

На правах рукописи

Жданов Игорь Игоревич

Свойства самонормированных сумм случайных величин

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей и
математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Круглов Виктор Макарович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры высшей математики РГУ нефти и газа
имени И.М. Губкина

Гамкрелидзе Николай Георгиевич

доктор физико-математических наук, профессор
Казанского (Приволжского) федерального университета

Чупрунов Алексей Николаевич

Ведущая организация:

Вологодский государственный университет

Защита состоится 10 октября 2014 г. в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, расположенном по адресу: *119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.*

Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня по тел. *939-30-10* (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ, а также на официальном сайте ВМиК МГУ *<http://cs.msu.ru>* в разделе "*Диссертации*".

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.т.н., ведущий научный сотрудник

В.А. Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Данная работа посвящена исследованию асимптотических свойств самонормированных сумм независимых случайных величин. Самонормированные суммы естественным образом возникают в ряде задач теории вероятностей и математической статистики. В качестве примера можно указать классическую статистику Стюдента, которая используется, в частности, при проверке статистических гипотез, построении доверительных интервалов для оценки неизвестных параметров вероятностных распределений. Систематическое исследование свойств самонормированных сумм началось с выходом статьи *Efron*¹, посвященной исследованию асимптотических свойств статистики Стюдента при некоторых нестандартных условиях. С другими примерами и задачами, в которых возникают самонормированные суммы, можно ознакомиться по обзорной статье *Shao*².

Одним из дополнительных мотивов исследований асимптотических свойств самонормированных сумм является стремление найти решение проблемы нормирования и центрирования в классических предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. Проблема нормирования и центрирования возникла в тридцатые годы прошлого столетия и до сих пор не получила своего окончательного решения.

Нормирование суммы случайных величин квадратным корнем из суммы квадратов слагаемых, как это делается для самонормированных сумм, частично продвигает решение упомянутой проблемы центрирования и нормирования. Последние три десятилетия ведутся интенсивные исследования самонормированных сумм независимых случайных величин. Для самонормированных сумм были доказаны несколько вариантов центральной предельной теоремы (*Chistyakov, Götze*³, *Егоров В.А.*⁴, *Mason, Zinn*⁵), многочисленные варианты закона повторного логарифма (*Giné E., Mason*

¹*Efron, B.*, Student's t-test under symmetry conditions // J. Amer. Statist. Assoc. 1969, Vol. 64, p. 1278-1302

²*Qi-Man Shao*, Self-normalized Limit Theorems in Probability and Statistics // Hong Kong University of Science and Technology

³*Chistyakov G., Götze F.*, Limit distributions of studentized means // Ann. Probab., 2004, Vol. 32, p. 28-77

⁴*Егоров В.А.*, Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин // Теория вероятностей и ее применения, 1996, Vol. 41, стр. 643-650

⁵*Mason D.M., Zinn J.*, When does a randomly weighted self-normalized sum converge in distribution // Electronic Communications in Probability, 2005, Vol. 10, p. 70-81.

*D.M.*⁶, *Griffin P.*, *Kuelbs J.*⁷, *Griffin P.*, *Kuelbs J.*⁸), найдены необходимые и достаточные условия слабой компактности (*Griffin P.*⁹). Кроме того были доказаны аналоги неравенства Берри-Эссеена (*Новак С.Ю.*¹⁰, *Wang Q.*, *Jing B.Y.*¹¹), а также неравенства для больших уклонений (*Нагаев С.В.*¹², *Bing-Yi Jing*, *Qi-Man Shao*, *Qiyang Wang*¹³). Отметим также статью *Novak S.Y.*¹⁴ о характеристике нормального закона с помощью самонормированных сумм. Во всех перечисленных исследованиях, за исключением упомянутого исследования *Егорова В.А.*, речь идет о самонормированных суммах, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Аналогичные исследования свойств самонормированных сумм, построенных по независимым различно распределенным случайным величинам, практически отсутствуют. Причина состоит в том, что нет адекватного математического аппарата.

Цель работы.

В диссертации исследованы асимптотические свойства самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, каждая из которых принадлежит одному из конечного числа типов, что заметно расширяет класс случайных величин, самонормированные суммы которых допускают естественное обобщение результатов, доказанных для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам.

Научная новизна.

