Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Дайлова Екатерина Александровна

Теоретико-игровые модели форвардных и сетевых рынков однородного товара

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Научный руководитель: **Васин Александр Алексеевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Алескеров Фуад Таги оглы,**
доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой высшей математики на факультете экономики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Белотелов Николай Вадимович,
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки «Вычислительный центр Российской академии наук имени А.А.Дородницына»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук»

Защита состоится 23 декабря в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, а также на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://www.cmc.msu.ru в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «___» ___________ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.44
к.т.н, в.н.с В.А.Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория игр и математическая экономика широко применяются при решении проблем разработки и внедрения рыночных механизмов. Теоретический анализ и использование математических моделей необходимо для успешного развития рынков. Новые задачи возникают не только для стран, которые сравнительно недавно вступили на путь рыночной экономики, но и для стран с развитой рыночной экономикой. Важным примером является развитие оптовых рынков электроэнергии, которые более 20 лет назад начали развиваться в целом ряде стран.

На рынках однородных товаров, в частности электроэнергетических, важную проблему представляет развитие рынка форвардных контрактов. Для анализа этой проблемы используются теоретико-игровые модели, с помощью которых обосновывается эффективность форвардного рынка как механизма сокращения рыночной власти крупных производителей. Проблема рыночной власти крупных компаний наиболее остро проявляется на рынках электроэнергии, ввиду ее специфики как товара. Стандартные способы борьбы с рыночной властью, например, такие как дробление крупных компаний, нежелательны в области электроэнергетики, так как это приводит к повышению издержек и себестоимости электроэнергии, а также снижению надежности электроснабжения. Альтернативный подход — это выбор механизма, позволяющего минимизировать отклонение рынка от конкурентного равновесия, которое является оптимальным с точки зрения общественного благосостояния. Одним из таких механизмов является рынок форвардных контрактов. Однако, известные модели[1,2,3] форвардных рынков обладают рядом недостатков. Эф-

[1] Allaz B., Vila J-L. Cournot competition, forward markets and efficiency // Journal of Economic Theory. — 1992. — Vol. 59, no 1. — P. 1–16

[2] Bushnell J. Oligopoly equilibria in electricity contract markets // University of California Energy Institute. CSEM Working Paper. WP–148, 2005.

[3] Newbery D. Predicting market power in wholesale electricity markets. EUI Working Papers RSCAS, 2009.

фективность многоэтапного аукциона как инструмента борьбы с рыночной властью производителей доказана с допущениями, которые не соответствуют реальным рыночным условиям. В частности, предположения о равенстве цен на форвардном и спотовом рынках, а также о приоритете потребителей с высокими резервными ценами при покупке товара на форвардном рынке не выполняются на практике и требуют уточнения. Исходя из вышеперечисленного, возникает актуальная задача построения новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка с более реалистичными допущениями.

Другая важная проблема — развитие сетевой структуры рынка. Производители и потребители находятся в разных узлах, при этом система перемещения товара (СПТ) между узлами имеет ограниченную пропускную способность. Ранее[4,5] получены методы расчета конкурентного равновесия для сетевого рынка. Определены[6] возможные типы равновесий для двухузлового рынка при несовершенной конкуренции. При этом остается нерешенной задача поиска оптимальных параметров СПТ с точки зрения общественного благосостояния. Такая постановка представляет теоретический и практический интерес, поскольку, в отличие от производства товара, развитие СПТ определяется решениями государственных органов управления, а не рыночными механизмами. Поэтому возникает актуальная задача создания эффективных средств для расчета оптимальных параметров развития инфраструктуры.

Цель работы – разработка новой теоретико-игровой модели и метода расчета совершенного подыгрового равновесия для двухэтапного рынка, а также методов расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара с точки зрения максимизации общественного благосостоя-

[4] Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнес Е. М. и др. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. — 2004. — № 3. — С. 72–83.

[5] Hogan W. Competitive electricity market design: a wholesale primer. Working Paper. Harvard University, 1998.

[6] Vasin A., Vasina P. Electricity markets analysis and design. Working Paper 2006/053. New Economic School, Moscow, 2006.

ния.

Объектом исследования являются математические модели экономических механизмов взаимодействия производителей, потребителей и арбитражеров на рынках однородного товара.

Предметом исследования являются теоретико-игровые и оптимизационные модели двухэтапных и сетевых рынков с учетом перспективы их совершенствования и развития.

При выполнении диссертационного исследования для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработка новой теоретико-игровой модели взаимодействия агентов на двухэтапном рынке с учетом присутствия арбитражеров, а также наличия случайного фактора, который влияет на исход торгов на спотовом рынке.

2. Нахождение совершенного подыгрового равновесия для разработанной модели, определение условий его существования и получение оценки эффективности введения рынка форвардных контрактов как механизма снижения рыночной власти производителей.

3. Исследование свойств функции общественного благосостояния двухузлового рынка и его равновесия в условиях совершенной и несовершенной конкуренции в зависимости от пропускной способности системы перемещения товара; решение задачи максимизации общественного благосостояния для некоторых сетевых структур.

При выполнении исследования использовались

– математические методы теории игр;

– методы оптимизации и экономико-математического моделирования;

– математический аппарат исследования операций.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в том, что

– при построении новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка помимо случайного фактора формирования цен учтены объемы, предлагаемые арбитражерами, которые либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию;

– найдено совершенное подыгровое равновесие для построенной модели двухэтапного рынка;

– разработаны новые методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния как в условиях совершенной конкуренции, так и в условиях олигополии.

Практическая значимость исследования заключается в

– оценке эффективности рынка форвардных контрактов как механизма снижения рыночной власти производителей;

– разработке средств расчета оптимальных параметров развития инфраструктуры рынков однородного товара, в частности электроэнергии.

