Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Дайлова Екатерина Александровна

Теоретико-игровые модели форвардных и сетевых рынков однородного товара

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Васин Александр Алексеевич

Москва – 2014

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Теория игр и математическая экономика широко применяются при решении проблем разработки и внедрения рыночных механизмов. Теоретический анализ и использование математических моделей необходимо для успешного развития рыночной экономики. Новые задачи возникают не только для стран, которые сравнительно недавно вступили на путь рыночной экономики, но и для стран с развитой рыночной экономикой. Важным примером является развитие оптовых рынков электроэнергии, которые более 20 лет назад начали развиваться в целом ряде стран. Они создавались на базе государственных компаний или частных компаний, которые были под жестким государственным регулированием. Тенденция к дерегулированию рынка электроэнергии росла, и в 90-х годах либерализация охватила многие страны. В настоящее время во многих странах созданы конкурентные рынки электроэнергии. Преимуществами введения конкурентных рынков являются обеспечение стимулов для минимизации затрат, а также способность снижения среднего уровня цен [16].

Важной задачей при формировании и построении рынков однородного товара следует считать ограничение рыночной власти крупных производителей. Проблема рыночной власти крупных компаний наиболее остро проявляется на рынках электроэнергии, ввиду ее специфики как товара. Стандартные способы борьбы с рыночной властью, например, такие как дробление крупных компаний, нежелательны в области электроэнергетики, так как это приводит к повышению издержек и себестоимости электроэнергии, а также снижению надежности электроснабжения. Альтернативный подход – это выбор механизма, позволяющего минимизировать отклонение рынка от конкурентного равновесия, которое является оптимальным с точки зрения общественного благосостояния. Одним из таких механизмов является рынок форвардных контрактов [17, 25]. Однако, эффективность многоэтапного аукциона как инструмента борьбы с рыночной властью производителей доказана с допущениями, которые не соответствуют реальным рыночным условиям. Предположения Бушнелла [25] о равенстве цен на форвардном и спотовом рынках, а также о приоритете потребителей с высокими резервными ценами при покупке товара на форвардном рынке не выполняются на практике и требуют уточнения. Исходя из вышеперечисленного, возникает актуальная задача построения новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка с более реалистичными допущениями.

Кроме того, рынок электроэнергии России имеет ярко выраженную сетевую структуру. Использование математических средств позволяет прогнозировать, в каких случаях соединение локальных рынков целесообразно. При этом значимой практической задачей является расчет оптимальных параметров системы перемещения товара с точки зрения максимизации общественного благосостояния. В то время как генерация в значительной степени приватизирована, сетевая структура остается в собственности государства, и развитие системы перемещения товара определяется решениями государственных органов управления. Поэтому возникает актуальная задача создания эффективных средств для расчета оптимальных параметров развития инфраструктуры рынков однородного товара, в частности электроэнергии.

Цель работы – разработка новой теоретико-игровой модели и метода расчета совершенного подыгрового равновесия для двухэтапного рынка, а также методов расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара с точки зрения максимизации общественного благосостояния.

Объектом исследования являются математические модели экономических механизмов взаимодействия производителей, потребителей и арбитражеров на рынках однородного товара.

Предметом исследования являются теоретико-игровые и оптимизационные модели двухэтапных и сетевых рынков с учетом перспективы их совершенствования и развития.

При выполнении диссертационного исследования для достиже-

ния поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработка новой теоретико-игровой модели взаимодействия агентов на двухэтапном рынке с учетом присутствия арбитражеров, а также наличия случайного фактора, который влияет на исход торгов на спотовом рынке.

2. Нахождение совершенного подыгрового равновесия для разработанной модели, определение условий его существования и получение оценки эффективности введения рынка форвардных контрактов как механизма снижения рыночной власти производителей.

3. Исследование свойств функции общественного благосостояния двухузлового рынка и его равновесия в условиях совершенной и несовершенной конкуренции в зависимости от пропускной способности системы перемещения товара; решение задачи максимизации общественного благосостояния для некоторых сетевых структур.

При выполнении исследования использовались

– математические методы теории игр;

– методы оптимизации и экономико-математического моделирования;

– математический аппарат исследования операций.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в том, что

– при построении новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка помимо случайного фактора формирования цен учтены объемы, предлагаемые арбитражерами, которые либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию;

– найдено совершенное подыгровое равновесие для построенной модели двухэтапного рынка;

– разработаны новые методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния как в условиях совершенной конкуренции, так и в условиях олигополии.

Практическая значимость исследования заключается в

– оценке эффективности рынка форвардных контрактов как механизма снижения рыночной власти производителей;

– разработке средств расчета оптимальных параметров развития инфраструктуры рынков однородного товара, в частности электроэнергии.

Обоснованность научных положений. Теоретические положения диссертации сформулированы в виде утверждений и строго доказаны.

На защиту выносятся следующие результаты:

– теоретико-игровая модель двухэтапного рынка с учетом присутствия на рынке арбитражеров, а также случайного фактора, влияющего на исход торгов на спотовом рынке;

– метод расчета совершенного подыгрового равновесия для указанной теоретико-игровой модели двухэтапного рынка;

– необходимые условия оптимальности и методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международной ежегодной конференции немецкого сообщества исследования операций (Ганновер, 2012), на научных конференциях «Тихоновские чтения» (Москва, 2012 и 2013), на XX международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2013» (Москва, 2013), на 26-ой конференции международной федерации обществ исследования операций (Рим, 2013), на VII международной конференции по исследованию операций (Москва, 2013), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014), на II международной конференции по информационным технологиям и количественному менеджменту (Москва, 2014).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации имеется тринадцать публикаций [3–7, 11–13, 26–30]. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырех статьях журналов из перечня ВАК [3, 5, 6, 26]. В работах [4–7, 26–30] Дайловой Е. А. принадлежат формулировки и доказательства результатов, Васину А. А. принадлежит постановка задачи и проверка результатов. В работе [3] Дайловой Е. А. принадлежат обзор теоретико-игровых моделей механизмов рынка электроэнергии и результаты по форвардным рынкам.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Общий объём рукописи составляет 116 страниц и включает 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 53 наименования.

Обзор известных теоретико-игровых моделей механизмов рынка электроэнергии

На протяжении долгого времени электроснабжение в отличие от других отраслей экономики представляло собой естественную монополию, которая контролировалась и регулировалась государством. Монополистами, как правило, были интегрированные компании, которые обеспечивали предоставление услуг по электроснабжению. Даже в странах со зрелой рыночной экономикой продажа электроэнергии проходила по регулируемым ценам.

Одним из главных недостатков регулирования является то, что в отличие от конкурентных рынков оно не может создавать стимулы для производителей, которые минимизировали бы затраты и позволяли удерживать цены на уровне маржинальных издержек [16]. В условиях монополии в электроэнергетике стали возникать такие негативные тенденции, как повышение тарифных цен, ослабление мотиваций для инвестирования. По мере развития технологий и техники в системах передачи электроэнергии появилась возможность для функционального разделения вертикально интегрированных компаний. Лишь в 80-х годах XX века стало понятно, что электроэнергетика может представлять собой структуру, отличную от естественной монополии [15]. Открылась возможность повышения эффективности работы отрасли за счет введения конкурентных отношений. Более 20 лет назад в целом ряде стран начали развиваться оптовые рынки электроэнергии. Они создавались на базе государственных компаний или частных компаний, которые были под жестким государственным регулированием. Тенденция к дерегулированию рынка электроэнергии росла, и в 90-х годах либерализация охватила многие страны. Как правило, создание оптового рынка электроэнергии происходило следующим образом: изменение структуры существовавшей ранее вертикально-интегрированной монополии, идентификация потенциально конкурентных секторов, выделение сектора генерации. В ряде стран оптовая торговля электроэнергией перестала быть естественной монополией. На место системы с регулируемым монопольным производством пришли свободные оптовые рынки. Появилась возможность выделения производства электроэнергии в отдельный конкурентный сектор.

В настоящее время либерализация электроэнергетической отрасли уже проведена во многих странах, созданы конкурентные рынки электроэнергии. Наиболее важной и сложной задачей процесса реформирования электроэнергетической отрасли России было создание эффективного конкурентного рынка электроэнергии. Постановлением Правительства РФ №526 от 11.07.2001 г. (с изменением от 01.02.2005 г.) одобрены «Основные направления реформирования электроэнергетики Российской Федерации». Согласно этому документу, рост энергоэффективности экономики и изменение инвестиционного климата в электроэнергетике невозможны без изменения сложившейся системы экономических отношений и проведения структурной реформы электроэнергетики. Нерешенность ряда проблем электроэнергетики могли привести к замедлению экономического роста страны. В качестве главной цели были определены повышение эффективности производства и потребления электроэнергии, обеспечение устойчивого функционирования и развития экономики и социальной сферы. Для создания конкурентного рынка электроэнергии в России было необходимо изменить структуру отрасли путем выделения конкурентных и монопольных видов деятельности, создания условий для развития конкуренции, формирования групп конкурирующих участников рынка в секторе производства и среди покупателей электроэнергии. Основным инструментом формирования новой рыночной структуры являлось создание и внедрение механизмов представления услуг на основании торговли.

Основой для дальнейшего развития отношений в сфере электроэнергетики стало принятие следующих федеральных законов: Федерального закона от 26 марта 2003 года №35-ФЗ «Об электроэнергетике», Федерального закона от 26 марта 2003 года №36-ФЗ «Об особенностях функционирования электроэнергетики в переходный период и о внесении изменений в некоторые законодательные акты Российской Федерации и признании утратившими силу некоторых законодательных актов Российской Федерации в связи с принятием федерального закона «Об электроэнергетике» и Федерального закона от 26 марта 2003 года №37-ФЗ «О внесении изменений и дополнений в часть вторую гражданского кодекса Российской Федерации». Сейчас актуальным является Федеральный закон РФ от 06.12.2011 г. №394-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «Об электроэнергетике».

В силу ряда специфических особенностей рынка электроэнергии его формирование представляет собой сложную проблему. В отличие от многих других товаров электроэнергию нельзя хранить в значительных объемах. Кроме того, в каждый момент времени потребление электроэнергии равно ее производству. Существенным фактором является также наличие физических ограничений при передаче электроэнергии.

Важной задачей при формировании и построении рынков электроэнергии следует считать ограничение рыночной власти крупных генерирующих компаний. Проблема рыночной власти крупных компаний остро проявляется ввиду перечисленных выше специфических свойств электроэнергии как товара. Для поставщика может оказаться выгодным изъятие производственных мощностей. В результате неконкурентного поведения будет произведено меньше электроэнергии, чем можно было прибыльно продать по рыночной цене при ценопринимающем поведении [16].

Используя рыночную власть, крупные поставщики имеют возможность в собственных интересах отклонять цену от конкурентного уровня. В конкурентном равновесии на рынке устанавливается цена, балансирующая спрос и предложение, а участникам рынка присуще ценопринимающее поведение. При конкурентном равновесии достигается максимум суммы потребительского излишка и прибыли производителей [31, 52]. В следствии отклонения рынка от состояния конкурентного равновесия происходит рост рыночных цен, снижение объемов выпуска электроэнергии, сокращение общественного благосостояния, потеря части прибыли для экономики в целом. То есть проявляются те эффекты, которые обусловлены монополией. Эти негативные явления характерны также для структур, которые называются олигополиями, когда есть несколько крупных компаний, каждая из которых контролирует достаточно большую часть рынка. Проблема экономической теории и математической экономики состоит в оценке этих негативных явлений и минимизации снижения общественного благосостояния, связанного с монопольными эффектами.

Проблема рыночной власти существует объективно для различных товаров. Основное противоречие, которое возникает между производителями и потребителями заключается в том, что продавцы хотят продать товар по высоким ценам, а потребители хотят приобрести товар по низким ценам. В результате применения производителями рыночной силы происходит перераспределение общественного благосостояния в их пользу в ущерб покупателям. Следствием использования рыночной власти является снижение эффективности функционирования рынка [16]. Из-за высокой цены потребители покупают товар в меньшем объеме, чем они приобрели бы при оплате по цене конкурентного равновесия. Неэффективность функционирования рынка заключается в том, что в результате применения рыночной власти полезность от покупки товара потребителями снижается сильнее, чем увеличивается прибыль фирм-производителей. Стандартный прием в борьбе с рыночной властью крупных компаний – применение антимонопольного регулирования.

Наиболее простым способом регулирования можно считать дробление рынка. Известны прецеденты, когда дробление крупных компаний действительно приводило к уменьшению рыночной власти. Но такой подход нежелателен применительно к рынкам электроэнергии. Дробление на мелкие компании существенно снижает надежность снабжения электроэнергией, повышает издержки и себестоимость электроэнергии. Альтернативный способ снижения рыночной власти крупных компаний – это выбор механизма, который позволит минимизировать отклонение рынка от конкурентного равновесия, которое является оптимальным с точки зрения общественного благосостояния.

На реальных рынках торги обычно проходят в форме аукциона единой цены. Аукцион Курно [19, 20, 47, 50] следует рассматривать как частный случай такого аукциона. Его особенность заключается в том, что заявка подается независимо от цены. Из-за такого жесткого допущения в чистом виде аукцион Курно на практике не применяется. Однако как теоретическая база он оказался важным, так как свойства многих реальных аукционов связаны с результатами по аукциону Курно. Стратегией каждого производителя на аукционе Курно является объем предложения товара, представляющий собой константу. Рыночная цена зависит от выбранных стратегий и определяется из баланса спроса и суммарного фактического предложения. Для аукциона Курно получены оценки, которые показывают насколько отклоняется равновесная по Нэшу цена от Вальрасовской цены [50]. Эта оценка вытекает из необходимого условия равновесия по Нэшу для аукциона Курно. Во многих случаях его удается разрешить, то есть выразить объем по Курно в зависимости от цены. Таким образом может быть получена функция, которую называют функцией предложения Курно. Аппарат функций предложений Курно позволяет эффективно строить равновесие по Нэшу для достаточно сложной структуры производственных мощностей. Для симметричной олигополии в равновесии Нэша относительное отклонение цены от предельных издержек обратно пропорционально эластичности спроса и общему числу фирм на рынке. Эту величину называют индексом Лернера [41]. Чем выше значение индекса Лернера, тем в большей мере характеристики рынка отклоняются от условий совершенной конкуренции.

На аукционах единой цены (далее АЕЦ) допускаются любые заявки в определенном классе. Наиболее полный анализ АЕЦ со ступенчатыми функциями предложения проведен в работе [51]. При заданной функции спроса существует множество равновесий Нэша, причем их можно разделить на несколько типов. Первый тип – функция спроса пересекает функцию фактического предложения (суммарную заявку) на горизонтальном участке последней. В этом случае если равновесие существует, то объемы предложения в равновесии соответствуют равновесию Курно. Справедливо и обратное утверждение: равновесию Курно всегда соответствует равновесие на аукционе единой цены. Для равновесий первого типа необходимое условие равновесия Нэша точно такое же, как для аукциона Курно. Поэтому и оценка относительного отклонения равновесий цены от цены Вальраса, которая вытекает из этого условия, совпадает с оценкой, полученной для аукциона Курно.

Помимо равновесий первого типа, существуют другие равновесия. Второй тип – функция спроса пересекает функцию фактического предложения (суммарную заявку) на вертикальном участке последней. Третий тип – функция спроса пересекает функцию фактического предложения (суммарную заявку) в точке перехода последней с горизонтального участка на вертикальный. В работе [51] доказано, что можно уравновесить любую цену, лежащую между ценой Вальраса и ценой Курно. Однако равновесия второго и третьего типа обладают следующим недостатком: они являются неустойчивыми по отношению к адаптивной динамике стратегий. В таких равновесиях либо отдельная компания, либо все производители вместе устанавливают барьер, который препятствует повышению цены. В случае, когда стоит высокий барьер по рыночной цене, попытка повысить ее за счет снижения предлагаемого объема крайне невыгодна, потому что переход через барьер связан с резким падением объема продаж для той компании, которая попытается повысить цену. Неустойчивы такие равновесия в том смысле, что никто не заинтересован с точки зрения собственной прибыли в поддержании этого барьера. Если допустимы стохастические изменения заявки, то этот барьер будет снижаться и при этом для игроков это будет либо безразлично, либо выгодно. В конечном итоге за счет адаптивной динамики произойдет скатывание от этих равновесий к равновесию Курно.

Широкий круг работ [22, 35, 39] связан с моделированием аукциона функций предложений (далее АФП) с непрерывными заявками, на котором функции предложения являются монотонными возрастающими. Фундаментальной является работа [39]. В ней рассмотрены как случай с фиксированной функцией спроса, так и случай, когда функция спроса включает случайный параметр. Авторами показано, что при фиксированном спросе можно получить широкое множество равновесий. Это аналог результата, справедливого для АФП с кусочно-постоянными функциями: любую цену из диапазона выше, чем цена Вальраса можно уравновесить, используя любые, в том числе немонотонные функции предложения. Если ввести ограничение на монотонность функций предложения, то можно уравновесить любую цену, лежащую между ценой Вальраса и ценой Курно. Чтобы получить более конкретные результаты, в ряде исследований [22, 35] авторы стали рассматривать линейные функции предложения вместо произвольных. Для линейных функций предложения [22, 35] получены зависимости для расчета единственного равновесия Нэша. В работе [1] аппарат линейных функций предложения применен для анализа российского рынка. Была построена линейная аппроксимация функций предельных затрат и спроса. Исходя из этих аппроксимаций, был проведен анализ аукциона с линейными функциями предложения. Рассчитаны равновесные заявки и показано, что равновесная цена на такого рода аукционе значительно ближе к вальрасовской цене, чем равновесие по Курно. Результаты анализа аукциона функций предложения показывают, что необходима оценка возможности использования аппроксимации линейными функциями для моделирования реальных рынков. Обычно компания владеет несколькими генераторами с ограниченными производственными мощностями, которые отличаются по своим характеристикам. Предельные издержки в нулевом приближении являются постоянными на каждую единицу вырабатываемой электроэнергии. Когда производственные мощности наиболее эффективного генератора исчерпаны, происходит переход к использованию генератора с большей удельной себестоимостью. При этом предельные издержки изменяются скачками, которые нельзя адекватно учесть при использовании линейных функций для описания предельных издержек.

Известна теоретическая альтернатива рассмотренным выше аукционам в виде аукциона Викри [21, 51]. На аукционе Викри исход по объему определяется так же, как для аукциона единой цены. Отличие состоит в том, что оплата производится по резервным ценам. Резервная цена за добавочный объем рассчитывается как минимум из минимальных издержек, с которыми оставшиеся производители готовы этот объем производить, и максимальной цены, по которой потребители готовы оплатить этот объем. Аукцион Викри обладает рядом важных свойств. Во-первых, он соответствует принципу выявления [44]. У каждого участника есть доминирующая стратегия – подать заявку, которая соответствует его реальным издержкам. Кроме того, прибыль, которую получает каждая компания, – это ее вклад в суммарное благосостояние.

Особенность рынка электроэнергии состоит в том, что зачастую мощности генераторов и предельные затраты являются общеизвестной информацией. Неопределенностью является фактическая располагаемая мощность. Часть мощности может быть выведена из строя или находиться в ремонте. Производители могут манипулировать объемом реально располагаемой мощности. Это информация, которую точно знает только фирма-производитель. В работе [51] построен аналог аукциона Викри, который учитывает эту особенность. Авторы показали, что можно снизить резервные цены, по которым производится оплата производителям, так что у каждого из них сохранится доминирующая стратегия подавать заявку в соответствии с реальными затратам. То есть при этом можно существенно перераспределить благосостояние в пользу потребителей.

В работе [51] авторами проведено сравнение аукциона Курно и аукциона Викри для модели российского рынка. При значениях эластичности спроса, характерных для реальных рынков электроэнергии, цена Курно превышает цену Викри. Аукцион Викри в принципе представляет интерес, но на практике не применяется. Недостаток данного аукциона состоит в том, что раскрытие издержек для фирм невыгодно в долгосрочной перспективе. Сообщение истинных издержек дает преимущество аукционеру и другим партнерам при последующем взаимодействии с данным производителем.

Еще одна форма организации аукциона – это аукцион с оплатой по заявкам [32, 53]. На нем объемы определяются так же, как на аукционе единой цены, а оплата производится согласно ценам, указанным в заявке. При фиксированных заявках продавцов цена для потребителей снижается по сравнению с аукционом единой цены, на котором оплата производится по цене отсечения.

Недостаток формы организации аукциона с оплатой по заявкам состоит в том, что даже в условиях совершенной конкуренции подавать заявку, соответствующую реальным издержкам, нерационально. Рациональное поведение в том, чтобы угадать цену конкурентного равновесия и предложить по ней соответствующий объем, что сложно сделать в условиях неопределенности.

Анализ модели ценовой конкуренции Бертрана-Эджворта [18, 23, 32, 33], которая обладает свойствами, схожими со свойствами модели аукциона с оплатой по заявкам, показывает, что ситуация, при которой равновесия не существует, является типичной. В большинстве случаев это толкает продавцов к картельному сговору как к средству обеспечения стабильного функционирования рынка. При реализации картельного соглашения в явной или неявной формах возрастает рыночная власть производителей. Эти аргументы приведены в работе [53], автор которой не рекомендует использовать этот тип аукциона.

Одним из важнейших механизмов сокращения рыночной власти производителей является рынок форвардных контрактов. Одной из первых работ, в которых исследовалось воздействие форвардного рынка на уровень конкуренции на олигополистических рынках, является работа [17]. В качестве структуры рынка рассматривается симметричная дуополия. Сначала проходят несколько раундов форвардной торговли, а потом один раунд спотовых торгов. Предполагается равенство цен на всех этапах. Результаты показывают, что введение форвардных рынков усиливает конкуренцию между производителями, а также повышает общественное благосостояние. Авторами доказано, что чем больше число раундов форвардной торговли, тем в большей мере снижается рыночная власть производителей. При стремлении числа этапов форвардной торговли к бесконечности исход стремится к конкурентному равновесию рынка. Джеймс Бушнелл [25] рассмотрел симметричную олигополию с n фирмами. Торги проходят в два этапа, причем, как и в работе [17], предполагается равенство форвардной цены и спотовой цены. Автором доказано, что введение форвардного рынка сокращает рыночную власть производителей в той же степени, как увеличение в n раз числа фирм-производителей. Таким образом, в результате введения рынка форвардных контрактов относительное отклонение цены от цены конкурентного равновесия сокращается в n раз. Однако, предположение Бушнелла о равенстве цен на форвардном и спотовом рынках является грубым допущением и не соответствует реальному состоянию цен на рынках электроэнергии [24]. На реальных рынках типична ситуация, когда спотовая цена ниже, чем цена на форвардном рынке. Однако порой имеют место ценовые скачки, в результате которых цена на спотовом рынке превышает форвардную цену. Очевидно, что спотовая цена имеет случайный характер и предположение о равенстве спотовой и форвардной цен не соответствует действительности. Кроме того, в модели Бушнелла предполагается, что на форвардном рынке приоритет при покупке товара имеют потребители с высокими резервными ценами. На реальных рынках такого специального рационирования нет. Исходя из изложенного, возникает необходимость построения новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка в условиях, максимально приближенных к реальным рынкам электроэнергии. По сравнению с работой [9] при построении новой теоретико-игровой модели двухэтапного рынка помимо случайного фактора формирования цен в диссертационной работе учтены объемы, предлагаемые арбитражерами, которые либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию.

Для рынков электроэнергии значимую роль при продажах играет сетевая структура. Производители и потребители находятся в разных узлах, при этом система перемещения товара (СПТ) между узлами имеет ограниченную пропускную способность. В [10, 36] получены методы расчета конкурентного равновесия для сетевого рынка. В [50] определены возможные типы равновесий для двухузлового рынка при несовершенной конкуренции. При этом остается нерешенной задача поиска оптимальных параметров СПТ с точки зрения общественного благосостояния. Такая постановка представляет теоретический и практический интерес, поскольку, в отличие от производства товара, развитие СПТ определяется решениями государственных органов управления, а не рыночными механизмами.

Глава 1

Теоретико-игровая модель взаимодействия агентов на двухэтапном рынке со случайным фактором

Данная глава посвящена построению и исследованию теоретико-игровой модели функционирования двухэтапного рынка с учетом случайного фактора, влияющего на цену спотовых торгов, а также объемов, предлагаемых арбитражерами.

В разделе 1.1 описаны необходимые результаты для одноэтапной модели рынка в условиях олигополии Курно.

В разделе 1.2 построена теоретико-игровая модель функционирования двухэтапного рынка. Помимо потребителей и производителей учтено присутствие на рынке еще одного типа агентов – арбитражеров, которые либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию. Арбитражеры действуют в условиях совершенной конкуренции. На исход торгов на спотовом рынке влияет случайный фактор, поэтому цена на спотовых торгах является случайной величиной.

Раздел 1.3 посвящен поиску оптимальных стратегий потребителей, производителей и арбитражеров на двухэтапном рынке со случайным фактором.

В разделе 1.4 получены условия существования равновесий в рассматриваемой модели. Проведено сравнение объемов продаж на форвардном и спотовом рынках. Кроме того, исследована зависимость рыночной власти компаний от параметров модели. Показано, что возможность заключения форвардных контрактов значительно снижает рыночную власть производителей. Таким образом, полученные результаты подтверждают эффективность рынка форвардных контрактов как механизма ограничения рыночной власти производителей.

В разделе 1.5 сначала рассмотрена модель двухэтапного рынка с единой ценой на спотовом и форвардном рынках в условиях асимметричной олигополии. Показано, как для нее рассчитывать совершенное подыгровое равновесие, а также отмечены некоторые проблемы существования и единственности равновесия. Затем проведено обобщение описанной в разделах 1.2-1.4 модели со случайным фактором, принимающим два значения, для случая асимметричной олигополии.

1.1. Одноэтапная модель рынка в условиях олигополии Курно

Сначала, следуя [2], приведем формальное изложение классической модели Курно для точечного рынка с множеством производителей A. Максимальный объем, который может выпустить производитель $a \in A$, составляет V^a. Функция $C^a(v)$ задает затраты производителя $a \in A$ в зависимости от выпущенного им объема $v \in [0, V^a]$. Функция спроса $D(p)$ известна всем агентам. Каждый производитель $a \in A$ выбирает объем выпуска $v^a \in [0, V^a]$, который представляет собой стратегию игрока $a \in A$. Тогда $\overrightarrow{v} = (v^a, a \in A)$ — набор выбранных стратегий. Рыночная цена $p(\overrightarrow{v})$ определяется из условия баланса фактического предложения и спроса: $p(\overrightarrow{v}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^a)$. Полученная игроком a прибыль $\pi^a(\overrightarrow{v}) = v^a p(\overrightarrow{v}) - C^a(v^a)$ составляет его выигрыш. Итак, модели олигополии Курно отвечает игра в нормальной форме: $\Gamma_C = \langle A, [0, V^a], \pi^a(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} \in \otimes_{a \in A}[0, V^a] \rangle$. Согласно определению, набор объемов выпуска $(v^{a^*}, a \in A)$ является равновесием Курно, если он представляет собой равновесие по Нэшу в игре Γ_C. При этом $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^{a*})$ — цена в равновесии Курно.

Для равновесия по Нэшу условием первого порядка является [2]

$$v^{a^*} \in (p^* - C^{a'}(v^{a*}))|D'(p^*)|, \text{ для любого } a, \text{ такого что } C^{a'}(0) < p^*, \qquad (1.1)$$

$$v^{a^*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p^*, \tag{1.2}$$

где в точках разрыва $C^{a'}(v) = [C^{a'}_-(v), C^{a'}_+(v)]$.

Набор $(p^*, v^{a*}, a \in A)$ представляет собой локальное равновесие Курно, если для него справедливы условия (1.1)–(1.2). Решение системы (1.1)–(1.2) задает функцию предложения Курно $S^a_C(p)$ [35] производителя a (при $p > 0$). Если функция спроса является вогнутой в области, где она положительна, то функция предложения Курно не убывает в этой области.

Практический интерес представляет ситуация, когда предельные издержки кусочно-постоянны: $C^a(0) = 0$, $C^{a'}(v) = c^a_i$ для $v \in (V^a_{i-1}, V^a_i)$, $i \in \overline{1,m}$, $V^a_0 = 0$, $V^a_m = V^a$, m – количество ступеней в функции предельных издержек. Такой вид предельных затрат соответствует ситуации, когда у производителя a имеется несколько производственных мощностей, причем каждая характеризуется максимальным объемом выпуска V^a_i и удельной себестоимостью c^a_i. Тогда в случае линейной функции спроса $D(p) = \max\{0, \overline{D} - dp\}$ функция предложения Курно принимает вид [2]:

$$S^a_C(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < c^a_1; \\ (p - c^a_1)d, & \text{если } (p - c^a_1)d \leq V^a_1; \\ V^a_1, & \text{если } (p - c^a_2)d < V^a_1 < (p - c^a_1)d; \\ (p - c^a_1)d, & \text{если } V^a_1 \leq (p - c^a_2)d \leq V^a_2; \\ V^a_2, & \text{если } (p - c^a_3)d < V^a_2 < (p - c^a_2)d; \\ \ldots & \\ V^a, & \text{если } (p - c^a_n)d > V^a. \end{cases} \tag{1.3}$$

Цена Курно p^* определяется из условия баланса спроса и предложения на рынке: $\sum_{a \in A} S^a_C(p^*) = D(p^*)$. В [51] установлены следующие условия существования единственного равновесия Нэша для модели Курно. Пусть для некоторого $M > 0$ функция спроса $D(p)$ положительна и эластичность спроса $e(p) \overset{\text{def}}{=} -pD'(p)/D(p)$ возрастает при $p \in (\widetilde{p}, M)$, где $\widetilde{p}$ — цена Вальраса;

$D(p) = 0$ при $p \geq M$. Тогда существует единственное равновесие Курно. Напомним, что вектор $(\widetilde{v^a}, a \in A)$ объемов выпуска является равновесием Вальраса и $\widetilde{p}$ — ценой Вальраса, если для любого производителя a выполнены условия $\widetilde{v^a} \in S^a(\widetilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Argmax}_{v^a}(v^a\widetilde{p} - C^a(v^a))$, $\sum_{a \in A} \widetilde{v^a} = D(\widetilde{p})$ [8].

В [2] получен следующий результат относительно отклонения исхода по Курно от исхода по Вальрасу: пусть $S^{a+}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S^a(p)\}$, $S(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in A} S^a(p)$, $e(p) \geq \widetilde{e}$ для любого $p \geq \widetilde{p}$, $\max_{a \in A} S^{a+}(\widetilde{p})/S(p) \leq 1/n$ и $\widetilde{e}n > 1$. Тогда $\widetilde{p}/p^* \geq 1 - 1/(\widetilde{e}n)$, $\sum_{a \in A} v^{a^*}/D(\widetilde{p}) \geq (1 - 1/(\widetilde{e}n))^{\widetilde{e}}$. Для локального равновесия Курно индекс Лернера каждой фирмы a удовлетворяет соотношению $L^{a*} \stackrel{\text{def}}{=} (p^* - C^{a'}(v^{a*}))/p^* = s^{a*}/e(p^*)$, где $s^{a*} = v^{a*}/D(p^*)$.

Справедлива следующая оценка [2]: $1 - \widetilde{p}/p^* \leq \max_a s^{a*}/e(p^*)$. Если предельные затраты крупнейшей компании одинаковы в равновесиях Вальраса и Курно, то эта оценка является точной. Например, это условие выполняется как равенство в случае симметричной олигополии с постоянными предельными издержками, а также в случае взаимодействия крупной фирмы с предельными издержками $c = \widetilde{p}$, доля которой равна β, с конкурентным окружением с меньшими предельными издержками и максимальной мощностью $V_F = (1 - \beta)D(p^*)$ [51].

