

На правах рукописи

Черток Андрей Викторович

Моделирование потоков заявок
на финансовых рынках с помощью
обобщенных процессов риска

Специальность 01.01.05 —
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Королев Виктор Юрьевич

Официальные оппоненты: **Леонидов Андрей Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
ведущий научный сотрудник

Коссова Елена Владимировна,
кандидат физико-математических наук,
Национальный исследовательский университет
«Высшая Школа Экономики»,
доцент

Ведущая организация: Институт прикладных математических исследований Карельского Научного Центра РАН

Защита состоится 26 июня 2015 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня до указанной даты по тел. (495) 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ им. М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе «Наука» - «Работа диссертационных советов» - «Д 501.001.44».

Автореферат разослан мая 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент

О.В. Шестаков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Распространение высокочастотных данных о транзакциях, котировках и потоках заявок на электронных рынках привело к кардинальному изменению способов обработки данных и техник статистического моделирования процессов, происходящих на финансовых рынках. Динамика рынка на уровне транзакций не может быть описана только в терминах динамики только цены в ее классическом понимании, также нужно принимать во внимание взаимодействие между заявками разных типов, приходящими от покупателей и продавцов. Единственная возможность воспроизводить такое взаимодействие - это моделирование потоков заявок, приходящих на различные уровни так называемой книги заявок.

В последние годы автоматическая (электронная) торговля в значительной степени заменила так называемую торговлю «в яме» на рынке акций. Electronic Communication Network (ECN), такие как Achipelago, Instinet, Brut и Tradebook - электронные системы осуществления сделок купли-продажи биржевых товаров захватили большую долю рынка. В отличие от рынков, где маркет-мейкер или специалист централизованно собирает все заявки на покупку и продажу и представляет ликвидность, устанавливая собственные котировки на покупку и продажу, эти электронные платформы агрегируют все активные заявки на покупку и продажу в книгу заявок и эти заявки становятся доступными всем участникам рынка. В такой системе рыночные заявки мгновенно исполняются по лучшим ценам, представленным в книге заявок в автоматическом режиме. По мере развития ECN-площадок фондовые рынки, такие как NYSE, Nasdaq, Tokyo Stock Exchange, Toronto Stock Exchange, Vancouver Stock Exchange, Euronext (Paris, Amsterdam, Brussels), London Stock Exchange и Moscow Exchange полностью или частично перешли на электронную систему торгов.

В то же самое время частота прихода заявок очень сильно возросла и время исполнения рыночных заявок на таких электронных рынках снизилось с 25 миллисекунд в 2000 г. до 300 микросекунд в 2014, за короткие интервалы

времени по каждому из инструментов приходят тысячи заявок, в результате чего лучшие котировки этих инструментов обновляются сотни тысяч раз в день, также как и цены сделок. В результате такого развития информация об эволюции спроса и предложения, а также цены на рынках акций стала записываться в огромных количествах: эти данные доступны участникам рынка в режиме реального времени, а исследователям - в виде высокочастотных баз данных. Анализ такого рода данных представляется огромным вызовом не только из-за их большого объема и сложной структуры. Эти данные дают нам возможность получить более детальное представление о сложной динамике процессов, отвечающих за ценообразование^{1,2}.

Большие объемы имеющихся данных, наличие статистических закономерностей в данных и механическая природа процесса исполнения заявок делает электронной рынок интересным объектом для статистического анализа и стохастического моделирования.

На фундаментальном уровне статистический анализ и моделирование высокочастотных данных могут дать представление о взаимосвязях между потоками заявок, ликвидностью и динамикой цен^{3,4,5}, что может заполнить пробел между работами в области анализа рыночной микроструктуры^{6,7,8,9,10,11}, которые сосредоточены на моделях, описывающих механизмы образования цены в моделях равновесия, и стохастическими моделями типа «черный ящик», используемыми в финансовом риск-менеджменте, которые

¹*J.-P. Bouchaud, D. Farmer, and F. Lillo* How markets slowly digest changes in supply and demand, in *Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution*, T. Hens and K. Schenk-Hoppe, eds., Elsevier:Academic Press, 2008.

²*J. Hasbrouck*. Empirical Market Microstructure. – Oxford University Press, 2007.

³*J.-P. Bouchaud, M. Mezard, and M. Potters* Statistical properties of stock order books: empirical results and models, *Quantitative Finance*, 2 (2002), pp. 251–256.

⁴*Smith E., Farmer J. D., Gillemot L., and Krishnamurthy S.*, Statistical theory of the continuous double auction, *Quantitative Finance*, 3 (2003), pp. 481–514.

⁵*Farmer J. D., Gillemot L., Lillo F., Mike S., and Sen A.*, What really causes large price changes? // *Quantitative Finance*, 4 (2004), pp. 383–397.

⁶*Biais B., Glosten L., and Spatt C.*, Market microstructure: A survey of microfoundations, empirical results and policy implications, *Journal of Financial Markets*, 8 (2005), pp. 217–264.

⁷*Parlour Ch. A.* Price dynamics in limit order markets // *Review of Financial Studies*, 1998. Vol. 11. No. 4. P. 789–816.

⁸*Foucault T., Kadan O., and Kandel E.*, Limit order book as a market for liquidity // *Review of Financial Studies*, 18 (2005), pp. 1171–1217.

⁹*L. Glosten*, Is the limit order book inevitable? // *Journal of Finance*, 49 (1994), pp. 1127–1161.

¹⁰*Kyle, A. S.* 1985. Continuous Auctions and Insider Trading // *Econometrica*, 53: 1315–1335.

¹¹*Rosu I.* A dynamic model of the limit order book // *Rev. Financial Stud.*, 2009. Vol. 22. P. 4601–4641.

представляют цену как экзогенный случайный процесс. На уровне приложений модели высокочастотных данных дают количественные инструменты для маркет-мейкинга ¹² и алгоритмов оптимального исполнения больших заявок ^{13,14,15}. Другое очевидное приложение - это разработка статистических моделей для прогнозирования краткосрочного поведения рыночных переменных, таких как цена, торговый объем и потоки заявок.

Исследование высокочастотной динамики рынков также является важным для риск-менеджмента и финансового регулирования. Даже при том, что горизонты, традиционно рассматриваемые риск-менеджерами и регуляторами, больше (как правило, дневные и более), торговые стратегии на разных частотах могут взаимодействовать довольно сложным способом, что приводит к возмущениям на разных временных масштабах - от высокочастотных до менее частотных, что может даже привести к рыночным сбоям, таким как Flash Crash 2010 ^{16,17}.