Обоснованность научных положений. Теоретические положения диссертации сформулированы в виде утверждений и строго доказаны.

На защиту выносятся следующие результаты:

– теоретико-игровая модель двухэтапного рынка с учетом присутствия на рынке арбитражеров, а также случайного фактора, влияющего на исход торгов на спотовом рынке;

– метод расчета совершенного подыгрового равновесия для указанной теоретико-игровой модели двухэтапного рынка;

– необходимые условия оптимальности и методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международной ежегодной конференции немецкого сообщества исследования операций (Ганновер, 2012), на научных конференциях «Тихоновские чтения» (Москва, 2012 и 2013), на XX международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2013» (Москва, 2013), на 26-ой конференции международной федерации обществ исследования операций (Рим, 2013), на VII международной конференции по исследованию операций (Москва, 2013), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014), на II международной конференции по информационным технологиям и количественному менеджменту (Москва, 2014).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации имеется тринадцать публикаций. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырех статьях журналов из перечня ВАК [1, 3, 4, 9]. В работах [2–5, 9–13] Дайловой Е. А. принадлежат формулировки и доказательства результатов, Васину А. А. принадлежит постановка задачи и проверка результатов. В работе [1] Дайловой Е. А. принадлежат обзор теоретико-игровых моделей механизмов рынка электроэнергии и результаты по форвардным рынкам.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Общий объём рукописи составляет 116 страниц и включает 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 53 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Проведен обзор известных теоретико-игровых моделей механизмов рынка электроэнергии.

Первая глава посвящена построению и исследованию теоретико-игровой модели функционирования двухэтапного рынка с учетом случайного фактора, влияющего на цену спотовых торгов, а также объемов, предлагаемых арбитражерами.

В разделе 1.1 приведены необходимые результаты[7] для одноэтапной модели рынка в условиях олигополии Курно с множеством производителей A. Максимальный объем, который может выпустить производитель $a \in A$, составляет V^a. Функция $C^a(v)$ задает затраты производителя $a \in A$ в зависимости от выпущенного им объема $v \in [0, V^a]$. Функция спроса $D(p)$ известна всем агентам. Каждый производитель $a \in A$ выбирает объем выпуска $v^a \in [0, V^a]$; $\overrightarrow{v} = (v^a, a \in A)$ — набор выбранных стратегий. Рыночная цена $p(\overrightarrow{v})$ определяется из условия $p(\overrightarrow{v}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^a)$. Полученная игроком a прибыль $\pi^a(\overrightarrow{v}) = v^a p(\overrightarrow{v}) - C^a(v^a)$ составляет его выигрыш. Модели олигополии Курно отвечает игра в нормальной форме: $\Gamma_C = \langle A, [0, V^a], \pi^a(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} \in \otimes_{a \in A}[0, V^a] \rangle$. Согласно определению, набор объемов выпуска $(v^{a^*}, a \in A)$ является равновесием Курно, если он представляет собой равновесие по Нэшу в игре Γ_C. При этом $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^{a*})$ — цена в равновесии Курно. Для равновесия по Нэшу условием первого порядка является[7]

$$v^{a^*} \in (p^* - C^{a'}(v^{a*}))|D'(p^*)|, \text{ для любого } a, \text{ такого что } C^{a'}(0) < p^*, \qquad (1)$$

$$v^{a^*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p^*, \qquad (2)$$

где в точках разрыва $C^{a'}(v) = [C^{a'}_{-}(v), C^{a'}_{+}(v)]$. Решение системы (1)–(2) задает функцию предложения Курно $S^a_C(p)$ производителя a (при $p > 0$).

В разделе 1.2 построена теоретико-игровая модель функционирования двухэтапного рынка с учетом присутствия арбитражеров, а также наличия случайного фактора, который влияет на исход торгов на спотовом рынке. На рынке присутствуют n фирм-производителей с постоянными предельными издержками c. Покупателем единицы товара является мелкий потребитель.

[7] Васин А. А. Некооперативные игры в природе и обществе. — М.: МАКС Пресс, 2005.

Потребитель b описывается резервной ценой r_b, которая показывает максимальную цену, по которой потребитель готов совершить покупку. Функция спроса $D(p)$ задается плотностью распределения потребителей по резервным ценам $\rho(r)$: $D(p) = \int_p^{r_{max}} \rho(r)dr$. Торговля проходит в два этапа: сначала на форвардном рынке, а потом на спотовом. Помимо производителей и потребителей, на рынке также присутствуют риск-нейтральные арбитражеры, действующие в условиях совершенной конкуренции. Они либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию. На форвардном рынке фирмы предлагают объемы продажи q_a^f, $a \in \overline{1,n}$. Пусть $\overrightarrow{q^f} = (q_a^f, a \in \overline{1,n})$ – вектор объемов предложения; q^f – объем, предложенный всеми производителями на форвардном рынке: $q^f = \sum_{a=1}^n q_a^f$. Если арбитражеры сначала продают контракты на форвардном рынке, а потом покупают товар на спотовом рынке для выполнения своих контрактных обязательств, то обозначим q_{arb} объем, предложенный арбитражерами на форвардном рынке, $q_{arb} > 0$. Если же они сначала покупают контракты на форвардном рынке, потом продают товар на спотовом рынке, то величина $|q_{arb}|$ показывает, какой объем купили арбитражеры на форвардном рынке, $q_{arb} < 0$. Обозначим q_t^f количество товара, купленного потребителями на форвардном рынке. Каждый потребитель b принимает решение об участии или неучастии в торгах на форвардном рынке. Подавая заявку, он указывает свою резервную цену r_b и покупает товар при рыночной цене, не превышающей его резервной цены. Обозначим $D^f(p)$ функцию спроса потребителей на форвардном рынке. Эта функция показывает число потребителей, которые решили покупать товар на форвардном рынке и у которых резервная цена превосходит p. Из условия $D^f(p^f) = q_t^f = q^f + q_{arb}$ находим цену на форвардном рынке p^f. На спотовом рынке проходит аукцион Курно с функцией остаточного спроса потребителей $D^s(p)$, которую находим, исходя из стратегий агентов. Потребители, купившие товар на форвардном рынке, не участвуют в торгах на спотовом рынке. Поэтому $D^s(p) = D(p) - q_t^f$, если