1.2. Модель взаимодействия производителей, арбитражеров и потребителей на двухэтапном рынке

Перейдем к построению и исследованию теоретико-игровой модели функционирования двухэтапного рынка с учетом случайного фактора, влияющего на цену спотовых торгов, а также объемов, предлагаемых арбитражерами. За основу возьмем симметричную олигополию с постоянными предельными издержками c. Пусть на рынке присутствуют n фирм-производителей. Покупателем единицы товара является мелкий потребитель. Потребитель b описывается резервной ценой r_b, которая показывает максимальную цену, по которой потребитель готов совершить покупку. Функция спроса $D(p)$ задается плотностью распределения потребителей по резервным ценам $\rho(r)$: $D(p) = \int_p^{r_{max}} \rho(r)dr$.

Помимо производителей и потребителей, на рынке также присутствуют риск-нейтральные арбитражеры. Они либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию. Предполагается, что арбитражеры действуют в условиях совершенной конкуренции.

Опишем схему взаимодействия между агентами. Торговля проходит в два этапа: сначала на форвардном рынке, а потом на спотовом. На форвардном рынке фирмы предлагают объемы продажи q_a^f, $a \in \overline{1,n}$. Пусть $\overrightarrow{q^f} = (q_a^f, a \in \overline{1,n})$ – вектор объемов предложения. Обозначим q^f объем, предложенный всеми производителями на форвардном рынке: $q^f = \sum_{a=1}^n q_a^f$. Помимо производителей, товар могут предлагать арбитражеры. Если арбитражеры сначала продают контракты на форвардном рынке, а потом покупают товар на спотовом рынке для выполнения своих контрактных обязательств, то обозначим q_{arb} объем, предложенный арбитражерами на форвардном рынке, $q_{arb} > 0$. Если же арбитражеры сначала покупают контракты на форвардном рынке, потом продают товар на спотовом рынке, то величина $|q_{arb}|$ показывает, какой объем купили арбитражеры на форвардном рынке, $q_{arb} < 0$. Обозначим q_t^f количество товара, купленного потребителями на форвардном рынке.

Каждый потребитель b принимает решение об участии или неучастии в торгах на форвардном рынке. Подавая заявку, он указывает свою резервную цену r_b и покупает товар при рыночной цене, не превышающей его резервной цены. Обозначим $D^f(p)$ функцию спроса потребителей на форвардном рынке. Эта функция показывает число потребителей, которые решили покупать товар на форвардном рынке и у которых резервная цена превосходит p. Из условия $D^f(p^f) = q_t^f = q^f + q_{arb}$ находим цену на форвардном рынке p^f.

На спотовом рынке проходит аукцион Курно с функцией остаточного спроса потребителей $D^s(p)$, которую находим, исходя из стратегий агентов. Потребители, купившие товар на форвардном рынке, не участвуют в торгах на спотовом рынке. Поэтому $D^s(p) = D(p) - q_t^f$ при $p < p^f$, $D^s(p) = D(p) - D^f(p)$ при $p \geq p^f$. Производители предлагают объемы продаж на спотовом рынке q_a^s, $a \in \overline{1,n}$. Спотовая цена p^s, уравнивающая спрос и предложение, определяется из условия $D^s(p^s) + q_{arb} = \sum_{a=1}^{n} q_a^s$.

Между торговлей на форвардном рынке и торговлей на спотовом рынке происходят случайные события. Пусть случайный фактор принимает значения $i \in \overline{1,k}$ с вероятностями $w_i > 0$; $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Фирмы могут выбирать значение предложения на спотовом рынке в зависимости от этого случайного фактора. Стратегия фирмы задается набором $(q_a^f, q_a^s(i); i \in \overline{1,k})$, определяющим объем предложения на форвардном рынке и объем предложения на спотовом рынке в зависимости от реализации случайного фактора. В этом случае цена на спотовом рынке является случайной величиной, значение p_i которой при реализации значения i случайного фактора находим из соотношения: $D^s(p_i) + q_{arb} = \sum_{a=1}^{n} q_a^s(i)$, $i \in \overline{1,k}$. Упорядочим значения i по возрастанию p_i: $p_{min} = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = p_{max}$. При заданных стратегиях арбитражеров и потребителей распределение рассматриваемой случайной величины зависит только от стратегий фирм-производителей.

1.3. Расчет оптимальных стратегий агентов

Определим стратегии участников взаимодействия, исходя из известных принципов рационального поведения в многошаговых конфликтных ситуациях. Поскольку предполагается выполнение условия совершенной конкуренции для арбитражеров и для потребителей, то их стратегии определим, исходя из принципа экономического равновесия [14]. Каждый арбитражер и каждый потребитель предполагается настолько мелким по сравнению с рынком, что изменение его стратегии не влияет на параметры рынка, от которых зависит функция выигрыша. То есть в нашем случае оно не влияет на значение цены на форвардном рынке и на распределение цены на спотовом рынке.

Рациональное поведение арбитражеров состоит в том, чтобы сначала продавать контракты на форвардном рынке, а потом покупать товар на спотовом рынке, если цена на форвардном рынке выше цены на спотовом рынке, а в противном случае выполнять обратную операцию. Из условия равновесия следует, что должно выполняться равенство цены на форвардном рынке математическому ожиданию цены на спотовом рынке: $p^f = \mathbb{E}(p^s)$. Действительно, предположим, что $p^f > \mathbb{E}(p^s)$. Тогда все арбитражеры будут продавать контракты на форвардном рынке. Поскольку общее количество арбитражеров не ограничено, то такое соотношение выполняться не может, как и обратное.

Обратимся к поиску оптимальных стратегий потребителей с учетом их отношения к риску. Отношение к риску потребителя $b \in B$ описывается параметром $\lambda_b \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min} < 0 < \lambda_{max}$. Область положительных значений λ_b соответствует риск-избегающим потребителям. Нулевое значение λ_b характеризует риск-нейтральных потребителей. Область отрицательных значений λ_b описывает риск-предпочитающих потребителей. Разность между резервной ценой r и ценой покупки p обозначим Δ. Функция полезности, присущая потребителю b, зависит от разности цен Δ_b и от параметра λ_b: $U_b(p) = U(\Delta_b, \lambda_b)$, где $\Delta_b = r_b - p$. Опишем свойства функции полезности $U(\Delta, \lambda)$. При $\Delta \geq 0$ функция полезности монотонно возрастает по Δ. Для $\Delta \leq 0$ справедливо $U(\Delta, \lambda) = 0$ при любом λ, так как покупка не состоялась. Для $\Delta \geq 0$ у риск-избегающих потребителей функция $U(\Delta, \lambda)$ вогнутая по Δ, у риск-нейтральных потребителей – линейная по Δ, а у риск-предпочитающих потребителей – выпуклая по Δ. В литературе [38] часто рассматривают функции полезности вида $U(x) = x^{1-\lambda}$, где λ - параметр. Нормировав функции полезности такого вида, получим класс функций $U(\Delta, \lambda) = (\frac{\Delta}{\Delta_{max}})^{1-\frac{\lambda}{2m}}$, где $\Delta_{max} > 0$, $m > 0$.

Утверждение 1.3.1. *В указанных предположениях равновесное поведение потребителей определяется в зависимости от резервных цен и отноше-*

ния к риску следующим образом:

1) Потребители с резервными ценами из интервала $r_b < p^f$, а также риск-нейтральные и риск-предпочитающие потребители с резервными ценами из интервала $p^f < r_b < p_{max}$ совершают покупку на спотовом рынке в случае, если $p^s < r_b$.

2) Рассмотрим риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$.

2.1) Пусть $U'_\Delta(\Delta, \lambda)$ вогнута по Δ и потребители с $\lambda = \lambda_{max}$ выбирают торговлю на форвардном рынке. Тогда для риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$ существует пороговое значение $\lambda(r)$ такое, что потребители с $\lambda_b > \lambda(r)$ выбирают покупку на форвардном рынке, а потребители с $\lambda_b < \lambda(r)$ выбирают покупку на спотовом рынке.

2.2) Пусть цена на спотовом рынке принимает только два значения, выполнено условие

$$(lnU(\Delta, \lambda))''_{\lambda\Delta} < 0 \tag{1.4}$$

и при $\lambda = \lambda_{max}$ функция полезности принимает вид $U(\Delta, \lambda) \equiv U_{max}$ при $\Delta > 0$. Тогда оптимальное поведение риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$ определяется, как в пункте 2.1), при этом $\lambda(r)$ монотонно убывает от λ_{max} до 0.

3) Риск-предпочитающие потребители с резервными ценами $r_b > p_{max}$ совершают покупку на спотовом рынке. Риск-избегающие потребители с резервными ценами $r_b > p_{max}$ совершают покупку на форвардном рынке.

Замечание 1.3.1. *Обсудим указанные в утверждении 1.3.1 свойства для функции полезности вида $U(\Delta, \lambda) = (\frac{\Delta}{\Delta_{max}})^{1-\frac{\lambda}{2m}}$. Функция $U'_\Delta(\Delta, \lambda)$ вогнута по Δ при $\lambda_{max} \leq m$. Условие $U(\Delta, \lambda_{max}) = U_{max}$ выполнено при $\lambda_{max} = 2m$, $0 < \Delta \leq \Delta_{max}$, $U_{max} = 1$. Условие (1.4) выполнено при $\lambda < 2m$, $0 < \Delta \leq \Delta_{max}$.*

Доказательство утверждения 1.3.1.

1) Рассмотрим поведение риск-нейтральных и риск-предпочитающих потребителей при $p^f < r_b$. Сравним полезность совершения покупки такими по-

требителями на форвардном рынке с математическим ожиданием полезности на спотовом рынке с учетом выпуклости функции полезности: $\sum_{i=1}^{k} U(r_b - p_i, \lambda_b) w_i \geq U(r_b - \sum_{i=1}^{k} p_i w_i, \lambda_b) = U(r_b - p^f, \lambda_b)$.

2) Определим оптимальное поведение для риск-избегающих потребителей с резервными ценами r_b: $p^f < r_b < p_{max}$. При $\lambda = 0$: $U(r - p^f, 0) = r - p^f = \sum_{i=1}^{k} w_i (r - p_i) \leq \sum_{i: r - p_i > 0} w_i (r - p_i) = \sum_{i=1}^{k} w_i U(r - p_i, 0)$.

2.1) Так как потребители с $\lambda = \lambda_{max}$ выбирают торговлю на форвардном рынке, то при $\lambda = \lambda_{max}$: $U(r - p^f, \lambda_{max}) > \sum_{i=1}^{k} w_i U(r - p_i, \lambda_{max})$. В силу непрерывности существует значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ такое, что $U(r - p^f, \lambda(r)) = \sum_{i: r - p_i > 0} w_i U(r - p_i, \lambda(r))$. Покажем, что это значение определяется единственным образом. Введем обозначение: $\theta_j = \frac{w_j}{\sum_{i: r - p_i > 0} w_i}$. В силу указанных в п.2.1 свойств функции полезности

$$\sum_{i: r - p_i > 0} w_i U'_\lambda(\Delta_i, \lambda) = \sum_{i: r - p_i > 0} w_i \sum_{i: r - p_i > 0} \theta_i U'_\lambda(\Delta_i, \lambda) \leq$$

$$\sum_{i: r - p_i > 0} w_i U'_\lambda(\sum_{i: r - p_i > 0} \theta_i \Delta_i, \lambda) < U'_\lambda(\Delta, \lambda).$$

Следовательно, значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ единственно.

2.2) Если $\lambda = \lambda_{max}$, то $U(r - p^f, \lambda_{max}) = U_{max} > w_1 U(r - p_1, \lambda_{max})$. В силу непрерывности существует значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$, при котором справедливо $U(r - p^f, \lambda(r)) = w_1 U(r - p_1, \lambda(r))$. Из условия (1.4) следует $(lnU(\Delta_1, \lambda))'_\lambda < (lnU(\Delta, \lambda))'_\lambda$. Тогда $w_1 U'_\lambda(\Delta_1, \lambda) < U'_\lambda(\Delta, \lambda)$. Следовательно, значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ единственно. Исследуем поведение функции $\lambda(r)$. Значение $\lambda(r)$ определяется из соотношения $K(r, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} U(r - p^f, \lambda) - w_1 U(r - p_1, \lambda) = 0$. Используя теорему о неявно заданной функции, получим

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = -\frac{\partial K(r, \lambda)}{\partial r} / \frac{\partial K(r, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{U'_r(r - p^f, \lambda) - w_1 U'_r(r - p_1, \lambda)}{U'_\lambda(r - p^f, \lambda) - w_1 U'_\lambda(r - p_1, \lambda)}.$$

Выше уже показано, что $U'_\lambda(r - p^f, \lambda) > w_1 U'_\lambda(r - p_1, \lambda)$. В силу вогнутости функции полезности при $\Delta \geq 0$ у риск-избегающих потребителей выполняется $U'_r(r - p^f, \lambda) - w_1 U'_r(r - p_1, \lambda) > 0$. Следовательно, $\frac{\partial \lambda}{\partial r} < 0$ и $\lambda(r)$ монотонно убывает от λ_{max} до 0.

3) Рассмотрим риск-избегающих потребителей с резервными ценами $r_b > p_{max}$. Для них выполнено $r_b - p^s > 0$. Так как при $\Delta > 0$ функция полезности для этих потребителей вогнута, то $\sum_{i=1}^{k} U(r_b - p_i, \lambda_b) w_i \leq U(r_b - \sum_{i=1}^{k} p_i w_i, \lambda_b) = U(r_b - p^f, \lambda_b)$. Утверждение доказано.

Теперь определим вид остаточного спроса на спотовом рынке в зависимости от стратегий агентов на первом этапе. Обозначим $\alpha(p)$ долю риск-предпочитающих среди потребителей с резервными ценами $r \geq p$.

Утверждение 1.3.2. *Функция остаточного спроса потребителей при равновесном поведении выглядит следующим образом:*

$$D^s(p) = \begin{cases} D(p) - q_t^f & \text{при } p < p^f; \\ \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r, \lambda) d\lambda dr & \text{при } p^f < p < p_{max}; \\ \alpha(p) D(p) & \text{при } p > p_{max}. \end{cases}$$

Доказательство. На форвардном рынке потребители купили товар в объеме q_t^f. При спотовой цене $p^s < p^f$ покупать товар на спотовом рынке будут потребители, не совершившие форвардную покупку, у которых $r_b > p^s$. Итак, спрос потребителей на спотовом рынке при $p^s < p^f$ уменьшится на q_t^f: $D^s(p) = D(p) - q_t^f$.

При спотовой цене $p^f < p^s < p_{max}$ совершать покупку будут потребители, у которых $\lambda_b \leq \lambda(r)$. Таким образом, спрос потребителей на спотовом рынке при $p^f < p^s < p_{max}$ составит $D^s(p) = \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r, \lambda) d\lambda dr$.

При $r_b > p_{max}$ покупку на форвардном рынке совершают только риск-избегающие потребители. Так как доля риск-предпочитающих агентов с $r_b > p_{max}$ составляет $\alpha(p)$, то спрос потребителей на спотовом рынке при $p^s > p_{max}$ равен $D^s(p) = \alpha(p) D(p)$. Утверждение доказано.

Для расчета СПР сначала найдем равновесные стратегии производителей на втором этапе при фиксированных q_a^f, исходя из функции остаточного спроса. Затем получим равновесные стратегии фирм-производителей на первом этапе как решение задачи максимизации прибыли при условии баланса спроса и предложения на форвардном рынке.

Итак, найдем оптимальные стратегии второго этапа. В равновесии для каждого значения случайного фактора i должны выполняться условия первого порядка, связывающие объемы предложения на спотовом рынке с функцией остаточного спроса. Для однократного аукциона Курно с функцией спроса $D(p)$ и n фирмами с постоянными предельными издержками c объемы в равновесии Курно q_a^* и равновесная цена p^* удовлетворяют уравнению $q_a^* = (p^* - c)|D'(p^*)| = \frac{D(p^*)}{n}$, $a \in \overline{1,n}$. Применяя это условие, а также учитывая утверждение 1.3.2 и присутствие на рынке арбитражеров, получаем соотношения, из которых определяются цены p_i, $i \in \overline{1,k}$.

Утверждение 1.3.3. *Если совершенное подыгровое равновесие существует и функция остаточного спроса гладкая при $p = p_i$, $i \in \overline{1,k}$, то цена $p_1 \leq p^f$ определяется из условия*

$$(p_1 - c)|D'(p_1)| = \frac{D(p_1) - q_t^f + q_{arb}}{n}.$$

Для $i \in \overline{2,k-1}$ $p_i > p^f$ удовлетворяет условию

$$(p_i - c)|D^{s\prime}(p_i)| = \frac{D^s(p_i) + q_{arb}}{n}, \tag{1.5}$$

где

$$D^s(p) = \int\limits_{p}^{r_{max}} \int\limits_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r,\lambda) d\lambda dr.$$

Наконец, p_k определяется из условия

$$(p_k - c)|(\alpha(p_k)D(p_k))'| = \frac{\alpha(p_k)D(p_k) + q_{arb}}{n}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.3.2. *Если уравнение (1.5) имеет единственное решение (в частности, если функция $D^s(p)$ вогнута при $p > p^f$), то реализуется единственное значение $p_2 > p^f$, определяемое из условия (1.6).*

Из полученных выше результатов следует, что модель Бушнелла в общих предположениях неточно описывает функционирование рынка. Случай, когда нет случайного фактора и цена на спотовом рынке равна цене на форвардном рынке, можно рассмотреть как предельный вариант рынка, на котором неопределенность стремится к нулю ($p_{max} - p_{min} \to 0$). Тогда $\forall p > p_{max}$ доля покупателей на спотовом рынке соответствует доле риск-предпочитающих потребителей. Таким образом, получаем несоответствие гипотезе Бушнелла о поведении потребителей, если эта доля $\alpha(p) > 0$ $\forall p > p^f$.

Согласно утверждению 1.3.3 могут быть определены равновесные стратегии фирм-производителей для второго этапа в зависимости от объемов продаж на первом этапе. Равновесные стратегии производителей на первом этапе находим как решение задачи максимизации суммы прибыли на форвардном рынке и математического ожидания прибыли на спотовом рынке при условии баланса спроса и предложения на форвардном рынке.

Далее рассмотрим задачу поиска простейшего равновесия для линейной функции спроса $D(p) = \max\{d(r_{max} - p), 0\}$, где $r_{max} = \frac{\overline{D}}{d}$. Предполагаем, что доля риск-предпочитающих потребителей постоянна: $\alpha(p) = \alpha$. Случайный фактор принимает два значения. Таким образом, на спотовом рынке устанавливается низкая цена p_1 с вероятностью w, а с вероятностью $1 - w$ – высокая цена $p_2 > p_1$; $p^f = wp_1 + (1-w)p_2$. Обозначим q_a^{si} объем, продаваемый производителем a на спотовом рынке при реализации цены p_i, $i = 1, 2$.

Утверждение 1.3.4. *Если совершенное подыгровое равновесие существует, то равновесные цены p_1, p_2, p^f и объемы q_a^{s1}, q_a^{s2} вычисляются по формулам:*

$$p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}, p_2 = p^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}, p^f = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)},$$

$$q_a^{s1} = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)}), \quad q_a^{s2} = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}), \tag{1.7}$$

где p^* – цена в равновесии Нэша для классической модели олигополии Курно для данного рынка, а $\Delta^* = p^* - c$.

Доказательство. Первое из равновесий соответствует области крутого наклона функции остаточного спроса. Функция остаточного спроса потребителей равна $D^{s1}(p) = \max\{0, \overline{D} - dp - q_t^f\}$. Суммарная функция предложения Курно производителей равна $S_1(p) = nd(p - c)$. Учтем, что при $q_{arb} < 0$ на спотовом рынке помимо производителей объемы будут продавать и арбитражеры. Таким образом, вне зависимости от знака q_{arb} цена p_1 определяется из уравнения $nd(p_1 - c) = \overline{D} - dp_1 - q^f$. Равновесная цена равна $p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}$. Объем предложения производителя по цене p_1 равен $q_a^{s1} = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})$.

Второе равновесие соответствует области пологого наклона функции остаточного спроса: $D^{s2}(p) = \max\{0, \alpha d(r_{max} - p)\}$. Суммарная функция предложения Курно производителей равна $S_2(p) = n\alpha d(p - c)$. С учетом деятельности арбитражеров запишем уравнение для определения p_2 вне зависимости от знака q_{arb}: $n\alpha d(p_2 - c) = \alpha d(r_{max} - p_2) + q_{arb}$. Отсюда $p_2 = p^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$. Соответствующий объем предложения производителя равен $q_a^{s2} = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)})$. Отсюда цена на форвардном рынке $p^f = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$. Утверждение доказано.

Перейдем к поиску равновесных стратегий для первого этапа. Запишем уравнение баланса спроса и предложения по цене p^f:

$$q^f + q_{arb} = D^f(p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}). \tag{1.8}$$

Отсюда мы получаем зависимость q_{arb} от объемов, проданных производителями на форвардном рынке: $q_{arb} = q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$. Поскольку левая часть уравнения (1.8) возрастает, а правая часть убывает по q_{arb}, то это значение определяется из (1.8) однозначно.

Прибыль производителя j на форвардном рынке вычисляется по формуле:

$$\pi_j^f = q_j^f(p^f - c) = q_j^f(\Delta^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)}).$$

Прибыль на спотовом рынке при реализации первого значения случайного фактора:

$$\pi_j^{s1} = q_j^{s1}(p_1 - c) = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})^2.$$

Прибыль на спотовом рынке при реализации второго значения случайного фактора:

$$\pi_j^{s2} = q_j^{s2}(p_2 - c) = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})^2.$$

Математическое ожидание суммарной прибыли π_j производителя j:

$$\pi_j(\overrightarrow{q^f}) = q_j^f(\Delta^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})+$$
$$+ wd(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})^2 + (1-w)\alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})^2. \quad (1.9)$$

Если $q_j^f > 0$, то оптимальная стратегия фирмы j удовлетворяет условию первого порядка:

$$\frac{\partial \pi(\overrightarrow{q^f})}{\partial q_j^f} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \quad (1.10)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1.3.5. *Если совершенное подыгровое равновесие с* $q_j^f > 0$, $j = \overline{1,n}$, *существует, то равновесные объемы* q_j^f *определяются из системы (1.10), где* $\pi_j(\overrightarrow{q^f})$ *и* $q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$ *заданы согласно (1.8) и (1.9).*

Система (1.10) позволяет найти равновесные объемы $q_j^f = q_j^f(w, n, \alpha)$, $j = \overline{1,n}$. Из уравнения (1.8) найдем $q_{arb} = q_{arb}(w, n, \alpha)$, а затем из (1.7) найдем равновесные цены и объемы второго этапа и цену на форвардном рынке. Причем для существования локального равновесия необходимо, чтобы выполнялись условия: $p_1 - c > 0$; $q_j^f \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

1.4. Устойчивость локального равновесия

Указанное необходимое условие равновесия не является достаточным в общем случае. На спотовом рынке возможна ситуация, когда индивидуальное отклонение от найденной стратегии позволит производителю увеличить свой выигрыш. При фиксированных стратегиях других игроков он может заявить такой объем производства, при котором новая цена будет соответствовать области функции спроса с иным угловым коэффициентом. Если прибыль при отклонении превысит ту прибыль, которую производитель получает в локальном равновесии, то найденное равновесие не будет глобальным.

Установим условия устойчивости локального равновесия с низкой ценой на спотовом рынке. Отклоняющийся производитель может повысить равновесную цену, снижая объем предложения. При этом производитель не может увеличить свой выигрыш, не снизив объем предложения до такого уровня, когда новая цена превысила бы цену на форвардном рынке, так как необходимое условие равновесия является достаточным, если функция спроса линейная. Выгодным может быть такое отклонение, при котором новая цена будет соответствовать пологому участку графика функции остаточного спроса. Найдем условия существования равновесия, сравнив прибыль производителя в локальном равновесии с прибылью при его отклонении от найденной стратегии. Придерживаясь локально равновесной стратегии, производитель получит прибыль $\pi_1 = q_a^{s1}(p_1 - c) = d(p_1 - c)^2$. Оптимальный объем предложения при отклонении составит $q^0 = \alpha d(p^0 - c)$, где новая цена p^0 определяется из условия $(n-1)q_a^{s1} + q^0 = \alpha(\overline{D} - dp^0) + q_{arb}$. Прибыль при этом равна $\widetilde{\pi}_2 = q^0(p^0 - c) = \alpha d(p^0 - c)^2$. Равновесие устойчиво, если справедливо $\pi_1 \geq \widetilde{\pi}_2$, то есть когда $d(p_1 - c)^2 \geq \alpha d(p^0 - c)^2$. Это условие эквивалентно неравенству

$$(n - 1 + 2\sqrt{\alpha})\frac{p_1(w, n, \alpha) - c}{\Delta^*} \geq (n+1)\alpha + \frac{q_{arb}(w, n, \alpha)}{d\Delta^*}. \qquad (1.11)$$

Установим условия устойчивости локального равновесия по Нэшу с высокой ценой на спотовом рынке. В этом случае для производителя может быть выгодным индивидуальное отклонение от найденной стратегии, при котором новая цена будет соответствовать крутому участку графика функции остаточного спроса. Найдем условия существования равновесия, сравнив прибыль производителя в случае локального равновесия с его прибылью при отклонении. В локальном равновесии производитель получит прибыль $\pi_2 = q_a^{s_2}(p_2 - c) = \alpha d(p_2 - c)^2$. Оптимальный объем предложения при отклонении равен $\overline{q^0} = d(\overline{p^0} - c)$, где новая цена $\overline{p^0}$ определяется из условия $(n-1)q_a^{s2} + \overline{q^0} = \overline{D} - d\overline{p^0} - q^f$. Прибыль при этом составляет $\widetilde{\pi}_1 = \overline{q^0}(\overline{p^0} - c) = d(\overline{p^0} - c)^2$. Равновесие устойчиво, если выполнено неравенство $\pi_2 \geq \widetilde{\pi}_1$. Это условие эквивалентно $\alpha d(p_2 - c)^2 \geq d(\overline{p^0} - c)^2$, откуда получим

$$\frac{p_2(w,n,\alpha) - c}{\Delta^*}(2\sqrt{\alpha} + (n-1)\alpha) \geq n + 1 - \frac{nq_a^f(w,n,\alpha)}{d\Delta^*}. \qquad (1.12)$$

При $q_{arb} > 0$ общая функция остаточного спроса с учетом деятельности арбитражеров равна q_{arb} при достаточно больших p. Поэтому для устойчивости необходимо, чтобы отдельный игрок не мог, снижая объемы выпуска, сократить предложение товара ниже этого уровня, то есть должно выполняться: $q_{arb} \leq (n-1)q^{s2}$, откуда получим условие

$$\frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d} \leq (n-1)(p_2(w,n,\alpha) - c)\alpha. \qquad (1.13)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение 1.4.1. *Существование СПР возможно лишь при значениях параметров модели, удовлетворяющих условиям (1.11)-(1.13).*

Замечание 1.4.1. *Если производная функции остаточного спроса $D^{s\prime}(p)$ терпит разрыв при $p = p_2$, то для устойчивости необходимо также условие $D_-^{s\prime}(p_2) \geq D_+^{s\prime}(p_2)$.*

Утверждение 1.4.2. *Пусть степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько высока, что все они выбирают торговлю на форвардном рынке. Тогда, если существует совершенное подыгровое равновесие, то равновесный объем предложения на форвардном рынке составляет*

$$q_a^f = \Delta^* d\frac{(n+1)A_1}{nB_1}, \qquad (1.14)$$

где

$$A_1 = 1 + \frac{(1-w)(1-\alpha)n}{\kappa_1} - \frac{2}{n+1}(w + (1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$
$$B_1 = (w + \frac{(1-w)\kappa_2}{\kappa_1})\frac{n+1}{n} - \frac{2}{n+1}(w + (1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$
$$\kappa_1 = \alpha n + 1 - w(1-\alpha), \kappa_2 = n + 1 - w(1-\alpha).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае функция остаточного спроса имеет вид: $D^s(p) = d(r_{max} - p) - q_t^f$ при $p \leq p^f$; $D^s(p) = \alpha d(r_{max} - p)$ при $p > p^f$. График этой функции изображен на рисунке 1.1.

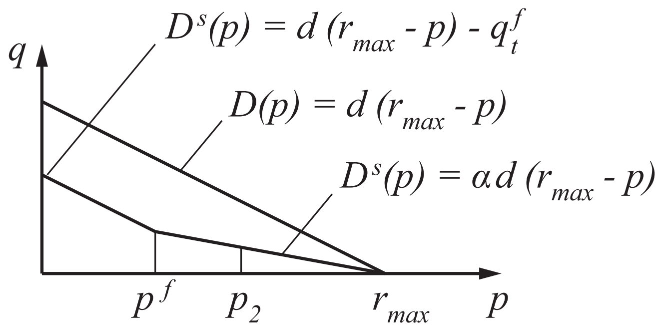

Рис. 1.1. Функция остаточного спроса при высокой степени избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$

Уравнение баланса спроса и предложения по цене p^f записывается как

$$q^f + q_{arb} = (1-\alpha)d(r_{max} - p^f). \qquad (1.15)$$

Выражение (1.14) для оптимального объема предложения производителя a на форвардном рынке следует из (1.8)-(1.10). Утверждение доказано.

Интервал $(w_1(n,a), w_2(n,a))$ значений параметра w, при которых локальные равновесия образуют СПР, определяется из (1.11)-(1.13)(см. таблицу 1.1). Значение $w_1(n,a)$ определяется из соотношения

$$\frac{p_2(w,n,\alpha) - c}{\Delta^*}(2\sqrt{\alpha} + (n-1)\alpha) = n + 1 - \frac{nq_a^f(w,n,\alpha)}{d\Delta^*}.$$

Значение $w_2(n,a) = min\{w_2^1, w_2^2\}$, где w_2^1 определяется из уравнения

$$(n-1+2\sqrt{\alpha})\frac{p_1(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*} = (n+1)\alpha + \frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d\Delta^*},$$

а w_2^2 определяется из равенства

$$\frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d} = (n-1)(p_2(w,n,\alpha)-c)\alpha.$$

Таблица 1.1. Интервал допустимых значений параметра w

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
$n = 2$	–	–	0.4741	0.7185	–	–
$n = 3$	**0.6560**	**0.8105**	0.4328	0.7574	0.3481	0.6812
$n = 4$	**0.6386**	**0.9171**	0.4113	0.7759	0.3270	0.7018
$n = 5$	**0.6275**	**0.9227**	0.3981	0.7868	0.3144	0.7141
$n = 6$	**0.6198**	**0.9263**	0.3892	0.7939	0.3059	0.7223
$n = 7$	0.6141	**0.9287**	0.3828	0.7990	0.2998	0.7281
$n = 8$	0.6098	**0.9306**	0.3779	0.8028	0.2953	0.7325
$n = 9$	0.6064	**0.9319**	0.3741	0.8057	0.2917	0.7359
$n = 10$	0.6036	0.9330	0.3711	0.8080	0.2889	0.7386

При значениях $(\alpha = 0.1, n = 2)$, $(\alpha = 0.9, n = 2)$, не существует значений w из промежутка $[0, 1]$, удовлетворяющих (1.11)-(1.13).

Таблица 1.2 характеризует сокращение рыночной власти производителей в результате введения форвардного рынка. В ней указано отношение $\frac{p^f(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*}$, называемое далее коэффициентом сокращения рыночной власти. Он получен с использованием (1.7), (1.14) и значений $w = w_1$, $w = w_2$, приведенных в таблице 1.1.

