На правах рукописи

Малышев Дмитрий Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ «КРИТИЧЕСКИХ» НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ В АНАЛИЗЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2014 г.

Работа выполнена на кафедре математической логики и высшей алгебры

ННГУ им. Н. И. Лобачевского

Научный консультант:

д.ф.-м.н., проф. Алексеев Владимир Евгеньевич

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н., зав. каф., проф. Бондаренко Владимир Александрович (ЯрГУ)

д.ф.-м.н., в.н.с. Пяткин Артем Валерьевич (ИМ СО РАН)

д.ф.-м.н., проф. Райгородский Андрей Михайлович (МГУ)

Ведущая организация:

Вычислительный центр РАН

Защита диссертации состоится 10 июня 2014 года в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, 2-ой учебный корпус, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http:\\cs.msu.ru в разделе «Наука»—«Работа диссертационных советов»—«Д 501.001.44».

Автореферат разослан «____» ______________ 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного совета — В.А. Костенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований

Принято считать, что алгоритм является эффективным, если время его работы на детерминированной машине Тьюринга (или на каком-нибудь другом универсальном вычислительном устройстве) ограниченно сверху полиномом от длины входных данных[1]. Вместе с тем, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности вычислений NP-полными) задач, для которых в настоящее время не разработано полиномиальных алгоритмов. Накопленный опыт исследования данных задач и практика их решения дают веские основания предполагать, что таких процедур вообще не существует.

На настоящее время имеется огромное количество результатов о полиномиальной разрешимости и о NP-полноте многих задач на графах при разнообразных ограничениях на класс рассматриваемых графов[2]. Среди направляющих мотивов к получению новых сведений такого рода можно выделить два наиболее распространенных. Это выявление более широких случаев полиномиальной разрешимости задачи и поиск сужений, для которых задача сохраняет NP-полноту. Переход от рассмотрения отдельных классов к рассмотрению семейств классов графов придает определенную систематичность процессу поиска полиномиальных и NP-полных случаев, а также позволяет рассматривать проблемы более общего содержания, чем, скажем, выяснение вычислительной сложности задачи для какого-нибудь класса. Так, для какой-нибудь задачи на графах можно попытаться получить полное описание «простых» и «сложных» классов из рассматриваемого семейства или исчерпывающее описание «линии водораздела» между «простой» и «сложной» его частями. Некоторые результаты данной работы показывают, что эти цели иногда достижимы.

Реализуемость обозначенных выше намерений обусловлена, как минимум, надлежащим выбором рассматриваемого семейства классов графов.

[1] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 Стр.

[2] см., например, электронный ресурс http://www.graphclasses.org

Так, удаление графа из класса не меняет сложностного статуса задачи. Это же верно и при добавлении графа к классу. Поэтому целесообразно рассматривать те семейства классов, для которых удаление или добавление одного графа приводит к необходимости выполнения сразу нескольких таких операций (ввиду, например, какой-нибудь замкнутости данных классов).

В диссертации рассматривается континуальное семейство наследственных классов графов, т.е. множеств графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Данные классы (и только они) допускают описание через запрещенные порожденные подграфы. Это компактное представление наследственных классов (или порождающих их наследственных свойств) является распространенным способом описания. Повышенный интерес именно к наследственным классам не случаен. Так, В.Е. Алексеевым[3] сравнительно недавно было введено понятие граничного класса графов и обоснована его полезность для анализа сложности задач на графах. Именно, наследственный класс с конечным множеством запрещенных порожденных подграфов (конечно определенный класс) является «сложным» для данной задачи тогда и только тогда, когда он содержит некоторый граничный для этой задачи подкласс. Тем самым, если для некоторой задачи известна граничная система (т.е. множество граничных классов графов), то для нее имеет место полное описание всех «простых» и «сложных» конечно определенных классов. Поэтому граничные классы могут быть названы «критическими», поскольку они имеют особое значение в анализе вычислительной сложности. Отметим, что особая роль некоторых классов осознавалась[4,5] и ранее публикации[3], все они впоследствии оказались граничными для соответствующих задач.

Если исключить работы автора, то можно заметить, что исследования в

[3] Alekseev V.E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132. — P. 17–26

[4] Алексеев В.Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1982. — С. 3–13

[5] Алексеев В.Е., Коробицын Д.В. О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискретная математика. — 1992. — Т.4, №4. — С. 34–40

теории граничных классов графов велись и ведутся только в двух направлениях. Первое из них — выявление граничных классов графов для некоторых задач на графах. Отметим работы В.Е. Алексеева[3,4,5,6,7], Р. Боляч[7,8], Д.В. Коробицына[5,6,7], В.В. Лозина[6,7,8,9,10], Н. Корпелайнена[9], К. Пурцеля[10], А. Тискина[9]. Второе направление составляют попытки дать полное описание граничных систем для тех или иных задач на графах[11].

Для любой задачи на графах элементы границы между «простыми» и «сложными» частями семейства наследственных классов являются естественными «критическими» классами. Ни для одной NP-полной задачи нет максимальных (по включению) «простых» наследственных случаев. В работе В.Е. Алексеева[3] это утверждается про задачу о независимом множестве, но все рассуждения легко переносятся и на общий случай. В работе[12] было показано, что для некоторого типа задач нет и минимальных (по включению) «сложных» наследственных случаев. Там же для некоторых задач на графах были выявлены такие классы. Это все, что было известно про элементы границы до результатов настоящей диссертации.

Многие важные вопросы теории «критических» классов графов являлись открытыми, причем некоторые из них в течении нескольких десятилетий. Например, полное описание граничных (или минимальных «сложных») классов для какой-нибудь задачи на графах. Или, напротив, выявление причин неудач в попытках получения такого описания.