Микроструктурные модели динамики книги заявок являются сейчас популярной темой для применения стохастических моделей ^{18,19,20,21,22}. В работе Конта и коллег ²³ предложена непрерывная марковская модель для описания динамики книги заявок. В этой работе книга заявок рассматривается как специальная система массового обслуживания, в которой приходы заявок

¹²*M. Avellaneda and Stoikov S.*, High-frequency trading in a limit order book // *Quantitative Finance*, 8 (2008), pp. 217–224.

¹³*Almgren R. and Chriss N.* Optimal execution of portfolio transactions, *Journal of Risk*, 3 (2000), pp. 5–39.

¹⁴*Bertsimas D. and Lo A.*, Optimal control of execution costs, *Journal of Financial Markets*, 1 (1998), pp. 1–50.

¹⁵*Obizhaeva A. and Wang J.*, Optimal trading strategy and supply/demand dynamics, working paper, MIT, 2006.

¹⁶*CFTC and SEC* Findings regarding the market events of May 6, 2010 // Report to the joint advisory committee on emerging regulatory issues, CFTC, 2010.

¹⁷*Kirilenko A., Kyle A., Samadi M., and Tuzun T.*, The flash crash: The impact of high frequency trading on an electronic market // Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1686004>, 2010.

¹⁸*Parlour Ch. A.* Price dynamics in limit order markets // *Review of Financial Studies*, 1998. Vol. 11. No. 4. P. 789–816.

¹⁹*Foucault T.* Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market // *Journal of Financial Markets*, 1999. Vol. 2. P. 99–134.

²⁰*Goettler R., Parlour C., Rajan U.* Equilibrium in a dynamic limit order market // *Journal of Finance*, 2005, **60** 2149–2192.

²¹*M. Avellaneda and Stoikov S.*, High-frequency trading in a limit order book // *Quantitative Finance*, 8 (2008), pp. 217–224.

²²*Rosu I.* A dynamic model of the limit order book // *Rev. Financial Stud.*, 2009. Vol. 22. P. 4601–4641.

²³*Cont R., Stoikov S., Talreja R.* A stochastic model for order book dynamics // *Operations Research*, 2010. Vol. 58. No. 3. P. 549–563.

и отмены существующих заявок единичных объемов моделируются независимыми пуассоновскими процессами. Такой тип систем массового обслуживания может быть описан в терминах процессов гибели-размножения, чьи состояния есть количество акций на данном ценовом уровне, операция рождения соответствует приходу новой лимитной заявки, а гибель - отмена лимитной заявки либо же ее сведение в сделку. Процессы гибели-размножения являются хорошо изученными статистическими моделями, которые могут быть рассмотрены как специальные примеры более общих *двухсторонних процессов риска*, известных в теории страхования как *процессы риска со случайными премиями*. При этом соответствующая математическая модель имеет некоторые формальные предположения. С одной стороны, эти предположения дают возможность представить аналитические выражения для некоторых характеристик, связанных с динамикой книги заявок. С другой стороны, эти предположения являются необходимыми для того, чтобы соответствующая модель имела прикладную значимость. Тем не менее, они имеют существенные ограничения и нереалистичны с практической точки зрения. Следовательно, необходимо иметь очевидную интегральную характеристику текущего состояния книги заявок, которая могла бы быть вычислена и изучена без привлечения аппарата систем массового обслуживания.

Такая характеристика - *процесс дисбаланса потоков заявок OFI* - была рассмотрена в 2011 году в работе ²⁴, финальная версия которой ²⁵ была опубликована в 2014 году. Тот же самый процесс независимо был введен и изучался в ^{26,27,28} под названием *обобщенный процесс цены*. Процесс OFI использует всю доступную информацию о постановке, снятии *всех* заявок, а

²⁴Cont R., Kukanov A. and Stoikov S. The price impact of order book events // March 01, 2011. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1712822>

²⁵Cont R., Kukanov A. and Stoikov S. The price impact of order book events // Journal of Financial Econometrics 12(1), pp. 47-88.

²⁶Gorshenin A., Doynikov A., Korolev V., Kuzmin V. Statistical properties of the dynamics of order books: empirical results // Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems: Abstracts of VI International Workshop. – Moscow.: IPI RAS, 2012. P. 31–51.

²⁷Korolev V. Yu., Chertok A. V., Korchagin A. Yu., Gorshenin A. K. Probabilistic and statistical modeling of information flows in complex financial systems from high-frequency data // Informatics and Its Applications, 2013. Vol. 7. No. 1. P. 12–21.

²⁸A. Chertok, V. Korolev, A. Korchagin and S. Shorgin. Modeling High-Frequency Non-Homogeneous Order Flows by Compound Cox Processes // Available at: arXiv:1410.1900v2 [math.PR], 2014.

также информацию о сделках, поэтому является более чувствительным к рыночной информации, чем сам процесс цены в ее классическом понимании.

В рамках подхода, развитого в данной работе, лежит идея о том, что моменты событий прихода заявок являются точечным случайным процессом *хаоса* на временной оси. Более того, предполагается, что этот точечный процесс является нестационарным (неоднородным по времени), поскольку изменения книги заявок в значительной степени подвержены влиянию нестационарных информационных потоков. Как известно, большинство разумных вероятностных моделей нестационарных (неоднородных по времени) хаотических процессов являются *дважды стохастическими процессами Пуассона*, также называемых *процессами Кокса* ^{29,30}. Эти процессы определяются как пуассоновские процессы со случайными интенсивностями. Обычные процессы Пуассона можно рассматривать как наилучшие модели для стационарных (однородных по времени) хаотических потоков событий. Заметим, что привлекательность процессов Пуассона как моделей однородного дискретного случайного хаоса обусловлена как минимум двумя причинами. Во-первых, процессы Пуассона являются точечными процессами, такими, что интервалы времени между последовательными событиями являются независимыми случайными величинами с одним и тем же экспоненциальным распределением, а как известно, экспоненциальное распределение обладает максимальной дифференциальной энтропией среди всех абсолютно непрерывных распределений с конечным первым моментом, определенных на неотрицательной полуоси, в то время как энтропия является естественной и удобной мерой неопределенности. Во-вторых, точки, образующие пуассоновский процесс, равномерно распределены вдоль оси времени в том смысле, что для любого конечного временного интервала $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, условное совместное распределение точек пуассоновского процесса, попадающих в интервал $[t_1, t_2]$ при условии, что число таких точек является фиксированным и составляет, скажем, n , совпадает с совместным распределением порядковых статистик, построенных из неза-

²⁹Grandell J. Doubly Stochastic Poisson Processes. Lecture Notes Mathematics, Vol. 529. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976.