Таблица 1.2. Коэффициент сокращения рыночной власти

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$		Бушнелл
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2	
$n = 2$	–	–	0.7019	0.6629	–	–	0.6
$n = 3$	**0.7551**	**0.6617**	0.5129	0.4545	0.4169	0.4084	0.4
$n = 4$	**0.6509**	**0.4252**	0.3991	0.3383	0.3093	0.3009	0.29
$n = 5$	**0.5728**	**0.3390**	0.3249	0.2671	0.2441	0.2364	0.23
$n = 6$	**0.5117**	**0.2805**	0.2734	0.2197	0.2009	0.1939	0.18
$n = 7$	0.4625	**0.2387**	0.2356	0.1862	0.1703	0.1640	0.16.
$n = 8$	0.4220	**0.2074**	0.2069	0.1614	0.1477	0.1420	0.13
$n = 9$	0.3880	**0.1832**	0.1843	0.1423	0.1303	0.1251	0.12
$n = 10$	0.3591	0.1639	0.1661	0.1272	0.1165	0.1117	0.1

Возможность заключения форвардных контрактов значительно снижает рыночную власть производителей. При этом возможен как случай $q_{arb} > 0$ (выделен в таблицах жирным шрифтом), так и случай $q_{arb} < 0$. Полученные результаты показывают, что по мере того, как растет вероятность исхода с низкой ценой на спотовом рынке, рыночная власть производителей снижается. С ростом доли риск-предпочитающих потребителей рыночная власть производителей также сокращается.

В таблице 1.3 указано соотношение объема, проданного производителями на форвардном рынке, к объему, проданному ими на спотовом рынке. Соотношения объемов спотовых и форвардных продаж получено с использованием (1.7), (1.14) и значений $w = w_1$, $w = w_2$, приведенных в таблице 1.1. Результаты показывают, что основной объем товара производители продают на форвардном рынке.

Таблица 1.3. Соотношение объемов продаж на форвардном и спотовом рынках

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
$n = 2$	–	–	1.4384	1.2828	–	–
$n = 3$	**3.3408**	**2.5790**	2.4759	2.2941	2.0708	2.0516
$n = 4$	**4.4422**	**3.5697**	3.4944	3.3072	3.0731	3.0552
$n = 5$	**5.5089**	**4.5668**	4.5053	4.3179	4.0744	4.0580
$n = 6$	**6.5562**	**5.5660**	5.5123	5.3262	5.0753	5.0602
$n = 7$	7.5916	**6.5661**	6.5173	6.3328	6.0760	6.0619
$n = 8$	8.6186	**7.5664**	7.5210	7.3381	7.0764	7.0633
$n = 9$	9.6400	**8.5669**	8.5238	8.3425	8.0768	8.0644
$n = 10$	10.6578	9.5675	9.5259	9.3461	9.0771	9.0654

Пусть степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько незначительна, что они выбирают торговлю на спотовом рынке. Тогда спрос потребителей на форвардном рынке во всем диапазоне цен $p^f < p < p_2$ постоянен и равен $D^f(p) = (1 - \alpha)d(r_{max} - p_2)$, а спрос на спотовом рынке $D^s(p) = d(r_{max} - p) - q_t^f \ \forall p < p_2$ (см. рисунок 1.2).

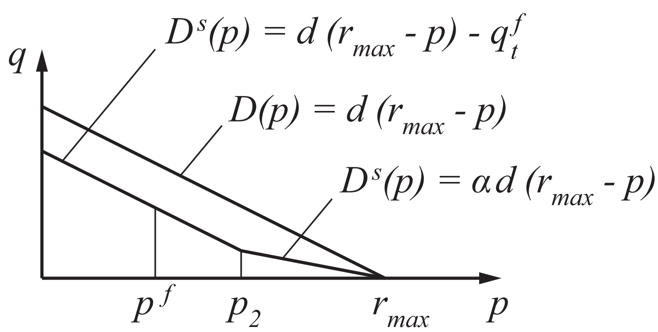

Рис. 1.2. Функция остаточного спроса при незначительной степени избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$

Уравнение баланса имеет вид:

$$q^f + q_{arb} = (1-\alpha)d(r_{max} - p_2). \qquad (1.16)$$

Используя систему (1.8)-(1.10), получим выражение для оптимального объема предложения производителя a на форвардном рынке:

$$q_a^f = \Delta^* d \frac{A_2}{nB_2},$$

где

$$A_2 = 1 + \frac{(1-w)(1-\alpha)n}{\alpha n + 1} - \frac{2w}{n+1} - 2(1-w)(1 + \frac{(1-\alpha)n\alpha}{\alpha n + 1}),$$

$$B_2 = \frac{w}{n} + \frac{(1-w)(n+1)}{(\alpha n + 1)n} - \frac{2w}{(n+1)^2} - \frac{2(1-w)\alpha}{(\alpha n + 1)^2}.$$

Однако, согласно замечанию 1.4.1, для производителя a выгодно отклониться от стратегии q_a^{s2} при фиксированных стратегиях других игроков. Таким образом, СПР в данном случае не существует.

1.5. Вычисление совершенного подыгрового равновесия для асимметричной олигополии

Сначала, следуя [46], рассмотрим для асимметричной олигополии модель двухэтапного рынка, в которой на форвардном и спотовом рынках устанавливается единая цена. Как и ранее, A – множество фирм-производителей. Каждая фирма $a \in A$ характеризуется функцией полных издержек $C^a(v)$ на производство товара в объеме v. Функция спроса $D(p) = \overline{D} - dp$. Потребители играют пассивную роль. Сначала они выходят на форвардный рынок, затем те, кто не получил товар на форвардном рынке, выходят на спотовый рынок. Стратегия фирмы — объемы товара, которые она предлагает на форвардном и спотовом рынках, q_a^f и q_a^s соответственно. Общий объем выпуска фирмы a составляет $q_a = q_a^f + q_a^s$. На первом этапе производители продают товар в общем объеме $q^f = \sum_{a \in A} q_a^f$. С учетом объемов арбитражеров q_{arb} цена на форвардном рынке

p^f определяется из условия $\overline{D} - dp^f = \widehat{Q}^f$, где $\widehat{Q}^f = q^f + q_{arb}$. На спотовом рынке удовлетворяется остаточный спрос $D^s(p) = \overline{D} - dp - \widehat{Q}^f$ (что соответствует тому, что на форвардном рынке удовлетворяется спрос покупателей с наибольшими резервными ценами). Поэтому на втором этапе цена p^s, по которой реализуется товар на спотовом рынке, устанавливается таким образом, чтобы $D^s(p^s) + q_{arb} = \sum_{a \in A}(q_a - q_a^f)$. Откуда получаем уравнение баланса

$$\overline{D} - dp^s = \sum_{a \in A} q_a. \tag{1.17}$$

Прибыль фирмы a равна

$$\pi^a(q_a, q_a^f) = p^f q_a^f + p^s(q_a - q_a^f) - C_a(q_a). \tag{1.18}$$

Предполагается, что за счет действий арбитражеров на форвардном рынке устанавливается цена, равная цене спотового рынка, то есть

$$p^f = p^s. \tag{1.19}$$

Перейдем к расчету равновесия Курно на спотовом рынке при фиксированных параметрах форвардного рынка. Определим q_a при фиксированной цене форвардного рынка p^f и объемах q_a^f, $a \in A$. Из (1.18) следует, что $\frac{\partial p^s}{\partial q^a} = -\frac{1}{d}$. Из условий оптимальности первого порядка для (1.18) следует, что

$$q_a - q_a^f \in d(p^s - C^{a'}(q_a)), \text{ если } C^{a'}(0) < p^s, \tag{1.20}$$

$$q_a - q_a^f = 0, \text{ если } C^{a'}(0) \geq p^s.$$

Далее проведем оптимизацию по объему продаж на форвардном рынке. Рассмотрим производителей, для которых (1.20) принимает вид

$$q_a - q_a^f = d(p^s - C^{a'}(q_a)). \tag{1.21}$$

Подставляя (1.19) и (1.21) в (1.18), получим:

$$\pi_a(q_a^f) = p(q_a^f + d(p - C^{a'}(q_a))) - C^a(q_a^f + d(p - C^{a'}(q_a))).$$

Из условий оптимальности первого порядка следует, что

$$(p - C^{a'}(q_a))\frac{\partial q_a}{\partial q_a^f} + \frac{\partial p}{\partial q_a^f} q_a = 0.$$

Рассмотрим случай, когда затраты $C^a(q_a)$ кусочно-линейные. Пусть $\overline{A} \subseteq A$ – множество фирм, работающих в равновесии не на полную производственную мощность (то есть предельные издержки $C^{a'}(q_a) = m_a$ и данная производственная мощность загружена не в полном объеме $\overline{V}(m_a)$). Согласно (1.21) $\frac{\partial q_a}{\partial q_a^f} = 1 + d\frac{\partial p}{\partial q_a^f}$. Тогда условие оптимальности принимает вид

$$(p - m_a)(1 + d\frac{\partial p}{\partial q_a^f}) + \frac{\partial p}{\partial q_a^f} q_a = 0. \quad (1.22)$$

Найдем $\frac{\partial p}{\partial q_a^f}$. Из уравнения баланса (1.17) с учетом (1.21) следует:

$$\overline{D} - dp = K + \sum_{a \in \overline{A}} q_a^f + |\overline{A}|d(p - \overline{m}),$$

где $K = \sum_{a \in A \setminus \overline{A}} q_a$ – общий объем предложения фирм, работающих на полную мощность; $\overline{m} = \sum_{a \in \overline{A}} m_a/|\overline{A}|$ – средние предельные издержки фирм, работающих не на полную мощность. Следовательно, $\frac{\partial p}{\partial q_a^f} = -\frac{1}{d(|\overline{A}|+1)}$. Подставим полученное выражение в (1.22). Тогда

$$q_a = d|\overline{A}|(p - m_a). \quad (1.23)$$

Суммируя по всем производителям, работающим не на полную мощность, и подставляя в (1.17), получим $\overline{D} - dp = K(p) + d|\overline{A}(p)|^2(p - \overline{m}(p))$. Итак, равновесная цена удовлетворяет условию

$$p^* = \frac{(\overline{D} - K(p))/d - \overline{m}(p)}{|\overline{A}(p)|^2 + 1} + \overline{m}(p).$$

Опишем алгоритм поиска равновесия, основанный на полученной формуле (1.23). Начиная с $p = 0$ и постепенно увеличивая p, строим функции предложения для каждого производителя. Рассмотрим случай 1, когда у каждого производителя один тип мощности, т.е. $C^a(q_a) = m_a q_a$, а ограничение на производственные мощности неактивно: $\overline{V}(m_a) = \infty$. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$.

Обозначим $\overline{A}(p) = \{a \in A : m_a < p\}$. Тогда функция предложения любого производителя:

$$S^a(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p < m_a; \\ d|\overline{A}(p)|(p - m_a) & \text{при } p \geq m_a. \end{cases}$$

На рисунке 1.3 показана суммарная функция предложения $S(p)$ для трех производителей с предельными издержками m_1, m_2, m_3 соответственно.

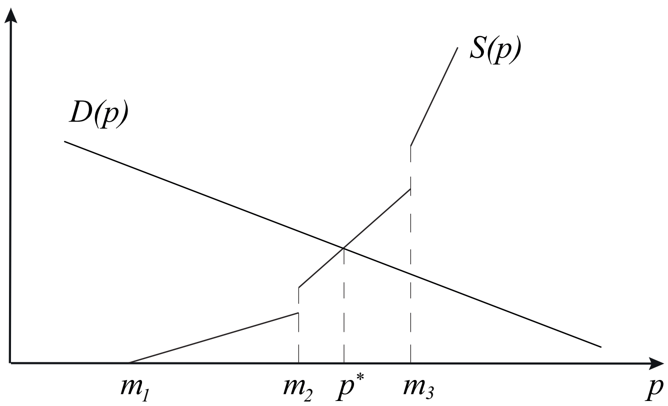

Рис. 1.3. Суммарная функция предложения для случая 1

Равновесная цена находится из пересечения суммарной функции спроса и функции предложения. Функция предложения имеет разрывы в точках $p = m_a$ вследствие увеличения в этих точках углового коэффициента при увеличении $\overline{A}(p)$. Следовательно, если равновесная цена существует, то она единственна. Однако, локальное равновесие может оказаться неустойчивым к отклонению. Предположим, что суммарная функция спроса пересекает функцию предложения при $p = m_3 + \epsilon$. Пусть все игроки, кроме одного, используют стратегии, соответствующие равновесию. Тогда отдельный игрок может снизить на ϵ цену, увеличивая скачком свой объем предложения на форвардном рынке и заставляя остальных производителей снижать свои общие объемы продаж. При достаточно малых ϵ это позволит отклоняющемуся игроку увеличить свою прибыль, поэтому локальное равновесие не будет глобальным.

Теперь рассмотрим случай 2, когда у каждого производителя один тип мощности, т.е. $C^a(q_a) = m_a q_a$, ограничение на производственные мощности $\overline{V}(m_a) = \overline{V}_a$. Функция предложения строится аналогично случаю 1, до тех пор, пока одно из ограничений мощности не становится активным. Пусть при p_1 достигается $d|\overline{A}(p)|(p - m_1) = \overline{V}_1$ для некоторого a_1. При последующем увеличении p, если производитель a_1 будет работать на полную мощность, то $|\overline{A}(p)| = |\overline{A}(p_1)| - 1$. Следовательно, возникает разрыв функции предложения за счет снижения углового коэффициента. На рисунке 1.4 показано снижение функции предложения $S(p)$ в точке p_1, когда становится активным ограничение для производителя 1.

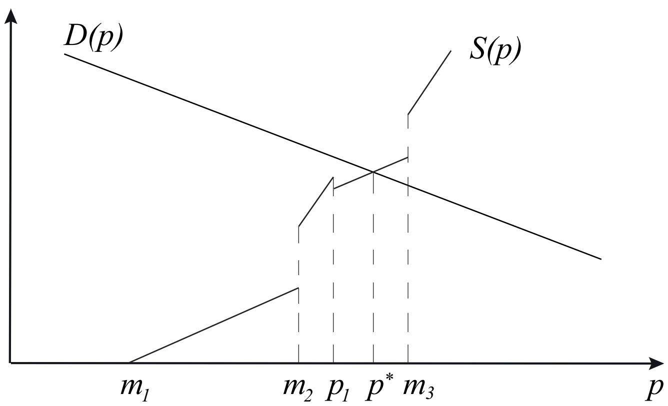

Рис. 1.4. Суммарная функция предложения для случая 2

В случае 2 суммарная функция спроса может пересекать функцию предложения в нескольких точках, поэтому равновесие может быть не единственным. Кроме того, как и в случае 1, локальное равновесие может не быть глобальным.

Перейдем к обобщению описанной в разделах 1.2-1.4 модели со случайным фактором, принимающим два значения, для случая асимметричной олигополии с кусочно-линейными затратами. Для расчета СПР, как и выше, сначала определим оптимальные объемы выпуска на спотовом рынке при фиксированных параметрах форвардного рынка. Пусть $A_1 \subseteq A$ – множество фирм, работающих в равновесии при реализации первого значения случайного фактора не на полную производственную мощность (то есть предельные издержки $C^{a'}(q_a) = c^a_{i_1(a)}$ и данная производственная мощность загружена не в полном объеме $V^a_{i_1(a)}$). Аналогично $A_2 \subseteq A$ – множество фирм, работающих в равновесии при реализации второго значения случайного фактора не на полную производственную мощность (то есть предельные издержки $C^{a'}(q_a) = c^a_{i_2(a)}$ и данная производственная мощность загружена не в полном объеме $V^a_{i_2(a)}$). Тогда для $a \in A_1$ из условий первого порядка следует, что $q^{s1}_a = d(p_1 - c^a_{i_1(a)})$, $q^f_a + q^{s1}_a \in (V^a_{i_1(a)-1}, V^a_{i_1(a)})$, $c^a_{i_1(a)} < p_1 < c^a_{i_1(a)+1}$. Для $a \in A \setminus A_1$ справедливо $q^{s1}_a = V_{i_1(a)} - q^f_a$. Следовательно,

$$\frac{\partial q^{s1}_a}{\partial q^f_a} = \begin{cases} 0 & \text{при } a \in A_1; \\ -1 & \text{при } a \in A \setminus A_1. \end{cases} \tag{1.24}$$

Аналогично для $a \in A_2$ из условий первого порядка следует, что $q^{s2}_a = \alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)})$, $q^f_a + q^{s2}_a \in (V^a_{i_2(a)-1}, V^a_{i_2(a)})$, $c^a_{i_2(a)} < p_2 < c^a_{i_2(a)+1}$. Для $a \in A \setminus A_2$ справедливо $q^{s2}_a = V_{i_2(a)} - q^f_a$. Следовательно,

$$\frac{\partial q^{s2}_a}{\partial q^f_a} = \begin{cases} 0 & \text{при } a \in A_2; \\ -1 & \text{при } a \in A \setminus A_2. \end{cases} \tag{1.25}$$

Условие баланса спроса и предложения при реализации первого значения случайного фактора принимает вид

$$\overline{D} - dp_1 - \sum_{a \in A_1} q^f_a = \sum_{a \in A_1} d(p_1 - c^a_{i_1(a)}) + \sum_{a \in A \setminus A_1} V^a_{i_1(a)}. \tag{1.26}$$

Вследствие этого

$$\frac{\partial p_1}{\partial q^f_a} = \begin{cases} -\dfrac{1}{d(|A_1| + 1)} & \text{при } a \in A_1; \\ 0 & \text{при } a \in A \setminus A_1. \end{cases} \tag{1.27}$$

Запишем условие баланса спроса и предложения при реализации второго значения случайного фактора:

$$\alpha d(r_{max} - p_2) + q_{arb} = \sum_{a \in A_2} \alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)}) + \sum_{a \in A \setminus A_1} (V^a_{i_2(a)} - q^f_a). \tag{1.28}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_a^f} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot \dfrac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} & \text{при } a \in A_2; \\ \dfrac{1}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot (1 + \dfrac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}) & \text{при } a \in A \setminus A_2. \end{cases} \tag{1.29}$$

Используя (1.26)-(1.29), условие баланса спроса и предложения по цене p^f: $q^f + q_{arb} = D^f(p^f)$ и учитывая, что цена на форвардном рынке равна математическому ожиданию цены на спотовом рынке, найдем $q_{arb}(\overrightarrow{q}^f)$ и $\frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}$. Рассмотрим случай, когда степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько высока, что все они выбирают торговлю на форвардном рынке. Из уравнения (1.15) баланса спроса и предложения по цене p^f с учетом соотношения цен на форвардном и спотовом рынках получим $q_{arb} = (1-\alpha)d(r_{max} - wp_1 - (1-w)p_2) - q^f$. Используя (1.26)-(1.29), получим, что при $a \in A_1 \cap A_2$

$$\frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} = \frac{\alpha(1+|A_2|)}{\alpha(1+|A_2|) + (1-\alpha)(1-w)} \cdot \Big\{ \frac{(1-\alpha)w}{|A_1|+1} - 1 \Big\}; \tag{1.30}$$

для $a \in A_1 \setminus A_2$

$$\frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} = \frac{\alpha(1+|A_2|)}{\alpha(1+|A_2|) + (1-\alpha)(1-w)} \cdot \Big\{ \frac{(1-\alpha)w}{|A_1|+1} - \frac{(1-\alpha)(1-w)}{\alpha(|A_2|+1)} - 1 \Big\}; \tag{1.31}$$

для $a \in A_2 \setminus A_1$

$$\frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} = -\frac{\alpha(1+|A_2|)}{\alpha(1+|A_2|) + (1-\alpha)(1-w)}; \tag{1.32}$$

при $a \notin A_1 \cup A_2$

$$\frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} = -1. \tag{1.33}$$

Проведем оптимизацию по объему продаж на форвардном рынке. Математическое ожидание прибыли производителя a: $\pi^a = p^f q_a^f + w\big(q_a^{s1} p_1 - C^a(q_a^f + q_a^{s1})\big) + (1-w)\big(q_a^{s2} p_2 - C^a(q_a^f + q_a^{s2})\big) = w\big(p_1(q_a^{s1} + q_a^f) - C^a(q_a^f + q_a^{s1})\big) + (1-w)\big(p_2(q_a^{s2} + q_a^f) - C^a(q_a^f + q_a^{s2})\big)$.

Для $a \in A_1 \cap A_2$, принимая во внимание (1.24), (1.25), (1.27), (1.29), получим

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial q_a^f} = w\big(p_1 - \frac{q_a^{s1} + q_a^f}{d(|A_1|+1)} - c^a_{i_1(a)}\big) + (1-w)\big(p_2 + \frac{q_a^{s2} + q_a^f}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} - c^a_{i_2(a)}\big).$$

Учитывая, что для $a \in A_1 \cap A_2$ справедливо $q_a^{s1} = d(p_1 - c^a_{i_1(a)})$ и $q_a^{s2} = \alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)})$, и вводя обозначения $\gamma_1 = \frac{1}{|A_1|+1}$, $\gamma_2 = \frac{1}{\alpha(|A_2|+1)} \cdot \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}$, из условий первого порядка получим

$$q_a^f = \frac{\alpha w(1-\gamma_1)d(p_1 - c^a_{i_1(a)}) + (1-w)(1-\gamma_2)\alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)})}{\alpha w \gamma_1 - (1-w)\gamma_2}. \tag{1.34}$$

Для $a \in A_1 \setminus A_2$ ожидаемая прибыль производителя a составит $\pi^a = w\big(p_1(q_a^{s1} + q_a^f) - C^a(q_a^f + q_a^{s1})\big) + (1-w)\big(p_2 V^a_{i_2(a)} - C^a(V^a_{i_2(a)}\big)$. Тогда с учетом (1.24), (1.25), (1.27), (1.29)

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial q_a^f} = w\big(p_1 - \frac{q_a^{s1} + q_a^f}{d(|A_1|+1)} - c^a_{i_1(a)}\big) + \frac{(1-w)V^a_{i_2(a)}}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot (1 + \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}).$$

Учитывая, что для $a \in A_1$ справедливо $q_a^{s1} = d(p_1 - c^a_{i_1(a)})$, из условий первого порядка получим

$$q_a^f = \frac{(1-w)(|A_1|+1)V^a_{i_2(a)}}{w\alpha(|A_2|+1)} \cdot (1 + \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}) + |A_1| d(p_1 - c). \tag{1.35}$$

Для $a \in A_2 \setminus A_1$ ожидаемая прибыль производителя a составит $\pi^a = w\big(p_1 V^a_{i_1(a)} - C^a(V^a_{i_1(a)})\big) + (1-w)\big(p_2(q_a^{s2} + q_a^f) - C^a(q_a^f + q_a^{s2})\big)$. Тогда с учетом (1.24), (1.25), (1.27), (1.29)

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial q_a^f} = (1-w)\big(p_2 + \frac{q_a^{s2} + q_a^f}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f} - c^a_{i_2(a)}\big).$$

Учитывая, что для $a \in A_2$ справедливо $q_a^{s2} = \alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)})$, из условий первого порядка получим

$$q_a^f = -(\frac{|A_2|+1}{\partial q_{arb}/\partial v_a^f} + 1)\alpha d(p_2 - c^a_{i_2(a)}). \tag{1.36}$$

Для $a \notin A_1 \cup A_2$ ожидаемая прибыль производителя a составит $\pi^a = w\big(p_1 V^a_{i_1(a)} - C^a(V^a_{i_1(a)})\big) + (1-w)\big(p_2 V^a_{i_2(a)} - C^a(V^a_{i_2(a)})\big)$. Тогда с учетом (1.27), (1.29)

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial q_a^f} = \frac{(1-w)V^a_{i_2(a)}}{\alpha d(|A_2|+1)} \cdot (1 + \frac{\partial q_{arb}}{\partial q_a^f}).$$

Тогда в силу (1.33) $\frac{\partial \pi^a}{\partial q_a^f} = 0$ независимо от q_a^f. Следовательно, существует множество равновесий, для которых $q_a^f + q_a^{s1} = V_{i_1(a)}^a$ и $q_a^f + q_a^{s2} = V_{i_2(a)}^a$.

Из условий баланса (1.26), (1.28), (1.15) получим систему, которой удовлетворяют равновесные цены p_1 и p_2:

$$\overline{D} - dp_1 - \sum_{a \in A_1 \cap A_2} q_a^f - \sum_{a \in A_1 \setminus A_2} q_a^f = \sum_{a \in A_1} d(p_1 - c_{i_1(a)}^a) + \sum_{a \in A \setminus A_1} V_{i_1(a)}^a,$$

$$d(r_{max} - (1-\alpha)p_1 - (1 - w + \alpha w)p_2) - \sum_{a \in A_1 \cap A_2} q_a^f - \sum_{a \in A_2 \setminus A_1} q_a^f =$$

$$= \sum_{a \in A_1} \alpha d(p_2 - c_{i_2(a)}^a) + \sum_{a \in A \setminus A_2} V_{i_2(a)}^a,$$

где q_a^f определяются согласно (1.34)-(1.36).

1.6. Выводы к первой главе

В данной главе разработана новая теоретико-игровая модель двухэтапного рынка с учетом присутствия на рынке арбитражеров, а также случайного фактора, влияющего на исход торгов на спотовом рынке. Для разработанной модели предложен метод расчета совершенного подыгрового равновесия. Полученные результаты дают возможность описать оптимальное поведение потребителей на двухэтапном рынке с учетом их отношения к риску. Риск-избегающие потребители совершают покупку на форвардном рынке, если их резервная цена выше форвардной цены и параметр избегания риска превышает пороговую величину. Потребители с низкими резервными ценами приобретают товар на спотовом рынке, если цена на спотовых торгах ниже их резервной цены. Риск-предпочитающие потребители с высокими резервными ценами совершают покупку на спотовом рынке.

Анализ соотношения равновесных цен и объемов для двухэтапного рынка и классической олигополии Курно показывает, что введение форвардного рынка значительно ограничивает рыночную власть компаний. Несмотря на то, что в модели сохраняется произвол в отношении вероятности реализации исхода с низкой спотовой ценой, расчеты показывают, что те значения вероятности w, при которых существует равновесие, жестко ограничены в зависимости от доли риск-предпочитающих потребителей. Полученные результаты о соотношении объемов продажи на форвардном и спотовом рынках показывают, что основную массу товара производители продают на форвардном рынке.

Глава 2

Оптимальная пропускная способность системы перемещения товара между двумя рынками

В настоящей главе проведено исследование двухузлового рынка в условиях совершенной и несовершенной конкуренции. При этом учитываются потери при передаче товара и ограничение пропускной способности системы перемещения товара (далее СПТ). Целью является разработка метода расчета оптимальной пропускной способности СПТ с точки зрения роста суммарного дохода всех агентов.

В разделе 2.1 описана схема функционирования сетевого рынка с двумя узлами.

В разделе 2.2 описан двухузловой рынок в условиях совершенной конкуренции, определены свойства функции общественного благосостояния, дан анализ равновесия в зависимости от пропускной способности СПТ между двумя рынками.

В разделе 2.3 предложен метод расчета оптимальной пропускной способности для двухузлового рынка в условиях совершенной конкуренции с точки зрения максимизации общественного благосостояния, то есть суммарного выигрыша участников рынка.

Раздел 2.4 посвящен двухузловому аукциону в условиях несовершенной конкуренции. В нем уточняются результаты относительно структуры и свойств множества равновесий Нэша для модели двухузлового аукциона. Утверждение 2.4.1 устанавливает условия, в которых при любом значении пропускной способности существует не более одного равновесия. Показано, что по мере увеличения пропускной способности сначала в равновесии ограничение пропускной способности активно, затем устанавливаются узловые цены, соотношение которых соответствует коэффициенту потерь, далее поток стабилизируется и ограничение пропускной способности неактивно.

В разделе 2.5 предложен метод расчета оптимальной с точки зрения общественного благосостояния пропускной способности системы перемещения товара между двумя узлами в условиях несовершенной конкуренции. Для каждого типа равновесия исследуется поведение функции общественного благосостояния. Эти результаты позволяют решить задачу поиска оптимальной пропускной способности двухузлового рынка в условиях несовершенной конкуренции.

2.1. Модель двухузлового рынка

Сначала, следуя [2], приведем модель функционирования двухузлового рынка. Каждый узел i характеризуется множеством фирм-производителей A_i, $i = 1, 2$. Каждый производитель $a \in A_i$ имеет функцию полных затрат $C^a(v)$, зависящую от объема v, который он производит. Функция $C^a(v)$ монотонно возрастает по v, является выпуклой, $C^a(0) = 0$, $C^{a'}_{-}(v) \to \infty$ при $v \to \infty$ [8]. Потребители в узле i характеризуются функцией спроса $D_i(p)$, которая непрерывна, не возрастает по p и определяет желаемый объем потребления в зависимости от цены. Кроме того, функция спроса обладает следующим свойством: $D_i(p) \to 0$ при $p \to \infty$ [8]. Рассматривается система перемещения товара между двумя рынками, которая описывается коэффициентом потерь k и пропускной способностью Q.

На реальных рынках электроэнергии торги обычно проходят в форме аукциона с едиными узловыми ценами. Стратегией каждой фирмы-поставщика a является неубывающая функция предложения $R^a(p)$, определяющая количество товара, которое производитель готов продать по цене $p \geq 0$. Обычно допускаются ступенчатые функции предложения с заданным числом ступеней. Системный оператор сначала рассчитывает цены отсечения $\bar{c}_i$ для изолированных рынков. Эти цены определяются из условий: $D_i(\bar{c}_i) = \sum\limits_{a \in A_i} R^a(\bar{c}_i)$, $i = 1, 2$.

Далее проверяется соотношение

$$\lambda^{-1} \le \overline{c}_2/\overline{c}_1 \le \lambda \text{ , где } \lambda = (1-k)^{-1}. \tag{2.1}$$

Если это соотношение выполнено, то никакого перемещения товара не происходит и рынки остаются изолированными. При этом узловые цены устанавливаются как на изолированных рынках, т. е. цена на первом рынке равна $\overline{c}_1$, а на втором – $\overline{c}_2$.

Если соотношение (2.1) нарушается, то для определенности будем считать, что $\overline{c}_2/\overline{c}_1 > \lambda$. В этом случае системный оператор выбирает объем q перемещаемого товара (далее поток) из первого узла во второй. При заданном потоке q узловые цены по-прежнему балансируют спрос и предложение, но уже с учетом перемещения товара. Цены $p_1(q)$ и $p_2(q)$ определяются из условий:

$$D_1(p_1) + q = \sum_{a \in A_1} R^a(p_1), \quad D_2(p_2) - (1-k)q = \sum_{a \in A_2} R^a(p_2).$$

Если $\lambda^{-1} > \overline{c}_2/\overline{c}_1$, то товар будет перемещаться со второго рынка на первый и узловые цены будут определяться симметричным образом.

Действия системного оператора аналогичны действию на рынке многих посредников, которые занимаются перемещением товара с первого рынка на второй до тех пор, пока это выгодно. При этом возможны две ситуации: либо перемещение товара происходит до тех пор, пока цены $p_1(q)$ и $p_2(q)$ не придут в соотношение, при котором дальнейшее перемещение товара невыгодно; либо реализуется второй возможный вариант, при котором перемещение товара по-прежнему выгодно, но достигается максимум пропускной способности. Объем q перемещенного товара с первого рынка на второй удовлетворяет одному из следующих условий: $\lambda p_1(q) = p_2(q)$, при этом $q \le Q$, либо $p_2(q) > \lambda p_1(q)$ и $q = Q$.

Для модели двухузлового рынка следует проанализировать зависимость общественного благосостояния от пропускной способности и разработать методику поиска оптимальной пропускной способности с точки зрения общественного благосостояния.

2.2. Двухузловой рынок в условиях совершенной конкуренции

Допустим, что на каждом рынке присутствует много фирм-поставщиков, каждая из которых не оказывает существенного влияния на цены своими действиями. В этом случае рынок является конкурентным, и оптимальная заявка фирмы должна соответствовать ее вальрасовской функции предложения $S^a_W(p) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Argmax}_{v^a}(v^a p - C^a(v^a))$ [8]. Она представляет собой точечно-множественное отображение, которое обладает следующими свойствами [8]: $S^a_W(0) = 0$; для каждого p множество $S^a_W(p)$ выпукло и ограничено, а график отображения $S^a_W(p)$ $\mathrm{Gr}(S^a_W(p)) = \{(p, V) | p \geq 0, V \in S^a_W(p)\}$ замкнут; $S^a_W(p)$ не убывает по p, т. е. для любых $p < p'$ и для любых $v \in S^a_W(p)$, $v' \in S^a_W(p')$ выполнено неравенство $v \leq v'$. Если фирма a не может повлиять на рыночную цену, то оптимальная заявка, которую она должна подать: $R^a(p) = S^a_W(p)$. Пусть $S_{iW}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{a \in A_i} S^a_W(p)$, $i = 1, 2$.