$p < p^f$, $D^s(p) = D(p) - D^f(p)$, если $p \geq p^f$. Производители предлагают объемы продаж на спотовом рынке q_a^s, $a \in \overline{1,n}$. Спотовая цена p^s, уравнивающая спрос и предложение, определяется из условия $D^s(p^s) + q_{arb} = \sum_{a=1}^n q_a^s$. Пусть случайный фактор, который влияет на исход торгов на спотовом рынке, принимает значения $i \in \overline{1,k}$ с вероятностями $w_i > 0$; $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Фирмы могут выбирать значение предложения на спотовом рынке в зависимости от этого случайного фактора. Стратегия фирмы задается набором $(q_a^f, q_a^s(i); i \in \overline{1,k})$, определяющим объем предложения на форвардном рынке и объем предложения на спотовом рынке в зависимости от реализации случайного фактора. В этом случае цена на спотовом рынке является случайной величиной, значение p_i которой при реализации значения i случайного фактора находим из соотношения: $D^s(p_i) + q_{arb} = \sum_{a=1}^n q_a^s(i)$, $i \in \overline{1,k}$. Упорядочим значения i по возрастанию p_i: $p_{min} = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = p_{max}$.

Раздел 1.3 посвящен поиску оптимальных стратегий потребителей, производителей и арбитражеров на двухэтапном рынке со случайным фактором. За счет действий арбитражеров выполняется равенство цены на форвардном рынке математическому ожиданию цены на спотовом рынке: $p^f = \mathbb{E}(p^s)$. При принятии решения об участии или неучастии в форвардных торгах каждый потребитель $b \in B$ стремится максимизировать ожидаемую полезность от покупки товара, зависящую от разности между его резервной ценой и рыночной ценой, а также от параметра $\lambda_b \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, описывающего его отношение к риску. В **Утверждении 1.3.1** показано, что риск-избегающие потребители совершают покупку на форвардном рынке, если их резервная цена выше форвардной цены и параметр избегания риска превышает пороговую величину. Потребители с низкими резервными ценами приобретают товар на спотовом рынке, если цена на спотовых торгах ниже их резервной цены. Риск-предпочитающие потребители с высокими резервными ценами совершают покупку на спотовом рынке.

Полученный результат позволяет определить вид остаточного спроса на спотовом рынке. Пусть $\alpha(p)$ – доля риск-предпочитающих среди потребителей с резервными ценами $r \geq p$.

Утверждение 1.3.2. *Функция остаточного спроса потребителей при равновесном поведении выглядит следующим образом:*

$$D^s(p) = \begin{cases} D(p) - q_t^f & \text{при } p < p^f; \\ \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r, \lambda) d\lambda dr & \text{при } p^f < p < p_{max}; \\ \alpha(p) D(p) & \text{при } p > p_{max}. \end{cases}$$

Каждый производитель a стремится максимизировать математическое ожидание суммарной прибыли на спотовом и форвардном рынках: $\pi_a = (p^f - c)q_a^f + \sum_{i=1}^k w_i(p_i - c)q_a^s(i)$. Для расчета совершенного подыгрового равновесия сначала найдем равновесные стратегии производителей на втором этапе при фиксированных q_a^f, исходя из функции остаточного спроса. Затем получим равновесные стратегии фирм-производителей на первом этапе как решение задачи максимизации прибыли при условии баланса спроса и предложения на форвардном рынке.

В равновесии для каждого значения случайного фактора i должны выполняться условия первого порядка, связывающие объемы предложения на спотовом рынке с функцией остаточного спроса. Исходя из этого получены соотношения, из которых определяются цены p_i.

Утверждение 1.3.3. *Если совершенное подыгровое равновесие существует и функция остаточного спроса гладкая при $p = p_i$, $i \in \overline{1, k}$, то цена $p_1 \leq p^f$ определяется из условия $(p_1 - c)|D'(p_1)| = (D(p_1) - q_t^f + q_{arb})/n$. Для $i \in \overline{2, k-1}$ $p_i > p^f$ удовлетворяет условию $(p_i - c)|D^{s\prime}(p_i)| = (D^s(p_i) + q_{arb})/n$, где $D^s(p) = \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r, \lambda) d\lambda dr$. Наконец, цена p_k определяется из условия $(p_k - c)|(\alpha(p_k)D(p_k))'| = (\alpha(p_k)D(p_k) + q_{arb})/n$.*

Далее рассмотрена задача поиска равновесия для линейной функции спроса $D(p) = \max\{d(r_{max} - p), 0\}$, где $r_{max} = \frac{\overline{D}}{d}$. Предполагается, что доля риск-предпочитающих потребителей постоянна: $\alpha(p) = \alpha$. Случайный фактор принимает два значения. Таким образом, на спотовом рынке устанавливается низкая цена p_1 с вероятностью w, а с вероятностью $1-w$ – высокая цена $p_2 > p_1$; $p^f = wp_1 + (1-w)p_2$. Обозначим q_a^{si} объем, продаваемый производителем a на спотовом рынке при реализации цены p_i, $i = 1, 2$.