³⁰Bening V., Korolev V. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. – Utrecht, VSP, 2002.

висимых выборок размера n из однородного распределения на отрезке $[t_1, t_2]$, в то время как равномерное распределение обладает максимальной дифференциальной энтропией среди всех абсолютно непрерывных распределений, сосредоточенных на конечных интервалах, и очень хорошо соответствует традиционному представлению абсолютно непредсказуемой случайной величины^{31,32}.

Финансовые рынки представляют собой примеры сложных открытых стохастических информационных систем, в которых можно выделить два основных источника случайности: внутренний и внешний. Внутренний источник случайности порождает неопределенность, обусловленную различием стратегий очень большого числа участников рынка. Физическим аналогом такой случайности может служить хаотическое тепловое движение частиц в замкнутых системах. Внешний источник случайности – это плохо поддающийся более или менее полному прогнозированию поток новостей политического и экономического характера (в том числе потоки информации с внешних рынков и инструментов), в соответствии с которыми изменяются интересы и стратегии участников рынка. Эти два источника случайности будут учитываться при построении процесса дисбаланса потока заявок и процесса количества заявок как двухсторонних процессов риска, управляемых процессом Кокса, то есть процесса Пуассона со случайной интенсивностью.

Как известно, эмпирические (статистические) распределения приращений (логарифмов) финансовых активов на сравнительно коротких временных интервалах являются распределениями с тяжелыми хвостами с вершиной заметно острее (то есть с более высоким показателем коэффициента эксцесса), чем у нормальных распределений (островершинные распределения). В то же время, как было указано в некоторых исследованиях, финансовые данные обладают свойством фрактальности, то есть, обладают свойством самоподобия на различных временных горизонтах³³.

³¹*Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.*

³²*Bening V., Korolev V. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. – Utrecht, VSP, 2002.*

³³*Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. – Berlin–Heidelberg:*

Устойчивые процессы Леви были одними из первых моделей, успешно примененных на практике для объяснения свойства островершинности конечномерных распределений наблюдаемых процессов на финансовых рынках, ровно как и свойства их самоподобия. В соответствии с подходом, основанным на классических предельных теоремах теории вероятностей, отличные от нормальных устойчивые процессы Леви могут быть получены как предельные в функциональных предельных теоремах для случайных блужданий только если элементарные скачки этих блужданий обладают бесконечными дисперсиями. В ³⁴ были доказаны некоторые функциональные предельные теоремы диффузионного типа для динамики книги заявок на ликвидных рынках и было отдельно отмечено, что подход, используемый в статье имеет место только тогда, когда размеры заявок обладают бесконечными дисперсиями. В свою очередь, последнее возможно только тогда, когда вероятности прихода заявок со сколь угодно большими объемами являются строго положительными. К сожалению, последнее условие представляется трудно выполнимым с практической точки зрения. Таким образом, в рамках классического подхода ^{35,36} использование устойчивых процессов Леви как адекватных моделей для описания динамики цен финансовых индексов представляется по крайней мере сомнительным.

В финансовой математике эволюция (логарифмов) цен акций и финансовых индексов на малых временных горизонтах часто моделируются случайными блужданиями. Самый простой пример такого подхода - это модель Кокса-Росса-Рубинштейна ³⁷. В то же самое время, наиболее успешные (адекватные) модели динамики (логарифмов) финансовых индексов на больших временных горизонтах являются подчиненными винеровскими процесса-

Springer, 1997.

³⁴Cont R., de Larrard A. Order book dynamics in liquid markets: limit theorems and diffusion approximations // Working paper. Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires CNRS, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) August 2011. Revised February 2012 (hal-00672274, version 2 – 1 October 2012).

³⁵Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1997.

³⁶Cont R., de Larrard A. Order book dynamics in liquid markets: limit theorems and diffusion approximations // Working paper. Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires CNRS, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) August 2011. Revised February 2012 (hal-00672274, version 2 – 1 October 2012).

³⁷Shiryayev A. N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – Singapore: World Scientific. 1999.

ми (процессами броуновского движения со случайным временем), такие как обобщенные гиперболические процессы, в частности, variance-gamma (VG) процессы и нормальные обратные гауссовские процессы (NIG) ³⁸. Подчиненным винеровским процессам соответствуют конечномерные распределения, обладающие свойствами, упомянутыми выше: тяжелые хвосты и островершинность.

В некоторых работах тяжелые хвосты эмпирических распределений цен индексов были объяснены с использованием предельных теорем для сумм со *случайным числом* независимых случайных величин как частного случая случайных блужданий со случайными моментами остановки (randomly stopped random walks) ^{39,40,41}.

При рассмотрении случайных блужданий схема случайного суммирования является естественным аналогом схемы подчинения более общих случайных процессов. В ^{42,43,44} была предложена модель эволюции неоднородных хаотических случайных процессов, в частности, динамики цен акций и финансовых индексов, с помощью случайных блужданий, порожденных обобщенным дважды стохастическими пуассоновскими процессами (обобщенными процессами Кокса). *Дважды стохастический пуассоновский процесс* (также называемый *процессом Кокса*) - это случайный точечный процесс вида $N_1(\Lambda(t))$, где $N_1(t)$, $t \geq 0$ - однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью и случайный процесс $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, является независимым от процесса $N_1(t)$ и обладает следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $P(\Lambda(t) < \infty) = 1$ для любого $t > 0$, траектории путей $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Обобщенный процесс Кокса - это случайная сумма

³⁸Shiryayev A. N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – Singapore: World Scientific. 1999.

³⁹Clark P. K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices // Econometrica, 1973. Vol. 41. P. 135–155.

⁴⁰Korolev V. Yu. Convergence of random sequences with the independent random indices. I // Theory Probab. Appl., 1994. Vol. 39. No. 2. P. 282–297.

⁴¹Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.

⁴²Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.

⁴³Korolev V. Yu. Asymptotic properties of extrema of compound Cox processes and their application to some problems of financial mathematics // Theory Probab. Appl., 2000. Vol. 45. No. 1, pp. 182–194.

⁴⁴Korolev V. Yu. Probabilistic and Statistical Methods For the Decomposition of Volatility of Chaotic Processes. – Moscow: Moscow State University Publishing House, 2011.

независимых одинаково распределенных случайных величин, для которого количество слагаемых следует процессу Кокса^{45,46,47}.