Развитию метода «критических» классов графов для решения проблемы демаркации посвящена данная диссертация. В ней, в частности, получены ответы на сформулированные выше вопросы. Некоторые направления

---

[6] Alekseev V.E., Korobitsyn D.V., Lozin V.V. Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 285. — P. 1–6

[7] Alekseev V.E., Boliac R., Korobitsyn D.V., Lozin V.V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. — 389. — P. 219–236

[8] Boliac R., Lozin V.V. Independent domination in finitely defined classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2003. — V. 301. — P. 271–284

[9] Korpelainen N., Lozin V.V., Malyshev D.S., Tiskin A. Boundary properties of graphs for algorithmic graph problems // Theoretical Computer Science. — 2011. — V. 412. — P. 3545–3554

[10] Lozin V.V., Purcell C. Boundary properties of the satisfiability problems// Information Processing Letters. — 2013. — V. 113. — P. 313–317

[11] Lozin V.V. Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295

[12] Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т.16, №6. — С. 43–51

исследований в работе являются новыми направлениями в теории «критических» классов графов (теория минимальных «сложных» классов) или новыми разделами ее направлений (количественные вопросы теории «критических» классов).

Цель работы

Целью работы является классификация наследственных классов по алгоритмической сложности некоторых задач на графах, основанная на выявлении «критических» классов графов.

Методы исследования

В диссертации использованы методы теории графов, комбинаторного анализа и теории сложности вычислений.

Основные результаты работы и их научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Наиболее важными из них являются следующие:

1. Доказано, что для задач о списковом ранжировании граничные системы относительно класса лесов состоят в точности из трех конкретных классов графов.

2. Впервые рассмотрена факторизация семейства наследственных классов по отношению равенства относительных граничных систем. Сформулирован критерий принадлежности двух наследственных классов общему классу эквивалентности по этому отношению. Показано, что при некоторых условиях граничные системы относительно объединений и пересечений двух наследственных классов выражаются через граничные системы относительно этих наследственных классов. Доказан ряд результатов о представимости и непредставимости подмножеств относительных граничных систем в виде других относительных граничных систем.

3. Рассмотрен вопрос о единственности некоторого класса графов как граничного для задачи о независимом множестве относительно множества субкубических планарных графов. Эта единственность эквивалентна полиномиальной разрешимости задачи для некоторого бесконечного семейства классов графов. Установлена полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для некоторого подсемейства данного семейства.

4. Доказано, что при $k \geq 3$ для обеих задач о k-раскраске (вершинного и реберного вариантов), для задач о хроматическом числе и индексе граничные системы являются

континуальными. Тем самым показано, что для некоторых задач на графах граничные системы сложно устроены и поэтому попытки дать их полное описание, по-видимому, обречены на неудачу.

5. Показано, что каждый граничный класс для задачи о реберной 3-раскраске является граничным и для задачи о хроматическом индексе. С другой стороны, оказалось, что при любом $k > 3$ существует континуум граничных классов для задачи о реберной k-раскраске, каждый из которых не является граничным для задачи о хроматическом индексе. Доказано, что граничные системы для задач о вершинной k-раскраске не определяют граничную систему для задачи о хроматическом числе. Именно, некоторый конкретный класс графов является граничным для задачи о хроматическом числе, но не является граничным для задачи о вершинной k-раскраске ни при каком k.

6. Получен критерий эффективной разрешимости задачи о реберном списковом ранжировании (задачи РСР) в некотором достаточно представительном семействе из наследственных классов графов, содержащем все конечно определенные и все минорно замкнутые классы. Из него в качестве следствия получено, что граничную систему для задачи РСР образуют ровно 10 конкретных классов графов. Это первый результат о полном описании граничных систем с момента первой публикации[4] по граничным классам. Из полученного критерия также следует, что существует всего пять конечно определенных минимальных РСР-сложных классов и ровно один минорно замкнутый минимальный РСР-сложный класс. Все эти шесть классов явным образом описаны.

7. Доказано достаточное условие существования минимальных сложных классов. На его основе конструктивным образом показано, что для любого натурального k есть задача на графах, имеющая ровно k минимальных сложных классов (которые удается явным образом описать). Это первые примеры полного описания минимальных сложных классов.

8. Приведены примеры, демонстрирующие, что относительный граничный класс не всегда является граничным в абсолютном смысле и что минимальный сложный класс не всегда является граничным.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при сложностном анализе различных задач на графах в семействе наследственных классов графов, разработке и чтении курсов и спецкурсов по теории графов, анализу и разработке алгоритмов.

Личный вклад соискателя

Все перечисленные ранее основные результаты диссертации были получены автором лично.

Результаты работ [1,2] из списка публикаций были получены совместно с В.Е. Алексеевым. Основным результатом в [1] является критерий граничности произвольного класса графов. Он приведен в первой главе диссертации с целью демонстрации более современных методов установления граничности двух известных классов графов, чем использовавшиеся ранее[3,6,7]. Ни одно из утверждений первой главы диссертации не выносится на защиту. Авторство в публикации [2] в равной степени разделяют В.Е. Алексеев и Д.С. Малышев. Статья [21] была написана В.Е. Алексеевым, В.В. Лозиным, автором и М. Миланичем на паритетных началах. Результаты этих двух публикаций не выносятся на защиту, но используются при доказательстве третьего результата из списка основных. В публикации [9] В.Е. Алексееву принадлежат улучшения в оценках рамсеевского типа, которые не усиливают ее основной результат, изначально полученный Д.С. Малышевым. Он совпадает с первым из основных результатов диссертации. Совместная работа [22] состоит из двух частей. Авторство первой части (про задачу о гамильтоновом цикле) разделяют Н. Корпелайнен, В.В. Лозин, А. Тискин. Вторая часть (про задачу о раскраске) была написана Д.С. Малышевым.