Узловые цены, которые соответствуют вальрасовским функциям предложения, обозначим $\widetilde{p_i}(Q)$, $i = 1, 2$. Таким образом, цены $\widetilde{p_i}(0)$ определяются из условий: $D_i(\widetilde{p_i}) = S_{iW}(\widetilde{p_i})$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\widetilde{p_1}(0) < (1-k)\widetilde{p_2}(0)$. Выясним, что будет происходить по мере роста пропускной способности Q.

Цены $\widetilde{p_1}$ и $\widetilde{p_2}$ при перемещении товара с первого рынка на второй определяются из системы

$$D_1(\widetilde{p_1}) + q = S_{1W}(\widetilde{p_1}), \tag{2.2}$$

$$D_2(\widetilde{p_2}) - (1-k)q = S_{2W}(\widetilde{p_2}), \tag{2.3}$$

$$\left[\begin{array}{lll} \widetilde{p_1} = (1-k)\widetilde{p_2} & \text{и} & q \leq Q, \\ \widetilde{p_1} < (1-k)\widetilde{p_2} & \text{и} & q = Q. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Рассмотрим вспомогательные функции $\widetilde{p_1}^0(q)$ и $\widetilde{p_2}^0(q)$, определяемые из соотношений (2.2) и (2.3) соответственно. Таким образом, если $q = Q$, то $\widetilde{p_i}(Q) = \widetilde{p_i}^0(Q)$. В лемме 2.2.1 указаны свойства функций $\widetilde{p_1}^0(q)$ и $\widetilde{p_2}^0(q)$.

Лемма 2.2.1. *Функция $\widetilde{p_1}^0(q)$ не убывает по q, причем в области непрерывности $D_1^{'}(p)$ выполнено либо $d\widetilde{p_1}^0/dq = -(dD_1(p)/dp - dS_{1W}(p)/dp)^{-1}$, либо $d\widetilde{p_1}^0/dq = 0$. Функция $\widetilde{p_2}^0(q)$ не возрастает по q, причем в области непрерывности $D_2^{'}(p)$ выполнено либо $d\widetilde{p_2}^0/dq = (1-k)(dD_2(p)/dp - dS_{2W}(p)/dp)^{-1}$, либо $d\widetilde{p_2}^0/dq = 0$.*

Доказательство. Введем обозначения $S_{1W}^{+}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_{1W}(p)\}$, $S_{1W}^{-}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{S_{1W}(p)\}$, c_j – точки скачков функции общего предложения на первом рынке, в которых $S_{1W}^{+}(c_j) > S_{1W}^{-}(c_j)$. Пусть

$$q_j^- \stackrel{\text{def}}{=} S_{1W}^{-}(c_j) - D_1(c_j), \quad q_j^+ \stackrel{\text{def}}{=} S_{1W}^{+}(c_j) - D_1(c_j) \quad \text{для} \quad j : c_j \geq \widetilde{p_1}^0(0).$$

Тогда при $q \in [\max\{0, q_j^-\}, q_j^+]$ имеем $\widetilde{p_1}^0(q) = \widetilde{p_1}^0(q_j^+)$ и $d\widetilde{p_1}^0/dq = 0$.

Для остальных значений q цена $\widetilde{p_1}^0$ определяется из соотношения

$$K_1(\widetilde{p_1}^0, q) \stackrel{\text{def}}{=} D_1(\widetilde{p_1}^0) + q - S_{1W}(\widetilde{p_1}^0) = 0.$$

По теореме о неявно заданной функции

$$d\widetilde{p_1}^0/dq = -\frac{\partial K_1(\widetilde{p_1}^0, q)}{\partial q} \Big/ \frac{\partial K_1(\widetilde{p_1}^0, q)}{\partial \widetilde{p_1}^0} = -\left(\frac{dD_1(p)}{dp} - \frac{dS_{1W}(p)}{dp}\right)^{-1} > 0.$$

Свойства функции $\widetilde{p_2}^0(q)$ доказываются аналогичным образом, с учетом того, что цена $\widetilde{p_2}^0$ определяется из соотношения

$$K_2(\widetilde{p_2}^0, q) \stackrel{\text{def}}{=} D_2(\widetilde{p_2}^0) - (1-k)q - S_{2W}(\widetilde{p_2}^0) = 0.$$

Лемма доказана.

Далее необходимо провести анализ характеристик равновесия в зависимости от пропускной способности СПТ.

Утверждение 2.2.1. *Существует значение пропускной способности* $\widehat{Q}$, *определяемое из условия* $\widetilde{p_1}^0(\widehat{Q}) = (1-k)\widetilde{p_2}^0(\widehat{Q})$, *такое, что при* $Q < \widehat{Q}$ *на рынке будет равновесие, для которого*

$$q = Q, \quad \widetilde{p_i}(Q) = \widetilde{p_i}^0(Q), \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

$$\widetilde{p_1}(Q) < (1-k)\widetilde{p_2}(Q). \tag{2.6}$$

При $Q > \widehat{Q}$ *равновесие отвечает условиям*:

$$q = \widehat{Q} < Q, \quad \widetilde{p_i}(Q) = \widetilde{p_i}^0(\widehat{Q}), \quad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

Доказательство. Найдем значение пропускной способности $\widehat{Q}$, при котором $\widetilde{p_1}^0(\widehat{Q}) = (1-k)\widetilde{p_2}^0(\widehat{Q})$. Величина $\widehat{Q}$ определяется из условий (2.2), (2.3). Умножив уравнение (2.2) на $(1-k)$ и сложив с (2.3), получим соотношение

$$(1-k)D_1((1-k)p_2) + D_2(p_2) = (1-k)S_{1W}((1-k)p_2) + S_{2W}(p_2). \tag{2.8}$$

Правая часть уравнения (2.8) не убывает, при $p_2 = 0$ обращается в ноль, а при $p_2 > C^{a'}(0)$ для некоторого a положительна. Левая часть уравнения (2.8) не возрастает, неотрицательна и стремится к нулю при $p_2 \to \infty$. Из теоремы о промежуточном значении замкнутого отображения следует, что существует решение $\widehat{p_2}$ уравнения (2.8). Если решение неединственно, то в качестве $\widehat{p_2}$ возьмем минимальное значение, удовлетворяющее (2.8). При этом

$$\widehat{Q} = S_{1W}((1-k)\widehat{p_2}) - D_1((1-k)\widehat{p_2}). \tag{2.9}$$

В общих предположениях относительно структуры рынков это значение определяется однозначно. По определению $\widehat{Q}$ справедливо $\widetilde{p_i}(\widehat{Q}) = \widetilde{p_i}^0(\widehat{Q})$.

Покажем, что при $Q < \widehat{Q}$ величина потока q равна пропускной способности Q. От противного, допустим, что $q < Q$. Тогда согласно (2.4) должно выполняться $\widetilde{p_1}^0(q) = (1-k)\widetilde{p_2}^0(q)$, т. е. q должно совпадать с $\widehat{Q}$, что противоречит $q < Q < \widehat{Q}$. Следовательно, выполнено (2.5). В силу монотонности функций $\widetilde{p_i}^0(q)$ справедливо (2.6).

На рисунке 2.1 графически показано, как определяются цены $\widetilde{p_1}(Q)$ (рисунок 2.1, *а*) и $\widetilde{p_2}(Q)$ (рисунок 2.1, *б*) в этом случае.

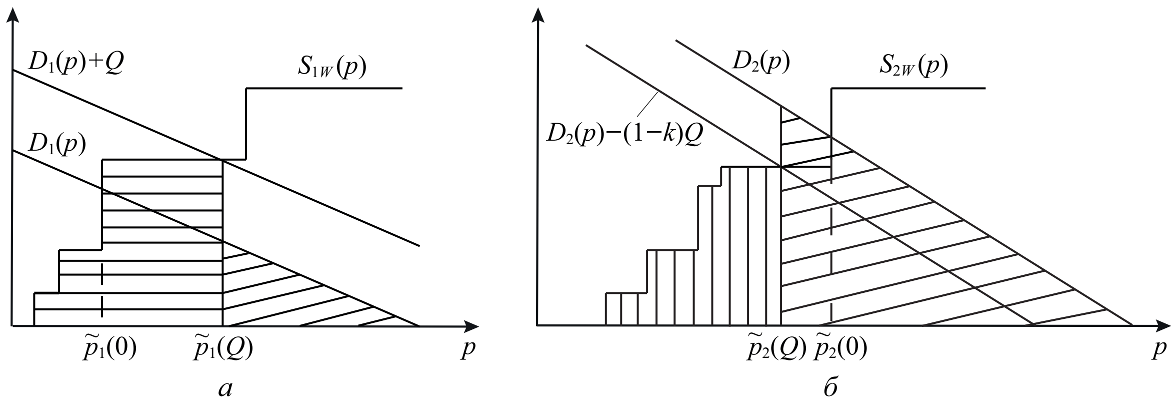

Рис. 2.1. Узловые цены

Докажем, что при $Q > \widehat{Q}$ поток стабилизируется на уровне $q = \widehat{Q}$ и равновесие удовлетворяет условию (2.7). От противного, допустим, что $q = Q$. Тогда согласно (2.4) должно выполняться одно из двух условий: либо $\widetilde{p_1}(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q)$, но тогда Q должно совпадать с $\widehat{Q}$, что противоречит $Q > \widehat{Q}$; либо $\widetilde{p_1}(Q) < (1-k)\widetilde{p_2}(Q)$, но так как $Q > \widehat{Q}$, $\widetilde{p_1}(\widehat{Q}) = (1-k)\widetilde{p_2}(\widehat{Q})$ и функции $\widetilde{p_i}^0(q)$ монотонны, то это также невозможно. Таким образом $q < Q$, следовательно, $\widetilde{p_1}(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q)$ и величина потока q в этом случае определяется так же, как значение $\widehat{Q}$. Утверждение доказано.

2.3. Оптимальная пропускная способность системы перемещения товара в условиях совершенной конкуренции

Далее обратимся к поиску оптимального значения пропускной способности СПТ между двумя рынками с точки зрения общественного благосостояния.

При заданном значении Q выражение для функции $W(Q)$ общественного благосостояния без учета затрат, связанных с созданием СПТ с пропускной способностью Q, принимает следующий вид:

$$W(Q) = \mathrm{Pr}_1(Q) + \mathrm{Pr}_2(Q) + \mathrm{CS}_1(Q) + \mathrm{CS}_2(Q) + \mathrm{PrT}(Q), \tag{2.10}$$

где $\mathrm{Pr}_1(Q)$ – прибыль производителей на первом рынке, $\mathrm{Pr}_2(Q)$ – прибыль производителей на втором рынке, $\mathrm{CS}_1(Q)$ – выигрыш потребителей на первом рынке, $\mathrm{CS}_2(Q)$ – выигрыш потребителей на втором рынке, $\mathrm{PrT}(Q)$ – прибыль сетевой системы.

Прибыль производителей на рынке i составляет

$$\mathrm{Pr}_i(Q) = \sum_{a \in A_i} \big(\widetilde{p_i}(Q) S_W^a(\widetilde{p_i}(Q)) - C^a(S_W^a(\widetilde{p_i}(Q)))\big) = \int\limits_0^{\widetilde{p_i}(Q)} S_{iW}(p)dp. \tag{2.11}$$

Этой прибыли соответствует площадь фигуры, ограниченной прямой $p = \widetilde{p_i}(Q)$, осью цен и графиком функции предложения (см. рисунок 2.1). Предполагается, что функция спроса отражает полезность товара для потребителей. По определению [2] выигрыш потребителей на рынке i рассчитывается как

$$\mathrm{CS}_i(Q) = \int\limits_{\widetilde{p_i}(Q)}^{\infty} D_i(p)dp. \tag{2.12}$$

Ему соответствует площадь фигуры, ограниченной прямой $p = \widetilde{p_i}(Q)$, осью цен и графиком функции спроса. Еще одна компонента общественного благосостояния – прибыль сетевой системы $\mathrm{PrT}(Q)$, которая при $Q < \widehat{Q}$ покупает объем Q по цене $\widetilde{p_1}(Q)$ и продает объем $(1-k)Q$ по цене $\widetilde{p_2}(Q)$:

$$\mathrm{PrT}(Q) = \widetilde{p_2}(Q)(1-k)Q - \widetilde{p_1}(Q)Q, \tag{2.13}$$

а при $Q \geq \widehat{Q}$ прибыль равна нулю. Таким образом, функция $W(Q)$ непрерывна.

Затраты, связанные с созданием СПТ, задаются функцией вида

$$OC(Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q = 0, \\ c_f + c_v(Q), & \text{если } Q > 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $c_f > 0$ – фиксированные затраты, не зависящие от пропускной способности; $c_v(Q)$ – переменные затраты, $c_v(0) = 0$, эта функция выпукла и монотонно возрастает по Q. Функция полного общественного благосостояния $TW(Q)$ с учетом затрат имеет вид $TW(Q) = W(Q) - OC(Q)$.

Для решения задачи об оптимальном значении Q^*, максимизирующем общественное благосостояние, необходимо исследовать свойства функции $TW(Q)$. Особенность заключается в том, что функция общественного благосостояния разрывна в нуле. Поэтому алгоритм решения следующий. Сначала необходимо найти оптимальное значение при положительных значениях Q, потом сравнить этот оптимум со значением общественного благосостояния в ситуации, когда не создается СПТ, а затем выбрать максимум из этих двух значений.

В следующем утверждении установлены свойства функции $W(Q)$.

Утверждение 2.3.1. *Для производной функции $W(Q)$ справедливо представление: $W'(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q)$. Функция $W(Q)$ вогнута и монотонно возрастает при $Q \le \widehat{Q}$.*

Доказательство. Для производной функции $W(Q)$ по теореме о дифференцировании интеграла с переменным пределом справедливо

$$\begin{aligned}
W'(Q) = {} & S_{1W}(\widetilde{p_1}(Q))\widetilde{p_1}'(Q) - D_1(\widetilde{p_1}(Q))\widetilde{p_1}'(Q) + S_{2W}(\widetilde{p_2}(Q))\widetilde{p_2}'(Q) - \\
& - D_2(\widetilde{p_2}(Q))\widetilde{p_2}'(Q) + (1-k)\widetilde{p_2}'(Q)Q + (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}'(Q)Q - \widetilde{p_1}(Q) = \\
& = \widetilde{p_1}'(Q)(S_{1W}(\widetilde{p_1}(Q)) - D_1(\widetilde{p_1}(Q)) - Q) + \\
& + \widetilde{p_2}'(Q)(S_{2W}(\widetilde{p_2}(Q)) - D_2(\widetilde{p_2}(Q)) + (1-k)Q) + (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q).
\end{aligned}$$

Так как $D_1(\widetilde{p_1}(Q)) + Q = S_{1W}(\widetilde{p_1}(Q))$ и $D_2(\widetilde{p_2}(Q)) - (1-k)Q = S_{2W}(\widetilde{p_2}(Q))$, то при $Q < \widehat{Q}$ $W'(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q) > 0$. Следовательно, $W(Q)$ монотонно возрастает. Разность $(1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q)$ не возрастает, так как $\widetilde{p_1}(Q)$ не убывает, а $\widetilde{p_2}(Q)$ не возрастает. Следовательно, $W(Q)$– вогнутая функция. Утверждение доказано.

Утверждение 2.3.2. *Если* $(1-k)\widetilde{p_2}(0) - \widetilde{p_1}(0) \le c'_v(0)$, *то оптимальное значение пропускной способности* $Q^* = 0$. *В противном случае локальный максимум достигается при значении* Q^{*L}, *которое определяется из условия* $(1-k)\widetilde{p_2}(Q^{*L}) - \widetilde{p_1}(Q^{*L}) = c'_v(Q^{*L})$ *и удовлетворяет неравенству* $Q^{*L} < \widehat{Q}$. *Если* $TW(Q^{*L}) < TW(0)$, *то* $Q^* = 0$. *Если выполнено обратное неравенство, то* $Q^* = Q^{*L}$.

Доказательство. Найдем при $Q \ge 0$ максимум функции $TW^0(Q) \stackrel{\text{def}}{=} W(Q) - (c_f + c_v(Q))$, которая является вогнутой функцией, совпадающей с функцией общественного благосостояния при $Q \neq 0$. Если $W'_+(0) \le c'_v(0)$, то максимум $TW^0(Q)$ достигается при $Q = 0$. Тогда и максимум функции общественного благосостояния $TW(Q)$ будет в точке $Q^* = 0$: $TW(0) = TW^0(0) + c_f > TW^0(0) \ge TW^0(Q) = TW(Q)$ при любом $Q \neq 0$. В противном случае, учитывая свойства функции общественного благосостояния, получим, что локальный максимум Q^{*L} при $Q > 0$ определяется из условия $W'(Q) = (1-k)\widetilde{p_2}(Q) - \widetilde{p_1}(Q) = c'_v(Q) > 0$. Следовательно, $Q^* < \widehat{Q}$.

Далее для определения оптимального значения пропускной способности Q^* необходимо сравнить значение функции общественного благосостояния $TW(0)$ при отсутствии СПТ со значением в точке локального максимума $TW(Q^{*L})$. Утверждение доказано.

Для общества представляет интерес следующий вопрос: кто должен платить за создание СПТ между рынками. Проанализируем, как меняются выигрыши отдельных агентов, когда происходит переток товара с первого рынка на второй. На первом рынке прибыль производителей увеличивается на $\Delta \mathrm{Pr}_1 = \int\limits_{\widetilde{p_1}(0)}^{\widetilde{p_1}(Q^*)} S_{1W}(p)dp$, а выигрыш потребителей сокращается на $\Delta \mathrm{CS}_1 = \int\limits_{\widetilde{p_1}(0)}^{\widetilde{p_1}(Q^*)} D_1(p)dp$. На втором рынке наблюдается обратная картина. На нем потребители выигрывают: $\Delta \mathrm{CS}_2 = \int\limits_{\widetilde{p_2}(Q^*)}^{\widetilde{p_2}(0)} D_2(p)dp$, а прибыль производителей сокращается на

$\Delta\mathrm{Pr}_2 = \int\limits_{\widetilde{p_2}(Q^*)}^{\widetilde{p_2}(0)} S_{2W}(p)dp$. Кроме того, сетевая система получает прибыль, равную $\widetilde{p_2}(Q^*)(1-k)Q^* - \widetilde{p_1}(Q^*)Q^*$, поскольку $Q^{*L} < \widehat{Q}$. Очевидно, что оплачивать создание СПТ должны те, кто от этого выигрывает.

2.4. Модель двухузлового рынка в условиях несовершенной конкуренции

В этом разделе проводится анализ равновесий Нэша модели двухузлового аукциона в зависимости от пропускной способности. В работе [51] показано, что если существует равновесие аукциона единой цены, устойчивое по отношению к адаптивной динамике, то исход должен соответствовать исходу по Курно. Поэтому далее рассмотрим модель Курно для двухузлового рынка и приведем необходимые условия для равновесий разных типов, следуя [2].

Стратегией производителя a является его объем производства $v^a \in [0, V^a]$. Пусть $\overrightarrow{v_i} = (v^a, a \in A_i)$ – набор стратегий производителей на рынке i. Тогда цены на изолированных рынках p_i^0 определяются следующим образом: $p_i^0(\overrightarrow{v_i}) = D_i^{-1}(\sum_{a\in A_i} v^a)$, $i = 1, 2$. В равновесии типа A перемещения товара с одного рынка на другой не происходит и на рынках устанавливаются цены p_1^* и p_2^*, такие что $\lambda^{-1} < p_2^*/p_1^* < \lambda$. Условия первого порядка для равновесия этого типа такие же, как для изолированных рынков:

$$v^{a*} \in (p_i^* - C^{a'}(v^{a*}))|D_i^{'}(p_i^*)| \text{ , для любого } a \in A_i \text{ такого,}$$

$$\text{что } C^{a'}(0) < p_i^*, i = 1, 2, \tag{2.15}$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_i^*. \tag{2.16}$$

Для i-го изолированного рынка $S_{iC}^a(p)$ обозначает функцию предложения Курно производителя $a \in A_i$, определяемую как решение системы (2.15)-(2.16), а $S_{iC}(p) = \sum_{a\in A_i} S_{iC}^a(p)$ – суммарную функцию предложения Курно рынка i,

$i = 1, 2$. Равновесные цены p_i^* определяются из баланса спроса и предложения: $S_{iC}(p_i^*) = D_i(p_i^*)$, $i = 1, 2$.

В равновесии типа B_{1-2} происходит перемещение товара с первого рынка на второй, причем $q \in (0, Q)$ и $\lambda p_1^* = p_2^*$. Спрос для производителей на первом рынке при малом изменении цены равен

$$D_1(p_1) + \lambda(D_2(\lambda p_1) - \sum_{a \in A_2} v^a).$$

Поэтому на первом рынке установится цена p_1^b, такая что

$$\sum_{a \in A_1} v^a = D_1(p_1^b) + \lambda(D_2(\lambda p_1^b) - \sum_{a \in A_2} v^a). \tag{2.17}$$

В равновесии для производителей $a \in A_1$ выполнены следующие условия первого порядка

$$v^{a*} \in (p_1^{*b} - C^{a'}(v^{a*}))|D_1^{'}(p_1^{*b}) + \lambda^2 D_2^{'}(\lambda p_1^{*b})| \text{ , если } C^{a'}(0) < p_1^{*b}, \tag{2.18}$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_1^{*b}. \tag{2.19}$$

По аналогии с изолированным рынком условия (2.18)-(2.19) задают отображение $S^a_{1C1-2}(p)$, определяющее для производителя $a \in A_1$ оптимальный объем в зависимости от цены при объединенном рынке. Это отображение представляет собой функцию предложения Курно при объединенном рынке для производителя с первого рынка.

Для производителей на втором рынке спрос составляет

$$D_2(\lambda p_1) + 1/\lambda(D_1(p_1) - \sum_{a \in A_1} v^a).$$

Условия первого порядка записываются следующим образом:

$$v^{a*} \in (\lambda p_1^{*b} - C^{a'}(v^{a*}))|D_2^{'}(\lambda p_1^{*b}) + D_1^{'}(p_1^{*b})/\lambda^2| \text{ , если } C^{a'}(0) < p_2^{*b}, \tag{2.20}$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_2^{*b} \tag{2.21}$$

и аналогично задают отображение $S^a_{2C1-2}(p)$ – функцию предложения Курно при объединенном рынке для производителя со второго рынка; $S_{iC1-2}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a\in A_i} S^a_{iC1-2}(p)$, $i = 1, 2$. Равновесная цена определяется из (2.17) с заменой v^a, $a \in A_i$, на соответствующие функции предложения Курно при объединенном рынке.

Равновесие типа B_{2-1} определяется симметричным образом.

В равновесии типа C_{1-2} происходит перемещение товара из первого узла во второй, причем $q = Q$ и $\lambda p_1^* < p_2^*$. На каждом рынке в равновесии предложение балансирует спрос:

$$\sum_{a\in A_1} v^{a*} = D_1(p_1^{*c}) + Q, \tag{2.22}$$

$$\sum_{a\in A_2} v^{a*} = D_2(p_2^{*c}) - \lambda^{-1} Q. \tag{2.23}$$

Условия первого порядка для равновесия этого типа совпадают с (2.15), (2.16), поэтому для нахождения p_i^{*c} необходимо в (2.22) и (2.23) заменить v^{a*} на $S^a_{iC}(p_i^{*c})$.

Равновесие типа C_{2-1} определяется симметричным образом.

В работе [49] определен еще один тип равновесия — D, при котором $q = Q$ и $\lambda p_1^* = p_2^*$. Условие первого порядка для производителей на первом рынке:

$$(p_1^* - C_-^{a'}(v^{a*}))|D_1'(p_1^*) + \lambda^2 D_2'(\lambda p_1^*)| \geq v^{a*} \geq (p_1^* - C_+^{a'}(v^{a*}))|D_1'(p_1^*)|.$$

Условие первого порядка для производителей на втором рынке:

$$(\lambda p_1^* - C_-^{a'}(v^{a*}))|D_2'(\lambda p_1^*)| \geq v^{a*} \geq (\lambda p_1^* - C_+^{a'}(v^{a*}))|D_2'(\lambda p_1^*) + D_1'(p_1^*)/\lambda^2|.$$

Такое соотношение может выполняться, только если $D_1'(p_1^*) = 0$ или если v^{a*} – точка скачка функции предельных затрат.

В [50] получены следующие результаты о несовместимости некоторых типов равновесий. Пусть p_i^{*0} – цены Курно для изолированных рынков, которые определяются из условий: $S_{iC}(p_i^{*0}) = D_i(p_i^{*0})$, $i = 1, 2$. Тогда если $\lambda^{-1} < p_2^{*0}/p_1^{*0} < \lambda$, то для любого $Q > 0$ существует равновесие типа A, в то время как равновесие типа C не существует. Если $p_1^{*0} > \lambda p_2^{*0}$, то для любого $Q > 0$

равновесия типов A и C_{1-2} не существуют. Если $\lambda p_1^{*0} < p_2^{*0}$, то для любого $Q > 0$ равновесия типов A и C_{2-1} не существуют.

Далее в диссертации будут уточнены эти результаты. Пусть $\Delta^1_{ij}(\lambda, p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{1Ci-j}(p) - D_1(p)$ – разность функции предложения Курно первого рынка при перетоке из узла i в узел j в условиях объединенного рынка и функции спроса на первом рынке. Аналогично, $\Delta^2_{ij}(\lambda, p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{2Ci-j}(p) - D_2(p)$. Обозначим $\Delta^1_{ij}(1, p) = \Delta^1_{ji}(1, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^1(p)$ и $\Delta^2_{ij}(1, p) = \Delta^2_{ji}(1, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^2(p)$. Пусть цены $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ определяются из условий: $\Delta^i(\overline{p}_i) = 0$, $i = 1, 2$. Отметим, что если $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$, то при $\lambda = 1$ существует единственное равновесие типа B с ценой p^{*b}, для которой $\Delta^1(p^{*b}) = -\Delta^2(p^{*b})$ (см. рисунок 2.2).

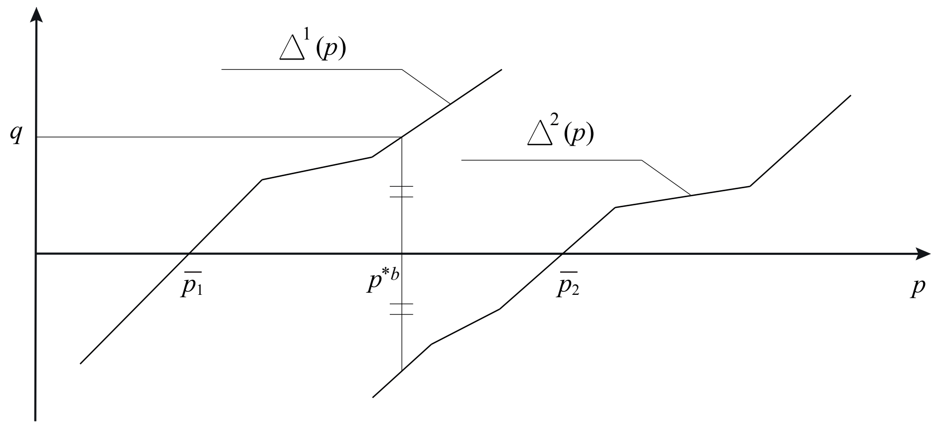

Рис. 2.2. Равновесие типа B_{1-2} при $\lambda = 1$

Лемма 2.4.1. *Пусть $D_i(p) > 0$ и $D_i'(p)$ не возрастает при $p \in (0, M_i)$; $D_i(p) = 0$ при $p \geq M_i$, $i = 1, 2$.*

a) Если для некоторого $\widetilde{Q}$ существует равновесие типа B_{1-2}, то равновесие типа D_{1-2} не существует для $Q = \widetilde{Q}$.

b) Если $\overline{p}_1 < \overline{p}_2 < M_2 < M_1$, то при значениях λ, достаточно близких к единице, равновесия типов B_{2-1} и D_{2-1} не существуют для любого $Q > 0$, а равновесие типа B_{1-2} существует при $Q > \overline{Q}$,

$$\overline{Q} = S_{1C1-2}(p_1^{*b}) - D_1(p_1^{*b}), \tag{2.24}$$

где равновесная цена на первом рынке p_1^{*b} определяется из (2.17–2.21).

Доказательство. a) От противного, предположим, что равновесие типа D_{1-2} с узловыми ценами p_i^{*d} существует. По определению равновесия типа D_{1-2} справедливо $S_{1C1-2}(p_1^{*d}) \geq D_1(p_1^{*d}) + \widetilde{Q}$ и $D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}\widetilde{Q} \geq S_{2C1-2}(p_2^{*d})$. Из первого неравенства имеем $p_1^{*d} > p_1^{*b}$, из второго – $p_2^{*d} < p_2^{*b}$, что противоречит $\lambda p_1^{*d} = p_2^{*d}$.

b) Для существования равновесий типов B_{2-1} и D_{2-1} необходимо, чтобы для некоторого p_2^* были выполнены неравенства:

$$\Delta_{21}^1(\lambda, \lambda p_2^*) < 0, \quad \Delta_{21}^2(\lambda, p_2^*) > 0. \tag{2.25}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$ и покажем, что равновесия типов B_{2-1} и D_{2-1} не существуют. От противного, пусть (2.25) выполнены для некоторого p^* при $\lambda = 1$, то есть $\Delta^1(p^*) < 0$ и $\Delta^2(p^*) > 0$. Так как по определению $\Delta^i(\overline{p}_i) = 0$, $i = 1, 2$, то в силу монотонности функций $\Delta^i(p^*)$, $i = 1, 2$ из первого неравенства следует, что $p^* < \overline{p}_1$, а из второго, что $p^* > \overline{p}_2$. Из этих соотношений получим $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$, что противоречит условию $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$.

Если мы предположим, что неравенства (2.25) справедливы при значениях λ, достаточно близких к единице, то в силу непрерывной зависимости функций $\Delta_{21}^i(\lambda, p)$, $i = 1, 2$, от λ эти соотношения будут справедливы и при $\lambda = 1$. Однако выше уже показано, что это невозможно. Следовательно, при значениях λ, достаточно близких к единице, равновесия типов B_{2-1} и D_{2-1} также не существуют.

Покажем, что при $Q > \overline{Q}$ существует равновесие типа B_{1-2}. Пусть $\overline{\overline{p}}_i(\lambda)$ определяются из условий $\Delta_{12}^i(\lambda, p) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда в силу свойств функций $\Delta_{12}^i(\lambda, p)$, при значениях λ, достаточно близких к единице, справедливо $\lambda\overline{\overline{p}}_1(\lambda) < \overline{\overline{p}}_2(\lambda) < M_2$.

Из (2.17–2.21) получим следующее соотношение для равновесной цены p_1^{*b}:

$$S_{1C1-2}(p_1^{*b}) + \lambda S_{2C1-2}(\lambda p_1^{*b}) \ni D_1(p_1^{*b}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*b}). \tag{2.26}$$

Так как при $p_1^b = \overline{\overline{p}}_1(\lambda)$ левая часть (2.26) меньше правой, а при $p_1^b = \lambda^{-1}\overline{\overline{p}}_2(\lambda)$ больше, то из теоремы о промежуточном значении замкнутого отображения и монотонности $D_i(p)$, $S_{iC1-2}(p)$ при $p < M_2$ следует, что существует единственное решение (2.26) p_1^{*b}: $\overline{\overline{p}}_1(\lambda) < p_1^{*b} < \lambda^{-1}\overline{\overline{p}}_2(\lambda)$. Тогда величина потока равна $\overline{Q}$, которое определяется согласно (2.24), $\overline{Q} > 0$, и при $Q > \overline{Q}$ существует равновесие типа B_{1-2}. Лемма доказана.