Утверждение 1.3.4. *Если совершенное подыгровое равновесие существует, то равновесные цены p_1, p_2, p^f и объемы q_a^{s1}, q_a^{s2} вычисляются по формулам: $p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}$, $p_2 = p^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$, $p^f = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$, $q_a^{s1} = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})$, $q_a^{s2} = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)})$, где p^* – цена в равновесии Нэша для классической модели олигополии Курно для данного рынка, а $\Delta^* = p^* - c$.*

Из условия баланса спроса и предложения по цене p^f

$$q^f + q_{arb} = D^f(p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}) \tag{3}$$

получим зависимость q_{arb} от объемов, проданных производителями на форвардном рынке: $q_{arb} = q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$. Математическое ожидание суммарной прибыли π_j производителя j:

$$\pi_j(\overrightarrow{q^f}) = q_j^f(\Delta^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)}) +$$
$$+ wd(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})^2 + (1-w)\alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})^2. \tag{4}$$

Если совершенное подыгровое равновесие с $q_j^f > 0$, $j = \overline{1,n}$, существует, то равновесные объемы q_j^f определяются из системы $\frac{\partial \pi(\overrightarrow{q^f})}{\partial q_j^f} = 0$, $j = \overline{1,n}$, где $\pi_j(\overrightarrow{q^f})$ и $q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$ заданы согласно (3) и (4). Эта система позволяет найти равновесные объемы $q_j^f = q_j^f(w, n, \alpha)$, $j = \overline{1,n}$. Из уравнения (3) найдем $q_{arb} = q_{arb}(w, n, \alpha)$, а затем, используя утверждение 1.3.4, определим равновесные цены и объемы второго этапа и цену на форвардном рынке.

Указанное необходимое условие равновесия не является достаточным в общем случае. Отдельно взятому игроку может быть выгодно отклонение, при котором меняется характер функции остаточного спроса на спотовом рынке. В разделе 1.4 получены условия устойчивости локальных равновесий.

Утверждение 1.4.1. *Существование совершенного подыгрового равновесия возможно лишь при значениях параметров модели, удовлетворяющих условиям*

$$(n-1+2\sqrt{\alpha})\frac{p_1(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*} \geq (n+1)\alpha + \frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d\Delta^*},$$
$$\frac{p_2(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*}(2\sqrt{\alpha}+(n-1)\alpha) \geq n+1-\frac{nq_a^f(w,n,\alpha)}{d\Delta^*},$$
$$\frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d} \leq (n-1)(p_2(w,n,\alpha)-c)\alpha.$$

Далее рассмотрена ситуация, когда степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько высока, что все они выбирают торговлю на форвардном рынке. В **Утверждении 1.4.2** показано, что, если в этом случае существует совершенное подыгровое равновесие, то равновесный объем предложения на форвардном рынке составляет

$$q_a^f = \Delta^* d\frac{(n+1)A_1}{nB_1},$$

$$\text{где } A_1 = 1+\frac{(1-w)(1-\alpha)n}{\kappa_1} - \frac{2}{n+1}(w+(1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$
$$B_1 = (w+\frac{(1-w)\kappa_2}{\kappa_1})\frac{n+1}{n} - \frac{2}{n+1}(w+(1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$
$$\kappa_1 = \alpha n+1-w(1-\alpha), \kappa_2 = n+1-w(1-\alpha).$$

Показано, что возможность заключения форвардных контрактов значительно снижает рыночную власть производителей, характеризуемую отношением $\frac{p^f(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*}$. Несмотря на то, что в модели сохраняется произвол в отношении вероятности реализации исхода с низкой спотовой ценой, расчеты показывают, что те значения вероятности w, при которых существует равновесие, жестко ограничены в зависимости от доли риск-предпочитающих потребителей.

Если же степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько незначительна, что они выбирают торговлю на спотовом рынке, то совершенное подыгровое равновесие в данном случае не существует.

В разделе 1.5 сначала рассмотрена модель двухэтапного рынка с единой ценой p на спотовом и форвардном рынках в условиях асимметричной олигополии. Пусть $\overline{A} \subseteq A$ – множество фирм, работающих в равновесии не на полную производственную мощность (то есть предельные издержки $C^{a'}(q_a) = m_a$ и данная производственная мощность загружена не в полном объеме $\overline{V}(m_a)$). Показано, что в случае линейного спроса и кусочно-линейных затрат, если совершенное подыгровое равновесие существует, то для каждого производителя a, работающего в равновесии не на полную производственную мощность, общий объем предложения на форвардном и спотовом рынках $q_a = d|\overline{A}|(p-m_a)$. На основе этой формулы может быть построена общая функция предложения. Тогда равновесная цена удовлетворяет условию баланса спроса и общего предложения. В конце раздела проведено обобщение результатов для модели со случайным фактором, принимающим два значения, в условиях асимметричной олигополии.

Во второй главе проведено исследование двухузлового рынка в условиях совершенной и несовершенной конкуренции, разработан метод расчета оптимальной пропускной способности системы перемещения товара (далее СПТ) с точки зрения роста суммарного дохода всех агентов.

