

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Егоров Иван Евгеньевич

**Обобщение метода характеристик Коши для
построения численно-аналитических методов
решения задач синтеза оптимального
управления**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор

Братусь Александр Сергеевич

Москва – 2014

Содержание

Введение	4
Обзор литературы	12
Глава 1. Метод синтеза оптимального управления в задачах без особых режимов и с не более чем одним переключением . . .	16
1.1. Постановка задачи	16
1.2. Описание метода	32
1.3. Математическая модель терапии лейкоза	49
Глава 2. Синтез оптимального управления в математической мо- дели терапии злокачественной опухоли с учетом реакции им- мунной системы	58
2.1. Постановка задачи	59
2.2. Исследование системы принципом максимума Понтрягина	61
2.3. Вспомогательные оценки	68
2.4. Синтез оптимального управления	72
2.5. Результаты численного моделирования	81
Глава 3. Метод синтеза оптимального управления в задачах с особыми характеристиками и гладкие решения уравнения Га- мильтона-Якоби-Беллмана	82
3.1. Постановка задачи	82
3.2. Описание метода	83
3.3. Математическая модель терапии вирусных инфекций	96
3.4. Гладкие решения уравнения ГЯБ	106
Глава 4. Оценка альтернативных стратегий управления система- ми с асимптотически устойчивыми положениями равновесия	107

4.1. Пример	108
4.2. Общий случай	121
4.3. Результаты численного моделирования	127
Заключение	131
Литература	133
Приложение А. Специальные примеры	153
Приложение Б. Вспомогательные определения и классическая теорема о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка	162
Приложение В. Доказательства некоторых утверждений и тео- рем	166
В.1. Доказательство Утверждения 1.1	166
В.2. Доказательство Утверждения 1.5	166
В.3. Доказательство Утверждения 1.6	168
В.4. Доказательство Утверждения 1.7	170
В.5. Доказательство Теоремы 1.4	172
В.6. Доказательство Теоремы 1.6	173
В.7. О схеме доказательства Теоремы 3.2	179
В.8. Доказательство Утверждения 3.3	179

Введение

Актуальность работы. Известно [1–7], что задача синтеза оптимального управления, т. е. отыскания оптимального закона обратной связи (позиционного, не программного управления), сводится к глобальному построению в фазовом или расширенном фазовом пространстве обобщенного решения задачи Коши для, вообще говоря, нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (коротко — уравнения ГЯБ) в частных производных первого порядка. Среди методов сугубо вычислительного характера для решения таких задач можно выделить полулагранжевые [6, 8–12], конечно-разностные [12–19], использующие схему Ultra-Bee [20–22] и основанные на аппроксимации множеств уровня [23–30]. Их применение ограничивается следующими обстоятельствами:

- численное решение задачи Коши для уравнения ГЯБ ищется в ограниченной области фазового или расширенного фазового пространства, в то время как сама задача обычно ставится в неограниченной области, и тем самым возникает проблема корректного выбора ограниченной области для вычислений;
- близость приближенных решений задачи Коши для уравнения ГЯБ к точному решению далеко не всегда может быть обосновано той или иной теоремой о сходимости;
- с помощью методов сугубо вычислительного характера сложно получить целостное представление о геометрической картине синтеза оптимального управления, особенно для задач размерности, большей двух (в значительной степени это связано с тем, что такие методы, как правило, описываются для систем общего вида и поэтому не учитывают особенности динамики, имеющие место в конкретных классах математических моделей).

С другой стороны, если для определенного (возможно, достаточно узкого) класса задач удастся задать все поверхности переключений оптимального пози-

ционного управления, то глобальная геометрическая картина синтеза естественным образом выявляется без возникновения перечисленных выше трудностей.

Центральное место в диссертации занимает разработка численно-аналитических методов исследования и построения указанных поверхностей переключений в конкретных классах задач без фазовых ограничений и с одномерным линейно входящим управлением. В основу этих методов положено обобщение классического метода характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка, восходящее к работам Н. Н. Субботиной [31–36] и А. А. Меликяна [37–43]. Важной особенностью разрабатываемого подхода является одновременное использование следующих двух видов качественной информации:

- аналитических представлений, которые определяют локальные решения задачи Коши для уравнения ГЯБ, отвечающие постоянным граничным управлениям, и находятся из первых интегралов расширенной системы уравнений динамики;
- результатов исследования как участков постоянства, так и особых участков оптимальных управлений принципом максимума Понтрягина.

Тем самым метод динамического программирования (достаточные условия оптимальности) комбинируется с принципом максимума Понтрягина (необходимыми условиями оптимальности).

Также известно [31–36], что в тех точках переключений оптимального позиционного управления, где фазовые компоненты обобщенных характеристик с разными начальными позициями на целевом множестве пересекаются друг с другом, может нарушаться дифференцируемость функции цены — решения задачи Коши для уравнения ГЯБ. В литературе по теории оптимального управления наблюдается существенный дефицит примеров нетривиальных и содержательных задач, в которых функция цены является всюду гладкой (непрерывно дифференцируемой). В диссертационной работе для некоторых классов задач выводятся условия, обеспечивающие гладкость функции цены. Помимо

этого представлен ряд нетривиальных примеров (в том числе конкретные математические модели), в которых выполнены указанные достаточные условия гладкости функции цены. В некоторых из них удастся получить полное аналитическое представление для функции цены (что тоже крайне редко встречается в литературе), позволяющее непосредственно проверить ее гладкость.

В диссертационной работе использование разработанных методов глобального синтеза оптимального управления демонстрируется на следующих моделях математической биологии и медицины:

- математическая модель терапии однородной твердой несосудистой опухоли [44–46];
- математическая модель терапии лейкоза [47–49];
- математическая модель терапии злокачественной опухоли, учитывающая реакцию иммунной системы и основанная на модели Н. В. Степановой [50, 51];
- математическая модель терапии вирусных инфекций [52].

В каждой из них динамика самого терапевтического агента определяется стандартным линейным фармакокинетическим уравнением [53], оперирующим величиной концентрации вместо абсолютного значения дозировки. Тем самым воздействие терапии на рассматриваемые клетки или вирусы задается так называемыми функциями терапии [44, 48], которые зависят от меняющейся со временем концентрации терапевтического агента и могут быть как монотонными, так и немонотонными. Это более корректно с медицинской точки зрения по сравнению с учетом в модели полностью управляемого абсолютного значения дозировки без отдельного соответствующего уравнения динамики. Вместе с тем, такое добавление в управляемую систему нового уравнения и новой фазовой переменной может сильно изменить структуру оптимального позиционного

управления и усложнить его поиск [53–56]. Поэтому примеры исследования задач оптимального управления для моделей математической биологии и медицины с фармакокинетическими уравнениями слабо распространены в литературе. Например, в работах [51, 57–59] рассматриваются математические модели терапии злокачественной опухоли, которые так же, как и соответствующая задача в настоящей диссертационной работе, учитывают реакцию иммунной системы и основаны на модели Н. В. Степановой, но с целью упрощения не содержат фармакокинетических уравнений и функций терапии.

В диссертационной работе помимо проблематики синтеза оптимального управления затронут и следующий вопрос, касающийся связи теории оптимального управления с качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ряда автономных систем с терминальным целевым функционалом, обладающих при каждом фиксированном значении управляющего параметра единственным и асимптотически устойчивым положением равновесия, удастся построить “разумное” допустимое управление, руководствуясь лишь анализом свойств динамики. Такие управления принято называть “альтернативными” [48, 49] по отношению к управлениям, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина. Для указанного класса систем разработан способ априорного оценивания отклонения значения целевого функционала на альтернативном управлении от оптимального значения, основанный на применении аппарата функций Ляпунова и результатов предварительного исследования принципом максимума Понтрягина.

Степень разработанности темы исследования. Тематика качественного исследования и глобального построения решений задач синтеза оптимального управления на текущий момент развита слабо даже для достаточно простых моделей малых размерностей с одномерным линейно входящим управлением при отсутствии фазовых ограничений. Об этом свидетельствуют основополагающие учебники и монографии [1–7, 31, 37, 60, 61]. Однако необходимо отметить два следующих освещенных в литературе подхода к синтезу оптимального

управления в задачах с одномерным линейно входящим управлением:

- общий теоретический подход к поиску локального синтеза, развивавшийся в основном Х. Шаттлером, применимый, как правило, к системам малой размерности с одномерным линейно входящим управлением и распространяемый на некоторые классы задач с фазовыми ограничениями первого и, что значительно реже, второго порядков [7, 62–69];
- аналитический подход к глобальному построению решения уравнения ГЯБ в конкретных классах задач без фазовых ограничений, намеченный в работах [44–46, 52, 70–79], а также структуризованный, формализованный и дополненный в настоящей диссертационной работе.

Цели и задачи диссертационной работы:

- разработка численно-аналитического метода глобального синтеза оптимального управления в задачах без особых режимов и с не более чем одним переключением;
- разработка численно-аналитического метода глобального синтеза оптимального управления в задачах с особыми характеристиками и получение достаточных условий гладкости решения уравнения ГЯБ;
- решение предложенными методами задач синтеза оптимального управления для ряда новых моделей математической биологии и медицины, соответствующая программная реализация, проведение и содержательная интерпретация набора вычислительных экспериментов с графической визуализацией;
- разработка численно-аналитического подхода к оценке альтернативных стратегий управления системами с асимптотически устойчивыми положениями равновесия, соответствующая программная реализация и проведение на конкретном примере вычислительных экспериментов для ил-

люстрации уменьшения правой части априорной теоретической оценки с увеличением конечного момента времени;

- исследование двух специальных примеров моделей механики, в первом из которых разработанные методы синтеза оптимального управления не применимы, а во втором аналитически находится точное решение уравнения ГЯБ для задачи другого вида, нежели рассматривавшийся при изложении методов.

Научная новизна. Разработаны новые численно-аналитические методы решения задач синтеза оптимального управления, использующие аппарат обобщенных характеристик задачи Коши для уравнения ГЯБ и применимые к системам с одномерным линейно входящим управлением при отсутствии фазовых ограничений. Для ряда новых моделей математической биологии и медицины с фармакокинетическим уравнением, описывающим динамику концентрации терапевтического агента, построен глобальный синтез оптимального управления.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанный подход, во-первых, открывает широкое поле для исследований задач синтеза управления и, во-вторых, позволяет выявлять структуру оптимального позиционного управления для определенных классов математических моделей биологии, медицины, механики.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- метод синтеза оптимального управления в задачах без особых режимов и с не более чем одним переключением;
- решение задачи синтеза оптимального управления в математической модели терапии злокачественной опухоли, учитывающей реакцию иммунной системы, основанной на модели Н. В. Степановой и содержащей стандартное линейное фармакокинетическое уравнение;

- метод синтеза оптимального управления в задачах с особыми характеристиками и достаточные условия гладкости решения уравнения ГЯБ;
- метод оценки альтернативных стратегий управления системами с асимптотически устойчивыми положениями равновесия.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- секции «Вычислительная математика и кибернетика» XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 9–13 апреля 2012 г.);
- научно-исследовательском семинаре «Прикладные задачи системного анализа» кафедры системного анализа факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН, профессора А. Б. Куржанского;
- научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и математические модели биологии» кафедры системного анализа факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора А. С. Братуся;
- научно-исследовательском семинаре «Геометрические методы в теории оптимального управления» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН, профессора М. И. Зеликина;
- научно-исследовательском семинаре «Методы оптимизации в функциональных пространствах» кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Ф. П. Васильева;

- научно-исследовательском семинаре отдела имитационных систем и исследования операций Вычислительного центра РАН имени А. А. Дородницына под руководством профессора В. И. Елкина.

Публикации. Материалы диссертационной работы опубликованы в пяти печатных работах, из них четыре статьи в журналах перечня ВАК [71–73, 80] и один тезис доклада [81].

Работы [72, 73, 80] написаны единолично. Работа [71] написана в соавторстве с А. С. Братусем, Й. Т. Тодоровым и Д. В. Юрченко; в ней автором диссертации проведен ряд теоретических исследований, касающихся применения обобщенного метода характеристик Коши для построения глобального синтеза оптимального управления, и построены некоторые графические иллюстрации.

Личный вклад автора:

- структуризован, формализован и дополнен подход к построению синтеза оптимального управления, использующий обобщение классического метода характеристик Коши и возникший из накопленного опыта решения конкретных прикладных задач математической биологии, медицины, механики;
- получены достаточные условия гладкости решения уравнения ГЯБ для некоторых классов задач;
- для ряда новых моделей математической биологии и медицины с фармакокинетическим уравнением построен глобальный синтез оптимального управления.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения, библиографии и трех приложений. Общий объем диссертации — 181 страница, из них 158 страниц текста, включая 15 рисунков. Библиография включает в себя 162 наименования на 20 страницах.

Обзор литературы

Достаточно рано [1, 2] стало известно, что уравнение ГЯБ может не иметь классических, гладких решений. Это послужило причиной поиска подходов к определению обобщенного решения. Одни из первых работ в этом направлении были написаны С. Н. Кружковым [82–84]. Наиболее известный подход к определению обобщенных решений (понятие вязкостных решений) разработан П.-Л. Лионсом и М. Дж. Крэндаллом [85, 86]. Современное состояние этого подхода отражено в основополагающих работах [3, 4, 6]. А. И. Субботиным было введено эквивалентное понятие минимаксного решения [5]. Последователями А. И. Субботина во главе с Н. Н. Субботиной был развит аппарат обобщенных характеристик задачи Коши для уравнения ГЯБ [31–36]. А. А. Меликяну принадлежит метод особых характеристик для описания многообразий, содержащих особые точки решения уравнения ГЯБ, и обобщение классификации основных типов особенностей [37–43], впервые предложенной Р. Айзексом в [87]. Среди особых многообразий выделяют такие, которые притягивают к себе оптимальные траектории в прямом времени и одновременно с этим сохраняют гладкость функции цены. Они были названы универсальными многообразиями [37–39, 41, 87].

Л. К. Эвансом в [88] получена репрезентативная формула, определяющая вязкостное решение задачи Коши для уравнения ГЯБ, не предполагающая выпуклости гамильтониана или начальных данных и использующая “обобщенную огибающую” семейства аффинных решений (см. также [89–92]), и предложены соответствующие методы исследования особых поверхностей, называемых эквивокальными согласно модифицированной А. А. Меликяном [37–39] терминологии Р. Айзекса [87]. Помимо этого в [88] даны дифференциально-игровые интерпретации.

Методы решения задачи Коши для уравнения ГЯБ сугубо вычислительного характера изложены, например, в [6, 8–30].

В рамках научной школы А. Б. Куржанского (см., например, [93–119]) разработаны методы описания и аппроксимации трубок достижимости и разрешимости управляемых систем, дающие вычислительные алгоритмы решения различных классов задач синтеза, в том числе и в условиях неопределенности, и при наличии фазовых ограничений, и для управлений в классах обобщенных функций (импульсных управлений). Эти методы получили наибольшее развитие для линейных систем благодаря возможности использования аппарата выпуклого анализа и, в частности, специально построенного эллипсоидального исчисления.