Далее установим, как зависит тип равновесия от пропускной способности Q.

Утверждение 2.4.1. *Пусть $D_i(p) > 0$ и $D_i'(p)$ не возрастает при $p \in (0, M_i)$; $D_i(p) = 0$ при $p \geq M_i$, $i = 1, 2$, причем значения p_1^{*0}, p_2^{*0}, $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, M_1, M_2 удовлетворяют условиям $p_1^{*0} < p_2^{*0} < M_2 < M_1$, $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$. Тогда при значениях λ, достаточно близких к единице, для любого $Q > 0$ существует не более одного равновесия, причем существует значение $\underline{Q} \in (0, \overline{Q})$, где $\overline{Q}$ определяется согласно (2.24), такое что при $Q \in (0, \underline{Q})$ существует равновесие типа C_{1-2}; при $Q \in (\underline{Q}, \overline{Q})$, возможно лишь равновесие типа D_{1-2}; если $Q > \overline{Q}$, существует равновесие типа B_{1-2}.*

Доказательство. Найдем значение пропускной способности $\underline{Q}$, при котором выполнено (2.22)-(2.23), (2.15)-(2.16) и $\lambda p_1^{*c} = p_2^{*c}$. Используя (2.22)-(2.23), (2.15)-(2.16), получим условие

$$S_{1C}(p_1^{*c}) + \lambda S_{2C}(\lambda p_1^{*c}) \ni D_1(p_1^{*c}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*c}) \tag{2.27}$$

Покажем, что для (2.27) существует решение $\widehat{p_1^{*c}}$. Так как $p_1^{*0} < M_2$, то $S_{1C}(M_2) > D_1(M_2)$. Тогда с учетом того, что $D_2(\lambda M_2) = 0$, справедливо неравенство $S_{1C}(M_2) + \lambda S_{2C}(\lambda M_2) > D_1(M_2) + \lambda D_2(\lambda M_2)$. Левая часть (2.27) не убывает при $p_1^{*c} \in (0, M_2\lambda^{-1})$, положительна при $C^{a'}(0) < p_1^{*c} < M_1$, обращается в ноль при $p_1^{*c} = 0$. Правая часть (2.27) убывает и неотрицательна. Следовательно, существует решение $\widehat{p_1^{*c}} < M_2\lambda^{-1}$. Тогда $\underline{Q} = S_{1C}(\widehat{p_1^{*c}}) - D_1(\widehat{p_1^{*c}})$.

Покажем, что $0 < \underline{Q} < \overline{Q}$. Так как выполнено $p_2^{*0} > \lambda p_1^{*0}$, то в силу монотонности $S_{2C}(\lambda p_1^{*0}) - D_2(\lambda p_1^{*0}) < S_{2C}(p_2^{*0}) - D_2(p_2^{*0}) = 0$. Тогда, учитывая, что $S_{1C}(p_1^{*0}) = D_1(p_1^{*0})$, получим $S_{1C}(p_1^{*0}) + \lambda S_{2C}(\lambda p_1^{*0}) < D_1(p_1^{*0}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*0})$. Следовательно, $\widehat{p_1^{*c}} > p_1^{*0}$ и $\underline{Q} > 0$.

Из $S_{iC1-2}(p) > S_i(p)$, $i = 1, 2$, (2.26)-(2.27) следует, что $\widehat{p_1^{*c}} \geq p_1^{*b}$. Тогда с учетом того, что $\lambda\widehat{p_1^{*c}} < M_2$, получим $\lambda p_1^{*b} < M_2$ и $S_{2C}(\lambda p_1^{*b}) \leq S_{2C}(\lambda\widehat{p_1^{*c}}) \leq S_{2C1-2}(\lambda\widehat{p_1^{*c}})$. От противного, допустим, что выполнено $\underline{Q} > \overline{Q}$. Тогда справедливо $S_{2C1-2}(\lambda\widehat{p_1^{*c}}) \geq S_{2C}(\lambda p_1^{*b}) = D_2(\lambda p_1^{*b}) - \lambda^{-1}\overline{Q} > D_2(\lambda p_1^{*b}) - \lambda^{-1}\underline{Q} \geq D_2(\lambda\widehat{p_1^{*c}}) - \lambda^{-1}\underline{Q}$, что противоречит определению $\underline{Q}$.

Покажем, что при $Q < \overline{Q}$ не существует равновесия типа B_{1-2}. От противного, пусть $q \in (0, Q)$, $\lambda p_1^* = p_2^*$ и справедливо (2.17)-(2.21). Величина потока q определяется так же, как $\overline{Q}$. Противоречие с $q \in (0, Q)$. Таким образом, при $Q < \overline{Q}$ $q = Q$. При $Q > \overline{Q}$ равновесие типа B_{1-2} существует в силу леммы 2.4.1.

Далее рассмотрим функции $p_1(Q)$ и $p_2(Q)$, которые определяются из условий: $D_1(p_1) + Q = S_{1C}(p_1)$ и $D_2(p_2) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2)$, и докажем, что они монотонны. По теореме о неявно заданной функции справедливо

$$p_1'(Q) = \frac{1}{S_{1C}'(p_1) - D_1'(p_1)} \geq 0, \tag{2.28}$$

$$p_2'(Q) = \frac{\lambda^{-1}}{D_2'(p_2) - S_{2C}'(p_2)} \leq 0. \tag{2.29}$$

Следовательно, $p_1(Q)$ не убывает, а $p_2(Q)$ не возрастает. Докажем, что при $Q > \underline{Q}$ не существует равновесия типа C_{1-2}. От противного, допустим, что $q = Q$ и $\lambda p_1(Q) < p_2(Q)$. Так как $Q > \underline{Q}$, $\lambda p_1(\underline{Q}) = p_2(\underline{Q})$ и функции $p_i(Q)$ монотонны, то это невозможно. При $Q < \underline{Q}$ в силу монотонности функций $p_i(Q)$ справедливо $\lambda p_1(Q) < p_2(Q)$, следовательно, равновесие типа C_{1-2} существует.

Итак, при $Q \in (\underline{Q}, \overline{Q})$ $q = Q$ и $\lambda p_1^* = p_2^*$, что соответсвует равновесию типа D. Утверждение доказано.

2.5. Задача максимизации общественного благосостояния в условиях несовершенной конкуренции

Далее в предположениях утверждения 2.4.1 исследуем зависимость общественного благосостояния от пропускной способности СПТ при $Q < \underline{Q}$, то есть для равновесия типа C. Общественное благосостояние представляет собой суммарный выигрыш участников рынка и состоит из следующих компонент:

$$W(Q) = P_1(Q) + P_2(Q) + CS_1(Q) + CS_2(Q) + T(Q),$$

где $P_i(Q)$ – прибыль производителей на рынке i, $CS_i(Q)$ – сюрплас потребителей на рынке i, $T(Q)$ – прибыль транспортной системы. Прибыль производителей на i-ом рынке при $Q < \underline{Q}$ составляет

$$P_i(Q) = \sum_{a \in A_i} \Big(p_i(Q) S^a_{iC}(p_i(Q)) - C^a\big(S^a_{iC}(p_i(Q))\big)\Big).$$

Функция спроса отражает полезность товара для потребителей, и сюрплас потребителей на i-ом рынке по определению рассчитывается следующим образом: $CS_i(Q) = \int_{p_i(Q)}^{\infty} D_i(p)dp$. Транспортная система покупает объем Q по цене $p_1(Q)$ и продает объем $\lambda^{-1}Q$ по цене $p_2(Q)$, поэтому ее прибыль составляет $T(Q) = Q(p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q))$. Таким образом, функция общественного благосостояния принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} W(Q) &= Q(p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q)) + \int\limits_{p_1(Q)}^{\infty} D_1(p)dp + \int\limits_{p_2(Q)}^{\infty} D_2(p)dp + \\ &+ (p_1(Q) \sum_{a \in A_1} S^a_{1C}(p_1(Q)) - \sum_{a \in A_1} C^a(S^a_{1C}(p_2(Q)))) + \\ &+ (p_2(Q) \sum_{a \in A_2} S^a_{2C}(p_2(Q)) - \sum_{a \in A_2} C^a(S^a_{2C}(p_2(Q)))). \end{aligned}$$

Лемма 2.5.1. *Пусть функция спроса дважды дифференцируема в области, где она положительна. Тогда при $Q \in (0, \underline{Q})$ всюду, за исключением* *точек разрыва функций* $S^{a'}_{iC}(p_i(Q))$, $a \in A_1 \cup A_2$, *справедливо*

$$W'(Q) = p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + p_1'(Q) \cdot \sum_{a \in A_1} \frac{S^a_{1C}(p_1(Q)) S^{a'}_{1C}(p_1(Q))}{|D_1'(p_1(Q))|} + \\ + p_2'(Q) \cdot \sum_{a \in A_2} \frac{S^a_{2C}(p_2(Q)) S^{a'}_{2C}(p_2(Q))}{|D_2'(p_2(Q))|}, \qquad (2.30)$$

где $p_1'(Q)$, $p_2'(Q)$ *определены согласно (2.28), (2.29) и*

$$S^{a'}_{iC}(p) = \frac{|D_i'(p)| - (p - C^{a'}(S^a_{iC}(p)))D_i''(p)}{1 + C^{a''}(S^a_{iC}(p))|D_i'(p)|}.$$

Доказательство. Рассмотрим производную функции прибыли производителей на i-ом рынке:

$$\begin{aligned} P_i'(Q) &= \Big(p_i(Q) \sum_{a \in A_i} S^a_{iC}(p_i(Q)) - \sum_{a \in A_i} C^a(S^a_{iC}(p_i(Q)))\Big)' = \\ &= p_i'(Q) \cdot \Big(\sum_{a \in A_i} S^a_{iC}(p_i(Q)) + p_i(Q) \sum_{a \in A_i} S^{a'}_{iC}(p_i(Q)) - \\ &- \sum_{a \in A_i} C^{a'}(S^a_{iC}(p_i(Q))) S^{a'}_{iC}(p_i(Q))\Big), \end{aligned}$$

всюду, за исключением точек разрыва функции $S^{a'}_{iC}(p_i(Q))$.

Введем обозначение $\overline{A_i}(p) = \{a \in A_i | S^a_{iC}(p) = (p - C^{a'}(S^a_{iC}(p)))|D_i'(p)|\}$, $i = 1, 2$. Так как $S^{a'}_{iC}(p) = 0$ при $a \notin \overline{A_i}(p)$, то

$$\begin{aligned} P_i'(Q) &= p_i'(Q) \cdot \Big(\sum_{a \in A_i} S^a_{iC}(p_i(Q)) + \\ &+ \sum_{a \in \overline{A_i}(p_i(Q))} \big(p_i(Q) - C^{a'}(S^a_{iC}(p_i(Q)))\big) S^{a'}_{iC}(p_i(Q))\Big). \end{aligned}$$

Для $a \in \overline{A_i}(p)$ значение $S^a_{iC}(p)$ определяется из соотношения

$$F(S^a_{iC}, p) \stackrel{\text{def}}{=} S^a_{iC} + (p - C^{a'}(S^a_{iC}))D_i'(p) = 0.$$

Тогда по теореме о неявно заданной функции

$$\begin{aligned} S^{a'}_{iC}(p) &= -\frac{\partial F(S_{iC}, p)}{\partial p} \Big/ \frac{\partial F(S_{iC}, p)}{\partial S_{iC}} = \\ &= \frac{|D_i'(p)| - (p - C^{a'}(S^a_{iC}(p)))D_i''(p)}{1 + C^{a''}(S^a_{iC}(p)|D_i'(p)|}. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Так как для $a \in \overline{A_i}(p)$ выполнено

$$p_i(Q) - C^{a'}(S^a_{iC}(p)) = \frac{S^a_{iC}(p)}{|D'_i(p)|}$$

и $S^{a'}_{iC}(p) = 0$ при $a \notin \overline{A_i}(p)$, то для производной функции прибыли производителей на i-ом рынке получим следующее выражение:

$$P'_i(Q) = p'_i(Q) \cdot \big(\sum_{a \in A_i} S^a_{iC}(p_i(Q)) + \sum_{a \in A_i} \frac{S^a_{iC}(p_i(Q)) S^{a'}_{iC}(p_i(Q))}{|D'_i(p_i(Q))|}\big), \tag{2.32}$$

где $S^{a'}_{iC}(p)$ определено согласно (2.31).

Тогда для производной функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ по теореме о дифференцировании интеграла с переменным пределом всюду, за исключением точек разрыва функции $S^{a'}_{iC}(p_i(Q))$, справедливо

$$\begin{aligned} W'(Q) = p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) - p'_2(Q) \cdot (D_2(p_2(Q)) - \lambda^{-1}Q) - \\ - p'_1(Q) \cdot (D_1(p_1(Q)) + Q) + \\ + p'_1(Q) \cdot (S_{1C}(p_1(Q)) + \sum_{a \in A_1} \frac{S^a_{1C}(p_1(Q)) S^{a'}_{1C}(p_1(Q))}{|D'_1(p_1(Q))|}) + \\ + p'_2(Q) \cdot (S_{2C}(p_2(Q)) + \sum_{a \in A_2} \frac{S^a_{2C}(p_2(Q)) S^{a'}_{2C}(p_2(Q))}{|D'_2(p_2(Q))|}). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Учитывая, что $D_1(p_1(Q)) + Q = S_{1C}(p_1(Q))$ и $D_2(p_2(Q)) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2(Q))$, из (2.33) получим представление (2.30). Лемма доказана.

Определим, как с ростом пропускной способности СПТ меняются отдельные компоненты функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ. Так как $p_1(Q)$ возрастает, а $p_2(Q)$ убывает по Q, то с увеличением пропускной способности сюрплас потребителей на первом рынке сокращается, а на втором – растет. Если функция спроса вогнута в области, где она положительна, то функция предложения Курно не убывает в этой области и из (2.32) следует, что $P'_1(Q) > 0$ и $P'_2(Q) < 0$. Таким образом, прибыль производителей на первом рынке возрастает по Q, а прибыль производителей на втором рынке убывает.

Рассмотрим отдельно случай, когда на втором рынке нет эффективных производителей, то есть когда $D_2(p_2^{*0}) = 0$. Тогда $D_2(p_2(Q)) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2(Q)) = 0$ и выражение для производной функции общественного благосостояния всюду, за исключением точек разрыва функции $S^{a'}_{1C}(p_1(Q))$, принимает вид

$$W'(Q) = p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + p_1'(Q) \cdot \sum_{a \in A_1} \frac{S^a_{1C}(p_1(Q)) S^{a'}_{1C}(p_1(Q))}{|D_1'(p_1(Q))|}.$$

Так как $p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) \geq 0$, $p_1'(Q) > 0$, следовательно, если функция спроса вогнута в области, где она положительна, то функция общественного благосостояния не убывает.

Лемма 2.5.2. *Пусть $D_i(p) = max\{\widehat{D_i} - d_i p, 0\}$, $i = 1, 2$, а предельные издержки кусочно-постоянны: $C^a(0) = 0$, $C^{a'}(v) = c^a_k$ для $v \in (V^a_{k-1}, V^a_k)$, $k \in \overline{1, m_a}$, $V^a_0 = 0$, $V^a_{m_a} = V^a$, m_a – количество ступеней в функции предельных издержек производителя $a \in A_i$. Тогда при $Q \in (0, \underline{Q})$ всюду, за исключением точек разрыва функции $S^{a'}_{iC}(p_i(Q))$, справедливо*

$$\begin{aligned} W'(Q) = {} & p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + \\ & + \frac{1}{d_1(|A_1(p_1(Q))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_1}(p_1(Q))} S^a_{1C}(p_1(Q)) - \\ & - \frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_2}(p_2(Q))} S^a_{2C}(p_2(Q)). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Доказательство. Из (1.3) следует, что для рассматриваемого случая справедливо $S^{a'}_{iC}(p) = d_i$ при $a \in \overline{A_i}(p)$. Тогда из (2.30), (2.28) и (2.29) получим (2.34). Лемма доказана.

Далее продолжим анализ свойств функции общественного благосостояния в предположениях леммы 2.5.2. Рассмотрим точки излома функций предложения Курно для i-ого рынка: $V^a_l/d_i + c^a_l$, $l = \overline{1, m_a}$ и $V^a_j/d_j + c^a_{j+1}$, $j = \overline{1, m_{a-1}}$, $a \in A_i$. Пусть T_1 – множество, включающее p_1^{*0}, $\widehat{p_1^{*c}}$ и все точки изломов всех функций предложения Курно для 1-ого рынка, которые больше p_1^{*0} и меньше

$\widehat{p_1^{*c}}$; аналогично T_2 – множество, включающее p_2^{*0}, $\lambda\widehat{p_1^{*c}}$ и все точки изломов всех функций предложения Курно для 2-ого рынка, которые больше $\lambda\widehat{p_1^{*c}}$ и меньше p_2^{*0}. Обозначим $s_i \overset{\text{def}}{=} |T_i|$. Упорядочим элементы $t^i_{f_i}$ множества T_i, $f_i = \overline{1, s_i}$ в порядке возрастания (см. рисунок 2.3).

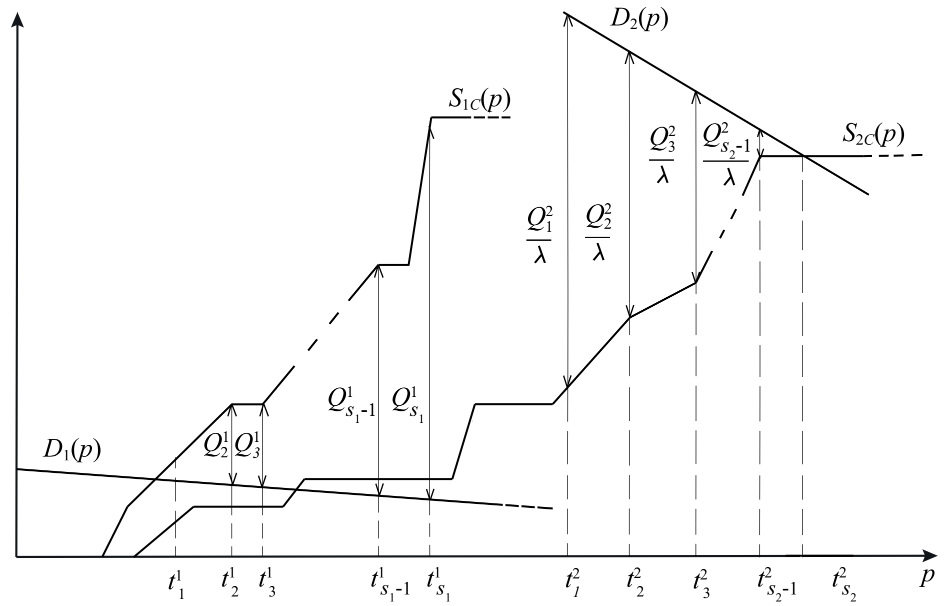

Рис. 2.3. Элементы $t^i_{f_i}$ множеств T_i, $i = 1, 2$, и величины $Q^i_{f_i}$

При $p_i \in (t^i_{f_i}, t^i_{f_i+1})$, $f_i = \overline{1, s_i - 1}$ множество $\overline{A_i}(p_i)$, $i = 1, 2$ неизменно и для $a \in \overline{A_i}$ существует такое r_a, что $S^a_{iC}(p) = d_i(p - c^a_{r_a})$. Обозначим $W^a \overset{\text{def}}{=} S^a_{iC}(p)$ для $a \notin \overline{A_i}$; $k^i_f \overset{\text{def}}{=} |\overline{A_i}|$, $g^i_{f_i} \overset{\text{def}}{=} \sum_{a\in\overline{A_i}} d_i c^a_{r_a}$, $b^i_{f_i} \overset{\text{def}}{=} g^i_{f_i} - \sum_{a\in A\setminus\overline{A_i}} W^a$, $Q^1_{f_i} \overset{\text{def}}{=} S_{1C}(t^1_{f_i}) - D_1(t^1_{f_i})$, $Q^2_{f_i} \overset{\text{def}}{=} \lambda(D_2(t^2_{f_i}) - S_{2C}(t^2_{f_i}))$ (см. рисунок 2.3). Рассмотрим множество SQ, состоящее из всех точек $Q^i_{f_i}$, $f_i = \overline{1, s_i - 1}$, $i = 1, 2$. Элементы этого множества Q_j упорядочим в порядке возрастания.

Утверждение 2.5.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.5.2. Тогда при* $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$, $j = \overline{1, |SQ|}$

$$W'(Q) = \frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1}Q + b^2_{f_2} + g^2_r(k^2_{f_2}+1)}{d_2(k^2_{f_2}+1)^2}\lambda^{-1} - \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1} + g^1_r(k^1_{f_1}+1)}{d_1(k^1_{f_1}+1)^2},$$

где $f_1 \in \overline{1, s_1 - 1}$ *и* $f_2 \in \overline{1, s_2 - 1}$ *такие, что* $Q^1_{f_1} < Q < Q^1_{f_1+1}$ *и* $Q^2_{f_2+1} <$

$Q < Q^2_{f_2}$. *Кроме того, функция* $W(Q)$ *вогнута на каждом из промежутков* $Q_j < Q < Q_{j+1}$, $j = \overline{1, |SQ|}$.

Доказательство. С учетом введенных выше обозначений при $p_i \in (t^i_{f_i}, t^i_{f_i+1})$, $f_i = \overline{1, s_i - 1}$ общая функция предложения Курно на рынке i имеет вид: $S_{iC}(p_i) = k^i_{f_i} d_i p_i - b^i_{f_i}$ и $\sum_{a \in \overline{A_i}} S_{iC}(p_i) = k^i_{f_i} d_i p_i - g^i_{f_i}$. Следовательно,

$$p_1(Q) = \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1}}{d_1(k^1_{f_1} + 1)}, \quad p_2(Q) = \frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1} Q + b^2_{f_2}}{d_2(k^2_{f_2} + 1)}. \tag{2.35}$$

Условие $p_1(Q) \in (t^1_{f_1}, t^1_{f_1+1})$ равносильно $Q^1_{f_1} < Q < Q^1_{f_1+1}$, где $Q^1_{f_i} = S_{1C}(t^1_{f_i}) - D_1(t^1_{f_i})$. Аналогично условие $p_2(Q) \in (t^2_{f_2}, t^2_{f_2+1})$ равносильно $Q^2_{f_2+1} < Q < Q^2_{f_2}$, где $Q^2_{f_i} = \lambda(D_2(t^2_{f_i}) - S_{2C}(t^2_{f_i}))$.

При $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$, $j = \overline{1, |SQ|}$ существуют такие f_1 и f_2, что $Q^1_{f_1} < Q < Q^1_{f_1+1}$ и $Q^2_{f_2+1} < Q < Q^2_{f_2}$, производная $W'(Q)$ непрерывна и с учетом (2.34), (2.35) равна

$$\begin{aligned}
W'(Q) &= \frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1} Q + b^2_{f_2}}{d_2(k^2_{f_2} + 1)} \lambda^{-1} - \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1}}{d_1(k^1_{f_1} + 1)} + \\
+ & \frac{1}{d_1(k^1_{f_1} + 1)} \left(k^1_{f_1} d_1 \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1}}{d_1(k^1_{f_1} + 1)} - g^1_{f_1}\right) - \\
- & \frac{\lambda^{-1}}{d_2(k^2_{f_2} + 1)} \left(k^2_{f_2} d_2 \frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1} Q + b^2_{f_2}}{d_2(k^2_{f_2} + 1)} - g^2_{f_2}\right) = \\
= & \frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1} Q + b^2_{f_2} + g^2_r(k^2_{f_2} + 1)}{d_2(k^2_{f_2} + 1)^2} \lambda^{-1} - \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1} + g^1_r(k^1_{f_1} + 1)}{d_1(k^1_{f_1} + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Выражение для второй производной принимает вид:

$$W''(Q) = -\frac{1}{d_2(k^2_{f_2} + 1)^2 \lambda^2} - \frac{1}{d_1(k^1_{f_1} + 1)^2} < 0.$$

Таким образом, функция $W(Q)$ вогнута на каждом из промежутков $Q_j < Q < Q_{j+1}$, $j = \overline{1, |SQ|}$. Утверждение доказано.

Учтем при расчете общественного благосостояния затраты $OC(Q)$, связанные с созданием СПТ между рынками, определяемые согласно (2.14). Функция полного общественного благосостояния $TW(Q)$ с учетом затрат имеет вид: $TW(Q) = W(Q) - OC(Q)$.

Утверждение 2.5.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.5.2. Тогда если при* $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$, $j = \overline{1, |SQ|}$ *существует решение* Q^{Lj} *уравнения*

$$\frac{\widehat{D_2} - \lambda^{-1}Q + b^2_{f_2} + g^2_r(k^2_{f_2} + 1)}{\lambda d_2(k^2_{f_2} + 1)^2} - \frac{\widehat{D_1} + Q + b^1_{f_1} + g^1_r(k^1_{f_1} + 1)}{d_1(k^1_{f_1} + 1)^2} = c'_v(Q), \qquad (2.36)$$

где $f_1 \in \overline{1, s_1 - 1}$ *и* $f_2 \in \overline{1, s_2 - 1}$ *такие, что* $Q^1_{f_1} < Q < Q^1_{f_1+1}$ *и* $Q^2_{f_2+1} < Q < Q^2_{f_2}$, *то* Q^{Lj} *является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния.*

Доказательство. Для каждого промежутка (Q_j, Q_{j+1}), $j = \overline{1, |SQ|}$, условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (2.36). Так как на каждом из таких промежутков функция $TW(Q)$ вогнута, то если существует решение Q^{Lj} уравнения (2.36) такое, что выполнено $Q^{Lj} \in (Q_j, Q_{j+1})$, то Q^{Lj} является точкой локального максимума. Утверждение доказано.

Итак, мы выделили промежутки, в которых функция общественного благосостояния является гладкой и вогнутой. Покажем, что при переходе на участок с другим значением величины $|\overline{A_i}(p_i(Q))|$ (где меняется число активных ограничений производственной мощности) по типу точки перехода нельзя определить, является она точкой максимума или нет. Выражение (2.30) для производной функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ можно записать в виде:

$$W'(Q) = -\frac{p_1 + \sum\limits_{a \in A_1(p_1(Q))} C^{a'}(p_1(Q))}{|\overline{A_1}(p_1(Q))| + 1} + \frac{p_2 + \sum\limits_{a \in A_2(p_2(Q))} C^{a'}(p_2(Q))}{|\overline{A_2}(p_2(Q))| + 1}\lambda^{-1}.$$

Исследуем поведение функции $E(p)$ среднего значения цены и предельных затрат, соответствующих активным мощностям:

$$E(Q) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 + \sum_{a \in A_1(p_1(Q))} C^{a'}(p_1(Q)))/(|\overline{A_1}(p_1(Q))| + 1).$$

Пусть в точке $p = p_{x1}$ становится активным ограничение, соответствующее мощности с низким значением предельных затрат c_{x1}, а в точке $p = p_{y1}$

подключается мощность с низким значением c_{y1} (см. рисунок 2.4). Тогда при значении Q, соответствующем p_{x1}, $E(Q)$ возрастает скачком, а при значении Q, соответствующем p_{y1}, скачком снижается. Если же в точке $p = p_{x2}$ становится активным ограничение, соответствующее мощности со значением предельных затрат c_{x2}, близким к цене p, а в точке $p = p_{y2}$ подключается мощность со значением предельных затрат c_{y2}, также близким к цене p, то при значении Q, соответствующем p_{x2}, $E(Q)$ снижается скачком, а при значении Q, соответствующем p_{y2}, скачком возрастает.

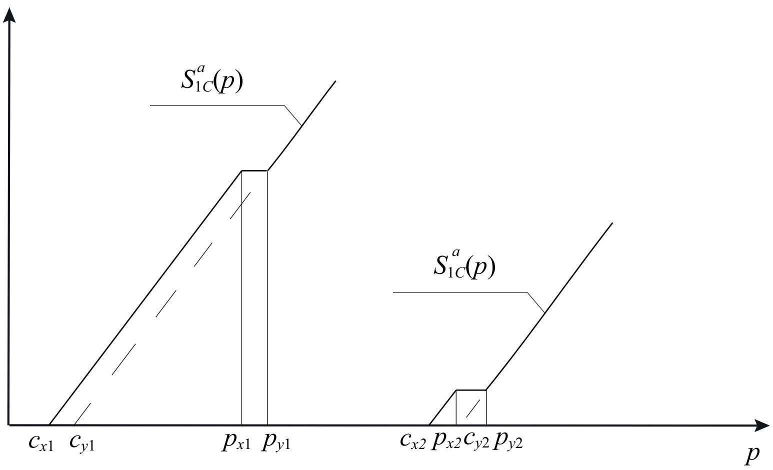

Рис. 2.4. Точки, в которых меняется число активных ограничений производственной мощности

Далее в предположении, что функция спроса вогнута, исследуем поведение $W'(Q)$ при переходе через точки, соответствующие скачкам производной функции спроса на первом рынке. Так как функция спроса вогнута, то функция предложения Курно не убывает. При переходе через точку скачка p_r происходит скачкообразный рост функции $S^a_{1C}(p)$. Обозначим $Q^-_r \overset{\text{def}}{=} S^-_{1C}(p_r) - D(p_r)$, $Q^+_r \overset{\text{def}}{=} S^+_{1C}(p_r) - D(p_r)$. Пусть при $Q \in [Q^-_r, Q^+_r]$ нет мощностей, у которых ограничение производственной мощности становится активным. Согласно (2.34)

$$W'_-(Q^-_r) = p_2(Q^-_r)\lambda^{-1} - p_r + \frac{1}{d_1(|A_1(p_r)|+1)} \cdot \sum_{a\in\overline{A_1}(p_r)} S^{a-}_{1C}(p_r) -$$

$$-\frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q_r^-))|+1)}\cdot\sum_{a\in\overline{A_2}(p_2(Q_r^-))}S_{2C}^a(p_2(Q_r^-)).$$

При $Q\in[Q_r^-,Q_r^+]$ выполнено $p_1(Q)=p_r$, сюрплас потребителей на первом рынке неизменен. Для производной прибыли производителей на первом рынке справедливо:

$$P'_{1+}(Q_r^-)=\frac{\sum_{a\in\overline{A_1}(p_r)}(p_r-c_{k_a}^a)}{|\overline{A_1}(p_r)|}.$$

Следовательно,

$$W'_+(Q_r^-)=p_2(Q_r^-)\lambda^{-1}-p_r+\frac{\sum_{a\in\overline{A_1}(p_r)}(p_r-c_{k_a}^a)}{|\overline{A_1}(p_r)|}-$$
$$-\frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q_r^-))|+1)}\cdot\sum_{a\in\overline{A_2}(p_2(Q_r^-))}S_{2C}^a(p_2(Q_r^-)).$$

Откуда следует, что выполнено $W'_-(Q_r^-)<W'_+(Q_r^-)$ и $Q=Q_r^-$ не может быть точкой максимума.

Для решения задачи об оптимальной пропускной способности СПТ между рынками построим множество L точек локального максимума функции $TW(Q)$. Если существует решение Q^{Lj} уравнения (2.36) такое, что выполнено $Q^{Lj}\in(Q_j,Q_{j+1})$, то включим Q^{Lj} в множество L, в противном случае включим граничную точку, в которой достигается локальный максимум. После того, как построено конечное множество L, для определения оптимальной пропускной способности СПТ при $0\le Q<\underline{Q}$ необходимо найти $\mathrm{Argmax}\{TW(Q)|Q\in L\cup\{0\}\}$.

Далее обратимся к исследованию функции полного общественного благосостояния при $Q>\overline{Q}$.

