье «О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при МГУ им. М. В. Ломоносова»)// Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №8. С. 1209–1210.
93. *Аристов А. И.* О задаче Коши для одного нелинейного соболевского уравнения// Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. №1. С. 117–120.
94. *Аристов А. И.* Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с аналитической нелинейностью// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2009. С. 17–22.
95. *Аристов А. И.* Исследование качественных свойств решений одного нелинейного соболевского уравнения// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2010. С. 11–22.
96. *Аристов А. И.* Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного уравнения соболевского типа// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. 2011. С. 42–53.
97. *Аристов А. И.* О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. №10. С. 1855–1865.
98. *Аристов А. И.* О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью// Известия РАН. Серия математическая.

2011. Т. 75. №5. С. 3–18.
99. *Аристов А. И.* О начально-краевой задаче для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент// Математические заметки. 2012. Т. 91. Выпуск 5. С. 643–653.
100. *Аристов А. И.* Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с двойной нелинейностью// Сборник тезисов лучших дипломных работ 2008 года. С. 42–43. М.: Макс-Пресс, 2008.
101. *Аристов А. И.* О существовании и разрушении решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения соболевского типа с переменным коэффициентом// Сборник тезисов XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 12. М.: Макс-Пресс, 2009.
102. *Аристов А. И.* О задаче Коши для нелинейного уравнения соболевского типа с переменным коэффициентом// Сборник тезисов XVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 40–41. М.: Макс-Пресс, 2010.
103. *Аристов А. И.* О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа// Сборник тезисов XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 28–29. М.: Макс-Пресс, 2011.
104. *Аристов А. И.* Об одном нелинейном неоднородном соболевском уравнении// Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 72–73. М.: Макс-Пресс, 2012.

105. *Аристов А. И.* Об одном нелинейном соболевском уравнении// Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». С. 126–127. М.: Макс-Пресс, 2013.
106. *Аристов А. И.* Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения// Научная конференция «Тихоновские чтения», 25–29 октября 2010 г. С. 27–28. М.: Макс-Пресс, 2010.
107. *Аристов А. И.* Об одном нелинейном волновом уравнении соболевского типа// Научная конференция «Тихоновские чтения», 29–31 октября 2012 г. С. 15–16. М.: Макс-Пресс, 2012.
108. *Аристов А. И., Шишмарев И. А.* О начально-краевой задаче для одного нелинейного нелокального по времени уравнения соболевского типа// Научная конференция «Ломоносовские чтения», 14–23 ноября 2011 г. С. 73–74. М.: Макс-Пресс, 2011.