В соответствии с подходом, использовавшимся в^{48,49,50}, случайные распределение для обобщенного процесса Кокса со элементарными скачками, обладающими конечными дисперсиями, должны иметь вид дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов, которые всегда обладают тяжелыми хвостами и островершинны, если смешивающее распределение невырождено. Кроме того, в^{51,52} было показано, что ненормальные устойчивые законы могут возникать как предельные распределения для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с *конечными* дисперсиями, если количество слагаемых в сумме случайно, а распределение количества слагаемых сходится к устойчивому закону и определено на неотрицательной полуоси. В терминах процессов Кокса последнее условие означает, что конечномерные распределения управляющего процесса $\Lambda(t)$ являются асимптотически устойчивыми. В свою очередь, это означает, что интенсивность потоков заявок существенно нерегулярна, что приводит к хорошо известному эффекту кластеризации финансовых данных.

В данной работе показано, что процесс дисбаланса потоков заявок вполне естественно трактовать как так называемый двусторонний процесс риска – процесс риска со случайными премиями. При этом в качестве формальной математической модели последнего предложено использовать специальный обобщенный дважды стохастический пуассоновский процесс (обоб-

⁴⁵Granovsky B. L., Zeifman A. I. The decay function of nonhomogeneous birth and death processes, with application to mean-field models // Stochastic Process. Appl., 1997, Vol. 72. P. 105–120.

⁴⁶Zeifman A. I. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // Stochastic Process. Appl., 1995. Vol. 59. P. 157–173.

⁴⁷Huang H., Kercheval A. N. A generalized birth–death stochastic model for high-frequency order book dynamics // Quantitative Finance 12.4 (2012): 547–557.

⁴⁸Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.

⁴⁹Korolev V. Yu. Asymptotic properties of extrema of compound Cox processes and their application to some problems of financial mathematics // Theory Probab. Appl., 2000. Vol. 45. No. 1, pp. 182–194.

⁵⁰Korolev V. Yu. Probabilistic and Statistical Methods For the Decomposition of Volatility of Chaotic Processes. – Moscow: Moscow State University Publishing House, 2011.

⁵¹Korolev V. Yu. On convergence of the distributions of random sums of independent random variables to stable laws // Theory Probab. Appl., 1997. Vol. 42. No. 4. P. 818–820.

⁵²Korolev V. Yu. On convergence of the distributions of compound Cox processes to stable laws // Theory Probab. Appl., 1998. Vol. 43. No. 4. P. 786–792.

щенный процесс Кокса), что позволяет применить и обобщить аппарат функциональных предельных теорем, имеющих свою историю развития. В работе ⁵³ были доказаны некоторые функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса с квадратично интегрируемыми управляющими процессами $\Lambda(t)$. Однако, класс предельных процессов для обобщенных процессов Кокса, у которых такие управляющие процессы, а скачки имеют конечную дисперсию, довольно узок, поскольку он, в частности, не может содержать никаких устойчивых процессов Леви (помимо винеровского процесса). В книге ⁵⁴ приведено общее утверждение (следствие VII.3.6) о сходимости суперпозиций семимартингалов со стационарными приращениями, из которого можно вывести функциональную предельную теорему для обобщенных процессов Кокса с управляющими процессами $\Lambda(t)$, математические ожидания которых удовлетворяют условию Липшица $E\Lambda(t) \leq Ct$. Однако в таком случае класс предельных процессов для обобщенных процессов Кокса, у которых скачки имеют конечную дисперсию, также не может содержать никаких устойчивых процессов Леви. В работах ⁵⁵ и ⁵⁶ доказана функциональная предельная теорема для обобщенных процессов Кокса, у которых скачки имеют конечную дисперсию, а управляющие процессы $\Lambda(t)$ удовлетворяют условию $E\Lambda^\delta(t) \leq Ct^{\delta_1}$ с некоторыми $\delta, \delta_1 \in (0, 1]$. В таком случае класс предельных процессов для обобщенных процессов Кокса, у которых скачки имеют конечную дисперсию, может содержать устойчивые процессы Леви, что, в частности, хорошо описывает часто наблюдаемую кластеризацию заявок. Однако в указанных работах рассмотрен только симметричный случай.

Понятие токсичности потоков заявок, рассматриваемое в третьей гла-

⁵³ *Kashcheev D. E.* Modeling the Dynamics of Financial Time Series and Evaluation of Derivative Securities. PhD Thesis. – Tver: Tver State University, 2001 (in Russian).

⁵⁴ *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. 2nd edition. Volume 288 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. – Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 2003.

⁵⁵ *В. Ю. Королев, Л. М. Закс, А. И. Зейфман.* О сходимости случайных блужданий, порожденных обобщенными процессами Кокса, к процессам Леви // Информатика и ее применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 84–91.

⁵⁶ *Korolev V. Yu., Zaks L. M., Zeifman A. I.* On convergence of random walks generated by compound Cox processes to Lévy processes // Statistics and Probability Letters, 2013. Vol. 83. No. 10. P. 2432–2438.

ве, было введено в работах ^{57,58}, после чего получило развитие использования индикатора VPIN в качестве метрики оценки токсичности потоков заявок. Однако, позднее способность индикатора VPIN предсказывать токсичную ликвидность на финансовых рынках недонократно подвергалась сомнению ⁵⁹.

Основные цели и задачи данной работы:

1. Разработать модель потоков заявок со случайными интенсивностями, получить теоретическое и эмпирическое обоснование модели;
2. Разработать удобный индикатор текущего состояния книги заявок, чувствительный к информации о потоках всех заявок;
3. Изучить предельные состояния рассматриваемых процессов для построения их асимптотических аппроксимаций;
4. На основе процесса дисбаланса потоков заявок разработать математическую модель токсичности потоков заявок, процедуру оценки токсичности потоков заявок в режиме реального времени, решить задачи прогнозирования токсичной ликвидности и ценовых шоков.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана новая удобная модель эволюции книги заявок; в качестве удобного индикатора, описывающего динамику потоков заявок, предложен процесс дисбаланса потоков заявок; для описания процесса дисбаланса потоков заявок предложена математическая модель вида двухсторонних процессов риска (процессов риска со случайными премиями); предложено мультипликативное представление интенсивностей потоков заявок, что позволило рассмотреть процесс дисбаланса потоков заявок как специальный обобщенный процесс Кокса;

⁵⁷Easley D. and M. O'Hara. 1992. Time and the process of security price adjustment // Journal of Finance, 47: 576-605.

⁵⁸Easley D., Lopez de Prado, Marcos and O'Hara, Maureen. Flow Toxicity and Liquidity in a High Frequency World (February 20, 2012). Review of Financial Studies, Vol. 25, No. 5, pp. 1457-1493, 2012.