В разделе 2.1 приведена схема функционирования сетевого рынка с двумя узлами[7]. Каждый узел i характеризуется множеством фирм-производителей A_i, $i = 1, 2$. Каждый производитель $a \in A_i$ имеет функцию полных затрат $C^a(v)$, зависящую от объема v, который он производит. $D_i(p)$ – функция спроса в узле i. Система перемещения товара между двумя рынками описывается коэффициентом потерь k и пропускной способностью Q. Стратегией каждой фирмы-поставщика a является неубывающая функция предложения $R^a(p)$. Системный оператор сначала рассчитывает цены отсечения $\overline{c}_i$ для изолированных рынков, определяемые из условий: $D_i(\overline{c}_i) = \sum\limits_{a \in A_i} R^a(\overline{c}_i)$, $i = 1, 2$. Если $\lambda^{-1} \le \overline{c}_2/\overline{c}_1 \le \lambda$, где $\lambda = (1-k)^{-1}$, то перемещения товара не происходит и рынки остаются изолированными, цена на первом рынке равна $\overline{c}_1$, а на втором – $\overline{c}_2$. Если $\overline{c}_2/\overline{c}_1 > \lambda$, то системный оператор выбирает объем q перемещаемого товара (далее поток) из первого узла во второй. При заданном потоке q узловые цены $p_1(q)$ и $p_2(q)$ определяются из условий: $D_1(p_1) + q = \sum_{a \in A_1} R^a(p_1)$, $D_2(p_2) - (1-k)q = \sum_{a \in A_2} R^a(p_2)$. Объем q перемещенного товара с первого рынка на второй удовлетворяет одному из следующих условий: $\lambda p_1(q) = p_2(q)$, при этом $q \le Q$, либо $p_2(q) > \lambda p_1(q)$ и $q = Q$.

В разделе 2.2 описан двухузловой рынок в условиях совершенной конкуренции, определены свойства функции общественного благосостояния, дан анализ равновесия в зависимости от пропускной способности СПТ между двумя рынками. В условиях совершенной конкуренции оптимальная заявка фирмы должна соответствовать ее вальрасовской функции предложения $S^a_W(p) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Argmax}_{v^a}(v^a p - C^a(v^a))$[8]. Пусть $S_{iW}(p) = \sum\limits_{a \in A_i} S^a_W(p)$, $i = 1, 2$. Узловые цены, которые соответствуют вальрасовским функциям предложения, обозначим $\widetilde{p_i}(Q)$, $i = 1, 2$. Пусть $\widetilde{p_1}(0) < (1-k)\widetilde{p_2}(0)$, где $\widetilde{p_i}(0)$ определяются из условий: $D_i(\widetilde{p_i}) = S_{iW}(\widetilde{p_i})$, $i = 1, 2$. Цены $\widetilde{p_1}$ и $\widetilde{p_2}$ при перемещении товара с первого рынка на второй определяются из системы

$$
\begin{gathered}
D_1(\widetilde{p_1}) + q = S_{1W}(\widetilde{p_1}), \\
D_2(\widetilde{p_2}) - (1-k)q = S_{2W}(\widetilde{p_2}), \\
\left[\begin{array}{l}
\widetilde{p_1} = (1-k)\widetilde{p_2} \quad \text{и} \quad q \le Q, \\
\widetilde{p_1} < (1-k)\widetilde{p_2} \quad \text{и} \quad q = Q.
\end{array}\right.
\end{gathered}
$$

Далее проведен анализ характеристик равновесия в зависимости от про-

[8] Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005.

пускной способности СПТ.

Утверждение 2.2.1. *Существует значение пропускной способности* $\widehat{Q}$*, определяемое из условия* $\widetilde{p_1}^0(\widehat{Q}) = (1-k)\widetilde{p_2}^0(\widehat{Q})$*, такое, что при* $Q < \widehat{Q}$ *на рынке будет равновесие, для которого* $q = Q$*,* $\widetilde{p_i}(Q) = \widetilde{p_i}^0(Q)$*,* $i = 1, 2$*,* $\widetilde{p_1}(Q) < (1-k)\widetilde{p_2}(Q)$*. При* $Q > \widehat{Q}$ *равновесие отвечает условиям:* $q = \widehat{Q} < Q$*,* $\widetilde{p_i}(Q) = \widetilde{p_i}^0(\widehat{Q})$*,* $i = 1, 2$*.*

В разделе 2.3 предложен метод расчета оптимальной пропускной способности для двухузлового рынка в условиях совершенной конкуренции с точки зрения общественного благосостояния, то есть суммарного выигрыша участников рынка. При заданном значении Q выражение для функции $W(Q)$ общественного благосостояния без учета затрат, связанных с созданием СПТ с пропускной способностью Q, принимает следующий вид: $W(Q) = \mathrm{Pr}_1(Q) + \mathrm{Pr}_2(Q) + \mathrm{CS}_1(Q) + \mathrm{CS}_2(Q) + \mathrm{PrT}(Q)$, где прибыль производителей $\mathrm{Pr}_i(Q)$ на рынке i составляет $\mathrm{Pr}_i(Q) = \sum_{a \in A_i} \big(\widetilde{p_i}(Q) S_W^a(\widetilde{p_i}(Q)) - C^a(S_W^a(\widetilde{p_i}(Q)))\big)$, выигрыш потребителей $\mathrm{CS}_i(Q)$ на рынке i рассчитывается как $\mathrm{CS}_i(Q) = \int\limits_{\widetilde{p_i}(Q)}^{\infty} D_i(p)dp$, $\mathrm{PrT}(Q) = \widetilde{p_2}(Q)(1-k)Q - \widetilde{p_1}(Q)Q$ – прибыль сетевой системы. Затраты, связанные с созданием СПТ, задаются функцией вида $OC(Q) = 0$, если $Q = 0$, $OC(Q) = c_f + c_v(Q)$, если $Q > 0$, где $c_f > 0$ – фиксированные затраты, не зависящие от пропускной способности; $c_v(Q)$ – переменные затраты, $c_v(0) = 0$, эта функция выпукла и монотонно возрастает по Q. Функция полного общественного благосостояния $TW(Q)$ с учетом затрат имеет вид $TW(Q) = W(Q) - OC(Q)$. Для решения задачи об оптимальном значении Q^*, максимизирующем общественное благосостояние, исследованы свойства функции $TW(Q)$. В следующем утверждении установлены свойства функции $W(Q)$.