Апробация работы и публикации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и симпозиумах:

- XV, XVI международные конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2008; Нижний Новгород, 2011)
- VIII международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 2009)
- X и XI международные семинары «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2010, 2012)

- 33^{rd} international symposium on mathematical foundations of computer science (Torun, 2008)
- 2^{nd} and 3^{rd} international conferences on network analysis (Nizhniy Novgorod, 2012, 2013)
- 35-ый одесский семинар по дискретной математике (Одесса, 2013)
- семинары кафедры математической кибернетики МГУ «Дискретный анализ» (руководитель А.А. Сапоженко)
- семинар кафедры математической кибернетики МГУ «Дискретная математика и математическая кибернетика» (руководители В.Б. Алексеев, А.А. Сапоженко, С.А. Ложкин)
- семинар Вычислительного Центра РАН по теории сложности вычислений (руководитель В.К. Леонтьев)
- общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (руководитель В.Н. Шевченко)
- семинар лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур (руководители В.А. Калягин, В.В. Чистяков)
- семинар НИИ ПМК при ННГУ (руководители Д.В. Баландин, Г.В. Осипов, Н.В. Дерендяев)
- семинар лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» (руководители В.Л. Дольников, В.А. Бондаренко)
- Объединенный семинар отдела теоретической кибернетики ИМ СО РАН (руководители Э.Х. Гимади, А.И. Ерзин)
- межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике (руководитель А.М. Райгородский)
- семинар нижегородского математического общества (руководитель Г.М. Полотовский)

- семинар кафедры математической кибернетики БГУ по теории графов и комбинаторному анализу (руководитель Р.И. Тышкевич)
- семинар института кибернетики им. В.М. Глушкова (руководитель П.И. Стецюк)

По теме диссертации опубликовано 23 работы из текущего списка ведущих рецензируемых изданий ВАК РФ. Они приведены в конце автореферата. Все публикации, кроме [11] и [17], в журналах, оригинальная или переводная версия которых включена как в базу цитирований Scopus, так и в базу цитирований MathSciNet; публикации [22] и [23] в журналах, включенных в базу цитирований Web of Science.

Исследования, оформленные в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 10-01-00357-а, 11-01-00107-а, 12-01-00749-а; грантами МинОбрНауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно–педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.» 16.740.11.0310 и 14.B37.21.0393; грантом Президента РФ МК-1148.2013.1; грантом НФ НИУ ВШЭ 12-01-0035; лабораторией алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ 11.G34.31.0057.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы, включающего 78 наименований. Общий объем диссертации составляет 175 страниц. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из двух частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая порядковому номеру внутри главы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследований и кратко излагаются основные результаты диссертации.

В **главе 1** приводится ряд определений, вводятся понятия граничного и минимального сложного классов графов, расширяются пределы применимости теоремы В.Е. Алексеева, доказываются условия граничности, а также устанавливается граничность некоторых классов для ряда задач на графах.

В **первом** и **втором** разделах приводятся используемые во всей работе понятия и обозначения, формулируются понятия граничного и минимального сложного классов графов.

Напомним, что *наследственным классом* называется множество графов, замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин. Известно, что любой такой класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{S}$, при этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$. Для любого наследственного класса $\mathcal{X}$ минимальное по включению множество $\mathcal{S}$ с данным свойством существует, единственно и обозначается через $Forb(\mathcal{X})$. Если $Forb(\mathcal{X})$ конечно, то $\mathcal{X}$ называется *конечно определенным.*

Пусть Π — произвольная NP-полная задача на графах. Наследственный класс называется Π-*простым*, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении всей работы предполагается, что $P \neq NP$ и это условие не включается явно в формулировки соответствующих утверждений. Например, такого: если задача Π является NP-полной в классе $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ является Π-сложным. Если несколько иначе определить понятие Π-сложного класса графов (как наследственного класса с NP-полной задачей Π), то подавляющее большинство утверждений диссертации (именно в представленной формулировке) также справедливы (а, значит, независимо от гипотезы $P \neq NP$). Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ Π-сложных классов графов, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным.*

Понятие граничного класса графов было введено В.Е. Алексеевым, им же было доказано следующее утверждение, показывающее значение этого понятия.

Теорема 1.1. *Конечно определенный класс является* Π-*сложным тогда* *и только тогда, когда в нем содержится какой-либо* Π-*граничный класс.*

Минимальные по включению Π-сложные классы и максимальные по включению Π-простые классы названы в диссертации *минимальными* Π-*сложными* и *максимальными* Π-*простыми* соответственно. Во втором разделе объясняется, почему ни для одной NP-полной задачи на графах нет максимальных простых случаев.

В **третьем** разделе диссертации расширяется множество «сложных» случаев по сравнению с конечно определенными классами, включающими граничные классы. Именно, показывается, каким образом при известной граничной системе для заданных наследственного класса $\mathcal{X}$ и числа k проверить существование класса $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ с не более чем k запрещенными фрагментами, который включает некоторый граничный класс.

В **четвертом** разделе доказывается следующий критерий граничности произвольного класса графов.

Теорема 1.3. Π-*предельный класс* $\mathcal{X}$ *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathcal{X}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathcal{S}_G \subseteq Forb(\mathcal{X})$, *что класс* $Free(\mathcal{S}_G \cup \{G\})$ *является* Π-*простым.*

В **пятом** разделе на основе общего критерия граничности формулируются достаточные условия граничности некоторых двух классов графов. Один из них — класс $\mathcal{T}$, состоящий из лесов, каждая компонента связности которых имеет не более трех листьев. Множество реберных графов к графам класса $\mathcal{T}$ обозначается через $\mathcal{D}$. В пятом разделе первой главы выявляются новые случаи граничности классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$. Например, там приводится континуальная совокупность задач на графах, для каждой из которых оба этих класса являются граничными одновременно (теорема 1.5). Там же приводятся случаи граничности некоторых производных от $\mathcal{T}$ классов графов. Результаты первой главы опубликованы в работах [2, 4, 23].

В **главе 2** вводится понятие относительного граничного класса, описываются относительные граничные системы для ряда случаев и исследуется факторизация семейства наследственных классов по отношению равенства относительных граничных систем.