Одно из важнейших направлений в области построения методов улучшения и оценки приближенно оптимальных программных и позиционных управлений базируется на принципе расширения, достаточных условиях оптимальности и соответствующих оценочных функциях В. Ф. Кротова [120–126]. В. А. Дыхтой разработана каноническая теория необходимых и достаточных условий глобальной оптимальности, основанная на использовании множеств негладких решений дифференциальных неравенств Гамильтона-Якоби для двух классов функций типа Ляпунова — слабо и сильно монотонных [127–131]. Эти функции позволяют оценивать сверху и снизу целевой функционал задачи оптимального управления и получать внутренние и внешние аппроксимации множеств достижимости. Применение указанных подходов затрудняется отсутствием общих методик отыскания требуемых оценочных функций В. Ф. Кротова и монотонных функций типа Ляпунова.

М. И. Зеликиным, В. Ф. Борисовым и Л. Ф. Зеликиной проведено исследование геометрической структуры оптимального синтеза для аффинных по управлению систем в окрестности особых универсальных многообразий и, в частности, развита теория режимов с учащающимися переключениями [60, 61, 132–136]. Кроме того, в [137, 138] получены достаточные условия дифференцируемости функции цены на особом универсальном многообразии для задачи быстрогодействия и для задачи с интегральным целевым функционалом и соот-

ветствующей подынтегральной функцией, не зависящей от управляющей переменной.

Необходимо отметить и общий подход к построению численных методов отыскания синтеза оптимального управления на основе аппарата обобщенных характеристик задачи Коши для уравнения ГЯБ, развиваемый Н. Н. Субботиной и ее учениками [32–36].

Теория особых оптимальных управлений была впервые детально исследована Р. Габасовым и Ф. М. Кирилловой [139]. В [55, 140, 141] установлено, что если особое позиционное управление принимает значения внутри одномерного множества ограничений на управления и усиленное условие Лежандра-Клебша выполнено на соответствующей особой поверхности в расширенном фазовом пространстве, то локальный синтез экстремалей в некоторой ее окрестности строится посредством соединения интегральных траекторий, полученных для особых и регулярных (постоянных граничных) управлений.

В работах [7, 62–69] изложен общий теоретический подход к поиску локального синтеза, развивавшийся в основном Х. Шаттлером, применимый, как правило, к системам малой размерности с одномерным линейно входящим управлением и распространяемый на некоторые классы задач с фазовыми ограничениями первого и, что значительно реже, второго порядков.

Аналитический подход к глобальному построению решения уравнения ГЯБ в конкретных классах задач без фазовых ограничений представлен в [44–46, 52, 70–79].

Подробное описание ряда моделей математической биологии и медицины, рассматриваемых в данной диссертационной работе, можно найти в [44–52, 57–59]. Влияние фармакокинетических уравнений на структуру оптимальных управлений в математических моделях химиотерапии рака исследовано в [53].

Вопросы составления уравнений ГЯБ для задач управления с фазовыми ограничениями (в том числе задач выживаемости [142]) рассмотрены в [143–

145].

В [146] на основе вязкостного (минимаксного) подхода введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби, возникающей в молекулярной биологии для модели эволюции Кроу-Кимуры, а также предложена соответствующая конструкция через функцию цены во вспомогательной задаче оптимального управления с заданным целевым множеством. При этом обобщенное решение оказывается неединственным.

В [70, 147] на примере математической модели терапии лейкоза описан подход к моделированию фазовых ограничений с помощью аппарата штрафных функций.

Глава 1

Метод синтеза оптимального управления в задачах без особых режимов и с не более чем одним переключением

В данной главе разрабатывается метод синтеза оптимального управления, основанный на обобщении метода характеристик Коши, применительно к задачам, в которых у допустимых процессов, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, отсутствуют участки особых режимов и имеется не более одного переключения. Управление предполагается одномерным и линейно входящим в систему. В качестве примера рассмотрена математическая модель терапии лейкоза с подчиненной закону Гомперца динамикой численностей здоровых и зараженных клеток, стандартным линейным фармакокинетическим уравнением и монотонно возрастающими функциями терапии.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^q, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где P — множество ограничений на управление, $T > 0$ — фиксированный конечный момент времени. Требуется решить задачу синтеза оптимального управления для (1.1) с целью достижения точной нижней грани функционала

$$\Phi(x(T)) \longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([0, T], P)}. \quad (1.2)$$

Соответствующий гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u) &:= \langle \psi, f(x, u) \rangle, \\ \mathcal{H}(x, \psi) &:= \max_{\bar{u} \in P} H(x, \psi, \bar{u}) = - \min_{\bar{u} \in P} H(x, -\psi, \bar{u}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предположение 1.1. *Предположим, что:*

- 1) P — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$, $T > 0$ — фиксированный конечный момент времени;
- 2) K — замыкание некоторой выпуклой открытой области в $\mathbb{R}^n$, являющейся его внутренностью $\text{int } K$ (очевидно, что K тоже выпукло);
- 3) функция $f : K \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна;
- 4) все элементы матрицы Якоби $D_x f(x, u)$ определены, непрерывны и ограничены на множестве $(x, u) \in K \times P$ (здесь в случае ограниченного K из их непрерывности следует их ограниченность).

Посредством формулы конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных устанавливается, что из пункта 4 Предположения 1.1 вытекает глобальная липшицевость $f(x, u)$ по $x \in \text{int } K$ равномерно по $u \in P$, которая, в свою очередь, влечет за собой глобальную липшицевость $f(x, u)$ по x уже во всей замкнутой области $x \in K$ равномерно по $u \in P$ (для вывода последнего факта достаточно рассмотреть для двух произвольных точек из ∂K сходящиеся к ним последовательности точек из $\text{int } K$ и осуществить в соответствующих неравенствах Липшица предельный переход при каждом фиксированном $u \in P$).

Положим

$$\tilde{f}(x, u) := f(\text{proj}_K x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times P, \quad (1.4)$$

где $\text{proj}_K x$ — проекция точки $x \in \mathbb{R}^n$ на выпуклое замкнутое множество $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Заметим, что $\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow \text{proj}_K x$ — однозначная функция, являющаяся липшицевой с константой 1 глобально в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [148, Глава 4, §4, Теоремы 1,2]).

Следовательно, $\tilde{f}(x, u)$ глобально липшицева по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно по $u \in P$.

Пусть θ_1, θ_2 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенству $\theta_1 < \theta_2$, и при каждом $\bar{u} \in \mathbb{R}^q$ через $\text{proj}_P \bar{u}$ обозначена проекция $\bar{u}$ на выпуклый компакт P в $\mathbb{R}^q$ (это липшицевая функция от $\bar{u}$ с константой 1 глобально в $\mathbb{R}^q$). Применяя [148, Глава 6, §1, Теорема 1] к управляемым системам

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, \text{proj}_P u(t)), \quad t \in [\theta_1, \theta_2], \quad u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}^q),$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\tilde{f}(x, \text{proj}_P u(\tau)), \quad \tau \in [\theta_1, \theta_2], \quad u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}^q),$$

мы получаем, что для любых $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}^q)$ и $x^1 \in \mathbb{R}^n$ существуют единственные решения задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, u(t)), \quad x|_{t=\theta_1} = x^1, \quad (1.5)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\tilde{f}(x, u(\tau)), \quad x|_{\tau=\theta_1} = x^1, \quad (1.6)$$

на всем временном отрезке $[\theta_1, \theta_2]$. Ввиду произвольности выбора чисел θ_1, θ_2 , подчиненных неравенству $\theta_1 < \theta_2$, указанные решения при любых $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ и $x^1 \in \mathbb{R}^n$ продолжимы на целую временную прямую $(-\infty, +\infty)$.

Управляемой системе (1.1) с учетом представления (1.4) соответствует дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(x) := \left\{ \tilde{f}(x, \bar{u}) : \bar{u} \in P \right\}. \quad (1.7)$$

Из пунктов 1–3 Предположения 1.1 следует компактность множества $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ (образ компакта при непрерывном отображении метрических пространств тоже компактен).

Запишем (1.1) и (1.7) в обратном времени $\tau := T - t$:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\tilde{f}(x, u(T - \tau)), \quad (1.8)$$

$$\frac{dx}{d\tau} \in -F(x). \quad (1.9)$$

Пусть Y — вещественное гильбертово пространство, $E \subseteq Y$ — замкнутое множество, $e \in E$, $O(e)$ — окрестность точки e в Y . В [149, Глава 2] введены и

исследованы понятия обобщенного градиента $D^{\text{Cl}}\varphi(e) := \partial\varphi(e)$ (называемого еще дифференциалом Кларка [31, п. 2.3]) функции $\varphi : O(e) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке e , касательного и нормального конусов $T_E^{\text{Cl}}(e) := T_E(e)$, $N_E^{\text{Cl}}(e) := N_E(e)$ ко множеству E в точке e . Последний, вообще говоря, отличен от проксимального нормального конуса $N_E^p(e)$ ко множеству E в точке e [3, Глава 1, §1], но согласно [3, Глава 2, §6]

$$N_E^p(e) \subseteq N_E^{\text{Cl}}(e) \quad (E \text{ замкнуто, } e \in E). \quad (1.10)$$

Предположение 1.2. *Предположим, что:*

1) G — открытая область в $\mathbb{R}^n$, представляемая в виде

$$G := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) := \max_{i \in \{1,2,\dots,r\}} g_i(x) < 0 \right\} \quad (1.11)$$

(возможен и случай $G = \mathbb{R}^n$, например, когда $r = 1$ и $g_1 \equiv \text{const} < 0$), где $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, r}$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем в каждой точке x' границы

$$\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \quad (1.12)$$

градиенты $\nabla g_i(x')$, $i \in I(x')$, при

$$\begin{aligned} I(x') &:= \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : g_i(x') = g(x')\} = \\ &= \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : g_i(x') = 0\} \quad (x' \in \partial G) \end{aligned} \quad (1.13)$$

неотрицательно линейно независимы (в определении неотрицательной линейной независимости конечного набора векторов линейного пространства над полем $\mathbb{R}$ рассматриваются их линейные комбинации только с неотрицательными коэффициентами, одновременно не равными нулю, а все остальное аналогично классическому определению линейной независимости);

2) $\overline{G} \subseteq K$;

3) для любых $\psi \in \mathbb{R}^n$ функция $\mathcal{H}(\cdot, \psi) : K \rightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева;

4) справедливо условие

$$\mathcal{H}(x, -\psi) = \max_{\bar{u} \in P} \langle \psi, -f(x, \bar{u}) \rangle \leq 0 \quad \forall \psi \in N_{\text{ext } G}^{\text{Cl}}(x) \quad \forall x \in \partial G, \quad (1.14)$$

где $N_{\text{ext } G}^{\text{Cl}}(x)$ — нормальный конус Кларка ко внешности

$$\text{ext } G := \mathbb{R}^n \setminus G = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\} \quad (1.15)$$

области G в точке x ;

5) имеет место такое представление

$$\begin{aligned} G &= G' \cap G'', \\ G' &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g^1(x) := \max_{i \in J'} g_i(x) < 0 \right\}, \\ G'' &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g^2(x) := \max_{i \in J''} g_i(x) < 0 \right\}, \\ J' \cup J'' &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad J' \cap J'' = \emptyset, \end{aligned} \quad (1.16)$$

что выполнено требование

$$\mathcal{H}(x, -\psi) < 0 \quad \forall \psi \in N_{\text{ext } G'}^{\text{Cl}}(x) \quad \forall x \in \partial G' \cap \partial G, \quad (1.17)$$

где $N_{\text{ext } G'}^{\text{Cl}}(x)$ — нормальный конус Кларка к

$$\text{ext } G' = \{x \in \mathbb{R}^n : g^1(x) \geq 0\} \quad (1.18)$$

в точке x , и всякая фазовая траектория $x : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_1 < \tau_2$, дифференциального включения (1.9), удовлетворяющая начальному условию $x|_{\tau=\tau_1} \in G$, не имеет общих точек с

$$\text{ext } G'' = \{x \in \mathbb{R}^n : g^2(x) \geq 0\}$$

на всем временном отрезке $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Согласно пункту 3 Предположения 1.2 и равенствам (1.3) при каждом $\psi \in \mathbb{R}^n$ функция

$$\mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow \min_{\bar{u} \in P} H(\text{proj}_K x, \psi, \bar{u}) = -\mathcal{H}(\text{proj}_K x, -\psi)$$

локально липшицева. Поэтому многозначные отображения F и $-F$, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $2^{\mathbb{R}^n}$, локально липшицевы [3, Глава 4, Упражнение 3.3(с)]. Из неравенства (1.14) и включения (1.10) вытекает, что пара $(\text{ext } G, -F)$ сильно инвариантна [3, Глава 4, §3, Теорема 3.8], т.е. всякая фазовая траектория $x : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_1 < \tau_2$, дифференциального включения (1.9), удовлетворяющая начальному условию $x|_{\tau=\tau_1} \in \text{ext } G$, не выходит за пределы замкнутого множества $\text{ext } G$ (т.е. не попадает в G) в течение всего временного отрезка $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Отсюда следует, что произвольная фазовая траектория $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_1 < t_2$, дифференциального включения (1.7), удовлетворяющая начальному условию $x|_{t=t_1} \in G$, проходит в открытой области G на всем временном отрезке $t \in [t_1, t_2]$.

Так как многозначные отображения F и $-F$ локально липшицевы, то они полунепрерывны сверху и их графики $\text{graph } F$ и $\text{graph}(-F)$ — замкнутые подмножества $\mathbb{R}^{2n}$ [150, Глава 1, п. 3.2, Теорема 14].

Утверждение 1.1. Пусть выполнен пункт 1 Предположения 1.2 и $x \in \partial G$. Тогда нормальные конусы $N_G^{\text{Cl}}(x)$, $N_{\text{ext } G}^{\text{Cl}}(x)$, $N_{G'}^{\text{Cl}}(x)$, $N_{\text{ext } G'}^{\text{Cl}}(x)$ обладают следующими свойствами (второе и четвертое из которых полезны для проверки требований (1.14), (1.17)):

$$\begin{aligned}
N_G^{\text{Cl}}(x) &= \left\{ \sum_{i \in I(x)} \lambda_i \nabla g_i(x) : \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I(x) \right\}, \\
N_{\text{ext } G}^{\text{Cl}}(x) &\subseteq -N_G^{\text{Cl}}(x) = \left\{ \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla g_i(x) : \mu_i \leq 0 \quad \forall i \in I(x) \right\}, \\
N_{G'}^{\text{Cl}}(x) &= \left\{ \sum_{i \in I'(x)} \lambda_i \nabla g_i(x) : \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I'(x) \right\}, \\
N_{\text{ext } G'}^{\text{Cl}}(x) &\subseteq -N_{G'}^{\text{Cl}}(x) = \left\{ \sum_{i \in I'(x)} \mu_i \nabla g_i(x) : \mu_i \leq 0 \quad \forall i \in I'(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Утверждение 1.1 доказывается в Приложении В.