Все основные результаты, доказанные в диссертации, являются новыми и

⁶ *Giné E.*, *Mason D.M.*, On the LIL for self-normalized sums of IID random variables // Theor. Probab., Vol. 11, 1997, p. 351-370

⁷ *Griffin P.*, *Kuelbs J.*, Self-normalized laws of the iterated logarithm // Ann. Probab., 1989, Vol. 17, p. 1571-1601

⁸ *Griffin P.*, *Kuelbs J.*, Some extentions of the laws of the iterated logarithm via self-normalizations // Ann. Probab., 1991, Vol. 19, p. 380-395

⁹ *Griffin P.*, The tightness of the Student t-statistic // Department of Mathematics, Syracuse University, 2012, Vol. 1

¹⁰ *Новак С.Ю.*, О самонормированных суммах случайных величин и статистике Стьюдента, Теория вероятностей и ее применения, 2004, Vol. 29? cnh/ 365–373

¹¹ *Wang Q.*, *Jing B.Y.*, An exponential nonuniform Berry-Esseen bound for self-normalised sums // Ann. Probab., 1999, Vol. 27, p. 2068–2088

¹² *Нагаев С.В.*, О больших уклонениях автонормированной суммы, Теория вероятностей и ее применения, 2004, Vol. 49, p. 794–802

¹³ *Bing-Yi Jing*, *Qi-Man Shao*, *Qiyang Wang*, Self-normalized Cramer-type large deviations for independent random variables // The Annals of Probability, 2003, Vol. 31, p. 2167–2215

¹⁴ *Novak S.Y.*, A new characterization of the normal law // Statistical and Probability Letters, 2007, Vol. 77, p. 95–98

состоят в следующем.

1. Доказаны необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих одному типу вероятностного распределения.
2. Доказаны необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих конечному числу типов вероятностных распределений.
3. Доказан аналог центральной предельной теоремы для самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих одному типу вероятностного распределения.
4. Доказан усиленный вариант закона повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Доказаны два обобщения известных законов повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по случайным величинам, принадлежащих конечному числу типов.

Методы исследования.

Для достижения указанных результатов были привлечены методы классического математического анализа, методы функционального анализа и теории меры. Наиболее широко использовались методы теории вероятностей, случайных процессов и, в частности, теории мартингалов.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации могут быть применены к решению как практических так и теоретических задач. Доказанные теоремы открывают новые возможности для дальнейших исследований свойств самонормированных сумм. В своем классическом виде теоремы, аналоги которых доказаны в диссертации, нашли широкое применение, в частности, в финансовой математике, поэтому можно ожидать, что доказанные аналоги тоже могут быть применены для некоторых практических задач.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка используемой литературы, насчитывающего 28 наименований. Общий объем

работы составляет 79 страниц.

Апробация работы и публикации.

По теме диссертации опубликовано 2 статьи ([1], [2]) в журналах, рекомендуемых ВАК. Статьи единолично принадлежат автору диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на заседании кафедры математической статистики факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, семинаре "Теория риска и смежные вопросы" (руководители: д.ф.-м.н. профессор В.Е. Бенинг, д.ф.-м.н. профессор В.Ю. Королев).

Содержание диссертации.

Во **введении** приведены краткие исторические сведения о теме исследования и перечислены наиболее значимые публикации об асимптотических свойствах самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам, изложена краткая аннотация подразделов диссертации.

Первые три параграфа посвящены исследованию слабой компактности последовательностей самонормированных сумм независимых случайных величин. Наличие условия слабой компактности играет значительную, если не ключевую роль в доказательстве ряда важных теорем (это будет продемонстрировано ниже) для последовательностей самонормированных сумм. Поэтому изучение условий, при которых эти последовательности обладают свойством слабой компактности является важнейшим направлением в изучении свойств самонормированных сумм.

§1 содержит доказательства необходимых и достаточных условий слабой компактности самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному типу. Приведем формулировку задачи. Пусть независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть даны положительные числа $c_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $0 < c = \inf_{n \geq 1} c_n < \sup_{n \geq 1} c_n = d < \infty$. Обозначим $X_n = c_n Y_n$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $V_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Главным объектом исследований в диссертации являются самонормированные суммы $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$. Отношение S_n/V_n , $n \geq 1$ полагается равным нулю, если $V_n^2 = 0$ п.в. (почти всюду по отношению к вероятности P). Напомним определение слабой компактности: последовательность функций распределений $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ называ-

ется слабо компактной, если в любой подпоследовательности $\{\mathcal{F}_{n_k}\}_{k \geq 1}$ можно выделить подпоследовательность $\{\mathcal{F}_{n_{k_m}}\}_{m \geq 1}$ слабо сходящуюся к некоторой функции распределения $\mathcal{F}$. Вместо определения слабой компактности в диссертации систематически используется критерий слабой компактности, который можно найти, например, в монографии *А.Н. Колмогорова, Б.В. Гнеденко "Предельные распределения для сумм независимых случайных величин"*, стр. 43. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ с функциями распределения $\mathcal{F}_n$ слабо компактна тогда и только тогда, когда выполняется условие $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} P\{|\xi_n| > \lambda\} = 0$.