В **первом** разделе вводится понятие относительного граничного класса, формулируемое следующим образом. Пусть $\mathcal{X}$ — какой-нибудь П-сложный класс. Наследственный класс графов $\mathcal{Y}$ называется П-*предельным относительно класса* $\mathcal{X}$, если существует такая последовательность $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ П-сложных подклассов класса $\mathcal{X}$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}$. Минимальный по включению П-предельный относительно $\mathcal{X}$ класс называется П-*граничным относительно* $\mathcal{X}$ *классом*. Значение понятия П-граничного класса относительно $\mathcal{X}$ состоит в том, что класс $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ — произвольное конечное множество графов, является П-сложным тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ включает какой-нибудь П-граничный относительно $\mathcal{X}$ класс. Через $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X})$ обозначается П-*граничная относительно* $\mathcal{X}$ *система*, т.е. множество П-граничных относительно $\mathcal{X}$ классов графов.

Во **втором** разделе рассматриваются некоторые задачи на графах. Одна из них — *задача о доминирующем множестве* (задача ДМ), состоящая в том, чтобы найти в заданном графе $G = (V, E)$ такое подмножество $V' \subseteq V$ минимальной мощности, что каждая вершина из $V \setminus V'$ смежна хотя бы с одной вершиной из V'. Другими задачами являются задачи о списковом ранжировании, постановки которых состоят в следующем.

Пусть заданы граф G с множеством вершин V и множество $\mathfrak{L} = \{L(v) : v \in V\}$, где каждое $L(v)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить вершину v). $\mathfrak{L}$-*ранжированием вершин* графа G называется такая раскраска c его вершин, что:

1) $c(v) \in L(v)$ для каждой вершины v,

2) если $c(v_1) = c(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, то каждый путь, соединяющий v_1 и v_2, содержит такую вершину v_3, что $c(v_3) > c(v_1)$.

Задача о вершинном списковом ранжировании (задача ВСР) состоит в том, чтобы по данным G и $\mathfrak{L}$ определить, существует ли $\mathfrak{L}$-ранжирование вершин графа G. Уточним, что под ВСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача ВСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом назначении $\mathfrak{L}$. Понятия $\mathfrak{L}$-ранжирования ребер графа, задачи о реберном списковом ранжировании (задачи РСР) вводятся по аналогии путем замены слова «вершина» на слово «ребро». Аналогично уточняется понятие РСР-простого класса.

Задачи о списковом ранжировании имеют приложения в параллельном вычислении разложения Холецкого[13], в проектировании СБИС[14], в параллельной обработке запроса к базе данных[15], в сборке изделия, состоящего из нескольких модулей[16].

Наследственным замыканием класса $\mathcal{X}$ (которое обозначается через $[\mathcal{X}]$) называется совокупность порожденных подграфов графов из $\mathcal{X}$. Для множества графов $\mathcal{X}$ через $Q(\mathcal{X})$ обозначается множество $\{G : \exists H \in \mathcal{X}, V(G) = V(H) \cup E(H)$ и $E(G) = \{(v_1, v_2) : \ v_1, v_2 \in V(H), v_1 \neq v_2\} \cup \{(v, e) : \ v \in V(H), e \in E(H),$ вершина v в графе H инцидента ребру $e\}\}$. Через $\mathcal{G}$ обозначается множество всех графов.

Во втором разделе доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Класс* $[Q(\mathcal{T})]$ *является единственным* ДМ-*граничным относительно* $[Q(\mathcal{G})]$.

Триодом $T_{i,j,k}$ $(i, j, k \geq 0)$ называется дерево, получаемое соединением одной вершины с тремя другими простыми путями длины i, j, k соответственно. Через S_i обозначается граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. Граф Com_i — результат отождествления вершины степени i графа $K_{1,i}$ с одним из концов пути P_i. Через $\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ обозначаются наследственные замыкания множеств $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{iT_{1,i,i}\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{S_i\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Com_i\}$ соответственно.

Теорема 2.8. ВСР-*граничная система относительно класса лесов со-*

[13]Liu J. The role of elimination trees in sparse factorization // SIAM J. Matrix Analysis and Appl. — 1990. — V. 11. — P. 134–172

[14]Leiserson C. Area-efficient graph layout (for VLSI) // Proc. 21st Ann IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. — 1980. — P. 270–281

[15]Makino K., Uno. Y, Ibaraki T. Minimum edge ranking spanning trees of threshold graphs // Lecture Notes in Computer Scince. — 2002. — V. 2518. — P. 428–440

[16]Dereniowski D. Edge ranking of weighted trees // Discrete Applied Mathematics. — 2006. — V. 154. — P. 1198–1209

стоит из классов $\mathcal{C}omet, \mathcal{S}tar$ *и* $\tilde{\mathcal{T}}$. *Они же образуют* PCP-*граничную систему относительно класса лесов.*

Во всех ранее известных результатах о полном описании относительных граничных систем утверждалось, что классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ одновременно образуют относительную граничную систему. Соответствующие доказательства следуют ходу рассуждений, намеченному Лозиным[11], поскольку одновременная относительная граничность $\mathcal{T}$ и $\mathcal{D}$ означает появление ряда «хороших» свойств. Теоремы 2.3 и 2.8 являются первыми результатами о полном описании относительных граничных систем, не вписывающимися в эту схему.

До результатов диссертации для относительных граничных систем рассматривались только вопросы полного их описания. В **третьем** разделе впервые рассматриваются вопросы более общего содержания. Там, например, рассматривается отношение равенства относительных граничных систем на множестве всех наследственных классов. Критерием принадлежности двух наследственных классов общему классу эквивалентности по этому отношению является следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Равенство* $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}) = \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого конечного множества графов* $\mathcal{S}$ *классы* $\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})$ *и* $\mathcal{Y} \cap Free(\mathcal{S})$ *либо одновременно* Π-*простые, либо одновременно* Π-*сложные.*

Удается обнаружить некоторые закономерности между $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}\mathcal{Y}), \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ и $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{X}), \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y})$.

Теорема 2.10. *Пусть* $\mathcal{X}$ *является конечно определенным классом. Тогда для любого наследственного класса* $\mathcal{Y}$ *справедливо равенство* $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$.