⁵⁹Andersen T. G. and Bondarenko O. Reflecting on the VPIN Dispute (August 4, 2013) // Journal of Financial Markets, Vol. 17, pp. 53-64, 2014.

2. Предложенная модель изучена аналитически: получена теорема переноса, доказаны функциональные предельные теоремы о сходимости процесса дисбаланса потоков заявок в схеме серий к процессам Леви в пространстве Скорохода, доказаны теоремы о сходимости процессов дисбаланса потоков заявок с элементарными скачками, обладающими конечными дисперсиями, к процессам Леви с распределениями, имеющими вид дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных одномерных распределений, в частности, к обобщенным гиперболическим процессам Леви;
3. Построена математическая модель токсичности потоков заявок: на основе аналитической модели процесса дисбаланса потоков заявок формализованы понятия токсичности потоков заявок; разработаны байесовский и квантильный показатели токсичности, рассчитываемые на основе параметров, описывающих потоки *всех* заявок, поступающих на рынок; реализована процедура оценки показателя токсичности в режиме реального времени; решены задачи прогнозирования токсичной ликвидности и ценовых шоков с помощью предложенного показателя токсичности.

Научная новизна диссертации заключается в описании модели потоков заявок с неоднородными интенсивностями, введении процесса дисбаланса потоков заявок как интегрального показателя книги заявок, а также рассмотрении его математической модели в виде обобщенных процессов риска, доказательстве функциональных предельных теорем для процесса дисбаланса потоков заявок, а также в разработке аналитического показателя токсичности потоков заявок на основе информации о потоках всех заявок, поступающих на финансовый рынок, и экспериментальном исследовании предложенных подходов на примере важных практических задач.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в возможности использования предлагаемых подходов в системах финансового риск-менеджмента, в системах анализа рыночной активности, используемыми финансовыми регуляторами, а также при решении прикладных задач маркет-мейкинга и оптимального исполнения заявок (optimal execution). Разработанный метод вычисления показателя токсичности на основе процесса

дисбаланса потоков заявок позволяет своевременно выявлять токсичную ликвидность и предупреждать ценовые шоки в режиме реального времени.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается корректными доказательствами теорем и подробными описаниями алгоритмов и экспериментов, допускающими воспроизводимость.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013», г. Москва, 8-13 апреля 2013 года.
- «Достижения и перспективы эконометрических исследований в России», г. Казань, 23 июля 2013 г.
- XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014», г. Москва, 7-11 апреля 2014 года.
- XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Trondheim (Norway), June 16 – 21, 2014.
- ICNAAM-2014 (Rhodes Island, Greece, 22-28 September 2014).
- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, 27-31 октября 2014.
- Спецсеминар кафедры Математической Статистики ВМК МГУ «Теория риска и смежные вопросы».

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 8 печатных изданиях [1]– [8], в том числе высокорейтинговых журналах; 4 работы изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 - в тезисах докладов.

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в получении основных теоретических результатов, программной реализации, экспериментальной апробации. В работах [5] и [8] автором введен профиль токсичности, а также байесовский и квантильный показатели токсичности потоков заявок, а также алгоритм расчета этих показателей для экспериментальных данных

в режиме реального времени. В работах [1] и [2] автором предложена модель потоков заявок с неоднородными интенсивностями, а также проведены теоретические и экспериментальные обоснования адекватности мультипликативной модели заявок. В остальных работах вклад соавторов заключается в следующем. В работе [4] В. Ю. Королев, И. А. Соколов исследовали свойства обобщенных гиперболических моделей, а А.Ю. Корчагин - обобщенных дисперсионных гамма-моделей. В работе [6] приведены критерии сходимости обобщенных процессов Кокса к обобщенным гиперболическим процессам Леви, А. Ю. Корчагиным проведены расчеты с использованием метода разделения смесей. В работе [7] А.И. Зейфман, В.Ю. Королев и С.Я. Шоргин исследовали эргодические свойства неоднородных процессов гибели-размножения.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации составляет 113 страниц. Список литературы содержит 96 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, приводится краткая аннотация диссертационной работы по главам. Указывается научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В первых разделах **первой главы** вводятся ключевые модели и терминология. На классических электронных рынках цена финансового инструмента в ее классическом понимании $P(t)$ является результирующей, интегральной характеристикой системы торгов, которая описывается динамикой так называемой *книги заявок* (limit order book), представляющей из себя список всех актуальных на данный момент заявок о покупке и продаже инструмента по различным ценам. Динамику книги заявок определяют три типа заявок: лимитные (намерение купить/продать по определённой цене), рыночные (намерение немедленно купить/продать по лучшей цене) и заявки на отмену. Если внешний информационный фон (новости, информация с внешних

рынков и инструментов) отсутствует, то потоки лимитных, рыночных заявок и заявок на отмену естественным образом могут быть описаны независимыми считающими пуассоновскими процессами как процессами с максимальной энтропией (i - удалённость от лучшей цены на покупку/продажу):

	limit	market	cancel
buyers	λ_i^+	μ^+	θ_i^+
sellers	λ_i^-	μ^-	θ_i^-

В таком случае динамику книги заявок можно описать эргодическим марковским процессом со стационарным распределением и экспоненциальной скоростью сходимости к нему ⁶⁰

В диссертационной работе введен процесс дисбаланса потоков заявок $Q(t)$, в котором учтены не только изменения лучших котировок (как это принято в академических исследованиях), но и постанова/снятие заявок в глубине книги заявок, поскольку каждое такое действие оказывает влияние на текущее распределение сил покупателей и продавцов. Пусть $N(t)$ - считающий процесс, соответствующий всем событиям в книге заявок. Рассмотрим его как суперпозицию двух процессов $N_+(t)$ и $N_-(t)$ с интенсивностями $\lambda_+(t)$ и $\lambda_-(t)$, соответствующие событиям, увеличивающим накопленную силу покупателей и продавцов соответственно (для покупателей - это лимитные и рыночные заявки на покупку, а также отмена заявок на продажу; аналогично, для продавцов). Определим процесс

$$Q(t) = Q^+(t) - Q^-(t) = \sum_{i=1}^{N^+(t)} X_i^+ - \sum_{j=1}^{N^-(t)} X_j^-,$$

где X_i^+ и X_j^- - объёмы заявок - н.о.р.с.в. В работе было показано, что процесс $Q(t)$ имеет сильную линейную связь с высокочастотными изменениями цены финансового актива $p(t)$, построенной по ценам сделок, что позволяет напрямую исследовать свойства процесса дисбаланса потока заявок и соотносить их со свойствами процесса цены $p(t)$.