Утверждение 2.3.1. *Для производной функции* $W(Q)$ *справедливо следующее представление:* $W'(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q)$*. Функция* $W(Q)$ *во-*

гнута и монотонно возрастает при $Q \le \widehat{Q}$.

Далее получены условия для определения оптимального значении Q^*.

Утверждение 2.3.2. *Если $(1-k)\widetilde{p_2}(0)-\widetilde{p_1}(0) \le c_v'(0)$, то оптимальное значение пропускной способности $Q^* = 0$. В противном случае локальный максимум достигается при значении Q^{*L}, которое определяется из условия $(1-k)\widetilde{p_2}(Q^{*L}) - \widetilde{p_1}(Q^{*L}) = c_v'(Q^{*L})$ и удовлетворяет неравенству $Q^{*L} < \widehat{Q}$. Если $TW(Q^{*L}) < TW(0)$, то $Q^* = 0$. Если выполнено обратное неравенство, то $Q^* = Q^{*L}$.*

Для определения оптимального значения пропускной способности Q^* необходимо сравнить значение функции общественного благосостояния $TW(0)$ при отсутствии СПТ со значением в точке локального максимума $TW(Q^{*L})$.

Раздел 2.4 посвящен двухузловому аукциону в условиях несовершенной конкуренции. В нем уточняются результаты относительно свойств и структуры множества равновесий Нэша для модели двухузлового аукциона. **Утверждение 2.4.1** устанавливает условия, в которых при любом значении пропускной способности существует не более одного равновесия. Показано, что по мере увеличения пропускной способности сначала в равновесии ограничение пропускной способности активно, затем устанавливаются узловые цены, соотношение которых соответствует коэффициенту потерь, далее поток стабилизируется и ограничение пропускной способности неактивно.

В разделе 2.5 предложен метод расчета оптимальной с точки зрения общественного благосостояния пропускной способности системы перемещения товара между двумя узлами в условиях несовершенной конкуренции. Исследовано поведение функции общественного благосостояния в зависимости от пропускной способности. Доказано, что в равновесиях с активными ограничениями пропускной способности можно выделить промежутки, на каждом из которых функция общественного благосостояния вогнута. Определены условия для нахождения точек локального максимума на каждом из этих промежутков. Для решения задачи поиска оптимальной пропускной способности СПТ следует провести перебор по этим точкам.

Третья глава посвящена решению задачи максимизации общественного благосостояния для некоторых сетевых структур, а также определению качественных закономерностей функционирования сетевых рынков с последовательным соединением узлов.

В разделе 3.1 рассмотрен сетевой рынок, на котором два локальных узла соединены несколькими линиями передач и предложен алгоритм, позволяющий определить оптимальные пропускные способности передающих линий. Как и в главе 2, каждый локальный рынок i описывается множеством производителей A_i, $C^a(v)$ – функция затрат производителя a, $D_i(p)$ – функция спроса на рынке i. Пусть L – конечное множество линий передачи, соединяющих рынки 1 и 2. Каждая линия $l \in L$ характеризуется исходной пропускной способностью Q_0^l и функцией затрат $E^l(Q^l)$ на увеличение пропускной способности с Q_0^l до $Q^l > Q_0^l$: $E^l(Q_0^l) = 0$, $E^l(Q^l) = e_f^l + e_v^l(Q^l - Q_0^l)$ при $Q^l \neq Q_0^l$, где $e_v^l(\Delta Q^l)$ – выпуклая возрастающая функция, задающая переменные затраты, $e_v^l(0) = 0$; e_f^l – постоянные затраты; $\Delta Q^l \stackrel{\text{def}}{=} Q^l - Q_0^l$. Общая пропускная способность сети равна сумме пропускных способностей линий $Q = \sum_{l \in L} Q^l$. Обозначим $\overrightarrow{Q} = (Q^l, l \in L)$. Задача максимизации общественного благосостояния заключается в поиске

$$\overrightarrow{Q^*} = \{Q^{l*}, l \in L\} = \mathrm{Argmax}_{(Q^l, l \in L)} \{W\Big(\sum_{l \in L} Q^l\Big) - \sum_{l \in L} E^l(Q^l)\}, \qquad (5)$$

где функция $W(Q)$ опреляется, как в главе 2. Пусть $\overline{L}$ – фиксированное множество линий, пропускная способность которых увеличена. Тогда исходная задача сводится к нахождению

$$\max_{\overrightarrow{Q}^{\overline{L}}} \{W\Big(\sum_{l \in \overline{L}} Q^l + \sum_{l \notin \overline{L}} Q_0^l\Big) - \sum_{l \in \overline{L}} e_v^l(\Delta Q^l)\}. \qquad (6)$$

Решение $\overrightarrow{Q}^*(\overline{L})$ может быть найдено из следующих условий первого порядка:

$$\forall l \in \overline{L} \quad \text{если} \quad \Delta Q^{l*} > 0, \quad \text{то} \quad {c_v^l}'(\Delta Q^{l*}) = W'\big(\sum_{l\in L} Q_0^l + \sum_{l\in\overline{L}} \Delta Q^{l*}\big),$$

$$\text{если} \quad \Delta Q^{l*} = 0, \quad \text{то} \qquad {c_v^l}'(0) \geq W'\big(\sum_{l\in L} Q_0^l + \sum_{l\in\overline{L}} \Delta Q^{l*}\big).$$

Сложность заключается в выборе оптимального множества L^*, отвечающего решению исходной задачи. Следующий результат позволяет сократить перебор возможных вариантов. Обозначим $TW(\overline{L})$ максимум общественного благосостояния для задачи (6).