В диссертации показывается, что для произвольного наследственного класса $\mathcal{X}$ формула $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) = \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$ не верна. Приведены примеры, демонстрирующие, что возможны оба включения: $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}\cap\mathcal{X}) \supset \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$ и $\mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}\cap\mathcal{X}) \subset \{\mathcal{B} \in \mathscr{B}_{\Pi}(\mathcal{Y}) : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}\}$.

Поэтому, в общем случае существование функциональной связи между $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X})$ и $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}), \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y})$ маловероятно. Вместе с тем, граничная система относительно объединения двух наследственных классов выражается через граничные системы относительно этих наследственных классов при довольно слабых предположениях.

Лемма 2.9. *Если в классе графов $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ задача распознавания принадлежности графа хотя бы одному из наследственных классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ решается за полиномиальное время, то $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = < \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X}) \cup \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{Y}) >$.*

В третьем разделе приведены примеры, демонстрирующие, что относительный граничный класс не всегда является граничным и что минимальный сложный класс не всегда является граничным (теорема 2.12). Эти примеры довольно неожиданны, т.к. долгое время предполагалось обратное. Поэтому теория минимальных сложных классов не является лишь частью теории граничных классов.

Теорему 2.10 можно интерпретировать как возможность представления некоторых подмножеств множества $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ в виде других относительных П-граничных систем. Интересно было бы узнать, какие подмножества П-граничной системы относительно $\mathcal{X}$ представляются таким образом, а какие нет.

Теорема 2.14. *Если $|\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})| < \infty$, то для любого подмножества $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X})$ существует такое конечное множество графов $\mathcal{S}$, что $\mathscr{B}_\Pi(\mathcal{X} \cap Free(\mathcal{S})) = \mathscr{B}'$.*

В четвертой главе диссертации указываются конкретные задача на графах Π', класс графов $\mathcal{X}'$ и бесконечное подмножество $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{X}')$, что для любого наследственного класса $\mathcal{Y}$ множества $\mathscr{B}'$ и $\mathscr{B}_{\Pi'}(\mathcal{Y})$ не равны (лемма 4.9). Результаты главы 2 опубликованы в работах [9, 11, 17].

В **главе 3** рассматривается *задача о независимом множестве* (задача НМ), состоящая в том, чтобы найти в заданном графе множество попарно несмежных вершин наибольшей мощности. Там вводится понятие НМ-расширяющего оператора, выявляется несколько таких отображений, исследуются вопросы о полном описании НМ-граничных систем относительно класса планарных графов и относительно класса субкубических планарных графов.

Первый раздел начинается с формулировки некоторой гипотезы о структуре НМ-граничных классов графов, принадлежащей В.Е. Алексееву[3]. Им было доказано, что класс $\mathcal{T}$ является граничным для задачи НМ и выдвинуто предположение об его единственности, как НМ-граничного. В.Е. Алексеевым было также показано, что эта единственность эквивалентна тому, что для любого $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым. К настоящему времени это доказано лишь для нескольких случаев, наиболее важным из которых является $G = T_{1,1,2}$[17]. Вместе с тем, вот уже более 20 лет остается открытым сложностной статус задачи НМ в классе $Free(\{P_5\})$. Для связных графов G с не более чем пятью вершинами вычислительный статус задачи НМ в классе $Free(\{P_5, G\})$ не известен только для случаев $G = P_5$ и $G = C_5$[18].

Во **втором** разделе предлагается систематический способ генерации НМ-простых подмножеств множества $Free(\{P_5, C_5\})$, основанный на введенном в диссертации понятии НМ-расширяющего оператора. Отображение $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ (функция одного или многих аргументов — графов из $\mathcal{S}$) называется НМ-*расширяющим оператором*, если:

1. для любых значений аргументов f справедливо строгое включение $Free(\mathcal{S}) \subset Free(\mathcal{S}')$
2. для любых значений аргументов f справедлива импликация: если класс $Free(\mathcal{S})$ является НМ-простым, то и класс $Free(\mathcal{S}')$ тоже НМ-простой

Во втором разделе показано, что некоторые отображения являются НМ-расширяющими операторами. Именно, там доказано, что отображения $\{P_5, C_5, G\} \longrightarrow \{P_5, C_5, G \circ K_1\}$ и $\{P_5, C_5, G\} \longrightarrow \{P_5, C_5, G \circ O_2, G \oplus K_{1,p}\}$ являются НМ-расширяющими операторами (следствия из теорем 3.2 и 3.4).

[17] Алексеев В. Е. Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1999. — Т.6, №4. — С. 3–19

[18] Mosca R. Some observations on maximum weight stable sets in certain P // European Journal of Operational Research. — 2008. — V. 184, №3. — P. 849-859

Через $G_1 \oplus G_2$ обозначается граф $(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$, а через $G_1 \circ G_2$ граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$.

Если рассматривать какую-нибудь собственную наследственную часть множества всех графов, то можно надеяться хотя бы на более глубокое продвижение в исследовании проблемы единственности $\mathcal{T}$ (как относительного НМ-граничного), чем в общем случае. Эти надежды в той или иной степени действительно оправдываются.

Если класс $\mathcal{T}$ является НМ-граничным относительно какого-нибудь НМ-сложного класса $\mathcal{X}$, то его единственность эквивалентна тому, что для любого $G \in \mathcal{T}$ класс $\mathcal{X} \cap Free(\{G\})$ является НМ-простым. В работе[19] фактически рассматривался случай $\mathcal{X} = \mathcal{D}eg(d)$ (где $\mathcal{D}eg(d)$ — множество графов со степенями всех вершин не более чем d) и было показано, что для любых фиксированных d, i класс $\mathcal{D}eg(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым.

В **третьем** разделе рассматривается случай $\mathcal{X} = \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ — класс планарных графов) и показывается, что для любого фиксированного i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым (следствие из теоремы 3.5).