Рассмотрим задачу оптимального управления (1.1),(1.2) с ограничением

$$x(t) \in G \quad \forall t \in [0, T] \quad (G — \text{сильно инвариантная область}). \quad (1.20)$$

Соответствующая задача Коши для уравнения ГЯБ принимает вид

$$\begin{cases} S = S(x, \tau), \quad \tau := T - t, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} = \min_{\bar{u} \in P} \langle \nabla_x S, f(x, \bar{u}) \rangle, \quad (x, \tau) \in G \times [0, T], \\ S(x, 0) = \Phi(x), \quad x \in G. \end{cases} \quad (1.21)$$

Предположение 1.3. *Предположим, что:*

- 1) *при любых $(x, \psi) \in K \times \mathbb{R}^n$ множество $\text{Arg} \max_{\xi \in F(x)} \langle \xi, \psi \rangle$ состоит из единственного элемента $f^*(x, \psi)$;*
- 2) *для каждого фиксированного $\psi \in \mathbb{R}^n$ функция $f^*(\cdot, \psi) : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, однако разрывы функции $f^* : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ по всей совокупности переменных не исключаются;*
- 3) *все скалярные компоненты вектор-функции*

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (\hat{x}, \hat{\psi}) \longrightarrow f^*(\text{proj}_K \hat{x}, \hat{\psi}) \in \mathbb{R}^n$$

и матричной функции

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (\hat{x}, \hat{\psi}) \longrightarrow D_x f^*(\text{proj}_K \hat{x}, \hat{\psi}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

кусочно непрерывны (определение кусочной непрерывности функций дано, например, в [151, п. 1.4.1]), имеют множества точек-аргументов разрыва с нулевой мерой Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$ и локально ограничены (здесь достаточно убедиться в локальной ограниченности на множествах точек-аргументов разрыва);

- 4) *задача Коши*

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\tau} = -f^*(\text{proj}_K \hat{x}, \hat{\psi}), \\ \frac{d\hat{\psi}}{d\tau} = \left(D_x f^*(\text{proj}_K \hat{x}, \hat{\psi}) \right)^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\hat{x}|_{\tau=0} = x', \quad \hat{\psi}|_{\tau=0} = \psi' \quad (1.23)$$

((1.22) — система с кусочно непрерывной по пункту 3 данного предположения правой частью, совпадающая в замкнутой области $(\hat{x}, \hat{\psi}) \in K$ с характеристической системой в обратном времени для уравнения ГЯБ из (1.21) [31–36]) обладает при любом начальном положении $(x', \psi') \in \mathbb{R}^{2n}$ хотя бы одним абсолютно непрерывным решением по А. Ф. Филиппову (которое, согласно, например, [151, п. 1.4.1], [152, Глава 2, §4] определяется как решение дифференциального включения, получаемого из (1.22) выпуклым, замкнутым доопределением в точках разрыва правой части), продолжимым на всякий временной отрезок вида $\tau \in [0, T']$, где $T' > 0$, т. е. на всю полупрямую $\tau \in [0, +\infty)$;

5) функция $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема.

Замечание 1.1. Пусть справедливы пункты 1–3 Предположения 1.3. Тогда правая часть соответствующего системе (1.22) дифференциального включения

$$\frac{d(\hat{x}, \hat{\psi})}{d\tau} \in F_{\text{char}}(\hat{x}, \hat{\psi}) \quad (1.24)$$

задает полунепрерывное сверху многозначное отображение из $\mathbb{R}^{2n}$ в $2^{\mathbb{R}^{2n}}$ с непустыми, выпуклыми, компактными значениями и тем самым удовлетворяет теореме о существовании локальных решений (см., например, [152, Глава 2, п. 3 §5, Лемма 3 §6, Теорема 1 §7], [151, п. 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2]). Таким образом, для установления пункта 4 Предположения 1.3 достаточно доказать продолжимость решений системы (1.22). Заметим, что [151, п. 2.2.3, Определение 2.2.3 и Теорема 2.2.3] непродолжимые решения дифференциального включения покидают компактные подмножества области, в которой оно рассматривается. Поэтому для проверки продолжимости решений дифференциального включения можно, опираясь, например, на [150, Глава 2, п. 2.1, Теорема 7] или [121, §§5.1, 5.2], попытаться подобрать подходящую функ-

цию типа Ляпунова. Применительно к дифференциальному включению (1.24) частным случаем такого подхода является проверка следующего условия:

$\exists c_1 = \text{const} > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \langle (\hat{x}, \hat{\psi}), \eta \rangle &\leq c_1 \left(\left\| (\hat{x}, \hat{\psi}) \right\|^2 + 1 \right) \\ \forall \eta \in F_{\text{char}}(\hat{x}, \hat{\psi}) \quad \forall (\hat{x}, \hat{\psi}) \in K \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.25)$$

(если требование (1.25) выполнено для всех $(\hat{x}, \hat{\psi}) \in K \times \mathbb{R}^n$, то оно в силу вида правой части системы (1.22) имеет место и при любых $(\hat{x}, \hat{\psi}) \in \mathbb{R}^{2n}$). Элементарно показывается, что (1.25) вытекает из следующего условия подлинейного роста (см., например, [151, п. 2.2.3]):

$$\begin{aligned} \exists c_j = \text{const} > 0, \quad j = 2, 3, \quad \text{такие, что} \\ \|\eta\| &\leq c_2 \left\| (\hat{x}, \hat{\psi}) \right\| + c_3 \quad \forall \eta \in F_{\text{char}}(\hat{x}, \hat{\psi}) \\ &\quad \forall (\hat{x}, \hat{\psi}) \in K \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.26)$$

Точнее, если c_2, c_3 удовлетворяют (1.26) и $c_1 > \frac{1}{2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \right)$, то справедливо и (1.25).

Замечание 1.2. Пусть справедливо Предположение 1.1. Из компактности множества $P \subset \mathbb{R}^q$ и глобальной липшицевости функции (1.4) по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно по $u \in P$ следует, что для фиксированной точки $x' \in \mathbb{R}^n$

$$\exists c_4(x') > 0 \quad \text{такое, что} \quad \left\| \tilde{f}(x', \bar{u}) \right\| \leq c_4(x') \quad \forall \bar{u} \in P$$

(здесь $c_4(x')$ зависит от x' , но не от $\bar{u}$),

$\exists c_5 = \text{const} > 0$ такое, что

$$\left\| \tilde{f}(x, \bar{u}) - \tilde{f}(x', \bar{u}) \right\| \leq c_5 \|x - x'\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \bar{u} \in P$$

(здесь c_5 не зависит ни от x' , ни от x , ни от $\bar{u}$), а потому

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}(x, \bar{u}) \right\| &\leq c_4(x') + c_5 \|x - x'\| \leq \\ &\leq c_4(x') + c_5 \|x'\| + c_5 \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \bar{u} \in P, \end{aligned}$$

т. е.

$$||\xi|| \leq c_4(x') + c_5||x'|| + c_5||x|| \quad \forall \xi \in F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.27)$$

Замечание 1.3. Теперь допустим, что выполнено Предположение 1.1 и при всех $x \in K$ множество $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ не только компактно (компактность отображения $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ обеспечивается пунктами 1–3 Предположения 1.1), но и выпукло (тогда $F(x)$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$). Убедимся в том, что для подсистемы (1.22) с левой частью $\frac{d\hat{x}}{d\tau}$ справедливо условие подлинейного роста. В самом деле, график $\text{graph } F \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ замкнут, и при каждом $(x, \psi) \in \mathbb{R}^{2n}$ вектор $f^*(\text{proj}_K x, \psi)$ принадлежит выпуклому компакт $F(x)$, вследствие чего ортогональная проекция множества $F_{\text{char}}(x, \psi)$ на первые n координат содержится в $F(x)$ (в силу самой процедуры определения многозначного отображения $F_{\text{char}} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ по правой части системы (1.22)). Поэтому из (1.27) получаем

$$||\xi|| \leq c_4(x') + c_5||x'|| + c_5||x|| \quad \forall \xi \in F_{\text{char}}(x, \psi) \quad \forall (x, \psi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, в принятых допущениях при проверке достаточного условия (1.25) продолжимости решений системы (1.22) можно исследовать лишь подсистему (1.22) с левой частью $\frac{d\hat{\psi}}{d\tau}$.

Замечание 1.4. Пусть выполнено Предположение 1.1. Зафиксируем произвольные $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > \theta_1$, $u(\cdot) \in \mathcal{L}_{\infty}([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}^q)$, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi^1 \in \mathbb{R}^n$. Ранее было показано, что существуют единственные решения $x_{\text{forw}} : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $x_{\text{inv}} : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задач Коши (1.5) и (1.6) соответственно. Тогда на всем временном отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ существуют единственные решения сопряженных систем (в прямом и обратном времени)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, \text{proj}_P u(t)), \\ \frac{d\psi}{dt} = - \left(D_y \{f(y, v)\} \Big|_{y = \text{proj}_K x, v = \text{proj}_P u(t)} \right)^{\top} \cdot \psi, \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -\tilde{f}(x, \text{proj}_P u(\tau)), \\ \frac{d\psi}{d\tau} = (D_y\{f(y, v)\} \big|_{y = \text{proj}_K x, v = \text{proj}_P u(\tau)})^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (1.29)$$

удовлетворяющие равенствам $(x, \psi)|_{t=\theta_1} = (x^1, \psi^1)$ и $(x, \psi)|_{\tau=\theta_1} = (x^1, \psi^1)$ соответственно. Чтобы в этом убедиться, достаточно применить [148, Глава 6, §1, Теорема 1] к линейным системам

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -(D_x f(\text{proj}_K x_{\text{forw}}(t), \text{proj}_P u(t)))^\top \cdot \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= (D_x f(\text{proj}_K x_{\text{inv}}(\tau), \text{proj}_P u(\tau)))^\top \cdot \psi \end{aligned}$$

с учетом пунктов 3,4 Предположения 1.1. Ввиду произвольности выбора чисел θ_1, θ_2 , подчиненных неравенству $\theta_1 < \theta_2$, указанные решения сопряженных систем (в прямом и обратном времени) при любых $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi^1 \in \mathbb{R}^n$ продолжимы на целую временную прямую $(-\infty, +\infty)$.

Определение 1.1. Пусть $x' \in G$, $(\hat{x}(\cdot), \hat{\psi}(\cdot)) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — решение задачи Коши для системы (1.22) с начальным условием

$$\hat{x}|_{\tau=0} = x', \quad \hat{\psi}|_{\tau=0} = -\nabla\Phi(x') \quad (1.30)$$

(см. пункт 4 Предположения 1.3), $\hat{\theta}$ — первый момент достижения кривой $\{(\hat{x}(\tau), \tau) : \tau \geq 0\}$ множества

$$(\partial G \times [0, T)) \cup (\overline{G} \times \{T\})$$

(очевидно, что $\hat{\theta}$ определен однозначно, $\hat{\theta} \leq T$ и, кроме того, $\hat{\theta} > 0$, поскольку $x' \in G$ и $G \cap \partial G = \emptyset$ для открытой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$). Положим

$$\hat{J} := \begin{cases} [0, \hat{\theta}), & \hat{x}(\hat{\theta}) \in \partial G, \\ [0, \hat{\theta}] = [0, T], & \hat{x}(\hat{\theta}) \in G. \end{cases}$$

Сужение функции $(\hat{x}(\cdot), \hat{\psi}(\cdot))$ на временной промежуток $\tau \in \hat{J}$ будем называть характеристикой задачи (1.21) [31–36]. Сужение функции $\hat{x}(\cdot)$ на временной промежуток $\tau \in \hat{J}$ будем называть фазовой компонентой характеристики задачи (1.21).

На основании результатов, изложенных, например, в [36], мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 1.2. *В Предположениях 1.1–1.3 имеет место следующее:*

- 1) *существует единственное вязкостное решение (см., например, [4, Разделы II.4, II.8]) задачи Коши (1.21), которое совпадает с функцией цены*

$$S(x', \tau') = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([T-\tau', T], P)} \Phi(x(T; T - \tau', x', (1.1), u(\cdot))), \quad (1.31)$$

заданной и непрерывной на множестве $(x', \tau') \in G \times [0, T]$;

- 2) *при любом $\tau \in (0, T)$ функция $S(\cdot, \tau) : G \rightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева;*
 3) *значение $S(x', \tau')$ в точке $(x', \tau') \in G \times [0, T]$ представляет собой минимум $\Phi(x'')$ по всем таким $x'' \in G$, для которых найдется хотя бы одна характеристика*

$$\left(\hat{x}(\cdot), \hat{\psi}(\cdot) \right) : \hat{J} \rightarrow G \times \mathbb{R}^n \quad (1.32)$$

задачи (1.21), удовлетворяющая равенствам $\hat{x}(\tau') = x'$, $\hat{x}(0) = x''$;

- 4) *для каждой точки $(x', \tau') \in G \times (0, T)$ супердифференциал*

$$D^+S(x', \tau') := \left\{ (a_x, a_\tau) : a_x \in \mathbb{R}^n, a_\tau \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. \overline{\lim}_{(x, \tau) \rightarrow (x', \tau')} \frac{S(x, \tau) - S(x', \tau') - \langle a_x, x - x' \rangle - a_\tau(\tau - \tau')}{\|x - x'\| + |\tau - \tau'|} \leq 0 \right\}$$

непуст и представляет собой выпуклую оболочку всех таких векторов

$$\left(-\hat{\psi}(\tau'), \mathcal{H} \left(\hat{x}(\tau'), \hat{\psi}(\tau') \right) \right),$$

что (1.32) — какая-нибудь характеристика задачи (1.21), подчиненная равенствам $\hat{x}(\tau') = x'$, $S(x', \tau') = \Phi(\hat{x}(0))$.

Из [149, Глава 2, Следствие из Предложения 2.2.4 §2.2 и Теорема 2.5.1 §2.5] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.3. Пусть выполнены Предположения 1.1–1.3, $T_- \leq 0$, $T_+ \geq T$ — фиксированные числа, $\tilde{S} : G \times [T_-, T_+] \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, совпадающая с функцией цены S в $G \times [0, T]$, $(x', \tau') \in G \times (T_-, T_+)$. Если $\tilde{S}$ локально липшицева в $G \times (T_-, T_+)$, то имеет место следующее:

- $\tilde{S}$ дифференцируема почти всюду в $G \times (T_-, T_+)$ относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}$ (по теореме Радемахера);
- каково бы ни было множество $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ нулевой меры Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}$, дифференциал Кларка $D^{\text{Cl}}\tilde{S}(x', \tau')$ в точке (x', τ') представляет собой выпуклую оболочку пределов всех таких сходящихся последовательностей $\left\{ \nabla_{(x, \tau)} \tilde{S}(x^i, \tau^i) \right\}_{i=1}^{\infty}$, что $\{(x^i, \tau^i)\}_{i=1}^{\infty}$ — сходящаяся к (x', τ') последовательность точек из $(G \times (T_-, T_+)) \setminus M$, в каждой из которых $\tilde{S}$ дифференцируема.