Определим четыре новые функции:

$$G(r) = \mathbb{P}(|Y_1| > r), \quad K(r) = \frac{\mathbb{E}(Y_1^2; |Y_1| < r)}{r^2},$$

$$M(r) = \frac{\mathbb{E}(Y_1; |Y_1| < r)}{r}, \quad Q(r) = G(r) + K(r).$$

Доказывается, что функция $Q(r)$, $r > r_0$ является непрерывной и строго убывающей. Это позволяет воспользоваться тем, что для любого $\lambda > 0$ найдется $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n(\lambda)$ выполняется неравенство $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ и, следовательно, найдется число $a_n(\lambda) > r_0$ такое, что $Q(a_n(\lambda)) = 1/\lambda n$. К числу основных результатов первого раздела относятся следующие три теоремы.

Теорема 1.1. Пусть дана последовательность $\{z_n\}_{n \geq 1}$ вещественных чисел. Следующие утверждения эквивалентны

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}\{|S_n - z_n| > LV_n\} = 0,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_n - na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)} \right| < \infty \text{ для всех } \lambda > 0,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_n - na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)} \right| < \infty \text{ для всех } \lambda \in (0, 1).$$

Теорема 1.2. Следующие утверждения эквивалентны

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}\{|S_n| > LV_n\} = 0,$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|M(r)|}{Q(r)} < \infty.$$

Можно заметить, что для знаменитой статистики Стьюдента имеет место следующее представление через самонормированные суммы:

$$t_n = \frac{S_n}{V_n} \sqrt{\frac{1 - 1/n}{1 - S_n^2/(nV_n^2)}}.$$

В диссертации доказано, что критерий слабой компактности для самонормированных сумм из предыдущих теорем может быть распространен и на статистики Стьюдента.

Теорема 1.3. *Следующие условия эквивалентны*

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}\{|S_n| > LV_n\} &= 0, \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}\{|t_n| > L\} &= 0, \\ \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|M(r)|}{Q(r)} &< \infty. \end{aligned}$$

§2 (дополнительные сведения о слабой компактности самонормированных сумм независимых однотипных случайных величин) содержит доказательства ряда утверждений о слабой компактности сумм независимых однотипных случайных величин, которые используются в последующих частях диссертации. Среди всех утверждений мы выделим Теорему 2.1 и Лемму 2.4.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы последовательность $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ была слабо компактной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbb{E} \left(\frac{X_i X_j}{V_n^2} \right) \right| &< \infty, \\ \sup_{n \geq 1} n^2 \mathbb{E} \frac{X_i X_j}{W_n^2} &< \infty. \end{aligned}$$

Лемма 2.4. *Если последовательность $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то существуют постоянные $c_0 > 0$, $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \exp \left\{ c_0 \left(\frac{S_n}{V_n} \right)^2 \right\} = C < \infty.$$

Лемма 2.4. наглядно показывает, что изучение последовательности случайных

величин, нормированных квадратным корнем из суммы квадратов этих же случайных величин дает исследователям определенное преимущество перед числовой нормировкой в классической теории предельных теорем. Действительно, из слабой компактности нормированных некоторыми числами $B_n > 0$ последовательности сумм $\{S_n/B_n\}_{n \geq 1}$ в общем случае не следует существование моментов какого-либо положительного порядка у этих сумм.