Утверждение 2.5.3. *Оптимальное значение пропускной способности Q^* удовлетворяет неравенству $Q^*\le\overline{Q}$.*

Доказательство. По утверждению 2.4.1 при $Q>\overline{Q}$ равновесие будет соответствовать типу B_{1-2}. Следовательно, p_1^{*b}, которая определяется согласно (2.26), и $p_2^{*b}=\lambda^{-1}p_1^{*b}$ не зависят от Q. Величина потока равна $\overline{Q}$. Таким образом при $Q > \overline{Q}$ прибыль транспортной системы $T(Q) = 0$, а прибыль производителей и сюрплас потребителей неизменны. Тогда $TW'(Q) = -OC'(Q) = c_v^{'}(Q) < 0$. Итак, при $Q > \overline{Q}$ функция полного общественного благосостояния убывает и оптимальное значение пропускной способности $Q^* \leq \overline{Q}$. Утверждение доказано.

Перейдем к исследованию функции общественного благосостояния при $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$, то есть когда возможно существование лишь равновесия типа D_{1-2}. Сначала обсудим, когда равновесие этого типа существует. В равновесии типа D_{1-2} должна выполняться следующая система уравнений и неравенств:

$$S_{1C}(p_1^{*d}) \leq D_1(p_1^{*d}) + Q \leq S_{1C1-2}(p_1^{*d}), \tag{2.37}$$

$$S_{2C1-2}(p_2^{*d}) \leq D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q \leq S_{2C}(p_2^{*d}), \tag{2.38}$$

$$\sum_{a \in A_1} v^{a*} = D_1(p_1^{*d}) + Q, \tag{2.39}$$

$$\sum_{a \in A_2} v^{a*} = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q.$$

Так как $S_{2C1-2}(p) \geq S_{2C}(p)$, то из (2.38) следует, что для p_2^{*d} должно выполняться соотношение (см. рисунок 2.5)

$$S_{2C1-2}(p_2^{*d}) = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2^{*d}).$$

Для тех значений, при которых $S_{2C1-2}(p_2^{*d}) > S_{2C}(p_2^{*d})$, равновесие типа D_{1-2} не существует. Достаточным условием существования равновесия при любом значении Q в диапазоне $\underline{Q} \leq Q \leq \overline{Q}$ является совпадение на втором рынке функции предложения Курно для объединенного рынка с функцией предложения Курно для изолированного рынка. В частности, это условие выполнено в следующих типичных случаях:

1) второй рынок функционирует в условиях совершенной конкуренции, функция предложения Курно для объединенного рынка и функция предложения Курно для изолированного рынка совпадают с функцией предложения Вальраса;

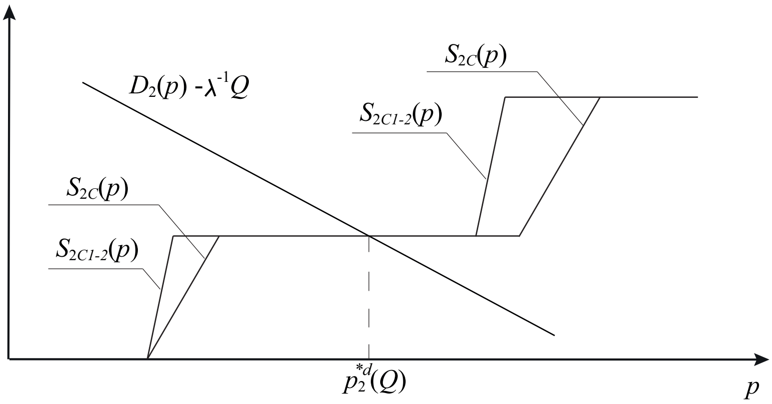

Рис. 2.5. Спрос и предложение на рынке 2 в равновесии типа D_{1-2}

2) в диапазоне $\underline{Q} \le Q \le \overline{Q}$ на втором рынке нет эффективных производителей;

3) в диапазоне $\underline{Q} \le Q \le \overline{Q}$ предприятия на втором рынке работают на максимуме производственных мощностей, предлагая фиксированное количество товара.

Далее исследуем функцию общественного благосостояния в условиях совершенной конкуренции на втором рынке. Пусть $S_{2W}(p)$ – функция предложения Вальраса на втором рынке. Тогда $p_2^{*d}(Q)$ определяется из соотношения

$$S_{2W}(p_2^{*d}) = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q \tag{2.40}$$

и для ее производной справедливо

$$p_2^{*d\prime}(Q) = \frac{\lambda^{-1}}{D_2'(p_2^{*d}) - S_{2W}{}'(p_2^{*d})} \le 0. \tag{2.41}$$

В равновесии типа D_{1-2} цена $p_1^{*d}(Q) = \lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)$, а суммарный объем предложения на первом рынке определяется согласно (2.39). Из условия первого порядка для равновесия типа D_{1-2} следует, что каждый производитель $a \in A_1$ продает объем не ниже $S_{1C}^a(p_1^{*d})$, а итоговый объем его продаж v^{a*} зависит от правила рационирования, согласно которому распределяется остаточный спрос $D_1(p_1^{*d}) + Q - \sum_{a\in A_1} S_{1C}^a(p_1^{*d})$. Далее предположим, что остаточный спрос распределяется так, чтобы минимизировать затраты на производство. Обратимся к исследованию случая, когда предельные затраты кусочно-постоянны.

При заданном Q рассмотрим задачу подключения наиболее эффективных мощностей, то есть нахождения $\overrightarrow{v}^* = \{v^{a*}(Q), a \in A_1\}$, такого что

$$\sum_{a \in A_1} C^a(v^{a*}(Q)) = \min_{\overrightarrow{v} \in V^0} \sum_{a \in A_1} C^a(v^a),$$

$$V^0 = \{\overrightarrow{v} = \{v^a, a \in A_1\} | \sum_{a \in A_1} v^a = D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q,$$
$$S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q)) \leq v^a \leq S_{1C1-2}^a(p_1^{*d}(Q))\}.$$

Приведем алгоритм, позволяющий найти v^{a*}, $a \in A_1$. На первом шаге положим $v^a(1) = S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q))$ для всех $a \in A_1$. Пусть выполнен шаг t и определены $v^a(t)$, $a \in A_1$. На шаге $t+1$ обозначим $A^{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A_1 | v^a(t) < S_{C1-2}^a(p_1^{*d}(Q))\}$. Найдем производителя a_{t+1}, для которого

$$C_+^{a'_{t+1}}(v^{a_{t+1}}(t)) = \min_{a \in A^{t+1}} C_+^{a'}(v^a(t)) \stackrel{\text{def}}{=} c_{t+1}.$$

Объемы производителей $a \neq a_{t+1}$ на шаге $t+1$ останутся неизменными. Для производителя $a = a_{t+1}$ положим

$$v^a(t+1) = \min\{V_{t+1}^a(c_{t+1}), S_{C1-2}^a(p_1^{*d}(Q)), D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q - \sum_{a \neq a_{t+1}} v^a(t)\},$$

где V_{t+1}^a – объем производства, по достижении которого мощность с предельными издержками c_{t+1} исчерпана. Если минимум достигается на последнем аргументе, то весь спрос по цене $p_1^{*d}(Q)$ удовлетворен и алгоритм заканчивает свою работу ($v^{a*} = v^a(t+1)$, $a \in A_1$). В противном случае переходим к следующему шагу.

Из приведенного алгоритма следует, что при фиксированном Q множество A_1 можно представить в таком виде $A_1 = A_C \cup A_U \cup A_V \cup \{a_T\}$, что

$$v^{a*}(Q) = \begin{cases} S^a_{1C}(p_1^{*d}(Q)), & a \in A_C, \\ S^a_{1C1-2}(p_1^{*d}(Q)), & a \in A_U, \\ V^a_R, & a \in A_V, \\ D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q - \sum\limits_{a \neq a_T} v^{a*}(Q), & a = a_T, \end{cases} \tag{2.42}$$

где V^a_R – такая точка разрыва $C^{a'}(v)$, $a \in A_V$, что выполнено соотношение $S^a_{1C}(p_1^{*d}(Q)) < V^a_R < S^a_{1C1-2}(p_1^{*d}(Q))$; a_T – производитель, который был выбран на последнем шаге T алгоритма.

Разобъем интервал $(\underline{Q}, \overline{Q})$ на промежутки, на каждом из которых функции $D_2'(p_2^{*d}(Q))$, $S_{2W}'(p_2^{*d}(Q))$, $D_1'(p_1^{*d}(Q))$, $S^a_{1C}{}'(p_1^{*d}(Q))$, $S^a_{1C1-2}{}'(p_1^{*d}(Q))$, $C^{a'}(v^{a*}(Q))$ непрерывны. Дополним множество точек разбиения $(\underline{Q}, \overline{Q})$ точками, в которых $v^{a_T*}(Q) = S^a_{1C1-2}(p_1^{*d}(Q))$ либо $v^{a_T*}(Q) = V_R^{a_T}$. Полученное множество обозначим $Z = \{z_m\}$, $m = \overline{1, |Z|}$. На каждом из промежутков $Q \in (z_m, z_{m+1})$ разбиение множества A_1 на A_C, A_U, A_V и $\{a_T\}$ не меняется.

Лемма 2.5.3. *В условиях совершенной конкуренции на втором рынке выражение для производной функции общественного благосостояния при* $Q \in (z_m, z_{m+1})$, $m = \overline{1, |Z| - 1}$ *принимает вид*

$$W'(Q) = \lambda^{-1} p_2^{*d}(Q) \cdot \left(D_1{}'(\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)) \lambda^{-1} p_2^{*d\prime}(Q) + 1\right) - \\ - \sum_{a \in A_1} \left(C^a(v^{a*}(Q))\right)', \tag{2.43}$$

где $p_2^{*d\prime}(Q)$ *определяется согласно (2.41), а* $v^{a*}(Q)$ *– согласно (2.42).*

Доказательство. Учитывая, что $\lambda p_1^{*d} = p_2^{*d}$ и прибыль транспортной компании равна нулю, а также, что второй рынок функционирует в условиях совершенной конкуренции,

$$W'(Q) = \Big(\int\limits_{\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)}^{\infty} D_1(p) dp + \lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)(D_1(\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)) + Q) -$$

$$-\sum_{a\in A_1}\left(C^a(v^{a*}(Q))\right)+\int\limits_{p_2^{*d}(Q)}^{\infty}D_2(p)dp+\int\limits_0^{p_2^{*d}(Q)}S_{2W}(p)dp\Big)'=$$

$$=-\lambda^{-1}p_2^{*d\prime}(Q)\cdot D_1(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))+\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q)\cdot(D_1(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))+Q)+$$

$$+\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)\cdot(D_1^{'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q)+1)-\sum_{a\in A_1}\left(C^a(v^{a*}(Q))\right)'-$$

$$-p_2^{*d\prime}(Q)\cdot D_2(p_2^{*d}(Q))+p_2^{*d\prime}(Q)\cdot S_{2W}(p_2^{*d}(Q)).$$

Так как $D_2(p_2^{*d})-S_{2W}(p_2^{*d})=\lambda^{-1}Q$, получим представление (2.43). Лемма доказана.

Далее обратимся к исследованию поведения функции $W'(Q)$.

Рассмотрим случай, когда функции спроса в каждом узле линейны: $D_i(p)=\overline{D}_i-d_ip$, $i=1,2$. Для $Q\in(z_m,z_{m+1})$, $m=\overline{1,|Z|-1}$ введем обозначения:

$$c_{Cm}^a\stackrel{\text{def}}{=}C^{a'}(v^{a*}(Q)),\quad a\in A_C;$$

$$c_{Um}^a\stackrel{\text{def}}{=}C^{a'}(v^{a*}(Q)),\quad a\in A_U;$$

$$c_m^{a_T}\stackrel{\text{def}}{=}C^{a_T'}(v^{a_T*}(Q)).$$

Пусть $\overline{A_C}(p)\stackrel{\text{def}}{=}\{a\in A_C|S_{1C}^a(p)=(p-C^{a'}(S_{1C}^a(p))|D_1^{'}(p)|)\}$ и $\overline{A_U}(p)\stackrel{\text{def}}{=}\{a\in A_U|S_{1C1-2}^a(p)=(p-C^{a'}(S_{1C1-2}^a(p))|D_1^{'}(p)+\lambda^2D_2^{'}(\lambda p)|)\}$. На каждом из промежутков $Q\in(z_m,z_{m+1})$, $m=\overline{1,|Z|-1}$ множества $\overline{A_C}(p_1^{*d}(Q))$ и $\overline{A_U}(p_1^{*d}(Q))$ неизменны. Обозначим их $\overline{A_{Cm}}$ и $\overline{A_{Um}}$ соответственно.

Утверждение 2.5.4. *Пусть второй рынок действует в условиях совершенной конкуренции, функции спроса в каждом узле линейны: $D_i(p)=\overline{D}_i-d_ip$, $i=1,2$, а предельные затраты производителей кусочно-постоянны.*

Тогда если при $Q\in(z_m,z_{m+1})$ $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ представляет собой константу s_m и существует принадлежащее этому промежутку решение Q^{Lk} урав-

нения

$$\Big(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{a_d} + \sum_{a\in\overline{A_{Um}}}(c_{Um}^a - c_m^{a_T})\Big)\Big(\frac{d_1}{\lambda^2 d_2}+1\Big)+$$

$$+\sum_{a\in\overline{A_{Cm}}}(c_{Cm}^a - c_m^{a_T})\frac{d_1}{\lambda^2 d_2} = c_v^{'}(Q), \qquad (2.44)$$

где $p_2^{*d}(Q) = (\overline{D_2} - s_m - \lambda^{-1}Q)/d_2$, *то* Q^{Lk} *является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.*

Если же при $Q \in (z_m, z_{m+1})$ *происходит скачок* $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ *и существует решение* Q^{Lk} *уравнения*

$$\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{a_T} = c_v^{'}(Q), \qquad (2.45)$$

принадлежащее этому промежутку, то Q^{Lk} *является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.*

Доказательство. Так как при $Q \in (z_m, z_{m+1})$ объемы v^{a*} постоянны для $a \in A_V$, то для этого промежутка выражение (2.43) принимает вид:

$$W'(Q) = \Big(D_1^{'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q)+1\Big)\cdot\Big(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{a_T}\Big) -$$

$$-\sum_{A\in A_C}(c_{Cm}^a - c_m^{a_T})S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) -$$

$$-\sum_{A\in A_U}(c_{Um}^a - c_m^{a_T})S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q). \qquad (2.46)$$

В сделанных предположениях о структуре второго рынка при значениях $Q \in (z_m, z_{m+1})$ либо $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ представляет собой константу, либо происходит скачок $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$. Если при $Q \in (z_m, z_{m+1})$ происходит скачок $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$, то $p_2^{*d\prime}(Q) = 0$. Тогда из (2.46) следует, что $W'(Q) = \lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{a_d}$ и при $Q \in$

(z_m, z_{m+1}) условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (2.45). Так как на рассматриваемом промежутке $p_2^{*d}(Q)$ – константа, то функция $TW(Q)$ вогнута при $Q \in (Q_m, Q_{m+1})$ и если существует решение Q^{Lk} уравнения (2.45), удовлетворяющее условию $Q^{Lk} \in (z_m, z_{m+1})$, то Q^{Lk} является точкой локального максимума. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.

Если при значениях $Q \in (z_m, z_{m+1})$ $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ равна константе s_m, то из (2.40) получим $p_2^{*d}(Q) = (\overline{D_2} - s_m - \lambda^{-1}Q)/d_2$ и $p_2^{*d\prime}(Q) = -\lambda^{-1}/d_2$. Подставив эти выражения в (2.46), а также учитывая, что $S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = d_1$ при $a \in \overline{A_{Cm}}$, $S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = 0$ при $a \in A_{Cm} \setminus \overline{A_{Cm}}$; $S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = d_1 + \lambda^2 d_2$ при $a \in \overline{A_{Um}}$, $S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = 0$ при $a \in A_U \setminus \overline{A_{Um}}$, получим следующее выражение для производной общественного благосостояния:

$$W'(Q) = \big(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{a_T} + \sum_{a \in \overline{A_{Um}}} (c_{Um}^a - c_m^{a_T})\big) \cdot \Big(\frac{d_1}{\lambda^2 d_2} + 1\Big) +$$
$$+ \sum_{a \in \overline{A_{Cm}}} (c_{Cm}^a - c_m^{a_T}) \frac{d_1}{\lambda^2 d_2}.$$

Так как $p_2^{*d}(Q)$ убывает по Q, то $W(Q)$ и $TW(Q)$ – вогнутые функции. При $Q \in (z_m, z_{m+1})$ условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (2.44). Так как функция $TW(Q)$ вогнута на таком промежутке, то если существует решение Q^{Lk} уравнения (2.44), удовлетворяющее условию $Q^{Lk} \in (z_m, z_{m+1})$, то Q^{Lk} является точкой локального максимума. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка. Утверждение доказано.

Таким образом, для нахождения оптимальной пропускной способности СПТ необходимо провести перебор по точкам локального максимума.

2.6. Выводы ко второй главе

В данной главе рассмотрена модель двухузлового рынка в условиях совершенной и несовершенной конкуренции и исследована задача расчета оптимальной пропускной способности СПТ с точки зрения максимизации общественного благосостояния. Исследованы свойства функции общественного благосостояния и характеристики равновесия в зависимости от пропускной способности. В случае несовершенной конкуренции характер равновесия при увеличении пропускной способности меняется следующим образом: сначала равновесие соответствует типу C, потом переходит в тип D, затем – в тип B. Показано, что в равновесии типа B общественное благосостояние убывает с ростом пропускной способности. В равновесиях типов C и D выделены промежутки, на каждом из которых функция общественного благосостояния вогнута. Определены условия для нахождения точек локального максимума, по которым следует провести перебор для решения задачи поиска оптимальной пропускной способности СПТ. В результате исследования разработаны методы, позволяющие найти оптимальную пропускную способность СПТ между двумя рынками в условиях совершенной и несовершенной конкуренции.

Глава 3

Оптимизация пропускной способности для передающих сетей

Данная глава посвящена решению задачи максимизации общественного благосостояния для некоторых сетевых структур, а также определению качественных закономерностей функционирования сетевых рынков с последовательным соединением узлов.

В разделе 3.1 рассмотрен сетевой рынок, на котором два локальных узла соединены несколькими линиями передач. Исследована указанная задача максимизации для данной структуры и предложен алгоритм, позволяющий определить оптимальные пропускные способности передающих линий.

В разделе 3.2 предложен метод решения оптимизационной задачи для случая, когда рынок делится на 2 субрынка, на каждом из которых устанавливается единая цена, и активны ограничения пропускной способности линий, соединяющих различные субрынки.

Разделы 3.3 и 3.4 посвящены исследованию рынка с последовательным соединением узлов в условиях совершенной и несовершенной конкуренции соответственно.

3.1. Двухузловой рынок с несколькими линиями передачи

Рассмотрим модель двухузлового рынка с несколькими линиями передачи. Как и в главе 2, каждый локальный рынок i описывается множеством производителей A_i, $C^a(v)$ – функция затрат производителя a, $D_i(p)$ – функция спроса на рынке i. Пусть L – конечное множество линий передачи, соединяющих рынки 1 и 2. Каждая линия $l \in L$ характеризуется исходной пропускной способностью Q_0^l и функцией затрат $E^l(Q^l)$ на увеличение пропускной способности с Q_0^l до

$Q^l > Q^l_0$: $E^l(Q^l_0) = 0$, $E^l(Q^l) = e^l_f + e^l_v(Q^l - Q^l_0)$ при $Q^l \neq 0$, где $e^l_v(\Delta Q^l)$ – выпуклая возрастающая функция, задающая переменные затраты, $e^l_v(0) = 0$; e^l_f – постоянные затраты.

Общая пропускная способность сети равна сумме пропускных способностей линий $Q = \sum_{l \in L} Q^l$. Обозначим $\overrightarrow{Q} = (Q^l, l \in L)$. Тогда в условиях совершенной конкуренции цены $\widetilde{p}_1(\overrightarrow{Q})$ и $\widetilde{p}_2(\overrightarrow{Q})$ определяются из системы (2.2)-(2.4) с заменой Q на величину $\sum_{l \in L} Q^l$.

Задача максимизации общественного благосостояния заключается в поиске

$$\overrightarrow{Q^*} = \{Q^{l*}, l \in L\} = \mathrm{Argmax}_{(Q^l, l \in L)}\{W\big(\sum_{l \in L} Q^l\big) - \sum_{l \in L} E^l(Q^l)\}, \qquad (3.1)$$

где функция $W(Q)$ опреляется, как в главе 2 (то есть согласно (2.10)-(2.13)).

Перейдем к исследованию этой задачи, учитывая результаты, полученные в предыдущей главе. Пусть $\overline{L}$ – фиксированное множество линий, пропускная способность которых увеличена, то есть $\Delta Q^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q^l - Q^l_0 > 0$. Тогда исходная задача сводится к нахождению

$$\max_{\overrightarrow{Q}^{\overline{L}} \geq 0}\{W\big(\sum_{l \in \overline{L}} Q^l + \sum_{l \notin \overline{L}} Q^l_0\big) - \sum_{l \in \overline{L}} e^l_v(\Delta Q^l)\}. \qquad (3.2)$$

Согласно результатам из предыдущей главы, если $\sum_{l \in \overline{L}} Q^l \geq \widehat{Q}$ (где $\widehat{Q}$ определяется из (2.8)-(2.9)), то $W\big(\sum_{l \in \overline{L}} Q^l\big) = W(\widehat{Q})$. Целевая функция задачи (3.2) вогнутая. Она оптимизируется на выпуклом множестве. Поэтому локальный максимум задачи (3.2) является глобальным. Решение $\overrightarrow{Q}^*(\overline{L})$ может быть найдено из следующих условий первого порядка:

$$\forall l \in \overline{L} \quad \text{если} \quad \Delta Q^{l*} > 0, \quad \text{то} \quad {e^l_v}'(Q^{l*}) = W'(Q^*),$$

$$\text{если} \quad \Delta Q^{l*} = 0, \quad \text{то} \quad {e^l_v}'(Q^l_0) \geq W'(Q^*).$$

Чтобы получить это решение, можно непрерывно увеличивать вложения в линии с минимальными предельными издержками до тех пор, пока они не станут равными $W'(Q)$. Однако, исходная задача (3.1) не является вогнутой.

Сложность заключается в выборе оптимального множества L^*, отвечающего решению этой задачи. Следующий результат позволяет сократить перебор возможных вариантов. Обозначим $TW(\overline{L})$ максимум общественного благосостояния для задачи (3.2).

Утверждение 3.1.1. *Пусть $L' \subset \overline{L}$ и выполнено следующее условие: $TW(L') \geq TW(\overline{L})$. Тогда существует L^* такое, что $\overline{L} \not\subset L^*$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть оптимальный набор L^* линий, пропускные способности которых увеличены, имеет вид: $L^* = L'' \cup \overline{L}$. Тогда оптимальные пропускные способности $Q_l^* > Q_l^0$ при $l \in L'' \cup \overline{L}$, $Q_l^* = Q_l^0$ при $l \notin L'' \cup \overline{L}$.

Оптимальное значение общественного благосостояния равно

$$TW(\overrightarrow{Q}^*) = W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in \overline{L}} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup \overline{L}} Q_l^0) - \sum_{l \in L''} E(Q_l^*) - \sum_{l \in \overline{L}} E(Q_l^*).$$

Рассмотрим набор пропускных способностей $\overrightarrow{Q}' = (Q_l', l \in L)$ такой, что $Q_l' = Q_l^*$ при $l \in L'' \cup L'$, $Q_l' = Q_l^0$ при $l \notin L'' \cup L'$. Тогда

$$TW(\overrightarrow{Q}') = W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in L'} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup L'} Q_l^0) - \sum_{l \in L''} E(Q_l^*) - \sum_{l \in L'} E(Q_l^*).$$

В силу вогнутости функции общественного благосостояния для приращений справедливо

$$W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in \overline{L}} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup \overline{L}} Q_l^0) - W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in L'} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup L'} Q_l^0) <$$

$$< W(\sum_{l \in \overline{L}} Q_l^* + \sum_{l \notin \overline{L}} Q_l^0) - W(\sum_{l \in L'} Q_l^* + \sum_{l \notin L'} Q_l^0).$$

Тогда

$$TW(\overrightarrow{Q}^*) - TW(\overrightarrow{Q}') = W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in \overline{L}} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup \overline{L}} Q_l^0) - \sum_{l \in \overline{L}} E(Q_l^*) -$$

$$-W(\sum_{l \in L''} Q_l^* + \sum_{l \in L'} Q_l^* + \sum_{l \notin L'' \cup L'} Q_l^0) + \sum_{l \in L'} E(Q_l^*) <$$

$$< W(\sum_{l\in\overline{L}} Q_l^* + \sum_{l\notin\overline{L}} Q_l^0) - \sum_{l\in\overline{L}} E(Q_l^*) - W(\sum_{l\in L'} Q_l^* + \sum_{l\notin L'} Q_l^0) + \sum_{l\in L'} E(Q_l^*).$$

Следовательно,

$$TW(\overrightarrow{Q}^*) - TW(\overrightarrow{Q}') < TW(\overline{L}) - TW(L') \leq 0,$$

что противоречит оптимальности $\overrightarrow{Q}^*$. Утверждение доказано.

Исходя из утверждения 3.1.1, рассмотрим алгоритм, позволяющий эффективным образом найти оптимальное множество $\overline{L}^*$.

Шаг 1. Положим $\mathfrak{L}_\mathbf{1} = \{l, \text{ для которых } TW(l) > TW(\emptyset)\}$.

Шаг $k = 2, 3 \ldots$. Пусть уже определены множества $\mathfrak{L}_{k-1}$ наборов $L_{k-1} = \{l_1, \ldots l_{k-1}\}$ из $k-1$ элементов, таких что $TW(L_{k-1}) > TW(\overline{L})$ для любого $\overline{L} \subset L_{k-1}$. Теперь определим множество $\mathfrak{L}_k$ наборов L_k из k элементов, таких что для любого $L_{k-1} \subset L_k$ выполняются следующие условия: $L_{k-1} \in \mathfrak{L}_{k-1}$ и $TW(L_{k-1}) < TW(L_k)$.

Утверждение 3.1.2. *Для каждого множества $\mathfrak{L}_k$ рассмотрим максимальные наборы $(l_1, \ldots, l_k)$, такие что для любого l_{k+1} набор $(l_1, \ldots, l_{k+1})$ не принадлежит $\mathfrak{L}_{k+1}$. Выберем среди них оптимальный $(\overrightarrow{l}^k)^*$ и найдем $k^* = argmax_k TW((\overrightarrow{l}^k)^*)$. Указанный набор $(\overrightarrow{l}^{k^*})^*$ и будет соответствовать решению задачи (3.1).*

Доказательство. Рассмотрим для каждого множества $\mathfrak{L}_k$ максимальные наборы $(l_1, \ldots, l_k)$. Так как для любого l_{k+1} набор $(l_1, \ldots, l_{k+1}) \notin \mathfrak{L}_{k+1}$, то из описания алгоритма следует неравенство $TW(l_1, \ldots, l_k) \geq TW(l_1, \ldots, l_{k+1})$. Тогда согласно утверждению 3.1.1 любые комбинации, содержащие набор $(l_1, \ldots, l_{k+1})$, заведомо не войдут в решение задачи. Таким образом, перебор достаточно провести по максимальным элементам, откуда следует утверждение.

3.2. Сетевые структуры с несколькими узлами

Пусть рынку соответствует граф, включающий множество узлов N и множество ребер $L \subseteq N \times N$. Каждый узел характеризуется функциями спроса и предложения, как и в предыдущей модели. Каждое ребро $l \in L$ описывается исходной пропускной способностью Q_0^l и функцией затрат на увеличение пропускной способности $E^l(Q)$.

В то время как ограничения пропускной способности играют существенную роль, на ряде рынков электроэнергии потери при передаче малы (составляют менее 1 % для некоторых рынков). Ниже рассмотрим случай, когда коэффициенты потерь $k_l = 0$, $l \in L$.

При заданном векторе $\overrightarrow{Q} = \{Q^l, l \in L\}$ цены конкурентного равновесия $p_i(\overrightarrow{Q})$, $i \in N$, определяются из системы

$$\forall i \in N \quad S_{iW}(p_i) = D_i(p_i) + q_i, \tag{3.3}$$

$$\forall i, j \in N \quad |q_{ij}| \leq Q_{ij}, \tag{3.4}$$

$$\text{если} \quad p_j > p_i, \quad \text{то} \quad q_{ij} = Q_{ij}, \tag{3.5}$$

где $q_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_{ij}$, q_{ij} – поток из узла i в узел j, $q_{ij} = -q_{ji}$.

Задача максимизации общественного благосостояния заключается в нахождении

$$\overrightarrow{Q}^* = \{Q^{l*}, l \in L\} = \mathrm{Argmax}_{(Q^l, l \in L)}\{W^N(\overrightarrow{Q}) - \sum_{l \in L} E^l(Q^l)\}, \tag{3.6}$$

где общественное благосостояние без учета затрат на увеличение пропускной способности

$$W^N(\overrightarrow{Q}) = \sum_{i \in N} CS_i^N(\overrightarrow{Q}) + \sum_{i \in N} Pr_i^N(\overrightarrow{Q}) + T^N(\overrightarrow{Q})$$

состоит из потребительских выигрышей $CS_i^N(\overrightarrow{Q})$, прибылей производителей $Pr_i^N(\overrightarrow{Q})$ на каждом из рынков, которые определяются согласно (2.11)-(2.12) с заменой $\widetilde{p}_i(Q)$ на $p_i(\overrightarrow{Q})$, и прибыли транспортной системы

$$T^N(\overrightarrow{Q}) = \sum_{(i,j):p_j(\overrightarrow{Q})>p_i(\overrightarrow{Q})} (p_j(\overrightarrow{Q}) - p_i(\overrightarrow{Q}))Q_{ij}.$$

Утверждение 3.2.1. *В равновесии рынок разбивается на $m \in \{1,\ldots,|N|\}$ субрынков так, что на каждом субрынке $i = 1,\ldots,m$ устанавливается единая цена $p(i)$ и все ограничения пропускной способности на ребрах, связывающих различные субрынки, являются активными.*

Доказательство. Пусть в равновесии все узловые цены совпали, тогда $m = 1$ и все ограничения пропускной способности неактивны.

В противном случае упорядочим узлы так, что $p_1 = p_2 = \ldots = p_{k_1} < p_{k_1+1} = \ldots = p_{k_2} < \ldots < p_{k_m-1} = \ldots = p_{k_m}$. Обозначим $p(i) = p_{k_i}$. Рассмотрим разбиение исходного рынка на субрынки, включающие узлы с одинаковыми узловыми ценами. Тогда для ребер, соединяющих различные субрынки i и j, справедливо либо $p(i) < p(j)$, либо $p(j) < p(i)$. Тогда из (3.5) следует, что ограничения пропускной способности, связывающие эти ребра, активны. Утверждение доказано.

Рассмотрим задачу оптимизации передающей сети. Если при исходном векторе $\overrightarrow{Q_0}$ в равновесии $m = 1$, то сеть является оптимальной. Согласно теореме благосостояния, конкурентное равновесие является оптимальным с точки зрения задачи оптимизации общественного благосостояния.

Пусть в исходном состоянии $\overrightarrow{Q_0}$ рынок разбивается на 2 субрынка и равновесные цены удовлетворяют неравенству $p(1) < p(2)$. Пусть $\widehat{L} = L^{12}$ – множество ребер, соединяющих субрынки 1 и 2, N^r – множество узлов, принадлежащих субрынку r, $\widehat{S}^r(p) = \sum_{i\in N^r} S_{iW}(p)$, $\widehat{D}^r(p) = \sum_{i\in N^r} D_i(p)$ – функции общего спроса и предложения для субрынка $r = 1, 2$. Рассмотрим задачу оптимизации передающей сети для двухузлового рынка $\widehat{M}$ с указанными параметрами $\widehat{L}$, $\widehat{S}^r(p)$, $\widehat{D}^r(p)$. Решение этой задачи может быть получено с помощью алгоритма, приведенного в прошлом разделе. Пусть решению соответствуют значения

$\widehat{Q}^{l*}$, $l \in L^{12}$ и цены $p^*(1) < p^*(2)$.