Пусть теперь $B_{\varepsilon}^{n+1}(x', \tau') \subseteq G \times (T_-, T_+)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в точке (x', τ') радиуса длины $\varepsilon > 0$ и $\tilde{S}$ липшицева в $B_{\varepsilon}^{n+1}(x', \tau')$. Тогда для того чтобы функция $\tilde{S}$ была непрерывно дифференцируемой в $B_{\varepsilon}^{n+1}(x', \tau')$, необходимо и достаточно, чтобы ее дифференциал Кларка состоял из единственного элемента всюду в $B_{\varepsilon}^{n+1}(x', \tau')$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, которых мы будем использовать в дальнейшем.

Утверждение 1.4. Допустим, что:

- выполнены Предположения 1.1, 1.2;
- функция $f : K \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$ локально липшицева;
- Z — замыкание некоторой выпуклой открытой области в $\mathbb{R}^n$, являющейся его внутренностью $\text{int } Z$, $u_Z^* : Z \rightarrow P$ — локально липшицевая функция,

$$u^*(x) := u_Z^*(\text{proj}_Z x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.33)$$

Тогда задачи Коши для систем

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, u^*(x)), \quad (1.34)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\tilde{f}(x, u^*(x)) \quad (1.35)$$

с начальными условиями $x|_{t=0} = x^0$ и $x|_{\tau=0} = x^0$ соответственно имеют при каждом $x^0 \in \mathbb{R}^n$ единственные классические решения на всей временной прямой $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяют условиям теоремы о непрерывности решений по начальным данным (см., например, [153, Глава V, §1]).

Доказательство. Достаточно, учитывая вытекающую из условий данного утверждения локальную липшицевость правых частей систем (1.34), (1.35) в $\mathbb{R}^n$ и неравенство (1.27), воспользоваться результатами, например, из [153, §§3,4 Главы II и §1 Главы V]. $\square$

Утверждение 1.5. Пусть справедливы условия Утверждения 1.4, зафиксировано число $T_+ \geq 0$ и при любом $x^0 \in \mathbb{R}^n$ через $\theta^*(x^0)$ обозначен первый момент достижения множества

$$C := (\text{ext } G' \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^n \times [T_+, +\infty)) \quad (1.36)$$

(G' определяется в пункте 5 Предположения 1.2) выходящей из позиции $(x, \tau) = (x^0, 0)$ интегральной кривой системы (1.35). Тогда $\theta^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, T_+]$ — локально липшицевая однозначная функция. Кроме того, очевидно, что

$$\theta^*(x^0) > 0 \quad \forall x^0 \in G.$$

Ключевую роль в доказательстве Утверждения 1.5, приведенном в Приложении В, играют пункты 1,5 Предположения 1.2.

Отметим, что в Приложении Б сформулированы ряд вспомогательных определений, которыми мы будем далее оперировать, и классическая теорема о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

В условиях Утверждения 1.4 при любых $(x^0, \tau^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau' \in \mathbb{R}$ обозначим значение в момент $\tau = \tau'$ решения системы (1.35), удовлетворяющего равенству $x|_{\tau=\tau^0} = x^0$, через $x^*(\tau'; \tau^0, x^0)$.

Два следующих утверждения доказаны в Приложении В.

Утверждение 1.6. Пусть справедливы условия Утверждения 1.4, $T_- < 0$ и $T_+ > 0$ — фиксированные числа, $\sigma \subset G \times (T_-, T_+)$ — связная непрерывная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$ и функция $\theta^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, T_+]$ определяется для выбранного T_+ так же, как и в формулировке Утверждения 1.5. Тогда множество

$$M := \{(x^*(\tau; \tau^0, x^0), \tau) : (x^0, \tau^0) \in \sigma, \tau \in (T_-, \tau^0 + \theta^*(x^0))\} \quad (1.37)$$

является открытой областью в $\mathbb{R}^{n+1}$. Более того, для существования и единственности гладкого решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S^*}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S^*, f(x, u^*(x)) \rangle, & (x, \tau) \in M, \\ S^*(x, \tau) = S_\sigma^*(x, \tau), & (x, \tau) \in \sigma, \end{cases} \quad (1.38)$$

заданного в M , достаточно выполнения следующих требований:

- σ — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$;
- функция $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, \tau) \longrightarrow u^*(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой открытой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащей M (это выполнено, например, если функция $u_Z^* : Z \rightarrow P$ непрерывно дифференцируема и $M \subseteq \text{int } Z \times \mathbb{R}$);
- при любых $(x^0, \tau^0) \in \sigma$ интегральная кривая $(x^*(\tau; \tau^0, x^0), \tau)$, $\tau \in (T_-, \tau^0 + \theta^*(x^0))$, не имеет других точек пересечения с σ , кроме (x^0, τ^0) ;
- для каждой точки $(x, \tau) \in \sigma$ вектор $(-f(x, u^*(x)), 1)$ не является касательным к σ в (x, τ) ;

- $S_\sigma^* : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Утверждение 1.7. Пусть справедливы условия Утверждения 1.4, $T_- < 0$ и $T_+ > 0$ — фиксированные числа, $\sigma_0 \subset G$ — связная непрерывная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^n$ и функция $\theta^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, T_+]$ определяется для выбранного T_+ так же, как и в формулировке Утверждения 1.5. Тогда имеет место следующее:

1) множество

$$\sigma^* := \{ (x^*(\tau; 0, x^0), \tau) : x^0 \in \sigma_0, \tau \in (T_-, \theta^*(x^0)) \} \quad (1.39)$$

является связной непрерывной гиперповерхностью без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$;

2) если σ_0 делит G на две части, которые при исключении из них σ_0 становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^n$, то σ^* делит $G \times (T_-, T_+)$ на две части, которые при исключении из них σ^* становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^{n+1}$;

3) если σ_0 — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^n$ и функция $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, \tau) \rightarrow u^*(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой открытой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащей σ^* , то σ^* — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Далее рассматривается лишь достаточно узкий класс систем с одномерным линейно входящим управлением.

Предположение 1.4. Предположим, что

$$\begin{aligned} P &= [u_1, u_2] \subset \mathbb{R}, \quad u_i = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad u_1 < u_2, \\ f(x, u) &= f^1(x) + u \cdot f^2(x) \quad \forall (x, u) \in K \times P, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$f^j : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, — непрерывно дифференцируемые функции (все предыдущие предположения считаются сохраняющими силу).

С учетом Предположения 1.4 имеем

$$H(x, \psi, u) = \langle \psi, f^1(x) \rangle + \langle \psi, f^2(x) \rangle u, \quad (1.41)$$

а задачи Коши для характеристической системы в прямом времени и для уравнения ГЯБ в обратном времени принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f^1(x) + u(t) \cdot f^2(x), \\ \frac{d\psi}{dt} = -(D_x f^1(x))^\top \cdot \psi - u(t) \cdot (D_x f^2(x))^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (1.42)$$

$$x|_{t=T} = x', \quad \psi|_{t=T} = -\nabla \Phi(x'), \quad x' \in G, \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S, f^1(x) \rangle + \min_{u_1 \leq \bar{u} \leq u_2} \{ \langle \nabla_x S, f^2(x) \rangle \bar{u} \}, \\ (x, \tau) \in G \times [0, T], \\ S(x, 0) = \Phi(x), \quad x \in G. \end{cases} \quad (1.44)$$

Запишем (1.42), (1.43) в обратном времени:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -f^1(x) - u(T - \tau) \cdot f^2(x), \\ \frac{d\psi}{d\tau} = (D_x f^1(x))^\top \cdot \psi + u(T - \tau) \cdot (D_x f^2(x))^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (1.45)$$

$$x|_{\tau=0} = x', \quad \psi|_{\tau=0} = -\nabla \Phi(x'), \quad x' \in G. \quad (1.46)$$

1.2. Описание метода

Зафиксируем числа $T_- < 0$, $T_+ > T$.

Определение 1.2. Пусть при $i = 1, 2$ функция $S^i : G \times (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$ представляет собой гладкое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S^i}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S^i, f^1(x) \rangle + \langle \nabla_x S^i, f^2(x) \rangle u_i, & (x, \tau) \in G \times (T_-, T_+), \\ S^i(x, 0) = \Phi(x), & x \in G, \end{cases} \quad (1.47)$$

которое существует и единственно в принятых предположениях на основании Утверждения 1.6.

Мы полагаем, что при $i = 1, 2$ функция S^i находится аналитически посредством n первых интегралов расширенной системы (1.1), $\frac{d\tau}{dt} = -1$ с $u \equiv u_i$.

Определение 1.3. Положим

$$\begin{aligned} D^1 &:= \text{cl} \left\{ (x', \tau') \in G \times (T_-, T_+) : \langle \nabla_x S^1(x', \tau'), f^2(x') \rangle > 0 \right\} \cap \\ &\quad \cap (G \times (T_-, T_+)), \\ D^2 &:= \text{cl} \left\{ (x', \tau') \in G \times (T_-, T_+) : \langle \nabla_x S^2(x', \tau'), f^2(x') \rangle < 0 \right\} \cap \\ &\quad \cap (G \times (T_-, T_+)), \\ \gamma^i &:= \left\{ (x', \tau') \in G \times (T_-, T_+) : \langle \nabla_x S^i(x', \tau'), f^2(x') \rangle = 0 \right\} \cap \\ &\quad \cap D^i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где cl обозначает операцию замыкания, и

$$\begin{aligned} D_\tau^i &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in D^i\}, \quad \gamma_\tau^i := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in \gamma^i\} \\ &\quad \forall \tau \in (T_-, T_+), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Полученные аналитически функции S^i , $i = 1, 2$, дают аналитические представления для множеств (1.48), (1.49).

Ясно, что при $i = 1, 2$ функция S^i является решением уравнения ГЯБ из (1.44) на множестве D^i .

Следующая теорема очевидна.

Теорема 1.1. Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.4 и зафиксирован номер $i \in \{1, 2\}$. Если $D^i \supseteq G \times (0, T)$, то $S \equiv S^i$ и $u_{\text{opt}} \equiv u_i$ всюду в $G \times [0, T]$.

Пример 1.1. Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -mh, \\ \frac{dh}{dt} = -\mu h + u(t), \quad \mu = \text{const} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \\ \Phi(m(T)) := m^2(T) \longrightarrow \inf. \end{cases}$$

Выпишем соответствующую задачу Коши для уравнения ГЯБ:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \tau} = -mh \frac{\partial S}{\partial m} - \mu h \frac{\partial S}{\partial h} + \min_{0 \leq u \leq R} \left\{ \frac{\partial S}{\partial h} u \right\}, \\ S(m, h, 0) = m^2. \end{cases}$$

Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4,5 Предположения 1.2, возьмем

$$G := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0, \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad K := \bar{G},$$

$$\underline{h} < 0, \quad \bar{h} > \frac{R}{\mu},$$

$$G' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad G'' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0\}.$$

Действительно, если $m(t') \neq 0$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $m(t) \neq 0$ и $\text{sign} m(t) \equiv \text{const}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$, а если $0 < h(t') < \frac{R}{\mu}$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $0 < h(t) < \frac{R}{\mu}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$.

Имеем

$$\begin{aligned} S^1(m, h, \tau) &= m^2 \exp \left\{ -\frac{2}{\mu} h (1 - e^{-\mu\tau}) \right\}, \\ S^2(m, h, \tau) &= m^2 \exp \left\{ -\frac{2}{\mu} \left(h - \frac{R}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu\tau}) - \frac{2R}{\mu} \tau \right\}, \\ \frac{\partial S^1}{\partial h}(m, h, \tau) &\leq 0 \quad \forall \tau \geq 0, \\ \frac{\partial S^2}{\partial h}(m, h, \tau) &< 0 \quad \text{при всех } m \neq 0, \tau > 0. \end{aligned}$$

Стало быть, $S \equiv S^2$ и $u_{\text{opt}} \equiv R$ всюду в $G \times [0, T]$.

Данная ситуация сохраняется и в общем случае системы [44–46]

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = q(m) - \alpha m f(h), \\ \frac{dh}{dt} = -\mu h + u(t), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \\ \Phi(m(T)) := m^2(T) \longrightarrow \inf, \end{cases} \quad (1.50)$$

где

$$q(m) := rm - \frac{r|m|^{1+\beta}}{\theta} \quad (1.51)$$

или

$$q(m) := \begin{cases} rm(\beta - \ln |m|), & m \neq 0, \\ 0, & m = 0, \end{cases} \quad (1.52)$$

r, β, θ — положительные константы, функция $f : [\underline{h}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $\underline{h}$ — отрицательная константа, $f(0) = 0$ и $f'(h) > 0$ для любых $h \geq \underline{h}$ (монотонно возрастающая функция терапии). Система (1.50) описывает модель терапии однородной твердой несосудистой опухоли. Здесь $m(t)$ — количество опухолевых клеток в момент времени t , $h(t)$ — концентрация лекарства в момент t , функция $q(\cdot)$ задает логистический закон (в случае (1.51)) либо закон Гомперца (в случае (1.52)) для роста опухоли. Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4,5 Предположения 1.2, возьмем

$$\begin{aligned} G &:= \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : \underline{m} < m < \overline{m}, \underline{h} < h < \overline{h}\}, \quad K := \overline{G}, \\ G' &:= \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m < \overline{m}, \underline{h} < h < \overline{h}\} \quad \text{и} \\ G'' &:= \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > \underline{m}\} \quad \text{в случае (1.51),} \\ G' &:= G \quad \text{и} \quad G'' := \emptyset \quad \text{в случае (1.52),} \end{aligned} \quad (1.53)$$

где

$$\underline{h} < 0, \quad \overline{h} > \frac{R}{\mu},$$

для (1.51) $\underline{m} = 0$ и

$$\begin{cases} \overline{m} > 0, & 1 - \frac{\alpha}{r}f(\underline{h}) \leq 0, \\ \overline{m} > \left(\theta \left(1 - \frac{\alpha}{r}f(\underline{h})\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}, & 1 - \frac{\alpha}{r}f(\underline{h}) > 0, \end{cases} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \text{для (1.52)} \quad 0 < \underline{m} < \exp\left(\beta - \frac{\alpha}{r}f(\overline{h})\right) \quad \text{и} \\ \overline{m} > \exp\left(\beta - \frac{\alpha}{r}f(\underline{h})\right). \end{aligned}$$

В [44–46] доказано, что в этой задаче синтез оптимального управления тривиален: $u_{\text{opt}} \equiv R$ всюду в $G \times [0, T]$. □

Следующее предположение является ключевым.