⁶⁰ *Abergel F., Jedidi A. A Mathematical Approach to Order Book Modeling, 2011. Available at: <http://arxiv.org/abs/1010.5136>2011.*

В реальности интенсивности λ_+ и λ_- являются случайными процессами $\lambda_+(t)$ и $\lambda_-(t)$. В работе предлагается мультипликативная модель для интенсивностей: $\lambda_+(t) = \alpha_+(t)\ell(t)$ и $\lambda_-(t) = \alpha_-(t)\ell(t)$, где $\ell(t)$ - внешний информационный фон (общий ажиотаж), а $\alpha_+(t)$ и $\alpha_-(t)$ - степень реакции покупателей и продавцов на этот информационный фон. В работе получены теоретические и эмпирические обоснования мультипликативной модели. Такое представление, к тому же, даёт возможность на основе наблюдаемых значений процесса $\lambda_+(t)/\lambda_-(t)$ исследовать процесс относительной реакции покупателей и продавцов на новостной фон $\alpha_+(t)/\alpha_-(t)$, что является одной из мер их дисбаланса, являющегося основным механизмом ценообразования. Также изучение процесса $r(t)$ позволяет идентифицировать нехарактерную деятельность определённых участников рынка и строить предикативные модели цены.

В общем виде процесс дисбаланса потоков заявок определяется в работе как

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N_1^+(\alpha^+(t)L(t))} X_i^+ - \sum_{j=1}^{N_1^-(\alpha^-(t)L(t))} X_j^-,$$

где $L(t) = \int_0^t \ell(\tau)d\tau$, $N_1^+(t)$ и $N_1^-(t)$ - независимые пуассоновские процессы с единичной интенсивностью.

ЛЕММА 1. *При выполнении условий для каждого $t \geq 0$ $OFI(t)$ имеет обобщенное смешанное пуассоновское распределение. А именно, для каждого $t \geq 0$*

$$P(OFI(t) < x) = P\left(\sum_{j=1}^{N(t)} X_{t,j} < x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, $\Lambda(t) = (\alpha^+(t) + \alpha^-(t))L(t)$, $N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс, независимый от процесса $L(t)$ и $X_{t,1}, X_{t,2}, \dots$ - одинаково распределенные случайные величины с общей характеристической функцией

$$f_t(s) \equiv Ee^{isX_{t,1}} = \frac{\alpha^+(t)f^+(s)}{\alpha^+(t) + \alpha^-(t)} + \frac{\alpha^-(t)f^-(-s)}{\alpha^+(t) + \alpha^-(t)}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

кроме того, для каждого $t \geq 0$ случайные величины $N_1(t), \Lambda(t), X_{t,1}, X_{t,2}, \dots$ являются независимыми.

Таким образом, далее процесс дисбаланса потоков заявок можно рассматривать как специальный вид обобщенного процесса Кокса.

Далее в первой главе рассматривается последовательность процессов дисбаланса потоков заявок в виде

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^{N_1^{(n)}(\Lambda_n(t))} X_{n,i}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\{N_1^{(n)}(t), t \geq 0\}_{n \geq 1}$ — это последовательность пуассоновских процессов с единичными интенсивностями; для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ одинаково распределены; для каждого $n \geq 1$ случайные величины $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ и процессы $N_1^{(n)}(t), t \geq 0$, являются независимыми; для каждого $n = 1, 2, \dots$ процессы $\Lambda_n(t), t \geq 0$, являются управляющими, то есть неубывающими положительными процессами Леви, независимыми от процесса

$$Z_n(t) = \sum_{i=1}^{N_1^{(n)}(t)} X_{n,i}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

и такими, что $\Lambda_n(0) = 0$.

Представление процесса дисбаланса потоков заявок в виде обобщённого процесса Кокса даёт возможность адаптировать теорему переноса:

ТЕОРЕМА 1.1 *Предположим, что существует бесконечно возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n \geq 1}$ натуральных чисел и конечные числа $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ такие, что случайные объёмы заявок $X_{n,j}$ удовлетворяют условию*

$$\mathbb{P}(X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n} < x) \implies \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Сходимость

$$\mathbb{P}(Q_n < x) \implies F(x) \quad (4)$$

с некоторой функцией распределения $F(x)$ имеет место тогда и только

тогда, когда существует функция распределения $A(x)$ такая, что $A(0) = 0$, функция распределения $F(x)$ представима в виде

$$F(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x - \alpha z}{\sigma\sqrt{z}}\right) dA(z)$$

и

$$P(\Lambda_n < xk_n) \implies A(x). \quad (5)$$

В заключение главы проведен анализ реальных данных, установлены различные статистические свойства потоков заявок, подтверждающие адекватность рассматриваемой модели.

Вторая глава посвящена функциональным предельным теоремам для процесса дисбаланса потоков заявок. Рассмотрим различные условия на рассматриваемые процессы.

Предположим, что в схеме серий, описанной выше, выполняются условия:

$$P(\Lambda_n(1) < k_n x) \xrightarrow{d} P(U < x), \quad (6)$$

где U – неотрицательная сл. вел. такая, что её распр. не вырождается в нуле.

Для некоторых $\delta, \delta_1 \in (0, 1]$ и $C_n > 0$ выполняется

$$E\Lambda_n^\delta(t) \leqslant (C_n t)^{\delta_1}. \quad (7)$$

Для некоторого $k_n \in \mathbb{N}$ имеет место сходимость

$$P(X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n} < x) \xrightarrow{d} H(x), \quad (8)$$

где $H(x)$ – некоторая функция распределения безгранично делимой сл. вел.

Для некоторого $\beta \in [1, 2]$

$$0 < m_n^\beta \equiv \mathbb{E}|X_{n,1}|^\beta < \infty \quad (9)$$

$$K \equiv \sup_n C_n^{\delta_1/\delta} m_n^\beta < \infty, \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть процесс дисбаланса потока заявок $Q_n(t)$ (см. (2)) управляется неубывающим положительным процессом Леви $\Lambda_n(t)$, удовлетворяющим условиям (7) и (6) с некоторыми $\delta, \delta_1 \in (0, 1]$ и $k_n \in \mathbb{N}$. Предположим, что случайные величины $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}$, $n = 1, 2, \dots$, (случайные объёмы заявок) удовлетворяют условию (8) с теми же значениями k_n , а также удовлетворяют условию (9) с некоторым $\beta \in [1, 2]$. Также предположим, что выполнено условие (10). Тогда процесс $Q_n(t)$ слабо сходится в пространстве Скорохода $\mathcal{D}$ к процессу Леви $Q(t)$ такому, что

$$\mathbb{E} \exp\{isQ(1)\} = \int_0^\infty (h(s))^u d\mathbb{P}(U < u), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $h(s)$ - характеристическая функция, соответствующая функции распределения $H(x)$ в условии (8).