Утверждение 3.1.1. *Пусть $L' \subset \overline{L}$ и выполнено следующее условие: $TW(L') \geq TW(\overline{L})$. Тогда существует L^* такое, что $\overline{L} \not\subset L^*$.*

Исходя из утверждения 3.1.1, предложен алгоритм, позволяющий эффективным образом найти оптимальное множество $\overline{L}^*$. Шаг 1. Положим $\mathfrak{L}_\mathbf{1} = \{l,$ для которых $TW(l) > TW(\emptyset)\}$. Шаг $k = 2, 3\ldots$. Пусть уже определены множества $\mathfrak{L}_{k-1}$ наборов $L_{k-1} = \{l_1, \ldots l_{k-1}\}$ из $k-1$ элементов, таких что $TW(L_{k-1}) > TW(\overline{L})$ для любого $\overline{L} \subset L_{k-1}$. Теперь определим множество $\mathfrak{L}_k$ наборов L_k из k элементов, таких что для любого $L_{k-1} \subset L_k$ выполняются следующие условия: $L_{k-1} \in \mathfrak{L}_{k-1}$ и $TW(L_{k-1}) < TW(L_k)$.

Утверждение 3.1.2. *Для каждого множества $\mathfrak{L}_k$ рассмотрим максимальные наборы $(l_1, \ldots, l_k)$, такие что для любого l_{k+1} набор $(l_1, \ldots, l_{k+1})$ не принадлежит $\mathfrak{L}_{k+1}$. Выберем среди них оптимальный $(\overrightarrow{l}^k)^*$ и найдем $k^* = argmax_k TW((\overrightarrow{l}^k)^*)$. Указанный набор $(\overrightarrow{l}^{k^*})^*$ и будет соответствовать решению задачи (5).*

В разделе 3.2 предложен метод решения оптимизационной задачи для случая, когда рынок делится на 2 субрынка, на каждом из которых устанавливается единая цена, и активны ограничения пропускной способности линий, соединяющих различные субрынки. Пусть рынку соответствует граф, включающий множество узлов N и множество ребер $L \subseteq N \times N$. Каждый узел характеризуется функциями спроса и предложения, как и в предыдущей модели. Каждое ребро $l \in L$ описывается исходной пропускной способностью Q_0^l и функцией затрат на увеличение пропускной способности $E^l(Q)$. В то время как ограничения пропускной способности играют существенную роль, на ряде рынков электроэнергии потери при передаче малы (составляют менее 1 % для некоторых рынков). Ниже рассмотрим случай, когда коэффициенты потерь $k_l = 0$, $l \in L$. При заданном векторе $\overrightarrow{Q} = \{Q^l, l \in L\}$ цены конкурентного равновесия $p_i(\overrightarrow{Q})$, $i \in N$, определяются из системы

$$\forall i \in N \quad S_{iW}(p_i) = D_i(p_i) + q_i,$$

$$\forall i, j \in N \quad |q_{ij}| \leq Q_{ij},$$

$$\text{если} \quad p_j > p_i, \quad \text{то} \quad q_{ij} = Q_{ij},$$

где $q_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_{ij}$, q_{ij} – поток из узла i в узел j, $q_{ij} = -q_{ji}$. Задача максимизации общественного благосостояния заключается в нахождении $\overrightarrow{Q}^* = \{Q^{l*}, l \in L\} = \operatorname{Argmax}_{(Q^l, l \in L)}\{W^N(\overrightarrow{Q}) - \sum_{l \in L} E^l(Q^l)\}$, где функция общественного благосостояния без учета затрат на увеличение пропускной способности $W^N(\overrightarrow{Q}) = \sum_{i \in N} CS_i^N(\overrightarrow{Q}) + \sum_{i \in N} Pr_i^N(\overrightarrow{Q}) + T^N(\overrightarrow{Q})$ состоит из потребительских выигрышей $CS_i^N(\overrightarrow{Q})$, прибылей производителей $Pr_i^N(\overrightarrow{Q})$ на каждом из рынков, которые определяются, как в главе 2 с заменой $\widetilde{p}_i(Q)$ на $p_i(\overrightarrow{Q})$, и прибыли транспортной системы $T^N(\overrightarrow{Q}) = \sum_{(i,j): p_j(\overrightarrow{Q}) > p_i(\overrightarrow{Q})}(p_j(\overrightarrow{Q}) - p_i(\overrightarrow{Q}))Q_{ij}$.

Утверждение 3.2.1. *В равновесии рынок разбивается на $m \in \{1, \ldots, |N|\}$ субрынков так, что на каждом субрынке $i = 1, \ldots, m$ устанавливается единая цена $p(i)$ и все ограничения пропускной способности на ребрах, связывающих различные субрынки, являются активными.*

Если при исходном векторе $\overrightarrow{Q_0}$ в равновесии $m = 1$, то сеть является оптимальной. Пусть в исходном состоянии $\overrightarrow{Q_0}$ рынок разбивается на 2 субрынка и равновесные цены удовлетворяют неравенству $p(1) < p(2)$. Пусть $\widehat{L} = L^{12}$ – множество ребер, соединяющих субрынки 1 и 2, N^r – множество узлов, принадлежащих субрынку r, $\widehat{S}^r(p) = \sum_{i \in N^r} S_{iW}(p)$, $\widehat{D}^r(p) = \sum_{i \in N^r} D_i(p)$ – функции общего спроса и предложения для субрынка $r = 1, 2$. Рассмотрим задачу оптимизации передающей сети для двухузлового рынка $\widehat{M}$ с указанными параметрами $\widehat{L}$, $\widehat{S}^r(p)$, $\widehat{D}^r(p)$. Решение этой задачи может быть получено с помощью алгоритма, приведенного в прошлом разделе. Пусть решению соответствуют значения $\widehat{Q}^{l*}$, $l \in L^{12}$ и цены $p^*(1) < p^*(2)$.