Предположение 1.5. *Предположим, что*

$$\gamma_0^1 = \gamma_0^2 := \gamma_0. \quad (1.55)$$

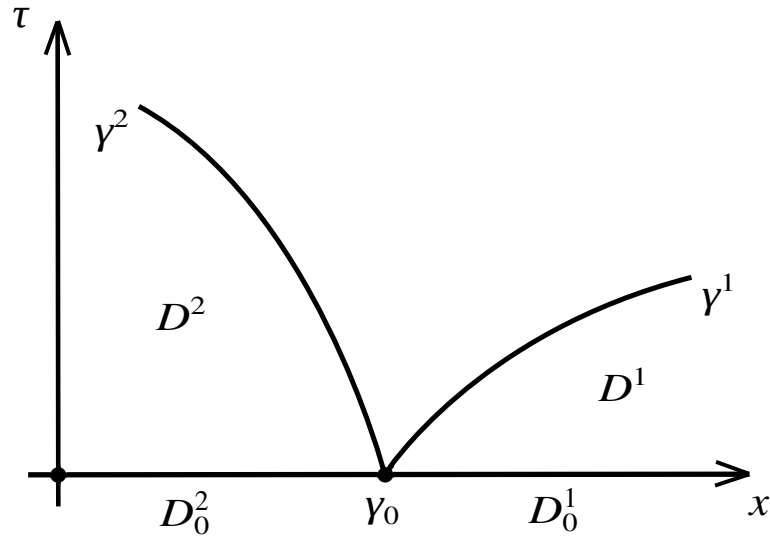


Рис. 1.1. К Предположению 1.5.

Выведем достаточные условия для выполнения равенства (1.55).

Обозначим через G_1 множество всех таких позиций $x(T) = x' \in G$, что
либо

$$\langle \psi(T), f^2(x(T)) \rangle = -\langle \nabla \Phi(x'), f^2(x') \rangle < 0,$$

либо справедливо следующее:

- 1) $\langle \psi(T), f^2(x(T)) \rangle = -\langle \nabla \Phi(x'), f^2(x') \rangle = 0$;
- 2) $k \in \mathbb{N}$ — фиксированное число;
- 3) $\chi_j^+ : G \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные положительные функции, $j = \overline{1, k}$;
- 4) $\chi_j : G \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j = \overline{1, k-1}$,
 $\chi_k : G \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция;
- 5) имеют место представления

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t), f^2(x(t)) \rangle \Big|_{(1.42), t=T} = \chi_1^+(x(T)) \cdot \chi_1(x(T)),$$

$$\frac{d}{dt} (\chi_j(x(t))) \Big|_{(1.42), t=T} = \chi_{j+1}^+(x(T)) \cdot \chi_{j+1}(x(T)), \quad j = \overline{1, k-1},$$

в правые части которых $u(\cdot)$ явно не входит;

$$6) \chi_j(x(T)) = 0, j = \overline{1, k-1};$$

$$7) (-1)^k \cdot \chi_k(x(T)) < 0.$$

Обозначим через G_2 множество всех таких позиций $x(T) = x' \in G$, что либо

$$\langle \psi(T), f^2(x(T)) \rangle = -\langle \nabla \Phi(x'), f^2(x') \rangle > 0,$$

либо справедливы пункты 1–6 из предыдущего абзаца с условием

$$(-1)^k \cdot \chi_k(x(T)) > 0$$

вместо пункта 7.

Очевидно, что при $x(T) \in G_1$ неравенство $\langle \psi(t), f^2(x(t)) \rangle < 0$ справедливо в некоторой левой полуокрестности точки $t = T$, а при $x(T) \in G_2$ в некоторой левой полуокрестности точки $t = T$ имеем $\langle \psi(t), f^2(x(t)) \rangle > 0$.

Определение 1.4. Пусть для $i = 1, 2$ и $x' \in G$ $\theta^i(x')$ — первый момент достижения множества (1.36) выходящей из позиции $(x, \tau) = (x', 0)$ интегральной кривой системы (1.8) с $u \equiv u_i$ (при этом $\theta^i : G \rightarrow (0, T_+]$ — локально липшицева однозначная функция согласно Утверждению 1.5), а

$$(x^i(\cdot; 0, x'), \psi^i(\cdot; 0, x')) : (T_-, \theta^i(x')) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (1.56)$$

есть решение (1.45), (1.46) с $u \equiv u_i$ (см. Замечание 1.4). Кроме того, пусть при $i = 1, 2$ для любых $(x', \psi', \tau') \in G \times \mathbb{R}^n \times (T_-, T_+)$

$$(x^i(\cdot; \tau', x'), \psi^i(\cdot; \tau', x', \psi')) : (T_-, \tau' + \theta^i(x')) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (1.57)$$

есть решение системы (1.45) с $u \equiv u_i$, подчиненное равенству $(x, \psi)|_{\tau=\tau'} = (x', \psi')$ ($x^i(\cdot; \tau', x')$ от ψ' не зависит).

Утверждение 1.8. Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.4, $\text{int} G_1$ и $\text{int} G_2$ — открытые области в $\mathbb{R}^n$ (G_1, G_2 — введенные выше множества),

$\gamma'_0 \subset G$ — связная непрерывная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, делящая область G на две части $G_1 \cup \gamma'_0 = (\text{int } G_1) \cup \gamma'_0$, $G_2 \cup \gamma'_0 = (\text{int } G_2) \cup \gamma'_0$. Тогда

$$D_0^i = G_i \cup \gamma'_0, \quad i = 1, 2, \quad \gamma_0^1 = \gamma_0^2 = \gamma'_0.$$

Доказательство. Достаточно для $i = 1, 2$ принять во внимание равенство

$$\nabla_x S^i(x^i(\tau; 0, x'), \tau) = -\psi^i(\tau; 0, x') \quad \forall \tau \in (0, \theta^i(x')) \quad \forall x' \in G. \quad (1.58)$$

Оно вытекает из отмеченного в пункте 4 Утверждения 1.2 представления супердифференциала функции цены (содержащего только ее градиент в точках ее дифференцируемости) через характеристики, если рассматривать множество ограничений на управление, состоящее из единственного элемента u_i , конечный момент времени T_+ вместо T и также учитывать Замечание 1.4, которое в таком случае гарантирует справедливость пункта 4 Предположения 1.3 (при этом будут иметь место единственность и гладкость решения задачи Коши (1.22), (1.23)). $\square$

Предположение 1.6. Предположим, что $\text{int } D_0^1, \text{int } D_0^2$ — открытые области в $\mathbb{R}^n$, $\text{int } D_0^i = D_0^i \setminus \gamma_0$, $i = 1, 2$, и γ_0 — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^n$, делящая G на две части D_0^1, D_0^2 .

Определение 1.5. Положим

$$\begin{aligned} \Omega^i &:= \{(x^i(\tau; 0, x'), \tau) : x' \in D_0^i, \tau \in (T_-, \theta^i(x'))\}, \\ \omega^i &:= \{(x^i(\tau; 0, x'), \tau) : x' \in \gamma_0, \tau \in (T_-, \theta^i(x'))\}, \\ \Omega_\tau^i &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in \Omega^i\} \quad \forall \tau \in (T_-, T_+), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Замечание 1.5. В силу Утверждения 1.6 и Предположения 1.6 множества

$$\begin{aligned} \Omega^i \setminus \omega^i &= \{(x^i(\tau; 0, x'), \tau) : x' \in \text{int } D_0^i, \tau \in (T_-, \theta^i(x'))\}, \\ &i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.60)$$

представляют собой открытые области в $\mathbb{R}^{n+1}$. Отметим, что при $i = 1, 2$ отображение

$$\begin{aligned} \{(x', \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : x' \in G, \tau \in (T_-, \theta^i(x'))\} \ni (x', \tau) \longrightarrow \\ \longrightarrow (x^i(\tau; 0, x'), \tau) \end{aligned} \quad (1.61)$$

есть диффеоморфизм множества своего задания, являющегося открытой областью в $\mathbb{R}^{n+1}$, на себя самого (см. также доказательство Утверждения 1.6 в Приложении В). Следовательно, внутренности $\text{int } \Omega^i$, $i = 1, 2$, совпадают соответственно с открытыми областями (1.60) в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Введем еще одно ограничение, заключающееся в том, что у допустимых процессов, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, отсутствуют участки особых режимов и имеется не более одного переключения.

Предположение 1.7. Предположим, что для любой характеристики (1.32) задачи (1.44) скалярное произведение $\langle \hat{\psi}(\tau), f^2(\hat{x}(\tau)) \rangle$ не равно нулю всюду ни на каком невырожденном интервале, содержащемся в $\hat{J}$, и имеет не более одного нуля на $\hat{J}$.

1.2.1. Случай, когда $\Omega_\tau^1 \supseteq D_\tau^1$ и $\Omega_\tau^2 \subseteq D_\tau^2 \setminus \gamma_\tau^2$ при всех $\tau \in (0, T]$

Предположение 1.8. Предположим, что

$$\Omega_\tau^1 \supseteq D_\tau^1 \text{ и } \Omega_\tau^2 \subseteq D_\tau^2 \setminus \gamma_\tau^2 \quad \forall \tau \in (0, T]. \quad (1.62)$$

Напомним, что $\Omega_0^i := D_0^i$, $i = 1, 2$.

Приведем утверждение для проверки включений (1.62), непосредственно вытекающее из представления (1.58).

Утверждение 1.9. В Предположениях 1.1–1.6 имеет место следующее:

1) если зафиксирован номер $i \in \{1, 2\}$ и

$$(-1)^i \cdot \langle \psi^i(\tau; 0, x'), f^2(x^i(\tau; 0, x')) \rangle > 0$$

$$\forall \tau \in \begin{cases} (0, \theta^i(x')), & \theta^i(x') < T, \\ (0, T], & \theta^i(x') \geq T, \end{cases} \quad \forall x' \in D_0^i,$$

то $\Omega_\tau^i \subseteq D_\tau^i \setminus \gamma_\tau^i$ для всех $\tau \in (0, T]$;

2) если

$$\langle \psi^1(\tau; 0, x'), f^2(x^1(\tau; 0, x')) \rangle > 0$$

$$\forall \tau \in \begin{cases} (0, \theta^1(x')), & \theta^1(x') < T, \\ (0, T], & \theta^1(x') \geq T, \end{cases} \quad \forall x' \in D_0^2,$$

то $\Omega_\tau^1 \supseteq D_\tau^1$ при любых $\tau \in [0, T]$;

3) если

$$\langle \psi^2(\tau; 0, x'), f^2(x^2(\tau; 0, x')) \rangle < 0$$

$$\forall \tau \in \begin{cases} (0, \theta^2(x')), & \theta^2(x') < T, \\ (0, T], & \theta^2(x') \geq T, \end{cases} \quad \forall x' \in D_0^1,$$

то $\Omega_\tau^2 \supseteq D_\tau^2$ для каждого $\tau \in [0, T]$.

Кроме того, очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1.10. Допустим, что:

- выполнены Предположения 1.1–1.6;
- зафиксирован номер $i \in \{1, 2\}$;
- γ^i — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, делящая $G \times (T_-, T_+)$ на две части D^i и $Q := ((G \times (T_-, T_+)) \setminus D^i) \cup \gamma^i$, которые при удалении из них γ^i становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^{n+1}$;

- если $(x, \tau) \in \{\gamma_s^i : s \in [0, T]\}$ и $n_{\gamma^i}(x, \tau)$ — какой-нибудь нормальный вектор к γ^i в точке (x, τ) , принадлежащий (ради определенности) нормальному конусу $N_{D^i}^{\text{Cl}}(x, \tau)$ (отметим, что всякий нормальный вектор к поверхности γ^i в произвольной ее точке (x', τ') принадлежит либо $N_{D^i}^{\text{Cl}}(x', \tau')$, либо $N_Q^{\text{Cl}}(x', \tau') = -N_{D^i}^{\text{Cl}}(x', \tau')$, а для $n_{\gamma^i}(x', \tau') \in N_{D^i}^{\text{Cl}}(x', \tau')$ мы имеем $N_{D^i}^{\text{Cl}}(x', \tau') = \{\alpha \cdot n_{\gamma^i}(x', \tau') : \alpha \geq 0\}$), то справедливо неравенство

$$\langle n_{\gamma^i}(x, \tau), (-f(x, u_i), 1) \rangle < 0.$$

Тогда $\Omega_\tau^i \subseteq D_\tau^i \setminus \gamma_\tau^i$ при всех $\tau \in (0, T]$.

В Предположениях 1.1–1.8 единственное переключение допустимого процесса, удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина, может произойти только на множестве γ^1 в расширенном фазовом пространстве переменных (x, τ) и только с $u = u_2$ на $u = u_1$ при увеличении прямого времени t (соответственно только с $u = u_1$ на $u = u_2$ при увеличении обратного времени τ), но не наоборот. Стало быть, в этом случае алгоритм синтеза оптимального управления может быть описан следующим образом.

Теорема 1.2. *Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.8, $x' \in G$, $t' \in [0, T)$. Обозначим*

$$J_i := \Phi(x(T; t', x', (1.1), u \equiv u_i)), \quad i = 1, 2. \quad (1.63)$$

Если интегральная кривая

$$(x(t; t', x', (1.1), u \equiv u_2), T - t), \quad t \in [t', T), \quad (1.64)$$

не пересекает γ^1 , то

$$S(x', T - t') = \min(J_1, J_2), \quad (1.65)$$

$$u_{\text{opt}}|_{x(t')=x'}(t) = \begin{cases} u_1 & \forall t \in [t', T], \quad J_1 < J_2, \\ u_2 & \forall t \in [t', T], \quad J_1 > J_2, \end{cases} \quad (1.66)$$

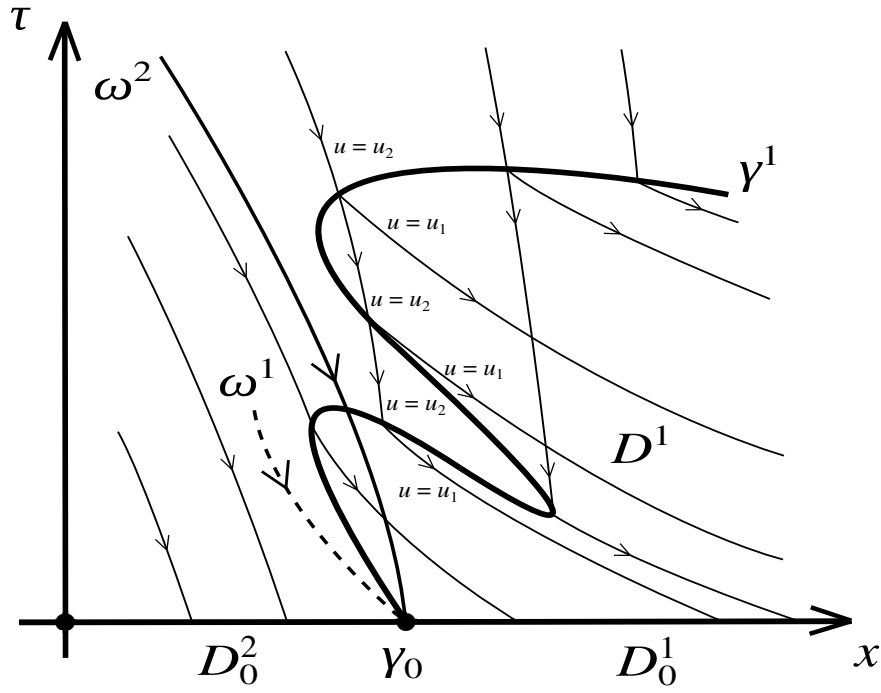


Рис. 1.2. К Теореме 1.2.

$$x_{\text{opt}} \big|_{x(t')=x'}(t) = \begin{cases} x(t; t', x', (1.1), u \equiv u_1) & \forall t \in [t', T], \quad J_1 < J_2, \\ x(t; t', x', (1.1), u \equiv u_2) & \forall t \in [t', T], \quad J_1 > J_2. \end{cases} \quad (1.67)$$

Пусть теперь интегральная кривая (1.64) пересекает γ^1 в моменты времени $t = \hat{t}_j \in [t', T)$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим управления

$$\hat{u}_j(t) := \begin{cases} u_2, & t \in [t', \hat{t}_j), \\ u_1, & t \in (\hat{t}_j, T], \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначим

$$\hat{J}_j := \Phi(x(T; t', x', (1.1), u(\cdot) = \hat{u}_j(\cdot))), \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.68)$$

Тогда

$$S(x', T - t') = \min(J_1, J_2, \hat{J}_1, \hat{J}_2, \dots, \hat{J}_m), \quad (1.69)$$

$$u_{\text{opt}} \big|_{x(t')=x'}(t) = \begin{cases} u_i & \forall t \in [t', T], \quad S(x', T - t') = J_i, \quad i \in \{1, 2\}, \\ \hat{u}_j(t) & \forall t \in [t', T], \\ S(x', T - t') = \hat{J}_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{cases} \quad (1.70)$$

не пересекает γ^2 , то $S(x', T - t')$, $u_{\text{opt}}|_{x(t')=x'}(\cdot)$, $x_{\text{opt}}|_{x(t')=x'}(\cdot)$ задаются соотношениями (1.65)–(1.67).