Все попытки получить результат с $T_{2,2,2}$ как относительно $\mathcal{D}eg(d)$, так и относительно $\mathcal{P}$ оканчивались неудачей. Поэтому было предложено рассматривать класс субкубических планарных графов $\mathcal{P}(3) = \mathcal{D}eg(3) \cap \mathcal{P}$, где можно было надеяться на получение такого результата. Данная идея возникла в 2008 г., но тогда никаких даже минимальных продвижений получить не удалось и эта инициатива сошла на нет. Автор вернулся к этому вопросу в 2011 г., тогда удалось соответствующий результат. Он (теорема 3.9) является основным в **четвертом** разделе.

Теорема 3.9. *При любом фиксированном i задача* НМ *для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально разрешима.*

Результаты главы 3 опубликованы в работах [1, 13, 14, 18, 19, 21].

Глава 4 диссертации посвящена некоторым вопросам количественной

[19]Lozin V. V., Millanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of the ACM-SIAM symposium on descrete algorithms (New Orleans, 2007). — P. 874–880

теории граничных классов и смежным с ними. Важнейшими ее результатами являются утверждения о континуальности граничных систем для ряда задач на графах.

Первый раздел посвящен мотивации обращения к количественной теории граничных классов и перечислению полученных в пятой главе результатов. В пятой главе рассматриваются задачи о k-раскраске и о хроматическом числе и индексе. Приведем постановки этих задач. *Хроматическое число* $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, для которого можно так покрасить (*правильным образом*) вершины G, что любые две его соседние вершины покрашены в разные цвета. В *задаче о вершинной k-раскраске* требуется определить, верно ли, что хроматическое число задаваемого графа G не больше, чем фиксированное число k. Формулировка задачи о реберной k-раскраске аналогична постановке задачи о вершинной k-раскраске (только в ней фигурирует *хроматический индекс* — минимальное количество цветов, необходимое для правильного окрашивания ребер графа). Задачи о хроматическом числе и индексе — «предельные» варианты задач о k-раскраске. В *задаче о хроматическом числе* (соответственно, *хроматическом индексе*) необходимо найти хроматическое число (соответственно, индекс) заданного графа.

Второй раздел посвящен конструктивному доказательству континуальности граничных систем для вершинного и реберного вариантов задачи о 3-раскраске (теорема 4.1). Тем самым, доказано предположение о существовании задач на графах с бесконечным множеством граничных классов[7].

В **третьем** разделе доказывается одно свойство некоторых подмножеств граничной системы для задачи о реберной 3-раскраске (лемма 4.9).

В **четвертом** разделе доказывается (частично конструктивно), что для любого $k \geq 3$ граничные системы для вершинного и реберного вариантов задачи о k-раскраске являются континуальными (теоремы 4.2 и 4.3). Теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 наталкивают на мысль о том, что граничные системы для задач о k-раскраске слишком сложно устроены и поэтому попытки дать их полные описания, по-видимому, заведомо обречены на неудачу.

В **пятом** разделе исследуются общие черты и особенности строения граничных систем для задач о k-раскраске и для задач о хроматическом числе и индексе. Оказалось, что все граничные классы для задачи о реберной 3-раскраске являются граничными для задачи о хроматическом индексе (теорема 4.4). По теореме 4.5 при любом $k > 3$ существует континуум граничных классов для задачи о реберной k-раскраске (соответственно, для задачи о вершинной k-раскраске), каждый из которых не является граничным для задачи о хроматическом индексе (соответственно, для задачи о хроматическом числе). Граничная система для задачи о хроматическом числе не определяется граничными системами для задач о вершинной k-раскраске. Именно, класс $co(\mathcal{D}) = \{G : \overline{G} \in \mathcal{D}\}$ является граничным для задачи о хроматическом числе, но не является граничным для задачи о вершинной k-раскраске ни при каком k (теорема 4.6). Результаты главы 4 опубликованы в $[3, 5, 7, 12, 15, 22]$.

Глава 5 посвящена, в основном, успешной демонстрации метода «критического» класса графов — полной характеризации классов графов из некоторого достаточно представительного семейства по сложности задачи PCP.

В **первом** разделе описываются основные полученные в пятой главе результаты.

Во **втором** разделе доказывается, что некоторые классы графов являются PCP-граничными и минимальными PCP-сложными.

Обозначим через $Comb_i$ граф, получающийся добавлением к $K_{2,i}$ ребра, инцидентного обеим вершинам степени i. Граф Cam_i — граф, получаемый соединением ребрами вершины степени i графа S_i со всеми его листьями. Через $\mathcal{B}at, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$ обозначаются наследственные замыкания множеств $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{K_{2,i}\}, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comb_i\}, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Cam_i\}$ соответственно. Класс $\mathcal{C}lique$ — множество полных графов. В первом параграфе второго раздела доказывается следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Класс $\mathcal{B}at$ является минимальным* PCP-*сложным.*

Во втором параграфе второго раздела описывается некоторое полиномиальное сведение, которое оказывается весьма полезным для построения новых PCP-сложных случаев. Для его формулировки приведем несколько определений.

Граф H называется *минором* графа G, если H получается стягиванием ребер некоторого подграфа графа G. Класс графов, замкнутый относительно перехода к минорам его графов, называется *минорно замкнутым.*

Класс графов $\mathcal{X}$ будем называть *минором класса* $\mathcal{Y}$, если для любого графа $H \in \mathcal{X}$ существует такой граф $G \in \mathcal{Y}$, что H — минор графа G. Эффективным аналогом понятия минора класса графов является понятие сильного минора класса графов. Класс $\mathcal{X}$ будем называть *сильным минором класса* $\mathcal{Y}$, если существует полиномиальный алгоритм, который по произвольному графу $H \in \mathcal{X}$ вычисляет граф $G \in \mathcal{Y}$ и последовательность действий над ним, состоящую из серии удалений вершин и ребер, а затем из серии стягиваний ребер, выполнение которой приводит к графу H.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс графов, для которого задача* PCP *не является полиномиально разрешимой. Тогда таким свойством обладает любой класс, для которого $\mathcal{X}$ является сильным минором.*

При помощи теорем 5.1 и 5.2 нетрудно показать справедливость теоремы 5.3.