Рассмотрим задачу поиска конкурентного равновесия для субрынков 1 и 2 при заданной структуре потоков $\overrightarrow{Q}^{12*} = (\widehat{Q}^{l^*}, \ l \in L^{12})$ без учета ограничений на перетоки внутри субрынков. В этом случае цены конкурентного равновесия $p(l)(\overrightarrow{Q}^{12*})$ и потоки внутри субрынков $q_{ij}(\overrightarrow{Q}^{12*})$, $i, j \in N^l$, $l = 1, 2$, определяются из системы

$$\forall i \in N_1 \quad S_{iW}(p(1)) = D_i(p(1)) + \sum_{j \in N_1 \setminus \{i\}} q_{ij} + \sum_{j \in N_2} \widehat{Q}^*_{ij}, \tag{7}$$

$$\forall i \in N_2 \quad S_{iW}(p(2)) = D_i(p(2)) + \sum_{j \in N_2 \setminus \{i\}} q_{ij} - \sum_{j \in N_1} \widehat{Q}^*_{ij}. \tag{8}$$

Утверждение 3.2.2. *Пусть существует решение задачи (7)-(8) для субрынков, при котором потоки q^*_{ij}, $i, j \in N^l$, $l = 1, 2$, удовлетворяют ограничениям $q^*_{ij} \le Q^0_{ij}$. Тогда решение задачи для двухузлового рынка $\widehat{M}$ соответствует оптимальной сетевой структуре для исходного рынка.*

Разделы 3.3 и 3.4 посвящены исследованию рынка с последовательным соединением узлов в условиях совершенной и несовершенной конкуренции соответственно. Найдены значения, $\overline{Q}_{ii+1}$ и $\widetilde{q}_{ii+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, такие что при $Q_{ii+1} < \overline{Q}_{ii+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, направления потоков соответствуют соотношению цен для изолированных рынков, а при $Q_{ii+1} > |\widetilde{q}_{ii+1}|$, $i = \overline{1, n-1}$, и достаточно малых коэффициентах потерь структура потоков такая же, как в ситуации, когда ограничения пропускной способности и потери несущественны.

В Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации. В результате диссертационного исследования решена актуальная задача по разработке новой теоретико-игровой модели и метода расчета совершенного подыгрового равновесия для двухэтапного рынка, а также методов расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара с точки зрения максимизации общественного благосостояния, имеющая значение для развития математических моделей форвардных и сетевых рынков. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

– разработана теоретико-игровая модель двухэтапного рынка с учетом присутствия на рынке арбитражеров, а также случайного фактора, влияющего на исход торгов на спотовом рынке;

– разработан метод расчета совершенного подыгрового равновесия для указанной теоретико-игровой модели двухэтапного рынка;

– получены необходимые условия оптимальности и разработаны методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния.

Список публикаций

1. Васин А. А., Дайлова Е. А. Анализ краткосрочной эффективности механизмов оптового рынка электроэнергии // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2013. — № 2(18). — С. 35–60.
2. Васин А. А., Дайлова Е. А. Двухузловой рынок. Оптимизация системы перемещения товара // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 14–23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2014. — С. 31.
3. Васин А. А., Дайлова Е. А. Об оптимальной пропускной способности си-

стемы перемещения товара на двухузловом рынке // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2014. — № 3. — С. 40–45.

4. Васин А. А., Дайлова Е. А. Теоретико-игровая модель взаимодействия агентов на двухэтапном рынке // Математическая теория игр и ее приложения. — 2012. — Т. 4, Вып. 4. — С. 3–22.
5. Васин А. А., Дайлова Е. А. Теоретико-игровая модель двухэтапного рынка со случайным фактором // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 29–31 октября 2012 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс. — 2012. — С. 38.
6. Дайлова Е. А. Математическая модель оптимального поведения производителей, потребителей и посредников на двухэтапном рынке // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2011 года. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2011. — С. 41–42.
7. Дайлова Е. А. Многоэтапный аукцион как инструмент ограничения рыночной власти производителей. Математическая модель и оптимальные стратегии // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 28 октября — 1 ноября 2013 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс. — 2013. — С. 34.
8. Дайлова Е. А. Модель оптимального поведения агентов на двухэтапном рынке // Ломоносов – 2013: XX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых; секция «Вычислительная математика и кибернетика»: Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 9–12 апреля 2013 г.: Сб. тезисов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2013. — С. 68—69.
9. Daylova E., Vasin A. Determination of transmission capacity for a two-node market // Procedia Computer Science. 2nd International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2014. — Vol. 31. — P. 151–157.

10. Daylova E., Vasin A. Estimation of the impact of forward contracts on producers' market power // EURO/INFORMS 26th European Conference on Operational Research. Rome 1-4 July, 2013, Sapienza University of Rome. — 2013. — P. 181.
11. Daylova E., Vasin A. Game-theoretic analysis of equilibrium in a two-stage market // VII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2013): Moscow, October 15–19, 2013: Proceedings. — Vol. 1. — Moscow: MAKS Press. — 2013. — P. 231–234.
12. Daylova E., Vasin A. Two-stage market with a random factor // International Annual Conference of the German Operation Research Society 2012. Energy, Markets and Mobility. September 4–7, 2012, Leibniz University of Hannover. — 2012. — P. 129.
13. Daylova E., Vasin A. Two-stage market with a random factor// Operation Research Proceedings 2012. Selected Papers of the International Annual Conference of the German Operations Research Society (GOR), Leibniz Universitat Hannover, Germany, September 5-7, 2012. — Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. — 2012. — P. 217–223.