Пусть теперь интегральная кривая (1.73) пересекает γ^2 в моменты времени $t = \hat{t}_j \in [t', T)$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим управления

$$\hat{u}_j(t) := \begin{cases} u_1, & t \in [t', \hat{t}_j), \\ u_2, & t \in (\hat{t}_j, T], \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

Определим $\hat{J}_j$, $j = \overline{1, m}$, равенствами (1.68). Тогда соотношения (1.69)–(1.71) задают $S(x', T - t')$, $u_{\text{opt}}|_{x(t')=x'}(\cdot)$, $x_{\text{opt}}|_{x(t')=x'}(\cdot)$.

1.2.3. Случаи, в которых фазовые компоненты характеристик

задачи (1.44) с разными начальными позициями при $\tau = 0$
(т. е. при $t = T$) не пересекаются друг с другом

Приведем два результата, вытекающих из Теорем 1.2, 1.3 и описывающих ситуации, в которых фазовые компоненты характеристик задачи (1.44) с разными начальными позициями при $\tau = 0$ (т. е. при $t = T$) не пересекаются друг с другом и функция цены является гладкой всюду в $G \times (0, T)$.

Предположение 1.10. *Предположим, что:*

- 1) γ^1 — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, делящая $G \times (T_-, T_+)$ на две части D^1 и $Q^2 := ((G \times (T_-, T_+)) \setminus D^1) \cup \gamma^1$, которые при удалении из них γ^1 становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^{n+1}$;
- 2) если $(x, \tau) \in \gamma^1$ и $n_{\gamma^1}(x, \tau)$ — какой-нибудь нормальный вектор к γ^1 в точке (x, τ) , принадлежащий (ради определенности) нормальному конусу $N_{Q^2}^{\text{Cl}}(x, \tau)$, то справедливы неравенства

$$\langle n_{\gamma^1}(x, \tau), (-f(x, u_i), 1) \rangle < 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.74)$$

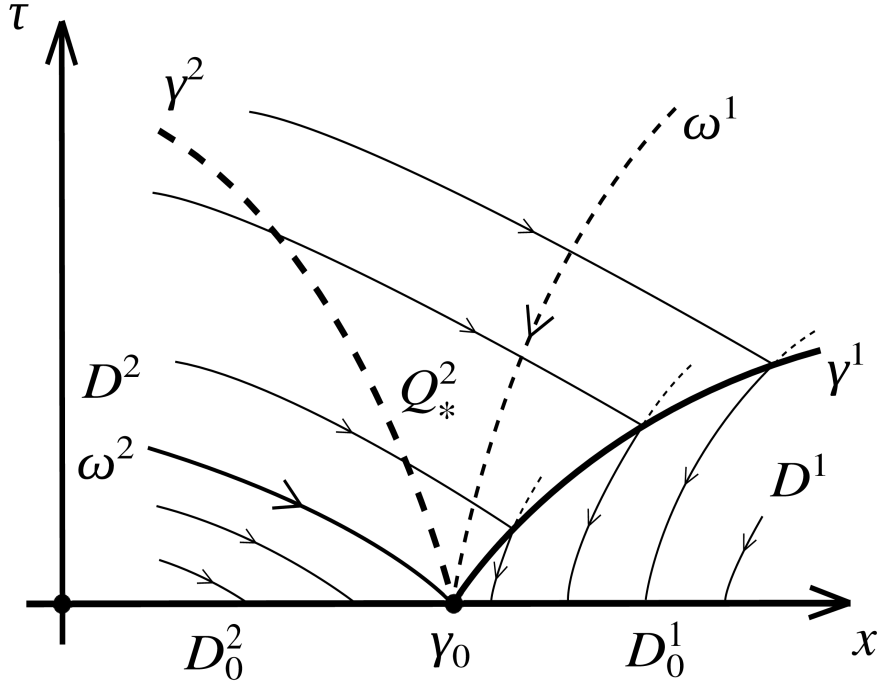


Рис. 1.4. К Теореме 1.4.

Обозначим

$$Q_\tau^2 := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in Q^2\} \quad \forall \tau \in (T_-, T_+). \quad (1.75)$$

Имеем $Q_0^2 = D_0^2 = \Omega_0^2$. Из условия (1.74) при $i = 2$ следует, что

$$\Omega_\tau^2 \subseteq Q_\tau^2 \setminus \gamma_\tau^1 \quad \forall \tau \in (0, T_+). \quad (1.76)$$

Теорема 1.4. Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.8, 1.10,

$$Q_*^2 := ((Q^2 \setminus \Omega^2) \cup \gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T_+)) \quad (1.77)$$

(см. Рисунок 1.4). Тогда существует единственное гладкое решение $S_*^2 : \tilde{Q}_*^2 \times (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S_*^2}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S_*^2, f^1(x) \rangle + \langle \nabla_x S_*^2, f^2(x) \rangle u_2, & (x, \tau) \in \tilde{Q}_*^2, \\ S_*^2(x, \tau) = S^1(x, \tau), & (x, \tau) \in \gamma^1, \end{cases} \quad (1.78)$$

где

$$\tilde{Q}_*^2 := \{(x^2(\tau; \tau', x'), \tau) : (x', \tau') \in \gamma^1, \tau \in (T_-, \tau' + \theta^2(x'))\} \quad (1.79)$$

есть содержащая множество Q_*^2 открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$, и

$$S(x, \tau) = \begin{cases} S^1(x, \tau), & (x, \tau) \in D^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ S^2(x, \tau), & (x, \tau) \in \Omega^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ S_*^2(x, \tau), & (x, \tau) \in Q_*^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \end{cases} \quad (1.80)$$

$$u_{\text{opt}}(x, T - \tau) = \begin{cases} u_1, & (x, \tau) \in D^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ u_2, & (x, \tau) \in Q^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]). \end{cases} \quad (1.81)$$

Теорема 1.4 доказана в Приложении В.

Мы разобрали случай выполнения условий Теоремы 1.2 с Предположением 1.10. Теперь разберем случай выполнения условий Теоремы 1.3 при следующем аналогичном дополнительном предположении.

Предположение 1.11. *Предположим, что:*

- 1) γ^2 — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, делящая $G \times (T_-, T_+)$ на две части D^2 и $Q^1 := ((G \times (T_-, T_+)) \setminus D^2) \cup \gamma^2$, которые при удалении из них γ^2 становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^{n+1}$;
- 2) если $(x, \tau) \in \gamma^2$ и $n_{\gamma^2}(x, \tau)$ — какой-нибудь нормальный вектор к γ^2 в точке (x, τ) , принадлежащий (ради определенности) нормальному конусу $N_{Q^1}^{\text{Cl}}(x, \tau)$, то справедливы неравенства

$$\langle n_{\gamma^2}(x, \tau), (-f(x, u_i), 1) \rangle < 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.82)$$

Обозначим

$$Q_\tau^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in Q^1\} \quad \forall \tau \in (T_-, T_+). \quad (1.83)$$

Имеем $Q_0^1 = D_0^1 = \Omega_0^1$. Из условия (1.82) при $i = 1$ следует, что

$$\Omega_\tau^1 \subseteq Q_\tau^1 \setminus \gamma_\tau^2 \quad \forall \tau \in (0, T_+). \quad (1.84)$$

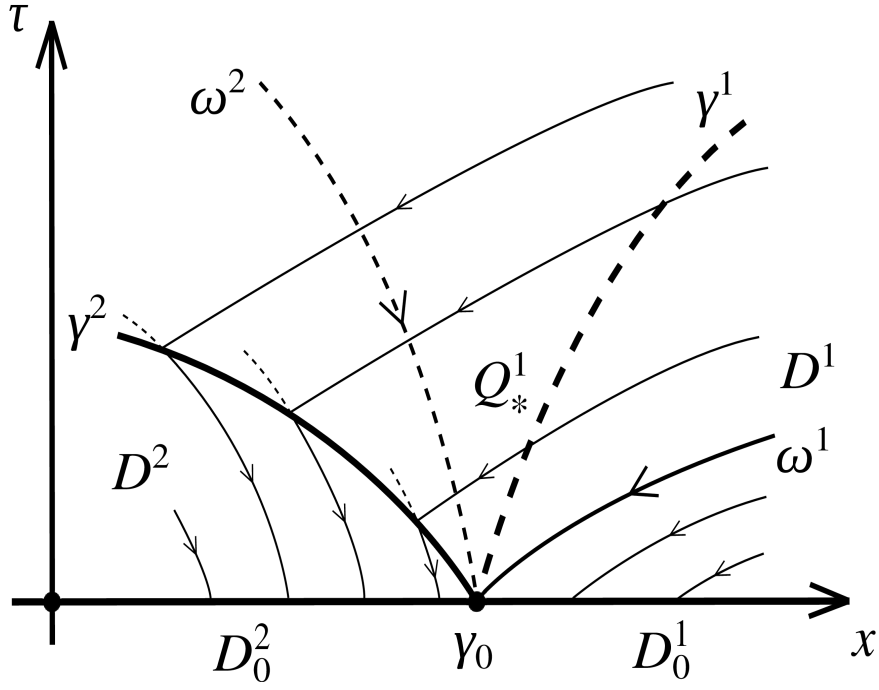


Рис. 1.5. К Теореме 1.5.

Сформулированная ниже теорема устанавливается аналогично Теореме 1.4 (доказанной в Приложении В).

Теорема 1.5. *Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.7, 1.9, 1.11,*

$$Q_*^1 := ((Q^1 \setminus \Omega^1) \cup \gamma^2 \cup \omega^1) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T_+)) \quad (1.85)$$

(см. Рисунок 1.5). Тогда существует единственное гладкое решение $S_*^1 : \tilde{Q}_*^1 \times (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S_*^1}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S_*^1, f^1(x) \rangle + \langle \nabla_x S_*^1, f^2(x) \rangle u_1, & (x, \tau) \in \tilde{Q}_*^1, \\ S_*^1(x, \tau) = S^2(x, \tau), & (x, \tau) \in \gamma^2, \end{cases} \quad (1.86)$$

где

$$\tilde{Q}_*^1 := \{(x^1(\tau; \tau', x'), \tau) : (x', \tau') \in \gamma^2, \tau \in (T_-, \tau' + \theta^1(x'))\} \quad (1.87)$$

есть содержащая множество Q_*^1 открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$, и

$$S(x, \tau) = \begin{cases} S^2(x, \tau), & (x, \tau) \in D^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ S^1(x, \tau), & (x, \tau) \in \Omega^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ S_*^1(x, \tau), & (x, \tau) \in Q_*^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \end{cases} \quad (1.88)$$

$$u_{\text{opt}}(x, T - \tau) = \begin{cases} u_2, & (x, \tau) \in D^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ u_1, & (x, \tau) \in Q^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]). \end{cases} \quad (1.89)$$

Наконец, сформулируем теорему о гладкости построенных в Теоремах 1.4, 1.5 функций цены; соответствующее доказательство дано в Приложении В.

Теорема 1.6. *Функции цены, построенные в Теоремах 1.4, 1.5, являются гладкими всюду в $G \times (0, T)$.*

Пример 1.2. Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -mh(2 - h), \\ \frac{dh}{dt} = -\mu h + u(t), \quad \mu = \text{const} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \quad \frac{R}{\mu} < 1, \\ \Phi(m(T)) := m(T) \longrightarrow \inf. \end{cases} \quad (1.90)$$

Если $m(t') \neq 0$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $m(t) \neq 0$ и $\text{sign } m(t) \equiv \text{const}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$.

Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4, 5 Предположения 1.2, положим

$$G := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0, \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad K := \bar{G},$$

$$\underline{h} < 0, \quad \bar{h} > 2,$$

$$G' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad G'' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0\}.$$

К данной задаче применимы Теоремы 1.5, 1.6 (см. Рисунок 1.6).