Рассмотрим задачу поиска конкурентного равновесия для субрынков 1 и 2 при заданной структуре потоков $\overrightarrow{Q}^{12*} = (\widehat{Q}^{l^*},\ l \in L^{12})$ без учета ограничений на перетоки внутри субрынков. В этом случае цены конкурентного равновесия $p(l)(\overrightarrow{Q}^{12*})$ и потоки внутри субрынков $q_{ij}(\overrightarrow{Q}^{12*})$, $i, j \in N^l$, $l = 1, 2$, определяются из системы

$$\forall i \in N_1 \quad S_{iW}(p(1)) = D_i(p(1)) + \sum_{j \in N_1 \setminus \{i\}} q_{ij} + \sum_{j \in N_2} \widehat{Q}^*_{ij}, \tag{3.7}$$

$$\forall i \in N_2 \quad S_{iW}(p(2)) = D_i(p(2)) + \sum_{j \in N_2 \setminus \{i\}} q_{ij} - \sum_{j \in N_1} \widehat{Q}^*_{ij}. \tag{3.8}$$

Утверждение 3.2.2. *Пусть существует решение задачи (3.7)-(3.8) для субрынков, при котором потоки q^*_{ij}, $i, j \in N^l$, $l = 1, 2$, удовлетворяют ограничениям $q^*_{ij} \le Q^0_{ij}$. Тогда решение задачи для двухузлового рынка $\widehat{M}$ соответствует оптимальной сетевой структуре для исходного рынка.*

Доказательство. Рассмотрим задачу оптимизации сетевой структуры для исходного рынка без учета ограничений внутри субрынков, то есть задачу нахождения

$$\overrightarrow{Q}^{0*} = \{Q^{l*}, l \in L^{12}\} = \mathrm{Argmax}_{(Q^l, l \in L^{12})} \{W^0(\overrightarrow{Q}^0) - \sum_{l \in L^{12}} E^l(Q^l)\}, \tag{3.9}$$

где общественное благосостояние без учета затрат на увеличение пропускной способности

$$W^0(\overrightarrow{Q}^0) = \sum_{i \in N_1 \cup N_2} CS^0_i(\overrightarrow{Q}^0) + \sum_{i \in N_1 \cup N_2} Pr^0_i(\overrightarrow{Q}^0) + T^0(\overrightarrow{Q}^0)$$

состоит из потребительских выигрышей $CS^0_i(\overrightarrow{Q}^0)$, прибылей производителей $Pr^0_i(\overrightarrow{Q}^0)$, которые определяются из (2.11)-(2.12) с заменой $\widetilde{p}_i(Q)$ на $p(l)(\overrightarrow{Q}^0)$ для $i \in N_l$, $l = 1, 2$, и прибыли транспортной системы

$$T^0(\overrightarrow{Q}^0) = (p(2)(\overrightarrow{Q}^0) - p(1)(\overrightarrow{Q}^0)) \sum_{l \in L^{12}} Q^l.$$

Таким образом, оптимизационная задача без учета ограничений внутри субрынков эквивалентна задаче для двухузлового рынка $\widehat{M}$ с указанными выше параметрами $\widehat{L}$, $\widehat{S}^r(p)$, $\widehat{D}^r(p)$, ее решение $\overrightarrow{Q}^{0*} = (\widehat{Q}^{l*}, l \in L^{12})$.

Оптимальное значение общественного благосостояния $TW^{0*}(\overrightarrow{Q}^{0*})$ для задачи (3.9) не меньше, чем оптимальное значение общественного благосостояния $TW^*(\overrightarrow{Q}^*)$ для исходной задачи, так как добавлены ограничения. Рассмотрим набор $\overrightarrow{Q}^S = (\widehat{Q}^{l*}$ при $l \in L^{12}; \quad Q_0^{ij}$ при $i, j \in N^l, l = 1, 2)$. Так как $q_{ij}^* \leq Q_0^{ij}$, то решение задачи (3.7)-(3.8) удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи (3.3)-(3.6). Следовательно, $TW^{0*}(\overrightarrow{Q}^{0*}) = TW^*(\overrightarrow{Q}^S)$ и $\overrightarrow{Q}^S$ является решением исходной задачи. Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда в исходном равновесии рынок делится на 3 субрынка. Переупорядочим их так, чтобы структура потоков соответствовала рисунку 3.1.

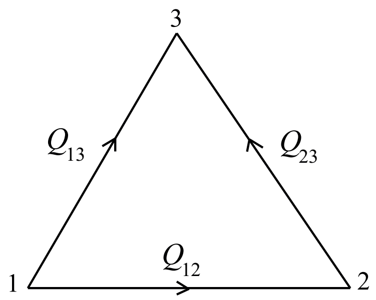

Рис. 3.1. Сетевая структура с 3 субрынками.

В этом случае в конкурентном равновесии

$$\widehat{S}^1(p) = \widehat{D}^1(p) + Q_{12} + Q_{13},$$

$$\widehat{S}^2(p) = \widehat{D}^2(p) - Q_{12} + Q_{23},$$

$$\widehat{S}^3(p) = \widehat{D}^3(p) - Q_{13} - Q_{12}.$$

Если для данной структуры потоков оптимизация по Q_{13} неэффективна (то есть $TW(L^{13}) < TW(\emptyset)$), то она не присутствует в оптимальном решении (то есть $L^{13} \not\subset L^*$). Однако для последовательного соединения результат обобщить нельзя. Может оказаться, что оптимизация по Q_{12} и Q_{23} отдельно не выгодна, в то время как инвестиции одновременно в Q_{12} и Q_{23} могут привести к росту общественного благосостояния. Таким образом, для решения оптимизационной задачи необходимо на первом шаге рассмотреть следующие варианты: а) оптимизация по линии Q_{13}, б) оптимизация по линии Q_{23}, в) оптимизация по линии Q_{12}, г) оптимизация по линиям Q_{12} и Q_{23} одновременно. Если оптимизация по Q_{13} оказалась невыгодной, то необходимо выбрать оптимальный вариант из б)-г). В противном случае на втором шаге необходимо рассмотреть комбинации, включающие Q_{13} и эффективные варианты из б)-г).

3.3. Рынок с последовательным соединением узлов в условиях совершенной конкуренции

Данный раздел посвящен исследованию конкурентного равновесия для сетевого рынка с последовательным соединением узлов. При заданных параметрах рынка направления потоков в равновесии заранее не известны. В результате исследования получены условия, при которых можно сократить перебор возможных вариантов направлений потоков.

Пусть имеется n узлов, которые последовательно соединены линиями передачи. Линия, соединяющая узлы i и $i+1$, характеризуется пропускной способностью Q_{ii+1} и коэффициентом потерь k_{ii+1}. Пусть A_i – множество производителей, принадлежащих узлу i, $D_i(p)$ – суммарная функция спроса в узле i, $S_{iW}(p)$ – суммарная функция предложения Вальраса в узле i. Обозначим $\Delta S_i(p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{iW}(p) - D_i(p)$. Пусть q_{ii+1} – поток по линии, соединяющей рынки i и $i+1$. Если $q_{ii+1} > 0$, то поток идет из узла i в узел $i+1$; если $q_{ii+1} < 0$, то в обратную сторону.

Сначала рассмотрим случай, когда потери при передаче товара несущественны ($k_{ii+1} = 0$). В условиях совершенной конкуренции равновесные цены

p_{ii+1} и потоки q_{ii+1} удовлетворяют системе

$$\Delta S_1(p_1) = q_{12}, \tag{3.10}$$

$$\Delta S_2(p_2) = -q_{12} + q_{23}, \tag{3.11}$$

$$...$$

$$\Delta S_i(p_i) = -q_{(i-1)i} + q_{i(i+1)}, \tag{3.12}$$

$$...$$

$$\Delta S_n(p_n) = -q_{(n-1)n}, \tag{3.13}$$

$$\text{если } p_i < p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = Q_{ii+1}, \tag{3.14}$$

$$\text{если } p_i > p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = -Q_{ii+1}, \tag{3.15}$$

$$\text{если } p_i = p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} \in [-Q_{ii+1}, Q_{ii+1}]. \tag{3.16}$$

При ненулевых коэффициентах потерь система для расчета конкурентного равновесия принимает вид

$$\Delta S_1(p_1) = \alpha_{12}^1 q_{12}, \tag{3.17}$$

$$\Delta S_2(p_2) = -\alpha_{12}^2 q_{12} + \alpha_{23}^2 q_{23}, \tag{3.18}$$

$$...$$

$$\Delta S_i(p_i) = -\alpha_{(i-1)i}^i q_{(i-1)i} + \alpha_{i(i+1)}^i q_{i(i+1)}, \tag{3.19}$$

$$...$$

$$\Delta S_n(p_n) = -\alpha_{(n-1)n}^n q_{(n-1)n}, \tag{3.20}$$

$$|q_{ii+1}| \leq Q_{ii+1}, \tag{3.21}$$

$$\text{если } q_{ii+1} > 0, \text{ то } \alpha_{i(i+1)}^i = 1 \text{ и } \alpha_{i(i+1)}^{i+1} = 1 - k_{ii+1}, \tag{3.22}$$

$$\text{если } q_{ii+1} < 0, \text{ то } \alpha_{i(i+1)}^i = 1 - k_{ii+1} \text{ и } \alpha_{i(i+1)}^{i+1} = 1, \tag{3.23}$$

$$\text{если } p_i < (1 - k_{ii+1}) p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = Q_{ii+1}, \tag{3.24}$$

$$\text{если } (1-k_{ii+1})p_i > p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = -Q_{ii+1}, \tag{3.25}$$

$$\text{если } 1-k_{ii+1} < \frac{p_i}{p_{i+1}} < (1-k_{ii+1})^{-1}, \text{ то } q_{ii+1} = 0. \tag{3.26}$$

Сложность расчета конкурентного равновесия обусловлена тем, что направления потоков заранее неизвестны. Задача состоит в том, чтобы сократить перебор возможных вариантов.

Рассмотрим цены изолированных рынков p_i^0, $i = 1, \dots n$, которые определяются из условия $\Delta S_i(p_i^0) = 0$. Покажем, что при достаточно малых пропускных способностях направления потоков соответствуют соотношению цен для изолированных рынков.

Сначала для всех узлов, для которых $p_i^0 < (1-k_{ii+1})p_{i+1}^0$, рассмотрим систему

$$\Delta S_i((1-k_{ii+1})\widehat{p}_{ii+1}) = \widehat{Q}_{ii+1}, \tag{3.27}$$

$$\Delta S_{i+1}(\widehat{p}_{ii+1}) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}_{ii+1}. \tag{3.28}$$

Умножив первое равенство на $1-k_{ii+1}$ и сложив со вторым, получим соотношение

$$(1-k_{ii+1})\Delta S_i((1-k_{ii+1})\widehat{p}_{ii+1}) + \Delta S_{i+1}(\widehat{p}_{ii+1}) = 0.$$

В силу монотонности функций $\Delta S_i(p)$ существует решение $\widehat{p}_{ii+1}$: $p_i^0 < (1-k_{ii+1})\widehat{p}_{ii+1}$, $\widehat{p}_{ii+1} < p_{i+1}^0$. Итак, для всех узлов, для которых $p_i^0 < (1-k_{ii+1})p_{i+1}^0$, определены величины $\widehat{p}_{ii+1}$ и $\widehat{Q}_{ii+1}$.

Далее для всех узлов, для которых $p_{i+1}^0 < (1-k_{ii+1})p_i^0$, рассмотрим систему

$$\Delta S_i(\widehat{p}_{ii+1}) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}_{ii+1}, \tag{3.29}$$

$$\Delta S_{i+1}((1-k_{ii+1})\widehat{p}_{ii+1}) = \widehat{Q}_{ii+1}, \tag{3.30}$$

откуда аналогично найдем величины $\widehat{p}_{ii+1}$ и $\widehat{Q}_{ii+1}$.

Теперь рассмотрим узлы, для которых $1-k_{ij} < \frac{p_i^0}{p_{i+1}^0} < (1-k_{ij})^{-1}$. Сначала исследуем случай, когда $(1-k)p_{i+1}^0 < p_i^0 < p_{i+1}^0$. Разберем различные комбинации направлений потоков в равновесии между узлами $i-1$, i и между узлами $i+1$, $i+2$.

Случай 1: поток идет из узла i в узел $i-1$ и из узла $i+2$ в узел $i+1$. Рассмотрим следующую систему

$$\Delta S_i(\widehat{p}^1_{ii+1}) = \widehat{Q}^1_{ii+1}, \tag{3.31}$$

$$\Delta S_{i+1}(\widehat{p}^1_{ii+1}) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}^1_{ii+1}, \tag{3.32}$$

из которой получим соотношение

$$(1-k_{ii+1})\Delta S_i(\widehat{p}^1_{ii+1}) + \Delta S_{i+1}(\widehat{p}^1_{ii+1}) = 0.$$

В силу монотонности функций $\Delta S_i(p)$ существует решение $\widehat{p}^1_{ii+1}$: $p^0_i < \widehat{p}^1_{ii+1} < p^0_{i+1}$. Тогда при $Q_{i-1i} < \widehat{Q}^1_{ii+1}$ для равновесной цены p_i справедливо

$$\Delta S_i(p_i) < \widehat{Q}^1_{ii+1},$$

откуда в силу монотонности $\Delta S_i(p)$ следует, что $p_i < \widehat{p}_{ii+1}$. Аналогично, при $Q_{ii+1} < \widehat{Q}^1_{ii+1}$ для равновесной цены p_{i+1} выполнено

$$\Delta S_{i+1}(p_{i+1}) > -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}^1_{ii+1},$$

откуда в силу монотонности $\Delta S_i(p)$ следует, что $p_{i+1} > \widehat{p}^1_{ii+1}$. Таким образом, $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < (1-k_{ii+1})p^0_{i+1} < p^0_i < p_i < \widehat{p}^1_{ii+1} < p_{i+1} < p^0_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i < (1-k_{ii+1})^{-1}p_i$.

Случай 2: поток идет из узла i в узел $i-1$ и из узла $i+1$ в узел $i+2$. Пусть величина $\widehat{Q}^2_{ii+1}$ определяется из условия:

$$\Delta S_i(p^0_{i+1}) = \widehat{Q}^2_{ii+1}. \tag{3.33}$$

Так как $p^0_{i+1} > p^0_i$, то $\widehat{Q}^2_{ii+1} > 0$. Тогда при $Q_{i-1i} < \widehat{Q}^2_{ii+1}$ в равновесии $p_i < p^0_{i+1}$. Пусть величина $\widehat{Q}^3_{ii+1}$ определяется из условия:

$$\Delta S_{i+1}((1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i) = \widehat{Q}^3_{ii+1}. \tag{3.34}$$

Так как $(1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i > p^0_{i+1}$, то $\widehat{Q}^3_{ii+1} > 0$. Тогда при $Q_{ii+1} < \widehat{Q}^3_{ii+1}$ в равновесии $p_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i$. Итак, $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < p^0_i < p_i < p^0_{i+1} < p_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i < (1-k_{ii+1})^{-1}p_i$.

Случай 3: поток идет из узла $i-1$ в узел i и из узла $i+2$ в узел $i+1$. Пусть величина $\widehat{Q}^4_{ii+1}$ определяется из условия:

$$\Delta S_i((1-k_{ii+1})p^0_{i+1}) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}^4_{ii+1}. \tag{3.35}$$

Так как $(1-k_{ii+1})p^0_{i+1} < p^0_i$, то $\widehat{Q}^4_{ii+1} > 0$. Тогда при $Q_{i-1i} < \widehat{Q}^4_{ii+1}$ в равновесии $p_i > (1-k_{ii+1})p^0_{i+1}$. Пусть величина $\widehat{Q}^5_{ii+1}$ определяется из условия:

$$\Delta S_{i+1}(p^0_i) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}^5_{ii+1}. \tag{3.36}$$

Так как $p^0_i < p^0_{i+1}$, то $\widehat{Q}^5_{ii+1} > 0$. Тогда при $Q_{ii+1} < \widehat{Q}^5_{ii+1}$ в равновесии $p_{i+1} > p^0_i$. Итак, $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < (1-k_{ii+1})p^0_{i+1} < p_i < p^0_i < p_{i+1} < p^0_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p_i < (1-k_{ii+1})^{-1}p^0_i$.

Случай 4: поток идет из узла $i-1$ в узел i и из узла $i+1$ в узел $i+2$. Рассмотрим следующую систему

$$\Delta S_i(\widehat{p}^5_{ii+1}) = -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}^5_{ii+1}, \tag{3.37}$$

$$\Delta S_{i+1}((1-k_{ii+1})^{-1}\widehat{p}^5_{ii+1}) = \widehat{Q}^5_{ii+1}, \tag{3.38}$$

из которой получим соотношение

$$\Delta S_i(\widehat{p}^5_{ii+1}) + (1-k_{ii+1})\Delta S_{i+1}(\widehat{p}^5_{ii+1}) = 0.$$

В силу монотонности функций $\Delta S_i(p)$ существует решение $\widehat{p}^5_{ii+1}$: $(1-k_{ii+1})p^0_{i+1} < \widehat{p}^5_{ii+1} < p^0_i$. Тогда при $Q_{i-1i} < \widehat{Q}^5_{ii+1}$ для равновесной цены p_i справедливо

$$\Delta S_i(p_i) > (1-k_{ii+1})\widehat{Q}^5_{ii+1},$$

откуда в силу монотонности $\Delta S_i(p)$ следует, что $p_i > \widehat{p}^5_{ii+1}$. Аналогично, при $Q_{ii+1} < \widehat{Q}^5_{ii+1}$ для равновесной цены p_{i+1} выполнено

$$\Delta S_{i+1}(p_{i+1}) < \widehat{Q}^5_{ii+1},$$

откуда в силу монотонности $\Delta S_{i+1}(p)$ следует, что $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < \widehat{p}^5_{ii+1}$. Итак, $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < \widehat{p}^5_{ii+1} < p_i < p^0_i < p^0_{i+1} < p_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}\widehat{p}^5_{ii+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p_i$.

Таким образом, при любых направлениях потоков между узлами $i-1$, i и между узлами $i+1$, $i+2$, если

$$Q_{i-1i}, Q_{i+1i+2} < \min\{\widehat{Q}^1_{ii+1}, \widehat{Q}^2_{ii+1}, \widehat{Q}^3_{ii+1}, \widehat{Q}^4_{ii+1}, \widehat{Q}^5_{ii+1}\},$$

то в равновесии $(1-k_{ii+1})p_{i+1} < p_{i+1} < (1-k_{ii+1})^{-1}p_i$ и узлы i и $i+1$ останутся изолированными.

Поэтому для узлов, в которых $1-k_{ij} < \frac{p_i^0}{p_{i+1}^0} < (1-k_{ij})^{-1}$ и $p_i^0 < p_{i+1}^0$, положим

$$\widehat{Q}_{ii+1} = \min\{2\widehat{Q}^1_{ii+1}, 2\widehat{Q}^2_{ii+1}, 2\widehat{Q}^3_{ii+1}, 2\widehat{Q}^4_{ii+1}, 2\widehat{Q}^5_{ii+1}\}. \quad (3.39)$$

Аналогичным образом определим величины $\overline{Q}_{ii+1}$ для узлов, в которых $1-k_{ij} < \frac{p_i^0}{p_{i+1}^0} < (1-k_{ij})^{-1}$ и $p_{i+1}^0 < p_i^0$

Далее для всех узлов, для которых $p_{i+1}^0 < (1-k_{ii+1})p_i^0$ либо $p_i^0 < (1-k_{ii+1})p_{i+1}^0$, положим

$$\overline{Q}_{ii+1} = \min\{\frac{\widehat{Q}_{ii+1}}{2}, \frac{\widehat{Q}_{i-1i}}{2}, \frac{\widehat{Q}_{i+1i+2}}{2}\}, \quad (3.40)$$

где формально $\widehat{Q}_{01} = \widehat{Q}_{nn+1} = \infty$.

Вернемся к рассмотрению узлов, для которых $p_i^0 < (1-k_{ii+1})p_{i+1}^0$. Независимо от направления потоков между узлами $i-1$ и i, а также между узлами i и $i+1$, при $Q_{ii+1} < \overline{Q}_{ii+1}$ для равновесных цен p_i и p_{i+1} справедливо

$$\Delta S_i(p_i) < \widehat{Q}_{ii+1},$$

$$\Delta S_{i+1}(p_{i+1}) > -(1-k_{ii+1})\widehat{Q}_{ii+1}.$$

Тогда в силу монотонности функций $\Delta S_i(p)$ справедливо $p_i < (1-k_{ii+1})\widehat{p}_{ii+1}$ и $p_{i+1} > \widehat{p}_{ii+1}$. Следовательно, $p_i < (1-k_{ij})p_{i+1}$ и поток идет из узла i в узел $i+1$. Аналогично доказывается, что если $p_{i+1}^0 < (1-k_{ii+1})p_i^0$, то при $Q_{ij} < \overline{Q}_{ii+1}$ в равновесии поток идет из узла $i+1$ в узел i. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.3.1. *Пусть для всех узлов, для которых $p^0_{i+1} < (1 - k_{ii+1})p^0_i$ либо $p^0_i < (1 - k_{ii+1})p^0_{i+1}$, выполнено $Q_{ii+1} < \overline{Q}_{ii+1}$, где $\overline{Q}_{ii+1}$ определяются согласно (3.27)-(3.40). Тогда в конкурентном равновесии направления потоков определяются следующим образом: если $p^0_i < (1 - k_{ii+1})p^0_{i+1}$, то в равновесии поток идет из узла i в узел $i + 1$ при активном ограничении пропускной способности. Если $p^0_{i+1} < (1 - k_{ii+1})p^0_i$, то в равновесии поток идет из узла $i + 1$ в узел i при активном ограничении пропускной способности. Если $1 - k_{ij} < \frac{p^0_i}{p^0_{i+1}} < (1 - k_{ij})^{-1}$, то рынки i и $i + 1$ остаются изолированными.*

Обсудим отдельно вырожденный случай, когда для узла i справедливо $p^0_i = p^0_{i+1}$ и потери при передачи несущественны. Зафиксируем пропускные способности $Q'_{i-1i} < min\{\widehat{Q}_{i-2i-1}/2, \widehat{Q}_{i-1i-2}/2\}$ и $Q'_{i+1i+2} < min\{\widehat{Q}_{i+1i+2}/2, \widehat{Q}_{i+2i+3}/2\}$. Рассмотрим различные варианты соотношений цен изолированных рынков между узлами i, $i-1$ и $i+1$, $i+2$. Случай 1: $p^0_{i-1} > p^0_i$ и $p^0_{i+1} > p^0_{i+2}$. Пусть цены p'_i и p'_{i+1} определяются из условий: $\Delta S_i(p'_i) = Q'_{i-1i}$, $\Delta S_{i+1}(p'_{i+1}) = -Q'_{i+1i+2}$. Тогда при $Q_{ii+1} < min\{Q'_{i-1i}, Q'_{i+1i+2}\}$ для цен конкурентного равновесия выполнено $p'_{i+1} < p_{i+1} < p^0_{i+1} = p^0_i < p_i < p'_i$ и поток будет идти из узла $i + 1$ в узел i при активном ограничении пропускной способности. Случай 2, когда $p^0_{i-1} < p^0_i$ и $p^0_{i+1} < p^0_{i+2}$, аналогичен случаю 1 с точностью до переименования узлов i и $i+1$. Случай 3: $p^0_{i-1} > p^0_i$ и $p^0_{i+1} < p^0_{i+2}$. Пусть цены p'_i и p'_{i+1} определяются из условий: $\Delta S_i(p'_i) = Q'_{i-1i}$, $\Delta S_{i+1}(p'_{i+1}) = Q'_{i+1i+2}$. Без ограничения общности будем считать, что $p'_i < p'_{i+1}$. Пусть Q^s и p^s определяются из системы $\Delta S_i(p^s) = Q'_{i-1i} + Q^s$, $\Delta S_{i+1}(p^s) = Q'_{i+1i+2} - Q^s$. Тогда при $Q_{ii+1} < min\{Q^s, \Delta S_i(p'_{i-1})\}$ поток будет идти из узла i в узел $i + 1$ при активном ограничении пропускной способности. Случай 4: $p^0_{i-1} < p^0_i$ и $p^0_{i+1} > p^0_{i+2}$. Пусть цены p'_i и p'_{i+1} определяются из условий: $\Delta S_i(p'_i) = -Q'_{i-1i}$, $\Delta S_{i+1}(p'_{i+1}) = -Q'_{i+1i+2}$. Без ограничения общности будем считать, что $p'_i > p'_{i+1}$. Пусть Q^s и p^s определяются из системы $\Delta S_i(p^s) = -Q'_{i-1i} - Q^s$, $\Delta S_{i+1}(p^s) = -Q'_{i+1i+2} + Q^s$. Тогда при $Q_{ii+1} < min\{Q^s, \Delta S_{i+1}(p'_{i-1})\}$ поток будет идти из узла $i+1$ в узел i при активном ограничении пропускной способности.

Далее покажем, что если коэффициенты потерь достаточно малы, а пропускные способности достаточно велики, то структура потоков будет такая же, как при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots n-1$. Сначала рассмотрим случай, когда $k_{ii+1} = 0$, $i = 1, \ldots n-1$. В равновесии без активных ограничений на всех рынках установится единая цена $\widetilde{p}(0)$. Сложив (3.10)-(3.13), получим условие для определения $\widetilde{p}(0)$: $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i(\widetilde{p}(0)) = 0$. Зная $\widetilde{p}(0)$, найдем последовательно все потоки $q_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Сначала из (3.10) найдем $\widetilde{q}_{12}(0) = \Delta S_1(\widetilde{p}(0))$. Затем из (3.11) получим $\widetilde{q}_{23}(0) = \Delta S_2(\widetilde{p}(0)) + \widetilde{q}_{12}$. Продолжая аналогично движение от узла i к узлу $i+1$, найдем все значения $\widetilde{q}_{ii+1}(0)$. При этом направление потока между узлами i и $i+1$ определяется знаком $\widetilde{q}_{ii+1}(0)$. Если пропускные способности $Q_{ii+1} > \widetilde{q}_{ii+1}(0)$, то структура потоков не изменится.

Перейдем к рассмотрению модели с потерями. Обозначим $\overrightarrow{k} = (k_{ii+1}, i = 1, \ldots, n-1)$. Для расчета равновесия с неактивными ограничениями пропускных способностей при заданных направлениях потоков положим

$$\beta_1 := 1, \quad \beta_2 := \frac{\alpha_{12}^1}{\alpha_{12}^2}, \ldots, \beta_i := \frac{\alpha_{12}^1}{\alpha_{12}^2} . \frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{23}^3} ... \frac{\alpha_{(i-1)i}^{i-1}}{\alpha_{(i-1)i}^{i}}, \quad i = \overline{3, n}, \tag{3.41}$$

где $\alpha_{(i-1)i}^{i-1}$, $\alpha_{(i-1)i}^{i}$ определены согласно (3.22)-(3.23). Тогда для узловых цен справедливо:

$$p_i = \beta_i p_1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.42}$$

Умножив (3.17) на β_1, (3.18) на β_2, (3.19) на β_i,..., (3.20) на β_n и сложив их, получим с учетом (3.42) соотношение для определения p_1:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta S_i(\beta_i p_1) = 0.$$

В силу свойств функций спроса и предложения решение $\widetilde{p}_1(\overrightarrow{k})$ существует. Из (3.42) найдем все остальные цены $\widetilde{p}_i(\overrightarrow{k})$, $i = 2, \ldots n$. Тогда равновесные потоки $\widetilde{q}_{ii+1}(\overrightarrow{k})$ определяются по цепочке (начиная с крайнего узла) из (3.17)-(3.20).

Рассмотрим функции $\Delta S_1(\widetilde{p}_1(\overrightarrow{k}))$, $\Delta S_2(\widetilde{p}_2((\overrightarrow{k}))) + \alpha_{12}^2\widetilde{q}_{12}(\overrightarrow{k})$, $\Delta S_3(\widetilde{p}_3((\overrightarrow{k}))) + \alpha_{23}^3\widetilde{q}_{23}(\overrightarrow{k})$ и так далее. В силу непрерывной зависимости этих функций от k_{ii+1}, $i = 1, ..., n-1$, если $\widetilde{q}_{ii+1}(0) < 0$ ($\widetilde{q}_{ii+1}(0) > 0$), то при достаточно малых значениях k_{ii+1}, $i = 1, ..., n-1$ будет справедливо $\widetilde{q}_{ii+1}(\overrightarrow{k}) < 0$ ($\widetilde{q}_{ii+1}(\overrightarrow{k}) > 0$). Таким образом, направление потоков сохранится. Итак, при $Q_{ii+1} > |\widetilde{q}_{ii+1}(\overrightarrow{k})|$ структура потоков будет такая же, как при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots n-1$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.3.2. *Если пропускные способности достаточно велики, то есть $Q_{ii+1} > |\widetilde{q}_{ii+1}(\overrightarrow{k})|$, $i = 1, \ldots, n-1$, а коэффициенты потерь достаточно малы, то структура потоков в конкурентном равновесии будет такая же, как при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots n-1$.*

Проиллюстрируем полученные выше результаты на примере. Пусть имеется 4 узла со следующими функциями спроса: $D_1(p) = 10 - p$, $D_2(p) = 8 - p$, $D_3(p) = 7 - p$, $D_4(p) = 13 - p$. На первом рынке присутствуют 2 фирмы, удельные затраты каждой равны 1, а максимальная производственная мощность каждой составляет 4. На втором рынке действуют 5 фирм с удельными затратами 3 и максимальными производственными мощностями 0.4. На третьем рынке присутствуют 5 фирм с удельными затратами 3 и максимальными производственными мощностями 0.6. На четвертом рынке 4 фирмы-производителя с удельными затратами 1 и максимальными производственными мощностями 1. Тогда цены изолированных рынков: $p_1^0 = 2$, $p_2^0 = 6$, $p_3^0 = 4$, $p_4^0 = 9$. Из условий (3.27)-(3.30) найдем $\widehat{Q}_{12} = 2$, $\widehat{Q}_{23} = 1$, $\widehat{Q}_{34} = 2.5$. Согласно утверждению 3.3.1, при $Q_{ii+1} < 0.5$, $i = 1, 2, 3$, направления потоков определяются соотношением цен для изолированных рынков: из первого и третьего узлов во второй и из третьего узла в четвертый. Далее определим потоки при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, 2, 3$. Цена объединенного рынка $\widetilde{p}$, удовлетворяющая условию $\sum_{i=1}^{n} \Delta(\widetilde{p}) = 0$, равна 5.25. Тогда $q_{12} = \Delta S_1(\widetilde{p}) = 3.23 > 0$, $q_{23} = \Delta S_2(\widetilde{p}) + q_{12} = 2.5 > 0$, $q_{34} = \Delta S_3(\widetilde{p}) + q_{34} = 3.75 > 0$. Итак, если $Q_{12} > 3.25$, $Q_{23} > 2.5$, $Q_{34} > 3.75$, то все ограничения пропускной способности неактивны и потоки идут из первого узла во второй, из второго узла в третий и из третьего узла в четвертый.