Теорема 5.3. *Классы $\mathcal{C}omb, \mathcal{C}amotile$ и $\mathcal{C}lique$ являются минимальными* PCP*-сложными.*

По аналогии с доказательством теоремы 2.6 показывается, что классы $\mathcal{B}at, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amotile$ и $\mathcal{C}lique$ являются PCP-граничными.

В **третьем** разделе описываются три класса графов и утверждается, что по аналогии с доказательством PCP-граничности класса $\tilde{\mathcal{T}}$ можно доказать граничность каждого из них для задачи PCP. По строению своих графов каждый из этих трех классов близок к классу $\tilde{\mathcal{T}}$. Поэтому приведем определения всех четырех классов (включая класс $\tilde{\mathcal{T}}$) с единых позиций.

Аддитивным замыканием класса $\mathcal{X}$ называется множество всевозможных графов, каждая компонента связности которых принадлежит $\mathcal{X}$.

1. $\tilde{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребра, инцидентного добавленной вершине и некоторой вершине пути

2. $\tilde{\mathcal{D}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум последовательным вершинам пути

3. $\hat{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум вершинам пути, отстоящим в пути друг от друга на расстоянии 2

4. $\hat{\mathcal{D}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества всевозможных графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и трем последовательным вершинам пути

В **четвертом** разделе получены полная классификация классов графов из некоторого семейства по вычислительной сложности задачи PCP и ряд следствий из нее.

Определим семейство $\mathscr{M}$ классов графов следующим образом. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ принадлежит $\mathscr{M}$, если выполняется одно из условий:

- ни один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ не является минором $\mathcal{X}$
- если хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является минором $\mathcal{X}$, то хотя бы один из них является и сильным минором $\mathcal{X}$.

Семейство $\mathscr{M}$ является достаточно представительным. Так, каждый минорно замкнутый класс принадлежит $\mathscr{M}$ (что прямо следует из определения) и каждый конечно определенный класс ему тоже принадлежит (лемма 5.8). Критерий эффективной разрешимости задачи РСР в семействе $\mathscr{M}$ сформулирован далее.

Теорема 5.4. *Задача* РСР *является полиномиально разрешимой для класса* $\mathcal{X} \in \mathscr{M}$ *тогда и только тогда, когда ни один из классов* $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ *не является минором* $\mathcal{X}$.

При помощи этого критерия показывается, что РСР-граничную систему образуют ровно 10 конкретных классов графов.

Теорема 5.5. РСР-*граничная система совпадает с* $\{\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{D}}\}$.

Теорема 5.5 — первый пример полного описания граничных систем для задач на графах (со времен первой публикации[4] по граничным классам).

На настоящее время не известно, каким образом устроено множество минимальных РСР-сложных классов. При помощи теорем 5.4 и 5.5 нетрудно перечислить все конечно определенные минимальные РСР-сложные классы и все минорно замкнутые минимальные РСР-сложные классы.

Теорема 5.6. *Существует ровно* 5 *конечно определенных минимальных* РСР-*сложных классов. Это* $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}lique, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile$. *Единственным минорно замкнутым минимальным* РСР-*сложным классом является класс* $\mathcal{C}omet$.

Результаты, полученные в главе 5, опубликованы в [8,10,20].

В **главе 6** для семейства наследственных классов исследуются элементы границы между П-простыми и П-сложными классами для некоторых задач П. Там, например, для некоторых задач на графах впервые приводятся полные описания совокупностей минимальных сложных классов.

В **первом** разделе рассматривается задача распознавания принадлежности графа классу $\mathcal{X}$ (обозначаемая через РП$[\mathcal{X}]$) и доказывается следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Если* $\mathcal{X}$ *— наследственный класс графов, то любой*

РП$[\mathcal{X}]$-*сложный класс не является минимальным.*

В первом разделе приведены конкретные примеры NP-полных задач распознавания принадлежности графа наследственному классу.

Во **втором** разделе главы 6 доказывается некоторое условие существования минимальных сложных классов графов. Напомним, что множество называется *вполне упорядоченным* по отношению порядка, если оно не содержит бесконечных убывающих цепей и бесконечных антицепей.

Теорема 6.2. *Если* $\mathcal{X}$ *является* П-*сложным классом и* $\mathcal{X}$ *является вполне упорядоченным множеством по отношению* $R_* =$ *«быть порожденным подграфом», то* $\mathcal{X}$ *содержит некоторый минимальный* П-*сложный подкласс.*

Во втором разделе показывается, что теорема 6.2 необходимым условием минимальной П-сложности не является.

Во втором разделе рассматриваются задачи на графах, для каждой из которых удается полностью описать все множество минимальных сложных классов. Данные задачи образуют последовательность, постановка k-ого члена (обозначаемого через Π_k) которой состоит в следующем. В задаче Π_k заданы граф G и отображение $c : E(G) \longrightarrow \{-1, +1\}$. Требуется найти такой подграф H графа G, что H имеет правильную 3-раскраску вершин и величина $w(H)$ является максимально возможной. Значение $w(H)$ определяется следующим образом: $w(H) = 0$, если размер наибольшего независимого множества G равен k, и $w(H) = \sum\limits_{e \in E(H)} c(e)$ в противном случае. Уточним, что под Π_k-*простым* понимается наследственный класс графов, для которого данная задача полиномиально разрешима для любой функции c.

Для любого натурального k определим семейство классов графов $\mathscr{X}(k) = \{\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^*, \ldots, \mathcal{X}_k^*\}$. Для любого $1 \leq i \leq k$ через $\mathcal{X}_i^*$ обозначается наследственное замыкание множества графов $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{\overline{K_i \oplus \overline{K_j} \oplus \overline{K_{k-i}}}\}$ (где $\overline{K_k \oplus \overline{K_j} \oplus \overline{K_0}}$ считается равным $\overline{K_k \oplus \overline{K_j}}$).