Пусть при некоторых $a \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma^2 < \infty$ и некотором $\epsilon > 0$ выполняются условия (при $n \rightarrow \infty$)

$$k_n a_n \longrightarrow a, \quad k_n \sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2 \quad \text{and} \quad k_n \mathbb{E}(X_{n,1} - a_n)^2 \mathbb{I}(|X_{n,1} - a_n| \geq \epsilon) \longrightarrow 0, \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть процессы дисбаланса потоков заявок $Q_n(t)$ управляются неубывающими положительными процессам Леви $\Lambda_n(t)$, удовлетворяющими условию (7) с некоторыми $\delta, \delta_1 \in (0, 1]$. Предположим, что объёмы заявок $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}$ удовлетворяют условиям (12) с некоторыми $k_n \in \mathbb{N}$. Также предположим, что выполняется условие (10) с $\beta = 2$. Тогда процессы $Q_n(t)$ слабо сходятся в пространстве Скорохода $\mathcal{D}$ к процессу Леви

$Q(t)$ тогда и только тогда, когда существует неотрицательная случайная величина U , такая, что

$$\mathbf{P}(Q(1) < x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x - au}{\sigma\sqrt{u}}\right) d\mathbf{P}(U < u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

и выполняется условие (6) с теми же самыми k_n .

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть процессы дисбаланса потока заявок $Q_n(t)$ (см. (2)) управляются неубывающими положительным процессами Леви $\Lambda_n(t)$, удовлетворяющими условию (7) с некоторыми $\delta, \delta_1 \in (0, 1]$. Предположим, что случайные объемы заявок $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (12) с некоторыми $k_n \in \mathbb{N}$ and some $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$. Также предположим, что выполняется условие (10) с $\beta = 2$. Тогда процессы $Q_n(t)$ слабо сходятся в пространстве Скорохода $\mathcal{D}$ к обобщенному гиперболическому процессу Леви $Q(t)$, такому, что

$$\mathbf{P}(Q(1) < x) = P_{GH}(x; a, \sigma, \nu, \mu, \lambda)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(\Lambda_n(1) < k_n x) \xrightarrow{d} P_{GIG}(x; \nu, \mu, \lambda)$$

с некоторыми k_n , ν , μ and λ .

В третьей главе диссертации рассматривается математическая модель токсичности потоков заявок: на основе аналитической модели процесса дисбаланса потоков заявок формализованы понятия токсичности потоков заявок. Рассмотрим, как и прежде, двусторонний процесс риска в качестве математической модели эволюции процесса дисбаланса потока заявок. Для $t \in [0, T]$ пусть $N^+(t)$ и $N^-(t)$ – количества заявок, пришедших от покупателей и продавцов соответственно в течение интервала времени $[0, t]$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностями $\lambda^+ > 0$ и $\lambda^- > 0$ ($\mathbf{E}N^+(t) = \lambda^+t$, $N^+(0) = 0$, $\mathbf{E}N^-(t) = \lambda^-t$, $N^-(0) = 0$). Пусть X_i^+ и X_i^- , $i = 1, 2, \dots$, – объемы заявок, поступающих от покупателей и продавцов

соответственно — две независимые последовательности независимых и одинаково в каждой последовательности распределенных случайных величин с функциями распределения $G(x)$ и $F(x)$ соответственно, независимых от пуассоновских процессов $N^+(t)$ и $N^-(t)$. Положим

$$Q^+(t) = \sum_{i=1}^{N^+(t)} X_i^+, \quad Q^-(t) = \sum_{j=1}^{N^-(t)} X_j^-$$

и определим процесс *дисбаланса потока заявок* $Q(t)$ как

$$Q(t) = Q^+(t) - Q^-(t).$$

Чтобы формализовать понятие токсичности потока заявок, для начала рассмотрим процесс $Q(t)$ в предположении, что $\mathbf{E}Q(t) > 0$, т. е. $\lambda^+ \mathbf{E}X_1^+ > \lambda^- \mathbf{E}X_1^-$, что означает преимущество покупателей над продавцами в рамках интервала $[0, T]$. Предположим, что $Q(0) = 0$.

Для $u > 0$ рассмотрим вероятность

$$\varphi_{\pm}(u, T) = \mathbf{P}(\inf_{0 < t \leq T} Q(t) \geq -u),$$

т. е. вероятность того, что траектория процесса $Q(t)$ в течение интервала времени $[0, T]$ целиком будет находиться не ниже уровня $-u$, а также аналогичную предельную вероятность на бесконечном интервале времени:

$$\varphi_{\pm}(u) = \mathbf{P}(\inf_{t > 0} (Q^+(t) - Q^-(t)) \geq -u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_{\pm}(u, T).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функцию $\varphi_{\pm}(u)$ будем называть **профилем мгновенной токсичности потока заявок**.*

Введенная таким образом характеристика формально совпадает с вероятностью неразорения в классической модели коллективного риска со слу-

чайными премиями ^{61,62,63} и для нее может быть выписано соответствующее интегральное уравнение. Профиль токсичности представляет собой *функцию*, аргументом которой является уровень u . Для построения показателя токсичности, выражаемого одним числом, можно воспользоваться одним из двух подходов.

Выделим некий «характеристический» уровень u_0 , пересечение которого может иметь серьезные последствия. Пусть $w(x)$ – некоторая плотность распределения вероятностей, обладающая свойствами

$$\int_0^\infty w(x)dx = 1, \quad \int_0^\infty xw(x)dx = u_0. \quad (14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Байесовским показателем мгновенной токсичности потока заявок $\theta_\pm^{(w)}$ называется величина*

$$\theta_\pm^{(w)} = \theta_\pm^{(w)}(u_0) = \int_0^\infty \varphi_\pm(u)w(u)du.$$

В случае, когда $\mathbf{E}Q(t) < 0$, т. е. $\lambda^+ \mathbf{E}X_1^+ < \lambda^- \mathbf{E}X_1^-$, байесовский показатель мгновенной токсичности $\theta_\mp^{(w)}$ вводится аналогичным образом.