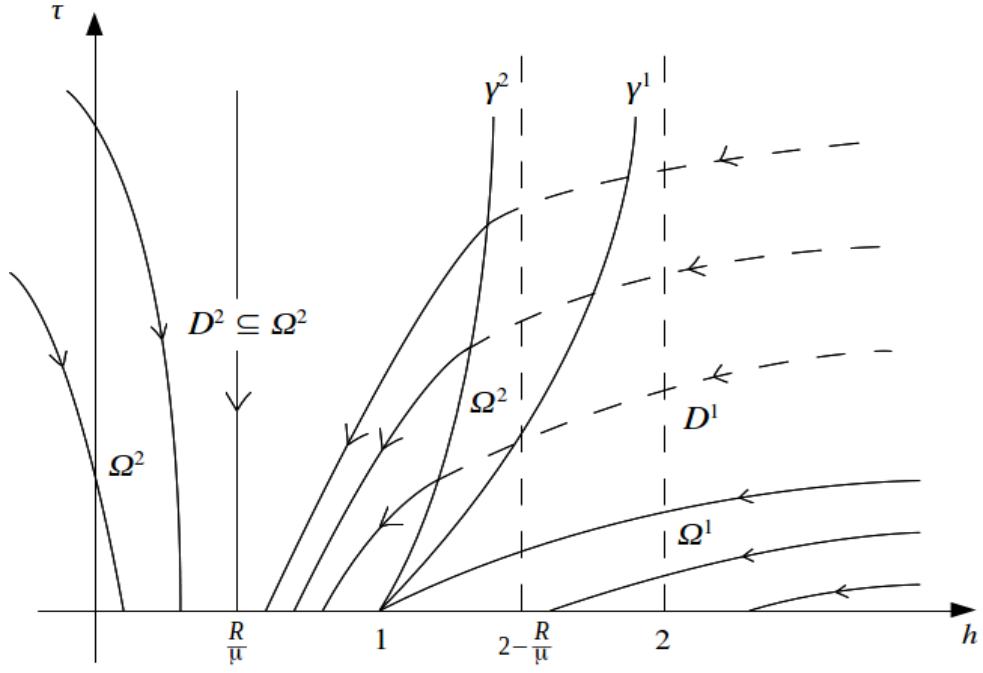


Рис. 1.6. К Примеру 1.2.

1.3. Математическая модель терапии лейкоза

Рассмотрим в качестве примера математическую модель терапии лейкоза с подчиненной закону Гомперца динамикой численностей здоровых и зараженных клеток, стандартным линейным фармакокинетическим уравнением и монотонно возрастающими функциями терапии [47–49, 71].

Пусть $N(t)$ — численность здоровых клеток в момент времени t , $L(t)$ — численность лейкозных клеток в момент t и $h(t)$ — количество химиотерапевтического агента в момент t . Следующая модель описывает динамику численностей клеток обоих типов:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = r_l L \ln \frac{L_a}{L} - \gamma_l L - f_l(h)L, \\ \frac{dN}{dt} = r_n N \ln \frac{N_a}{N} - \gamma_n N - cNL - f_n(h)N, \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \Phi_1(L(T), N(T)) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (1.91)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f_l(h) &:= \lambda_l f(h), \quad f_n(h) := \lambda_n f(h) \quad - \text{ функции терапии,} \\
f &: (-\kappa, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad - \text{ непрерывно дифференцируемая функция,} \\
f'(h) &> 0 \quad \forall h > -\kappa, \quad \text{например, } f(h) := \frac{h}{\kappa + h}, \\
\Phi_1(L, N) &:= \begin{cases} L^2, & N \geq \check{N}, \\ L^2 + \alpha (N - \check{N})^2, & N \leq \check{N}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.92}$$

$r_l, r_n, L_a, N_a, \gamma_l, \gamma_n, \gamma_h, c, \lambda_l, \lambda_n, \kappa, R, L_0, N_0, \alpha, \check{N}, T$ — положительные константы.

С помощью замены переменных

$$l := \ln \frac{L_a}{L}, \quad n := \ln \frac{N_a}{N} \tag{1.93}$$

мы приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = -r_l l + \gamma_l + f_l(h), \\ \frac{dn}{dt} = -r_n n + \gamma_n + c_a e^{-l} + f_n(h), \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \Phi(l(T), n(T)) \rightarrow \inf, \\ \Phi(l, n) := \begin{cases} L_a^2 e^{-2l}, & N_a e^{-n} \geq \check{N}, \\ L_a^2 e^{-2l} + \alpha (N_a e^{-n} - \check{N})^2, & N_a e^{-n} \leq \check{N}, \end{cases} \end{cases} \tag{1.94}$$

где $c_a := c L_a$.

Имеем

$$f'(h) = \frac{\kappa}{(\kappa + h)^2} > 0 \quad \forall h > -\kappa \quad \text{при} \quad f(h) = \frac{h}{\kappa + h}, \tag{1.95}$$

$$l(t) = l(T) e^{r_l(T-t)} - \frac{\gamma_l}{r_l} (e^{r_l(T-t)} - 1) - \int_t^T e^{r_l(s-t)} f_l(h(s)) ds, \tag{1.96}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= h_0 e^{-\gamma_h t} + \int_0^t e^{-\gamma_h(t-s)} u(s) ds = \\
&= e^{\gamma_h(T-t)} \left(h(T) - \int_t^T e^{-\gamma_h(T-s)} u(s) ds \right),
\end{aligned} \tag{1.97}$$

$$\begin{aligned}
H(l, n, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u) &:= \psi_1(-r_l l + \gamma_l + f_l(h)) + \\
&+ \psi_2(-r_n n + \gamma_n + c_a e^{-l} + f_n(h)) - \gamma_h h \psi_3 + \psi_3 u,
\end{aligned} \tag{1.98}$$

$$\mathcal{H}(l, n, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3) := \max_{0 \leq \bar{u} \leq R} H(l, n, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \bar{u}),$$

$$u_{\text{mp}}(t) = \begin{cases} 0, & \psi_3(t) < 0, \\ R, & \psi_3(t) > 0, \\ \text{неизвестно}, & \psi_3(t) = 0. \end{cases} \tag{1.99}$$

Сопряженная система принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= r_l \psi_1 + c_a e^{-l} \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= r_n \psi_2, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -\psi_1 f'_l(h) - \psi_2 f'_n(h) + \gamma_h \psi_3, \\ \psi_1(T) &= 2L_a^2 e^{-2l(T)} > 0, \\ \psi_2(T) &= \begin{cases} 0, & N_a e^{-n(T)} \geq \check{N}, \\ 2\alpha N_a e^{-n(T)} (N_a e^{-n(T)} - \check{N}), & N_a e^{-n(T)} \leq \check{N}, \end{cases} \\ \psi_3(T) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{1.100}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1(t) &:= \psi_1(t)e^{-r_l t} = \psi_1(0) + c_a \int_0^t e^{-r_l s - l(s)} \psi_2(s) ds, \\
\psi_2(t) &= \psi_2(0)e^{r_n t} = \psi_2(T)e^{-r_n(T-t)}, \\
\tilde{\psi}_1(t) &= \psi_1(0) + c_a \psi_2(0) \int_0^t e^{(r_n - r_l)s - l(s)} ds, \\
\tilde{\psi}_3(t) &:= \psi_3(t)e^{-\gamma_h t} = \int_t^T e^{-\gamma_h s} f'(h(s)) (\lambda_l \psi_1(s) + \lambda_n \psi_2(s)) ds.
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Существуют такие вещественные константы $\underline{l}, \bar{l}, \underline{n}, \bar{n}, \underline{h}, \bar{h}$, что открытый параллелепипед

$$G := G' := \{(l, n, h) \in \mathbb{R}^3 : \underline{l} < l < \bar{l}, \underline{n} < n < \bar{n}, \underline{h} < h < \bar{h}\} \tag{1.102}$$

и его замыкание $K := \bar{G}$ обеспечивают справедливость Предположений 1.1, 1.2.

В самом деле, эти постоянные могут быть найдены, исходя из неравенств

$$\begin{aligned}
\underline{h} &> -\kappa, \quad -\gamma_h \underline{h} > 0, \quad -\gamma_h \bar{h} + R < 0, \\
-r_l \underline{l} + \gamma_l + f_l(\underline{h}) &> 0, \quad -r_l \bar{l} + \gamma_l + f_l(\bar{h}) < 0, \\
-r_n \underline{n} + \gamma_n + c_a e^{-\bar{l}} + f_n(\underline{h}) &> 0, \quad -r_n \bar{n} + \gamma_n + c_a e^{-\underline{l}} + f_n(\bar{h}) < 0,
\end{aligned}$$

т. е. можно выбрать

$$\begin{aligned}
\underline{h} &\in (-\kappa, 0), \quad \bar{h} > \frac{R}{\gamma_h}, \quad \underline{l} < \frac{\gamma_l + f_l(\underline{h})}{r_l}, \quad \bar{l} > \frac{\gamma_l + f_l(\bar{h})}{r_l}, \\
\underline{n} &< \frac{\gamma_n + c_a e^{-\bar{l}} + f_n(\underline{h})}{r_n}, \quad \bar{n} > \frac{\gamma_n + c_a e^{-\underline{l}} + f_n(\bar{h})}{r_n}.
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
S^0 &:= S^1, \quad S^R := S^2, \quad D^0 := D^1, \quad D^R := D^2, \\
\gamma^0 &:= \gamma^1, \quad \gamma^R := \gamma^2, \quad \Omega^0 := \Omega^1, \quad \Omega^R := \Omega^2, \\
\omega^0 &:= \omega^1, \quad \omega^R := \omega^2.
\end{aligned} \tag{1.104}$$

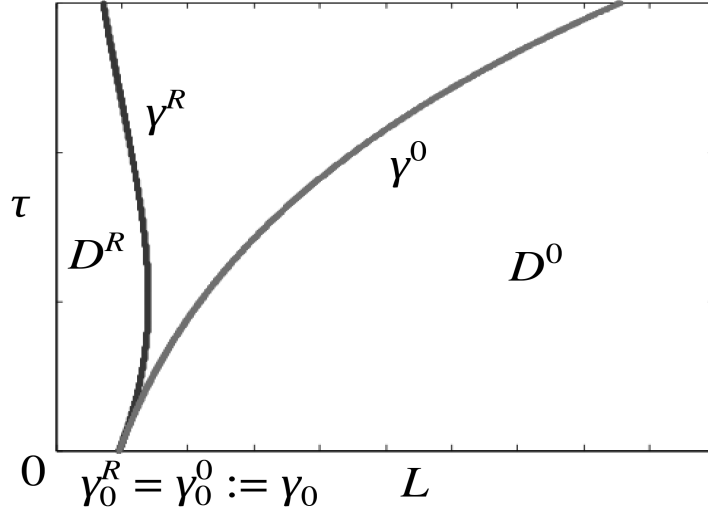


Рис. 1.7. Сечения множеств $D^0, \gamma^0, D^R, \gamma^R$, рассматриваемых в четырехмерном пространстве переменных (L, N, h, τ) , плоскостью, заданной уравнениями $N = N', \tau = \tau'$ при фиксированных N', τ' .

Имеем

$$\left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} = -f'(h(T)) (\lambda_l \psi_1(T) + \lambda_n \psi_2(T)).$$

Проанализируем знак

$$\text{sign} \left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} = -\text{sign} (\lambda_l \psi_1(T) + \lambda_n \psi_2(T)). \quad (1.105)$$

Положим

$$\nu(l, n) := -\lambda_l L_a^2 e^{-2l} - \lambda_n \alpha N_a e^{-n} (N_a e^{-n} - \check{N}). \quad (1.106)$$

Если $\nu(l(T), n(T)) < 0$, то $\lambda_l \psi_1(T) + \lambda_n \psi_2(T) > 0$ и, следовательно, $\left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} < 0$.

Если $\nu(l(T), n(T)) > 0$, то $\lambda_l \psi_1(T) + \lambda_n \psi_2(T) < 0$ и, следовательно, $\left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} > 0$.

На основании Утверждения 1.8 получаем следующий результат.

Утверждение 1.11. *Имеют место представления*

$$\begin{aligned} D_0^0 &= \{(l, n, h) \in G : \nu(l, n) \geq 0\}, \\ D_0^R &= \{(l, n, h) \in G : \nu(l, n) \leq 0\}, \\ \gamma_0^0 &= \gamma_0^R = \gamma_0 = \{(l, n, h) \in G : \nu(l, n) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Выпишем первые интегралы $\Psi_i^{R,0}$, $i = 1, 2, 3$, для расширенной системы (1.94), $\frac{d\tau}{dt} = -1$ с $u \equiv R$ и $u \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^0(h, \tau) &= h e^{-\gamma_h \tau}, \quad \Psi_1^R(h, \tau) = h e^{-\gamma_h \tau} + \frac{R}{\gamma_h} (1 - e^{-\gamma_h \tau}), \\
Z_1^0(h, \tau, s) &= \Psi_1^0(h, \tau) e^{\gamma_h s}, \\
Z_1^R(h, \tau, s) &= \Psi_1^R(h, \tau) e^{\gamma_h s} - \frac{R}{\gamma_h} (e^{\gamma_h s} - 1), \\
\Psi_2^{R,0}(l, h, \tau) &= l e^{-r_l \tau} + \frac{\gamma_l}{r_l} (1 - e^{-r_l \tau}) + \\
&\quad + \int_0^\tau e^{-r_l s} f_l \left(Z_1^{R,0}(h, \tau, s) \right) ds, \\
Z_2^{R,0}(l, h, \tau, s) &= \Psi_2^{R,0}(l, h, \tau) e^{r_l s} - \frac{\gamma_l}{r_l} (e^{r_l s} - 1) - \\
&\quad - e^{r_l s} \int_0^s e^{-r_l \xi} f_l \left(Z_1^{R,0}(h, \tau, \xi) \right) d\xi, \\
\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau) &= n e^{-r_n \tau} + \frac{\gamma_n}{r_n} (1 - e^{-r_n \tau}) + \\
&\quad + \int_0^\tau e^{-r_n s} f_n \left(Z_1^{R,0}(h, \tau, s) \right) ds + c_a \int_0^\tau e^{-r_n s} - Z_2^{R,0}(l, h, \tau, s) ds.
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Тогда

$$S^{R,0}(l, n, h, \tau) = \begin{cases} L_a^2 e^{-2\Psi_2^{R,0}(l, h, \tau)}, & N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} \geq \check{N}, \\ L_a^2 e^{-2\Psi_2^{R,0}(l, h, \tau)} + \alpha \left(N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} - \check{N} \right)^2, & \\ N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} \leq \check{N}, & \end{cases} \tag{1.109}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{(l, n, h)} S^{R,0}(l, n, h, \tau), (0, 0, 1)^\top \rangle &= \frac{\partial S^{R,0}}{\partial h}(l, n, h, \tau) = \\
= \begin{cases} -2L_a^2 e^{-2\Psi_2^{R,0}(l, h, \tau)} \cdot \left(\Psi_2^{R,0} \right)_h(l, h, \tau), & N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} \geq \check{N}, \\ -2 \left(L_a^2 e^{-2\Psi_2^{R,0}(l, h, \tau)} \cdot \left(\Psi_2^{R,0} \right)_h(l, h, \tau) + \alpha N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} \cdot \right. & \\ \left. \cdot \left(\Psi_3^{R,0} \right)_h(l, n, h, \tau) \cdot \left(N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} - \check{N} \right) \right), & \\ N_a e^{-\Psi_3^{R,0}(l, n, h, \tau)} \leq \check{N}, & \end{cases} \tag{1.110}
\end{aligned}$$

где частные производные $\left(\Psi_2^{R,0}\right)_h(l, h, \tau)$, $\left(\Psi_3^{R,0}\right)_h(l, n, h, \tau)$ могут быть вычислены с помощью соотношений (1.108).

Представления множеств $D^{R,0}, \gamma^{R,0}$ получаются из определений (1.48), (1.104) с использованием (1.108), (1.110).