Далее обобщим полученные выше результаты для цепочки с подрынками. Пусть рынок-цепочка разбит на несколько подрынков, внутри которых ограничения пропускной способности не являются существенными, а прочие ограничения (между подрынками) активны. Рассмотрим случай, когда $k_{ii+1} = 0$, $i = 1, \dots n-1$. Цена p_k^0 изолированного подрынка с множеством узлов I_k определяется из условия $\sum_{i \in I_k} \Delta S_i(p_i^k) = 0$. Для установления пороговых значений пропускных способностей линий между подрынками, при которых направления потоков соответствуют соотношению цен изолированных подрынков, проведем те же рассуждения, что и при доказательстве утверждения 3.3.1, рассматривая вместо $\Delta S_i(p)$ для узла общую функцию $\sum_{i \in I_k} \Delta S_i(p)$ для подрынка. Действуя таким образом, найдем для каждой линии, соединяющей подрынки, это пороговое значение $\overline{Q}_{ii+1}$. Установим, при каких значениях пропускных способностей внутри подрынка структура потоков будет такая же, как при $Q_{ii+1} = \infty$ для линий внутри подрынка. Рассмотрим подрынок с множеством узлов $i_1, \dots, i_{k_n}$. Пусть $\overline{p}$ и $\underline{p}$ определяются соответственно из условий

$$\sum_{i \in I_k} \Delta S_i(\overline{p}) = \overline{Q}_{(i_1-1)i_1} + \overline{Q}_{i_n(i_n+1)},$$

$$\sum_{i \in I_k} \Delta S_i(\underline{p}) = -\overline{Q}_{(i_1-1)i_1} - \overline{Q}_{i_n(i_n+1)}.$$

Тогда для равновесной цены $\widetilde{p}$ в узлах подрынка выполнено $\underline{p} < \widetilde{p} < \overline{p}$. Следовательно, для потока между узлами i_1 и i_2 справедливо

$$\Delta S_{i_1}(\underline{p}) - \overline{Q}_{(i_1-1)i_1} < q_{i_1 i_2} < \Delta S_{i_1}(\overline{p}) + \overline{Q}_{i_{k_n}(i_{k_n}+1)}.$$

Положим $\underline{Q_{i_1 i_2}} = \max\{|\Delta S_1(\underline{p}) - \overline{Q}_{(i_1-1)i_1}|, |\Delta S_1(\overline{p}) + \overline{Q}_{i_n(i_n+1)}|\}$. Двигаясь далее по цепочке, определим $\underline{Q_{i_2 i_3}} = \max\{|\Delta S_2(\underline{p}) - \underline{Q_{i_1 i_2}}|, |\Delta S_2(\overline{p}) + \underline{Q_{i_1 i_2}}|\}$, $\underline{Q_{i_3 i_4}} = \max\{|\Delta S_3(\underline{p}) - \underline{Q_{i_2 i_3}}|, |\Delta S_3(\overline{p}) + \underline{Q_{i_2 i_3}}|\}$ и так далее. Итак, если $Q_{ii+1} > \underline{Q_{ii+1}}$ внутри подрынка и $Q_{ii+1} < \overline{Q_{ii+1}}$ для линий между подрынками, тогда структура потоков будет такой, как в ситуации, когда внутри подрынка отсутствуют ограничения пропускной способности, а между подрынками направления потоков соответствуют соотношению цен для изолированных подрынков.

Рассмотрим рынок с n узлами в условиях совершенной конкуренции и структуру, при которой возможно строительство линий, соединяющих рынки i и $i+1$, $i = 1, \ldots, n-1$; L – множество всех возможных линий.

Утверждение 3.3.3. *Пусть цены изолированных рынков $p_i(0)$, определяемые из условий $\Delta S_i(p_i(0)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют соотношениям: $p_i(0) < (1 - k_{ii+1})p_{i+1}(0)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда при любых значениях пропускных способностей линий, соединяющих рынки p_i с p_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, потоки будут ориентированы в направлении от узла 1 к узлу n.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть j – наименьший номер узла, такой что в равновесии с ценами $p_i^{'}$, $i = 1, \ldots, n$ либо поток идет из узла $j+1$ в узел j, либо эти узлы остаются изолированными. Сначала рассмотрим случай, когда поток идет из узла $j+1$ в узел j. Тогда $p_{j+1}^{'} \leq p_j^{'}$. Так как потоки входят в узел j, то в силу монотонности функций спроса и предложения $p_j^{'} < p_j(0)$. Тогда $p_{j+1}^{'} \leq p_j^{'} < p_j(0) < p_{j+1}(0)$. Из $p_{j+1}^{'} < p_{j+1}(0)$ в силу монотонности функции спроса и предложения Вальраса следует, что поток должен идти из узла $j+2$ в узел $j+1$. Рассуждая далее аналогичным образом, получим, что все потоки при $i \geq j$ должны идти по направлению от узла $j+1$ к узлу j. Тогда для равновесных цен справедливо $p_n^{'} \leq p_{n-1}^{'} \leq \ldots p_j^{'}$. Так как поток исходит из узла n, то в силу монотонности функции спроса и предложения $p_n^{'} > p_n(0)$. Следовательно, $p_n(0) < p_n^{'} \leq p_j^{'} < p_j(0)$, что противоречит $p_n(0) > p_j(0)$. Теперь рассмотрим второй случай, когда узлы j и $j+1$ остаются изолированными. Предположим, что поток идет из узла $j+1$ в узел $j+2$. Так как поток исходит из узла $j+1$, то в силу монотонности функции спроса и предложения $p_{j+1}^{'} > p_{j+1}^0$. Следовательно, $p_j^{'} < p_j^0 < (1 - k_{ii+1})p_{j+1}^0 < (1 - k_{ii+1})p_{j+1}^{'}$. Неравенство $p_j^{'} < (1 - k_{ii+1})p_{j+1}^{'}$ противоречит изолированности узлов j и $j+1$. Если же поток идет из узла $j+2$ в узел $j+1$, то проведя те же рассуждения, что и в первом случае с заменой j на $j+1$, также прийдем к противоречию. Утверждение доказано.

Пусть для цен изолированных рынков справедливо $p_i(0) < (1-k_{ii+1})p_{i+1}(0)$, $i = 1,\dots,n-1$. Если построены линии с пропускными способностями $\overrightarrow{Q} = (Q_{i,i+1}, i = 1,\dots,n-1)$, то цены конкурентного равновесия $p_i^{ch}(\overrightarrow{Q})$ и потоки $q_{i,i+1}^{ch}$ определяется из системы

$$S_{1W}(p_1^{ch}) = D_1(p_1^{ch}) + q_{12}^{ch}, \tag{3.43}$$

$$S_{iW}(p_i^{ch}) = D_i(p_i^{ch}) - (1-k_{i-1i})q_{i-1,i}^{ch} + q_{i,i+1}^{ch}, \quad i = 2,\dots,n-1, \tag{3.44}$$

$$S_{nW}(p_n^{ch}) = D_n(p_n^{ch}) - (1-k_{n-1n})q_{n-1,n}^{ch}, \tag{3.45}$$

$$q_{i,i+1}^{ch} \le Q_{i,i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1, \tag{3.46}$$

$$\text{если} \quad (1-k_{ii+1})p_{i+1}^{ch} > p_i^{ch}, \quad \text{то} \quad q_{i,i+1}^{ch} = Q_{i,i+1}. \tag{3.47}$$

Затраты, связанные со строительством линии, связывающей рынки i и $i+1$, $i = 1,\dots,n-1$, задаются функцией вида

$$OC^{i,i+1}(Q_{i,i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q_{i,i+1} = 0, \\ c_f^{i,i+1} + c_v^{i,i+1}(Q_{i,i+1}), & \text{если } Q_{i,i+1} > 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

где $c_f^{i,i+1} > 0$ – фиксированные затраты, не зависящие от пропускной способности; $c_v(Q_{i,i+1})$ – переменные затраты, $c_v^{i,i+1}(0) = 0$, эта функция выпукла и монотонно возрастает по $Q_{i,i+1}$.

Задача максимизации общественного благосостояния заключается в нахождении

$$\overrightarrow{Q}^* = \{Q_{i,i+1}^*, i = 1,\dots,n-1\} = \mathrm{Argmax}_{(Q^l, l\in L)}\{W^{ch}(\overrightarrow{Q}) - \sum_{i=1}^{n-1} OC^{i,i+1}(Q_{i,i+1})\}, \tag{3.49}$$

где общественное благосостояние

$$W^{ch}(\overrightarrow{Q}) = \sum_{i\in N} CS_i^{ch}(\overrightarrow{Q}) + \sum_{i\in N} Pr_i^{ch}(\overrightarrow{Q}) + T^{ch}(\overrightarrow{Q}) \tag{3.50}$$

состоит из потребительских выигрышей $CS_i^{ch}(\overrightarrow{Q})$, прибылей производителей $Pr_i^{ch}(\overrightarrow{Q})$ на каждом из рынков, которые определяются согласно (2.11)-(2.12) с заменой $\widetilde{p}_i(Q)$ на $p_i^{ch}(\overrightarrow{Q})$, и прибыли транспортной системы

$$T^{ch}(\overrightarrow{Q}) = \sum_{i=1}^{n-1}(1-k_{ii+1})(p_{i+1}^{ch}(\overrightarrow{Q}) - p_i^{ch}(\overrightarrow{Q}))Q_{ij}. \qquad (3.51)$$

Очевидно, что нет смысла создавать избыточную пропускную способность, которая не будет использоваться. Поэтому для оптимальной структуры $\overrightarrow{Q}^* = \{Q_{i,i+1}^*, i = 1,\ldots,n-1\}$ выполнено следующее условие: если $Q_{i,i+1}^* > 0$, то $q_{i,i+1}^{ch}(\overrightarrow{Q}^*) = Q_{i,i+1}^*$.

Зафиксируем множество линий $\overline{L}$, для которых $Q_{i,i+1}^* > 0$. Положим $Q_{i,i+1}^* > 0$ при всех $i = 1,\ldots,n-1$ (то есть $\overline{L} = L$). Тогда равновесные цены $p_i^{Lch}(\overrightarrow{Q})$ определяются из системы

$$S_{1W}(p_1^{Lch}) = D_1(p_1^{Lch}) + Q_{12}, \qquad (3.52)$$

$$S_{iW}(p_i^{Lch}) = D_i(p_i^{Lch}) - (1-k_{i-1i})Q_{i-1,i} + Q_{i,i+1}, \quad i = 2,\ldots,n-1, \qquad (3.53)$$

$$S_{nW}(p_n^{Lch}) = D_n(p_n^{Lch}) - (1-k_{n-1n})Q_{n-1,n}. \qquad (3.54)$$

Утверждение 3.3.4. *Для описанной сетевой структуры условия первого порядка принимают следующий вид:*

$$\textit{если } Q_{i,i+1}^* > 0, \textit{ то } \frac{\partial W^{ch}(\overrightarrow{Q}^*)}{\partial Q_{i,i+1}} = (1-k_{ii+1})p_{i+1}^{Lch}(\overrightarrow{Q}^*) - p_i^{Lch}(\overrightarrow{Q}^*) = c_v^{i,i+1'}(Q_{i,i+1}^*), \qquad (3.55)$$

$$\textit{если } Q_{i,i+1}^* = 0, \textit{ то } \frac{\partial W^{ch}(\overrightarrow{Q}^*)}{\partial Q_{i,i+1}} = (1-k_{ii+1})p_{i+1}^{Lch}(\overrightarrow{Q}^*) - p_i^{Lch}(\overrightarrow{Q}^*) < c_v^{i,i+1'}(0). \qquad (3.56)$$

Доказательство. Из (3.50)-(3.54) и теоремы о дифференцировании интеграла с переменным пределом следует

$$\frac{\partial W^{ch}}{\partial Q_{12}} = (1-k_{12})p_2^{Lch} - p_1^{Lch} + \frac{\partial p_1^{Lch}}{\partial Q_{12}}(S_{1W}(p_1^{Lch}) - D_1(p_1^{Lch}) - Q_{12}) +$$

$$+\frac{\partial p_2^{Lch}}{\partial Q_{12}}(S_{2W}(p_2^{Lch}) - D_2(p_2^{Lch}) + (1-k_{12})Q_{12} - Q_{23}).$$

Тогда из (3.52) и (3.53) для $i = 2$ получим

$$\frac{\partial W^{ch}}{\partial Q_{12}} = (1-k_{12})p_2^{Lch} - p_1^{Lch}.$$

Аналогично, для $i = 2, \dots, n-1$

$$\frac{\partial W^{ch}}{\partial Q_{i,i+1}} = (1-k_{ii+1})p_{i+1}^{Lch} - p_i^{Lch} +$$

$$+\frac{\partial p_i^{Lch}}{\partial Q_{i,i+1}}(S_{iW}(p_i^{Lch}) - D_i(p_i^{Lch}) + (1-k_{i-1i})Q_{i-1,i} - Q_{i,i+1}) +$$

$$+\frac{\partial p_{i+1}^{Lch}}{\partial Q_{i,i+1}}(S_{i+1W}(p_{i+1}^{Lch}) - D_{i+1}(p_{i+1}^{Lch}) + (1-k_{ii+1})Q_{i,i+1} - Q_{i+1,i+2}) = p_{i+1}^{Lch} - p_i^{Lch}.$$

Наконец,

$$\frac{\partial W^{ch}}{\partial Q_{n-1,n}} = (1-k_{n-1n})p_n^{Lch} - p_{n-1}^{Lch} +$$

$$+\frac{\partial p_{n-1}^{Lch}}{\partial Q_{n-1,n}}(S_{n-1W}(p_{n-1}^{Lch}) - D_{n-1}(p_{n-1}^{Lch}) + (1-k_{n-2n-1})Q_{n-2,n-1} - Q_{n-1,n}) +$$

$$+\frac{\partial p_n^{Lch}}{\partial Q_{n-1,n}}(S_{nW}(p_n^{Lch}) - D_n(p_n^{Lch}) + (1-k_{n-1n})Q_{n-1,n}) = (1-k_{n-1n})p_n^{Lch} - p_{n-1}^{Lch}.$$

Следовательно, условия первого порядка принимают вид (3.55)-(3.56). Утверждение доказано.

3.4. Рынок с последовательным соединением узлов в условиях олигополии Курно

Сформулируем аналоги утверждений 3.3.1, 3.3.2 для олигополии Курно, когда стратегией производителя a является его объем производства $v^a \in [0, V^a]$. При последовательном соединении узлов цены и потоки удовлетворяют условиям

$$\sum_{A_1} v^a = D_1(p_1) + \alpha_{12}^1 q_{12}, \tag{3.57}$$

$$\sum_{A_2} v^a = D_2(p_2) - \alpha_{12}^2 q_{12} + \alpha_{23}^2 q_{23}, \tag{3.58}$$

$$...$$

$$\sum_{A_i} v^a = D_i(p_i) - \alpha_{(i-1)i}^i q_{(i-1)i} + \alpha_{i(i+1)}^i q_{i(i+1)}, \tag{3.59}$$

$$...$$

$$\sum_{A_n} v^a = D_n(p_n) - \alpha_{(n-1)n}^n q_{(n-1)n}, \tag{3.60}$$

$$|q_{ii+1}| \leq Q_{ii+1}, \tag{3.61}$$

$$\text{если } q_{ii+1} > 0, \text{ то } \alpha_{i(i+1)}^i = 1 \text{ и } \alpha_{i(i+1)}^{i+1} = 1 - k_{ii+1}, \tag{3.62}$$

$$\text{если } q_{ii+1} < 0, \text{ то } \alpha_{i(i+1)}^i = 1 - k_{ii+1} \text{ и } \alpha_{i(i+1)}^{i+1} = 1, \tag{3.63}$$

$$\text{если } p_i < (1 - k_{ii+1})p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = Q_{ii+1}, \tag{3.64}$$

$$\text{если } (1 - k_{ii+1})p_i > p_{i+1}, \text{ то } q_{ii+1} = -Q_{ii+1}, \tag{3.65}$$

$$\text{если } 1 - k_{ij} < \frac{p_i}{p_{i+1}} < (1 - k_{ij})^{-1}, \text{ то } q_{ii+1} = 0. \tag{3.66}$$

Система (3.57)-(3.66) отличается от системы (3.17)-(3.26) для случая конкурентного рынка заменой $S_i(p)$ на $\sum_{A_i} v^a$.

Пусть p_i^{0C} – цена изолированного рынка i в условиях олигополии, то есть $S_i^C(p_i^{0C}) = D_i(p)$, где $S_i^C(p)$ – функция предложения Курно для изолированного рынка i.

Утверждение 3.4.1. *Пусть для всех узлов, для которых $p_{i+1}^{0C} < (1 - k_{ii+1})p_i^{0C}$ либо $p_i^{0C} < (1 - k_{ii+1})p_{i+1}^{0C}$, выполнено $Q_{ii+1} < \overline{Q}_{ii+1}^C$, где $\overline{Q}_{ii+1}^C$ определяются согласно (3.27)-(3.40) с заменой $\Delta S_i(p)$ на $S_i^C(p) - D_i(p)$. Тогда в равновесии направления потоков определяются следующим образом: если $p_i^{0C} < (1 - k_{ii+1})p_{i+1}^{0C}$, то в равновесии поток идет из узла i в узел $i+1$ при активном ограничении пропускной способности. Если $p_{i+1}^{0C} < (1 - k_{ii+1})p_i^{0C}$, то в равновесии поток идет из узла $i+1$ в узел i при активном ограничении пропускной способности. Если $1 - k_{ij} < \frac{p_i^{0C}}{p_{i+1}^{0C}} < (1 - k_{ij})^{-1}$, то рынки i и $i+1$ остаются изолированными.*

Доказательство совпадает с доказательством утверждения 3.3.1 с заменой $\Delta S_i(p)$ на $S_i^C(p) - D_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь рассмотрим задачу расчета равновесия Курно для рынка-цепочки при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим уравнения (3.57)-(3.60) баланса спроса и предложения для всех узлов цепочки. Для определения условий первого порядка, будем использовать индуктивный метод, двигаясь от крайнего узла. На первом шаге получим условия первого порядка для производителей на первом рынке. Пусть β_i^1, $n = 1, \ldots n$ определены согласно (3.41). Тогда для узловых цен p_i^* справедливо:

$$p_i^* = \beta_i^1 p_1^*, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.67}$$

Умножив (3.57) на β_1^1, (3.58) на β_2^1 и т.д., а потом сложив их, получим соотношение

$$\begin{aligned}\beta_1^1 \sum_{A_1} v^a + \beta_2^1 \sum_{A_2} v^a + ... + \beta_n^1 \sum_{A_n} v^a = \\ = \beta_1^1 D_1(p_1) + \beta_2^1 D_2(p_2) + \ldots + \beta_n^1 D_n(p_n).\end{aligned} \tag{3.68}$$

Из (3.68) с учетом соотношения цен (3.67) следует, что спрос для производителей на первом рынке равен

$$D_1(p_1) + \beta_2^1(D_2(\beta_2^1 p_1) - \sum_{A_2} v^a) + \ldots + \beta_n^1(D_n(\beta_n^1 p_1) - \sum_{A_n} v^a).$$

Следовательно, условия первого порядка для $a \in A_1$ принимают вид

$$v^{a*} \in (p_1^* - C^{a'}(v^{a*}))|D_1^{'}(p_1^*) + (\beta_2^1)^2 D_2^{'}(X_2^1 p_1^*)... + (\beta_n^1)^2 D_n^{'}(X_n^1 p_1^*)|,$$

$$\text{если} \quad C^{a'}(0) < p_1^*;$$

$$v^{a*} = 0, \quad \text{если} \quad C^{a'}(0) \geq p_1^*.$$

Первый шаг окончен.

Пусть сделан шаг $m-1$. Перейдем к шагу m, на котором получим условия первого порядка для производителей на рынке m. Положим $\beta_i^m := \frac{\beta_i^{m-1}}{\beta_m^{m-1}}$. Тогда

$p_i = \beta_i^m p_m$, $i = \overline{1,n}$, и спрос для производителей $a \in A_m$ составляет

$$\beta_1^m(D_1(\beta_1^m p_m) - \sum_{A_1} v^a) + \beta_2^m(D_2(\beta_2^m p_m) - \sum_{A_2} v^a) + \ldots$$

$$+D_m(p_m) - \sum_{A_m} v^a + \ldots + \beta_n^m(D_n(\beta_n^m p_m) - \sum_{A_n} v^a),$$

откуда получим следующие условия первого порядка.

Утверждение 3.4.2. *Пусть $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots, n-1$. Условия первого порядка для $a \in A_m$ принимают вид*

$$v^{a*} \in (\frac{p_1^*}{\beta_1^m} - C^{a'}(v^{a*}))|(\beta_1^m)^2 D_1^{'}(p_1^*) + (\beta_2^m)^2 D_2^{'}(\frac{\beta_2^m}{\beta_1^m} p_1^*) +$$

$$+ ... + D_m^{'}(\frac{p_1^*}{\beta_1^m}) + ... + (\beta_n^m)^2 D_n^{'}(\frac{\beta_n^m}{\beta_1^m} p_1^*)|, \quad \text{если} \quad C^{a'}(0) < p_m^*;$$

$$v^{a*} = 0, \quad \text{если} \quad C^{a'}(0) \geq p_m^*.$$

Шаг m завершен.

Обозначим $S_{CU}^{ia}(p)$ отображение, определяемое из условия первого порядка для $a \in A_i$; $S_{CU}^i(p) = \sum_{a \in A_i} S_{CU}^{ia}(p)$. Тогда равновесная цена p_1^* определяется из соотношения

$$S_{CU}^1(p_1^*) + \beta_2^1 S_{CU}^2(\beta_2^1 p_1^*) + ... + \beta_n^1 S_{CU}^n(\beta_n^1 p_1^*) =$$

$$= D_1(p_1^*) + \beta_2^1 D_2(\beta_2^1 p_1^*) + \ldots + \beta_n^1 D_n(\beta_n^1 p_1^*).$$

Цены p_i^*, $i = \overline{1,n}$, определяются из (3.67).

Заменив в доказательстве утверждения 3.3.2 $\Delta S_i(p)$ на $S_{CU}^i(p) - D_i(p)$, получим следующий результат

Утверждение 3.4.3. *Если пропускные способности достаточно велики, а коэффициенты потерь достаточно малы, то структура потоков в конкурентном равновесии будет такая же, как при $Q_{ii+1} = \infty$, $i = 1, \ldots n-1$.*

3.5. Выводы к третьей главе

В данной главе предложены методы, позволяющие определить оптимальные с точки зрения решения задачи максимизации общественного благосостояния пропускные способности для следующих сетевых структур: для двухузлового рынка с несколькими линиями передачи; для сетевого рынка, состоящего из двух субрынков, на каждом из которых устанавливается единая цена, и активны ограничения пропускной способности линий, соединяющих различные субрынки. Выявлены качественные закономерности функционирования некоторых сетевых рынков, как в условиях совершенной конкуренции, так и для олигополии. Анализ равновесия для рынка-цепочки показал, что при достаточно малых пропускных способностях направления потоков соответствуют соотношению цен для изолированных рынков, а при достаточно больших пропускных способностях структура потоков такая же, как в ситуации, когда ограничения пропускной способности несущественны.

Заключение

В результате диссертационного исследования решена актуальная задача по разработке новой теоретико-игровой модели и метода расчета совершенного подыгрового равновесия для двухэтапного рынка, а также методов расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара с точки зрения максимизации общественного благосостояния, имеющая значение для развития математических моделей форвардных и сетевых рынков. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

– разработана теоретико-игровая модель двухэтапного рынка с учетом присутствия на рынке арбитражеров, а также случайного фактора, влияющего на исход торгов на спотовом рынке;

– разработан метод расчета совершенного подыгрового равновесия для указанной теоретико-игровой модели двухэтапного рынка;

– получены необходимые условия оптимальности и разработаны методы расчета оптимальных пропускных способностей системы перемещения товара для некоторых сетевых структур с точки зрения максимизации общественного благосостояния.

Литература

1. Аболмасов А., Колодин Д. Конкурентный рынок и создание монополий: структурные проблемы российского оптового рынка электроэнергии. — М.: ГУ-ВШЭ, 2002.
2. Васин А. А. Некооперативные игры в природе и обществе. — М.: МАКС Пресс, 2005.
3. Васин А. А., Дайлова Е. А. Анализ краткосрочной эффективности механизмов оптового рынка электроэнергии // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2013. — № 2(18). — С. 35–60.
4. Васин А. А., Дайлова Е. А. Двухузловой рынок. Оптимизация системы перемещения товара // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 14–23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2014. — С. 31.
5. Васин А. А., Дайлова Е. А. Об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара на двухузловом рынке // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2014. — № 3. — С. 40–45.
6. Васин А. А., Дайлова Е. А. Теоретико-игровая модель взаимодействия агентов на двухэтапном рынке // Математическая теория игр и ее приложения. — 2012. — Т. 4, Вып. 4. — С. 3–22.
7. Васин А. А., Дайлова Е. А. Теоретико-игровая модель двухэтапного рынка со случайным фактором // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 29–31 октября 2012 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс. — 2012. — С. 38.
8. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005.
9. Васин А. А., Шарикова А. А. Равновесия двухэтапного рынка со случайным

исходом на спотовом рынке // Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2011. — №1. — С. 47–55.

10. Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнес Е. М. и др. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. — 2004. — № 3. — С. 72–83.
11. Дайлова Е. А. Математическая модель оптимального поведения производителей, потребителей и посредников на двухэтапном рынке // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2011 года. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2011. — С. 41–42.
12. Дайлова Е. А. Многоэтапный аукцион как инструмент ограничения рыночной власти производителей. Математическая модель и оптимальные стратегии // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 28 октября — 1 ноября 2013 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс. — 2013. — С. 34.
13. Дайлова Е. А. Модель оптимального поведения агентов на двухэтапном рынке // Ломоносов – 2013: XX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых; секция «Вычислительная математика и кибернетика»: Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 9–12 апреля 2013 г.: Сб. тезисов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ; МАКС Пресс. — 2013. — С. 68—69.
14. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономический динамики и равновесия. — М.:Наука, 1973.
15. Основы функционирования рынков электроэнергии: Учебно-методическое пособие. Под ред. к.э.н. Л.В.Ширяевой — М.: ЗАО «УК КЭУ», 2009.
16. Стофт С. Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии. — М.: Мир, 2006.
17. Allaz B., Vila J-L. Cournot competition, forward markets and efficiency // Journal of Economic Theory. — 1992. — Vol. 59, no 1. — P. 1–16.
18. Allen B., Hellwig M. Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets // Re-

view of Economic Studies. — 1986. — Vol. 53, no 2.— P. 175–204.

19. Amir R. Cournot oligopoly and the theory of super modular games // Games and Economic Behavior. — 1996. — Vol. 15, no 2. — P. 132–148.
20. Amir R., Lambson M. On the effects on entry in cournot markets // Review of Economic Studies. — 2000. — Vol. 67. — P. 235–254.
21. Ausubel M., Cramton P. Vickrey auction with reserve princing // Economic Theory. — 2004. — Vol. 23. — P. 493–505.
22. Baldick R., Grant R., Kahn E. Linear supply function equilibrium: generalizations, application, and limitations. POWER Working paper PWP-078. University of California Energy Institute, 2000.
23. Bertrand J. Review of theorie mathematique de la richesse sociale and recherches sur les principes mathematique de la theorie des richesse // Journal des Savants. — 1883. — Vol. 67.— P. 499-508.
24. Botterud A., Bhattacharyya A. K., Ilic M. Futures and spot prices — an analysis of the Scandinavian electricity market: Proceedings of the 34th Annual North American power Symposium (NAPS 2002); Tempa AZ-USA, October 2002.
25. Bushnell J. Oligopoly equilibria in electricity contract markets // University of California Energy Institute. CSEM Working Paper. WP–148, 2005.
26. Daylova E., Vasin A. Determination of transmission capacity for a two-node market // Procedia Computer Science. 2nd International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2014. — Vol. 31. — P. 151–157.
27. Daylova E., Vasin A. Estimation of the impact of forward contracts on producers' market power // EURO/INFORMS 26th European Conference on Operational Research. Rome 1-4 July, 2013, Sapienza University of Rome. — 2013. — P. 181.
28. Daylova E., Vasin A. Game-theoretic analysis of equilibrium in a two-stage market // VII Moscow International Conference on Operations Research

(ORM2013): Moscow, October 15–19, 2013: Proceedings. — Vol. 1. — Moscow: MAKS Press. — 2013. — P. 231–234.

29. Daylova E., Vasin A. Two-stage market with a random factor // International Annual Conference of the German Operation Research Society 2012. Energy, Markets and Mobility. September 4–7, 2012, Leibniz University of Hannover. — 2012. — P. 129.
30. Daylova E., Vasin A. Two-stage market with a random factor// Operation Research Proceedings 2012. Selected Papers of the International Annual Conference of the German Operations Research Society (GOR), Leibniz Universitat Hannover, Germany, September 5-7, 2012. — Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. — 2012. — P. 217–223.
31. Debreu G. Valuation equilibrium and pareto optimum // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1954. — Vol. 40. — P. 588—592.
32. Durakovich N., Vasin A., Vasina P. Cournot equilibrium and competition via supply function // Game Theory and Applications, Nova Science Publishers. — 2003. — Vol. 9. — P. 181–191.
33. Edgeworth F. Y. The pure theory of monopoly // Papers Resationg to Political Economics. — 1925. — Vol. 1. — P. 111–142.
34. Green R. Increasing competition in the british electricity spot market // The journal of Industrial Economics. — 1996. — Vol. 44, no 2. — P. 205–216.
35. Green R., Newbery D. Competition in the British electricity spot market // Journal of Political Economy. — 1992. — Vol. 100, no 5. — P. 929–953.
36. Hogan W. Competitive electricity market design: a wholesale primer. Working Paper. Harvard University, 1998.
37. Holmberg P., Newbery D., Ralph D. Supply Function Equilibria: Step Functions and Continuous Representations. Cambridge Working Paper in Economics 0863, 2008.
38. Ingersoll J. E. Theory of financial decision making. — Rowman & Littlefield Publishing, Inc, 1987.

39. Klemperer P., Meyer M. Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty // Econometrica. — 1989. — Vol. 57, no 6. — P. 1243-1277.
40. Kreps D. M., Sheinkman J. A. Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes // Bell Journal of Economics, The RAND Corporation. — 1983. — Vol. 14, no 2. — P. 326-337.
41. Lerner A. P. The Concept of monopoly and the measurement of monopoly power // The Review of Economic Studies. — 1934. — Vol. 1, no 3. — P. 157–175.
42. Mahenc P., Salanie F. Softening competition through forward trading // Journal of Economic Theory. — 2004. — Vol. 116, no 2. — P. 282-293.
43. Moreno D., Ubeda L. Capacity precommitment and price competition yield the Cournot outcome // Games and Economic Behavior, Elsevier. — 2006. — Vol. 56, no 2. — P. 323-332.
44. Myerson R. Optimal auction design // Mathematics of Operations Research. — 2006. — Vol. 6, no 1. — P. 58–73.
45. Newbery D. Competition, contracts, and entry in the electricity spot market // The RAND Journal of Economics. — 1998. — Vol. 29, no. 4. — P. 726-749.
46. Newbery D. Predicting market power in wholesale electricity markets. EUI Working Papers RSCAS, 2009.
47. Novshek W. On the existence of Cournot equilibrium // Review of Economic Studies. — 1985. — Vol. 52. — P. 85-98.
48. Rothkopf M., Teisberg T., Kahn E. Why are Vicrey auction rate? // Journal of Political Economy. — 1990. — Vol. 98. — P. 94–109.
49. Sosina Y., Vasin A., Weber G. Evaluation of market power in local and two-node markets // International Workshop Networking Games and Management, June 30 – July 2, 2012, Petrozavodsk, Russia. Extended abstracts. — 2012. — P. 66–69.
50. Vasin A., Vasina P. Electricity markets analysis and design. Working Paper

2006/053. New Economic School, Moscow, 2006.

51. Vasin A., Vasina P., Ruleva T. On organization of markets of homogeneous goods // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2007. — Vol. 46, no 1. — P. 93–106.
52. Walras L. Elements d'economie politique pure: ou theorie de la richesse sociale. Lausanne, 1874.
53. Wolfram C. Electricity markets: should the rest of the world adopt the united kingdom's reforms? // Regulation. — 1999. — Vol. 22, no 4. — P. 48–53.