При условии $\mathbf{E}Q(t) > 0$ на промежутке $[0, T]$ зафиксируем некоторое $0 < \alpha < 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Квантильным α -показателем мгновенной токсичности потока заявок называется такое минимальное значение $q_\pm$, при котором*

$$\varphi_\pm(q_\pm) \geq \alpha$$

При наличии у процесса $Q(t)$ отрицательного тренда, т. е. при условии $\lambda^+ \mathbf{E}X_1^+ < \lambda^- \mathbf{E}X_1^-$) α -квантильный показатель мгновенной токсичности $q_\mp$ определяется из уравнения $\varphi_\mp(q_\mp) \geq \alpha$.

⁶¹ Boykov A. Cramer-Lundberg model with stochastic premiums, Theory of Probability and its Applications, 47:3, (2002), 549–553.

⁶² Бойков А. В. Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения. – Дис. канд. физ.-матем. наук. Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2003, 83 с.

⁶³ Темнов Г. О. Математические модели риска и случайного притока взносов в страховании. – Дис. канд. физ.-матем. наук, С.-Петербург, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2004, 102 с.

В некоторых случаях удастся напрямую вычислить профиль мгновенной токсичности потока заявок. Аналоги моделей, приведенных ниже, рассматривались в рамках модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями.

Для простейшей модели рынка, где потоки заявок имеют единичный объем, т. е. $P(X_i^+ = 1) = P(X_i^- = 1) = 1$ процесс дисбаланса потоков заявок имеет вид $Q(t) = N^+(t) - N^-(t)$. Если $\lambda^+ > \lambda^-$, то решая интегральное уравнение для функции профиля мгновенной токсичности, получаем

$$\varphi_{\pm}(u) = \varphi_{\pm}([u]) = 1 - \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} \right)^{[u]+1}.$$

Выберем в качестве функции $w(u)$ функцию плотности вероятности распределения Пуассона (относительно считающей меры). Обозначив $r = \frac{\lambda^-}{\lambda^+}$ (при этом $r < 1$ при положительном тренде) и вычисляя байесовский показатель токсичности по определению, получаем

$$\theta_{\pm}^{(w)}(u_0) = 1 - r e^{u_0(r-1)}$$

Квантильный показатель токсичности получаем в виде

$$q_{\pm}(\alpha) = \left\lceil \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln r} - 1 \right\rceil$$

Монотонность обоих показателей по аргументу r и их корректные значения на границах подтверждают обоснованность использования $\theta_{\pm}$ и $q_{\pm}$ в качестве показателей токсичности потока заявок в случае модели рынка с заявками единичного объема.

Пусть теперь объемы заявок покупателей и продавцов имеют экспоненциальное распределение, т. е. $G(t) = 1 - e^{-bt}$ и $F(t) = 1 - e^{-at}$. В случае, когда покупатели преобладают над продавцами, т. е. $\lambda^+/b > \lambda^-/a$ профиль токсичности потока заявок вычисляется как

$$\varphi_{\pm}(u) = \frac{(a+b)\lambda^-}{(\lambda^+ + \lambda^-)a} \exp\left(-\frac{\lambda^+a - \lambda^-b}{\lambda^+ + \lambda^-}u\right).$$

Для вычисления байесовского показателя мгновенной токсичности возьмем в качестве $w(u)$ плотность гамма-распределения (с единичной дисперсией). Прямое вычисление даёт

$$\theta_{\pm}(u_0) = 1 - \frac{\beta}{(\gamma u_0^{-1} + 1)^{u_0^2}},$$

где

$$\beta = \frac{(a+b)\lambda^-}{(\lambda^+ + \lambda^-)a} \text{ и } \gamma = \frac{\lambda^+ a - \lambda^- b}{\lambda^+ + \lambda^-} > 0. \quad (15)$$

Квантильный показатель токсичности получаем в виде

$$q_{\pm}(\alpha) = \frac{\ln \beta - \ln(1 - \alpha)}{\gamma}.$$

Представленная модель потоков заявок с объёмами заявок, имеющими экспоненциальное распределение, была протестирована на реальных данных (фьючерсный рынок Moscow Exchange), параметры модели λ^+ , λ^- , b , a оценивались в рамках временных интервалов с шагом $\tau = 15$ секунд. Показатели мгновенной токсичности потока заявок $\theta(u_0)$ и $q(\alpha)$ для фиксированных u_0 и α оценивались в режиме реального времени и идентифицировались участки, на которых деятельность покупателей или продавцов была токсичной. Прикладные исследования демонстрируют достаточную значимость данного показателя для своевременной идентификации участков неблагоприятного отбора маркет-мейкеров.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] В. Ю. Королев, А. В. Черток, А. Ю. Корчагин, А. К. Горшенин
Вероятностно-статистическое моделирование информационных потоков
в сложных финансовых системах на основе высокочастотных данных *Информатика и ее применения*, 7:1 (2013), 12–21
- [2] Andrey K. Gorshenin, Victor Yu. Korolev, Alexander I. Zeifman, Sergey Ya. Shorgin, Andrey V. Chertok, Artem I. Evstafyev and Alexander Yu. Korchagin, Modelling stock order flows with non-homogeneous intensities from high-frequency data *AIP Conf. Proc.* 1558 , 2394 (2013)
- [3] Chertok A. V., Korolev V. Yu., and Korchagin A. Yu. Modeling high-frequency non-homogeneous order flows by compound Cox processes. Available at: *arXiv:1410.1900v2 [math.PR]*, January 14, 2014.
- [4] В. Ю. Королев, А. Ю. Корчагин, И. А. Соколов, А. В. Черток, О работах в области моделирования информационных потоков в современных высокочастотных финансовых приложениях. *Системы и средства информатики*, 24:4 (2014), 63–85
- [5] А. В. Черток. О формализации понятия токсичности потока заявок на финансовых рынках. *Информатика и ее применения*, 8:4 (2014), 20–31
- [6] V.Yu. Korolev, A. V. Chertok, A. Yu. Korchagin, A.I. Zeifman Modeling high-frequency order flow imbalance by functional limit theorems for two-sided risk processes *Applied Mathematics and Computation*, Volume 253, 15 February 2015, Pages 224–241

- [7] Alexander I. Zeifman, Victor Yu. Korolev, Andrey V. Chertok and Sergey Ya. Shorgin, On ergodicity bounds for an inhomogeneous birth-death process *AIP Conf. Proc.* 1648 , 250011 (2015)
- [8] A. Chertok, On order flow toxicity. *AIP Conf. Proc.* 1648 , 250013 (2015)