§3 (*слабая компактность самонормированных сумм независимых многотипных случайных величин*) содержит доказательства необходимых и достаточных условий слабой компактности самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному из конечного числа невырожденных типов. Так же доказано, что слабая компактность самонормированных сумм независимых многотипных случайных величин эквивалентна слабой компактности статистики Стьюдента, построенной по этим же случайным величинам. Постановка задачи значительно отличается от рассмотренных в предыдущих параграфах, поэтому приведем её отдельно. Пусть независимые случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Напомним, что случайные величины X и Y принадлежат одному типу, если $\mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{cY + d \leq x\}$ для всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ для некоторых $c, d \in \mathbb{R}$. Предположим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ распределение случайной величины Y_n принадлежит одному из l типов невырожденных распределений. Удобно считать, что существуют невырожденные случайные величины $Z_1, \dots, Z_l$ с распределениями различных l типов, и каждая случайная величина Y_n имеет распределение, совпадающее с распределением одной из случайных величин $Z_1, \dots, Z_l$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $Y_1, \dots, Y_n, n \in \mathbb{N}$, могут быть разбиты на l непересекающихся множеств $\mathcal{M}_{1,n}, \dots, \mathcal{M}_{l,n}$. Случайная величина Y_k принадлежит множеству $\mathcal{M}_{i,n}$ тогда и только тогда, когда случайные величины Y_k и Z_i имеют одинаковые распределения. Набор индексов $\{1, \dots, n\}$ может быть разбит на l непересекающихся множеств $\mathcal{L}_{1,n}, \dots, \mathcal{L}_{l,n}$. Индекс k принадлежит множеству $\mathcal{L}_{i,n}$ тогда и только тогда, когда $Y_k \in \mathcal{M}_{i,n}$. Мы предполагаем также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{i,n}}{n} = p_i, \quad 0 < p_i < 1, \quad \text{для всех } i = 1, \dots, l.$$

Смысл этого условия состоит в том, чтобы случайные величины каждого из типов вносили заметный вклад в отношение $S_n/V_n, n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{c_n\}_{n \geq 1}$ - последовательность действительных чисел, такая что $0 < c = \inf_{n \geq 1} c_k < d = \sup_{n \geq 1} c_n < \infty$. С помощью случайных величин $X_n = c_n Y_n, n \in \mathbb{N}$, построим самонормированные суммы $S_n/V_n, n \in \mathbb{N}$, где

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ и $V_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Чтобы выражение S_n/V_n имело смысл для любых случайных величин, положим $S_n/V_n = 0$, когда $V_n = 0$. Основные результаты параграфа приведены в теоремах ниже. Основные результаты параграфа приведены ниже.

Теорема 3.1. *Последовательность статистик Стьюдента $\{t_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n/V_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна.*

Для формулировки критерия введем новые обозначения. Для $i = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} G_i(r) &= \mathbb{P}(|Z_i| > r), \quad K_i(r) = \mathbb{E}(Z_i^2; |Z_i| < r)/r^2, \\ M_i(r) &= \mathbb{E}(Z_i; |Z_i| < r)/r, \quad Q_i(r) = G_i(r) + K_i(r), \quad r > 0, \\ T_{i,n}(\lambda) &= \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} X_k \mathbb{1}_{\{|Y_k| \leq a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}, \quad T_n(\lambda) = \sum_{i=1}^l T_{i,n}(\lambda). \end{aligned}$$

Для $i = 1, \dots, l$, любого $\lambda > 0$ и $n > (\lambda Q_i(0))^{-1}$ существует число $a_{i,n}(\lambda) > r_{i,0}$ такое, что $Q_i(a_{i,n}(\lambda)) = 1/\lambda n$, $a_n^2(\lambda) = \sum_{i=1}^l a_{i,n}^2(\lambda)$.

Теорема 3.2. *Для любой последовательности $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ действительных чисел следующие три утверждения эквивалентны*

$$\begin{aligned} &\text{последовательность } \left\{ \frac{S_n - \gamma_n}{V_n} \right\}_{n \geq 1} \text{ слабо компактна,} \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)|}{a_n(\lambda)} < \infty \text{ для всех } \lambda > 0, \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)|}{a_n(\lambda)} < \infty \text{ для всех } 0 < \lambda < 1/2. \end{aligned}$$

§4 (асимптотическая нормальность самонормированных сумм независимых случайных величин) содержит доказательство аналога центральной предельной теоремы для самонормированных сумм. В параграфе решается задача нахождения условий слабой сходимости последовательности самонормированных сумм к стандартной нормальной случайной величине в рамках постановки и обозначений параграфа 1, то есть для однотипных случайных величин.

Основной результат параграфа содержится в Теореме 4.1.

Теорема 4.1. *Для того чтобы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty),$$

достаточно, чтобы функция распределения $F(x) = \mathbb{P}\{Y_1 < x\}, x \in \mathbb{R}$, принадлежала области притяжения нормального закона Φ и $\mathbb{E}Y_1 = 0$. Это условие является необходимым, если F – симметричная функция распределения.

Доказательство достаточности основано на известной теореме Слущкого, которая утверждает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} < x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n B_n}{B_n V_n} < x \right\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}.$$

если существуют такие положительные числа $B_n, n \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{S_n}{B_n} < x \right\} &= \Phi(x), x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n^2}{B_n^2} &= 1 \text{ по вероятности.} \end{aligned}$$

Для доказательства существования таких $B_n > 0$ использованы известное обобщение теоремы Гнеденко, предложенное Малером, о сходимости по вероятности нормированной суммы квадратов независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения нормального закона, теорема Линдеберга-Феллера и некоторые другие результаты.