Теорема 6.3. *Все множество минимальных* Π_k*-сложных классов совпадает с множеством* $\mathscr{X}(k)$.

Задачи $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ — первые примеры задач на графах, для которых удается полностью описать совокупность минимальных сложных классов.

Третий раздел главы 6 посвящен исследованию связей между понятиями граничного и минимального сложного классов графов. Там сформулированы критерии о том, когда П-граничный класс является минимальным П-сложным (теорема 6.4) и когда минимальный П-сложный класс является П-граничным (теорема 6.5). Конечно определенный класс является П-граничным тогда и только тогда, когда он является минимальным П-сложным (лемма 6.4). Минимальный П-сложный класс не всегда является П-граничным (по теореме 2.12). Результаты главы 6 опубликованы в работах [6, 16].

ПУБЛИКАЦИИ

[1]. Алексеев В.Е., **Малышев Д.С.** Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2008. — Т. 15, №1. — С. 3–10 (Имеется перевод: Alekseev V.E., **Malyshev D.S.** Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time // **Journal of Applied and Industrial Mathematics**. — 2009. — V. 3, №1. — P. 1–4).

[2]. Алексеев В.Е., **Малышев Д.С.** Критерий граничности и его применения // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2008. — Т. 15, №6. — С. 3–10.

[3]. **Малышев Д.С**. О бесконечности множества граничных классов графов в задаче о реберной 3-раскраске // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2009. — Т. 16, №1. — С. 37–43 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** On the infinity of the set of boundary classes for the edge 3-colorability problem // **Journal of Applied and Industrial Mathematics**. — 2010. — V. 4, №2. — P. 213–217).

[4]. **Малышев Д.С.** Граничные классы графов для некоторых задач распознавания // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2009. — Т. 16, №2. — С. 85–94.

[5]. **Малышев Д.С.** Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // **Дискретный анализ и исследование операций.** — 2009. — Т. 16, №5. — С. 41–51.

[6]. **Малышев Д.С.** О минимальных сложных классах графов // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2009. — Т. 16, №6. — С. 43–51.

[7]. **Малышев Д.С.** О количестве граничных классов графов в задаче о 3-раскраске // **Дискретная математика**. — 2009. — Т. 21, №4. — С. 129–134 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** On the number of boundary classes in the 3-colouring problem // **Discrete Mathematics and Applications**. — 2010. — V. 19, №6. — P. 625–630).

[8]. **Малышев Д.С.** Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2011. — Т. 18, №1. — С. 70–76.

[9]. **Малышев Д.С.**, Алексеев В.Е. Граничные классы для задач о списковом ранжировании относительно лесов // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2011. — Т. 18, №6. — С. 61–70.

[10]. **Малышев Д.С.** Анализ сложности задачи о реберном списковом ранжировании для наследственных классов графов с не более чем тремя запретами // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2012. — Т. 19, №1. — С. 74–96.

[11]. **Малышев Д.С.** О связи понятий граничного и минимального сложного классов графов // **Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского**. — 2012. — №2. — С. 149–151.

[12]. **Малышев Д.С.** О пересечении и симметрической разности семейств граничных классов графов для задач о раскраске и о хроматическом

числе // **Дискретная математика**. — 2012. — Т. 24, №2. — С. 75–78 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** On intersection and symmetric difference of families of boundary classes in the problems on colouring and on the chromatic number // **Discrete Mathematics and Applications**. — 2011. — V. 21, №5–6. — P. 645–649).

[13]. **Малышев Д.С.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в классе графов без порожденных простых пути и цикла с пятью вершинами и большой клики // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2012. — Т. 19, №3. — С. 58–64.

[14]. **Малышев Д.С.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для одного класса графов малого диаметра // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2012. — Т. 19, №4. — С. 66–72.

[15]. **Малышев Д.С.** Исследование граничных классов графов для задач о раскраске // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2012. — Т. 19, №6. — С. 37–48 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** A study of the boundary graph classes for colorability problems // **Journal of Applied and Industrial Mathematics**. — 2010. — V. 7, №2. — P. 221–228).

[16]. **Малышев Д.С.** Экстремальные множества графов при решении задачи демаркации в семействе наследственно замкнутых классов графов // **Дискретная математика**. — 2012. — Т. 24, №4. — С. 91–103 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** Extremal sets of graphs in the problem of demarcation in the family of hereditary closed classes of graphs // **Discrete Mathematics and Applications**. — 2012. — V. 22, №5–6. — P. 595–608).

[17]. **Малышев Д.С.** Относительные граничные классы и факторизация семества наследственных классов графов // **Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского**. — 2013. — №3. — С. 181–187.

[18]. **Малышев Д.С.** Расширяющие операторы для задачи о независимом множестве // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2013. — Т. 20, №2. — С. 75–87 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** Expanding

operators for the independent set problem // **Journal of Applied and Industrial Mathematics**. — 2013. — V. 7, №3. — P. 412–419)

[19]. **Малышев Д.С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2013. — Т. 20, №3. — С. 26–44 (Имеется перевод: **Malyshev D.S.** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable // **Journal of Applied and Industrial Mathematics**. — 2013. — V. 7, №4. — P. 475–489).

[20]. **Малышев Д.С.** Критические классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // **Дискретный анализ и исследование операций**. — 2013. — Т. 20, №6. — С. 59–76.

[21]. Alekseev V.E., Lozin V.V., **Malyshev D.S.**, Milanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // **Lecture Notes in Computer Science**. — 2008. — V. 5162, №4. — P. 96–107.

[22]. Korpelainen N., Lozin V.V., **Malyshev D.S.**, Tiskin A. Boundary properties of graphs and algorithmic graph problems // **Theoretical Computer Science.** — 2011. — V. 412. — P. 3545–3554.

[23]. **Malyshev D.S.** Boundary graph classes for some maximum induced subgraph problems // **Journal of Combinatorial Optimization.** — 2013. — V. 7, №2. — P. 345–354.