Теорема в части необходимости доказана для симметричных случайных величин. Доказательство основано на известном критерии $O'Brien^{15}$ принадлежности распределения $\mathcal{L}(Y_1)$ независимых одинаково распределенных случайных величин $Y_n, n \geq 1$ области притяжения нормального закона(ОПНЗ):

$$\mathcal{L}(Y_1) \in \text{ОПНЗ} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |Y_k|}{W_n} \right) = 0.$$

Для доказательства выполнения критерия рассматривается разложение

¹⁵ *O'Brien G.L.*, A limit theorem for sample maxima and heavy branches in Galton-Watson trees // Appl. Probab., 1980, Vol. 17, p. 539-545.

четвертого момента самонормированной суммы:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^4 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{X_k^4}{V_n^4}\right) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i^2 X_j^2}{V_n^4}\right) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i X_j^3}{V_n^4}\right) \\ &+ 36 \sum_{1 \leq i < j < r \leq n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i X_j X_r^2}{V_n^4}\right) + 24 \sum_{1 \leq i < j < r < k \leq n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i X_j X_r X_k}{V_n^4}\right).\end{aligned}$$

В силу симметричности случайных величин последние три суммы равны нулю. Из слабой компактности самонормированной суммы следует ограниченность её моментов (упомянутая выше Лемма 2.4), что влечет сходимость всех моментов S_n/V_n к моментам предельного (в нашем случае нормального) распределения, в частности $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n/V_n)^4 = 3$. Из последнего равенства следует, что выполнен упомянутый критерий *O'Brien*.

В §5 (закон повторного логарифма для самонормированных сумм случайных величин) доказаны два закона повторного логарифма для последовательностей самонормированных сумм, каждый из которых имеет уточнение на случай симметричных случайных величин. Обозначим $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $W_n^2 = Y_1^2 + \dots + Y_n^2$, $\mathcal{F}_k = \sigma(T_n, W_n^2, n \geq k)$,

$$\xi_j = \left(\frac{n}{n+m-j} \frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}} \right)^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Сначала, как и в предыдущих частях диссертации, приведены доказательства вспомогательных лемм, на основе которых достигаются главные результаты параграфа:

Теорема 5.1.

1. Если последовательность $\{T_n/W_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (2 \log \log n)^{-1/2} \max_{\lambda(n) \leq k \leq n} \frac{|T_k|}{W_k} < \infty \text{ н.в.}$$

2. Если случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, симметричны, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (2 \log \log n)^{-1/2} \max_{\lambda(n) \leq k \leq n} \frac{|T_k|}{W_k} \leq 1 \text{ н.в.,}$$

где функция $\lambda(n) = 1$ для $n = 1, \dots, 9$ и $\lambda(n) = [n - n/\ln \ln n]$ для $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа.

Следующая теорема представляет собой обобщение известной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин на случай многотипных случайных величин. Утверждение приведено в рамках обозначений параграфа 3 и $S_{i,n} = \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} X_k$, $V_{i,n}^2 = \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} X_k^2$, $i = 1, \dots, l$.

Теорема 5.2.

1. Если последовательности $\{S_{i,n}/V_{i,n}\}_{n \geq 1}$, $i = 1, \dots, l$, слабо компактны, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{V_n \sqrt{\log \log n}} < \infty \text{ н.в.}$$

2. Если случайные величины Z_i , $i = 1, \dots, l$ симметричные, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{V_n \sqrt{2 \log \log n}} \leq 1 \text{ н.в.}$$

Подчеркнем, что условие симметричности случайных величин позволяет отказаться от слабой компактности самонормированных сумм и получить более сильный результат.

Доказательства теорем 5.1 и 5.2 основаны на том, что случайные величины ξ_j , $j = 1, \dots, m$ образуют субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m-j}$, $j = 1, \dots, m$.

Благодарности.

Автор выражает сердечную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Виктору Макаровичу Круглову за постановку задачи, важные замечания, помощь в нахождении решения.

Список публикаций на тему диссертации

- [1] Жданов И.И. Слабая сходимость самонормированных сумм независимых случайных величин к нормальному закону. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 4:63–74, 2011.
- [2] Жданов И.И. Слабая компактность статистики Стьюдента. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 4:71–83, 2013.