Лемма 1.1. *Допустим, что выполнено одно из двух неравенств*

$$r_l - r_n < c_a e^{-\bar{l}} \frac{\lambda_l}{\lambda_n}, \quad (1.111)$$

$$r_l - r_n > c_a e^{-\bar{l}} \frac{\lambda_l}{\lambda_n}. \quad (1.112)$$

В случае (1.111) для любого допустимого управления $u(\cdot)$ функция

$$\delta(t) = e^{-r_l t} (\lambda_l \psi_1(t) + \lambda_n \psi_2(t)) = \lambda_l \tilde{\psi}_1(t) + \lambda_n \psi_2(0) e^{(r_n - r_l)t} \quad (1.113)$$

строго возрастает при $\psi_2(T) > 0$ и строго убывает при $\psi_2(T) < 0$. В случае (1.112) для любого допустимого управления $u(\cdot)$ функция (1.113) строго возрастает при $\psi_2(T) < 0$ и строго убывает при $\psi_2(T) > 0$. Если $\psi_2(T) = 0$, то $\delta(t) \equiv \lambda_l \psi_1(0) = \lambda_l \psi_1(T) e^{-r_l T} > 0$.

Доказательство. Если $\psi_2(T) = 0$, то $\psi_2(0) = 0$ и с учетом представлений (1.101) получаем $\tilde{\psi}_1(t) := \psi_1(t) e^{-r_l t} \equiv \psi_1(0)$, т. е. $\delta(t) \equiv \lambda_l \psi_1(0) = \lambda_l \psi_1(T) e^{-r_l T} > 0$. Остается рассмотреть производную

$$\delta'(t) = \psi_2(0) e^{(r_n - r_l)t} \left(\lambda_l c_a e^{-l(t)} + \lambda_n (r_n - r_l) \right)$$

при $\psi_2(0) = \psi_2(T) e^{-r_n T} \neq 0$. □

Утверждение 1.12. *В случае (1.111) или (1.112) функция $\psi_3(\cdot)$ обладает не более чем одним нулем на $[0, T)$, т. е. у всякого допустимого процесса, подчиненного принципу максимума Понтрягина, отсутствуют участки особых режимов и имеется не более одного переключения.*

Доказательство. Этот результат будет непосредственно следовать из Леммы 1.1, если принять во внимание положительность производной $f'(h)$ при всех

$h \in \mathbb{R}$, последнее равенство из (1.101) и тот факт, что между двумя нулями функции $\tilde{\psi}_3(\cdot)$ обязательно найдется нуль ее производной. $\square$

Схема доказательства Леммы 1.1 и Утверждения 1.12 заимствована из [48].

Таким образом, Предположение 1.7 справедливо в случае (1.111) или (1.112).

Следующее утверждение позволяет воспользоваться Теоремами 1.2, 1.3 для построения синтеза оптимального управления в случае (1.111) или (1.112).

Утверждение 1.13. *В случае (1.111)*

$$\Omega^0 \supseteq D^0, \quad \Omega_\tau^R \subseteq D_\tau^R \setminus \gamma_\tau^R \quad \forall \tau \in (0, T], \quad (1.114)$$

т. е. Предположение 1.8 выполнено и алгоритм синтеза оптимального управления для задачи (1.94) описывается Теоремой 1.2. В случае (1.112)

$$\Omega^R \supseteq D^R, \quad \Omega_\tau^0 \subseteq D_\tau^0 \setminus \gamma_\tau^0 \quad \forall \tau \in (0, T], \quad (1.115)$$

т. е. Предположение 1.9 выполнено и алгоритм синтеза оптимального управления для задачи (1.94) описывается Теоремой 1.3.

Доказательство. Заметим, что в силу соотношений (1.100), (1.106), (1.107), (1.113) имеет место следующее:

- если $(l(T), n(T), h(T)) \in D_0^0 \setminus \gamma_0$, то

$$\begin{aligned} \nu(l(T), n(T)) &> 0, \quad N_a e^{-n(T)} < \check{N}, \quad \psi_2(T) < 0, \\ \delta(T) &= e^{-r_1 T} (\lambda_l \psi_1(T) + \lambda_n \psi_2(T)) = -2e^{-r_1 T} g(l(T), n(T)) < 0; \end{aligned}$$

- если $(l(T), n(T), h(T)) \in \gamma_0$, то

$$\nu(l(T), n(T)) = 0, \quad N_a e^{-n(T)} < \check{N}, \quad \psi_2(T) < 0, \quad \delta(T) = 0;$$

- если $(l(T), n(T), h(T)) \in D_0^R \setminus \gamma_0$ и $N_a e^{-n(T)} < \check{N}$, то

$$\nu(l(T), n(T)) < 0, \quad \psi_2(T) < 0, \quad \delta(T) > 0;$$

- если $(l(T), n(T), h(T)) \in D_0^R \setminus \gamma_0$ и $N_a e^{-n(T)} \geq \check{N}$, то $\psi_2(T) = 0$ и, следовательно, $\delta(t) \equiv \lambda_l \psi_1(T) e^{-r_l T} > 0$ ввиду Леммы 1.1.

Пусть выполнено неравенство (1.111). Тогда по Лемме 1.1 для любого допустимого управления $u(\cdot)$ функция $\delta(\cdot)$ строго возрастает при $\psi_2(T) > 0$ и строго убывает при $\psi_2(T) < 0$. Стало быть, для фазовых траекторий системы (1.94) с произвольным допустимым управлением $u(\cdot)$ получаем, что

$$\text{при } (l(T), n(T), h(T)) \in D_0^R$$

$$\delta(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T) \text{ и, следовательно, } \psi_3(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T).$$

Отсюда на основании Утверждения 1.9 следуют включения (1.114).

Пусть теперь выполнено неравенство (1.112). Тогда по Лемме 1.1 для любого допустимого управления $u(\cdot)$ функция $\delta(\cdot)$ строго возрастает при $\psi_2(T) < 0$ и строго убывает при $\psi_2(T) > 0$. Стало быть, для фазовых траекторий системы (1.94) с произвольным допустимым управлением $u(\cdot)$ получаем, что

$$\text{при } (l(T), n(T), h(T)) \in D_0^0$$

$$\delta(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T) \text{ и, следовательно, } \psi_3(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T).$$

Отсюда на основании Утверждения 1.9 следуют включения (1.115). □

Чтобы можно было применить Теоремы 1.4–1.6, необходимо проверить справедливость Предположения 1.10 в случае (1.111) и Предположения 1.11 в случае (1.112). Однако ввиду громоздкости выражений (1.108), (1.110) эти вопросы остаются нерешенными.

Глава 2

Синтез оптимального управления в математической модели терапии злокачественной опухоли с учетом реакции иммунной системы

В данной главе с помощью методологии, изложенной в Главе 1, исследуется задача оптимального управления в математической модели, которая описывает динамику роста злокачественной опухоли вместе с соответствующей реакцией иммунной системы при воздействии химиотерапевтического агента и основана на модели Н. В. Степановой [50, 51]. Учитывается негативное влияние химиотерапевтического агента как на опухолевые, так и на иммунокомпетентные клетки; при этом, как и в математической модели терапии лейкоза из Главы 1, рассматриваются монотонно возрастающие функции терапии. Динамика самого химиотерапевтического агента задается стандартным линейным фармакокинетическим уравнением, в отличие от работ [51, 57–59], где оно отсутствует. Задача состоит в отыскании стратегии лечения, оптимальной с точки зрения минимизации объема опухоли и в то же время поддержания иммунной реакции не ниже фиксированного допустимого уровня настолько, насколько это возможно. Выведены достаточные условия для существования у оптимального управления не более одного и не более двух переключений при отсутствии участков особых режимов. Также получены аналитические представления для поверхностей в расширенном фазовом пространстве, на которых совершается последнее в прямом времени (т. е. первое в обратном времени) переключение. В конце главы приведены результаты численного моделирования.

2.1. Постановка задачи

Пусть x — объем опухоли, y — плотность иммунокомпетентных клеток и h — концентрация химиотерапевтического агента. Динамика роста злокачественной опухоли вместе с соответствующей реакцией иммунной системы при воздействии химиотерапевтического агента описывается системой

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_1 x \ln \frac{x_\infty}{x} - \rho_1 xy - f_1(h)x, \\ \frac{dy}{dt} = -(\mu_2 x(\beta x - 1) + \rho_2 + f_2(h))y + \alpha, \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь x_∞ — вместимость (потенциальная емкость) опухоли, μ_1 и α определяют скорости роста численностей опухолевых и иммунокомпетентных клеток соответственно, ρ_1 и ρ_2 — показатели их смертности, выражение $-\mu_2 x(\beta x - 1)y$ с положительными параметрами μ_2, β описывает взаимодействие между двумя типами клеток, т.е. зависимость иммунной реакции от численности опухолевых клеток. Видно, что по достижении порогового объема $\frac{1}{\beta}$ растущая опухоль начинает подавлять иммунную систему, причем по нелинейному закону. Негативное влияние химиотерапевтического агента на опухолевые и иммунокомпетентные клетки задается функциями терапии $f_1(h), f_2(h)$. В последнем дифференциальном уравнении γ_h можно интерпретировать как параметр диссипации химиотерапевтического агента, а $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([0, T], \mathbb{R})$ — управляющая функция, представляющая поступление препарата в организм пациента. Допустимые управления удовлетворяют ограничению

$$0 \leq u(t) \leq R \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.2)$$

с фиксированной положительной константой R .

Предположение 2.1. *Предположим, что*

$$\begin{aligned} f_1(h) &:= a_1 f_0(h), \quad f_2(h) := a_2 f_0(h), \\ f_0 : [\underline{h}, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \text{ — непрерывно дифференцируемая функция,} \\ f'_0(h) &> 0 \quad \forall h \geq \underline{h} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(т. е. функции терапии строго возрастают при $h \geq \underline{h}$), где a_1, a_2 — положительные константы, $\underline{h}$ — отрицательная константа.

Например, можно положить

$$f_0(h) := \frac{h}{b+h}, \quad (2.4)$$

где b — положительная константа. Тогда

$$f'_0(h) = \frac{b}{(b+h)^2} > 0 \quad \forall h > -b. \quad (2.5)$$

Оптимальное управление заключается в достижении точной нижней грани гладкой целевой функции Φ_1 от фазовых координат системы в фиксированный конечный момент времени $T > 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x(T), y(T)) &:= \begin{cases} x^2(T), & y(T) \geq \hat{y}, \\ x^2(T) + A(y(T) - \hat{y})^2, & y(T) \leq \hat{y} \end{cases} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([0, T], [0, R])}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь параметр $\hat{y}$ характеризует приемлемый уровень иммунной реакции, A — достаточно большая положительная константа.

С помощью замены переменных

$$c := \ln \frac{x_\infty}{x} \quad (2.7)$$

мы приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = -\mu_1 c + \rho_1 y + f_1(h), \\ \frac{dy}{dt} = -(\mu_y e^{-c}(\beta_y e^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h)) y + \alpha, \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.8)$$

где

$$\mu_y := \mu_2 x_\infty, \quad \beta_y := \beta x_\infty. \quad (2.9)$$

При этом целевая функция (2.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi(c(T), y(T)) &:= \begin{cases} x_\infty^2 e^{-2c(T)}, & y(T) \geq \hat{y}, \\ x_\infty^2 e^{-2c(T)} + A(y(T) - \hat{y})^2, & y(T) \leq \hat{y} \end{cases} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([0, T], [0, R])}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что открытая область

$$\begin{aligned} G &:= \{(c, y, h) \in \mathbb{R}^3 : c > 0, y > 0, \underline{h} < h < \bar{h}\}, \\ \underline{h} &= \text{const} < 0, \quad \bar{h} = \text{const} > \frac{R}{\gamma_h}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

сильно инвариантна [3, Глава 4, §3] относительно управляемой системы (2.8), (2.2). В случае (2.4) будем считать, что $-b < \underline{h} < 0$. Далее рассматриваются только допустимые фазовые траектории, проходящие в G .

2.2. Исследование системы принципом максимума

Понтрягина

Выпишем гамильтониан и сопряженную систему исследуемой задачи:

$$\begin{aligned} H(c, y, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u) &= \psi_1(-\mu_1 c + \rho_1 y + f_1(h)) + \\ &+ \psi_2(-(\mu_y e^{-c}(\beta_y e^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h))y + \alpha) - \gamma_h h \psi_3 + \psi_3 u, \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(c, y, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3) := \max_{u \in [0, R]} H(c, y, h, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u),$$

$$u^*(t) = \begin{cases} R, & \psi_3(t) > 0, \\ 0, & \psi_3(t) < 0, \\ \text{не определено,} & \psi_3(t) = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} = \mu_1\psi_1 - \mu_y\psi_2ye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\rho_1\psi_1 + \psi_2(\mu_ye^{-c}(\beta_ye^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h)), \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_1f'_1(h) + \psi_2f'_2(h)y + \gamma_h\psi_3 = \\ \qquad \qquad \qquad = f'_0(h)(-a_1\psi_1 + a_2\psi_2y) + \gamma_h\psi_3, \quad t \in [0, T], \\ \psi_1(T) = -\frac{\partial\Phi}{\partial c}(c(T), y(T)) = 2x_\infty^2e^{-2c(T)} > 0, \\ \psi_2(T) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}(c(T), y(T)) = \begin{cases} 0, & y(T) \geq \hat{y}, \\ 2A(\hat{y} - y(T)) > 0, & y(T) \leq \hat{y}, \end{cases} \\ \psi_3(T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Следующий результат доказывается аналогично Утверждению 1 из [51].

Утверждение 2.1. Пусть $(c(\cdot), y(\cdot), h(\cdot))$ — допустимая фазовая траектория управляемой системы (2.8), (2.2), удовлетворяющая неравенствам

$$e^{-c(t)} > \frac{1}{2\beta_y}, \quad y(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad (2.14)$$

здесь первое неравенство равносильно тому, что $x(t) > \frac{1}{2\beta}$, т. е. объем опухоли предполагается не слишком малым на протяжении всего рассматриваемого временного отрезка. Если $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$ — соответствующее решение сопряженной системы (2.13), то $\psi_1(t) > 0$ и $\psi_2(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Доказательство. Два первых сопряженных уравнения образуют однородную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и, следовательно, для каждого фиксированного момента времени $t \in [0, T]$ $\psi_1(t), \psi_2(t)$ не могут равняться нулю одновременно (поскольку $|\psi_1(T)| + |\psi_2(T)| > 0$).

Заметим, что $\psi_2(\cdot)$ положительна вблизи T . Это очевидно при $y(T) < \hat{y}$. В случае $y(T) \geq \hat{y}$ имеем $\psi_2(T) = 0$ и $\frac{d\psi_2}{dt}(T) = -\rho_1\psi_1(T) < 0$ на основании соотношений (2.13).

Пусть $\psi_2(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на временном промежутке $[0, T]$ и, если таких нулей несколько, σ — последний из них. Нуль σ должен быть простым

(иначе $\psi_1(\sigma), \psi_2(\sigma)$ одновременно обращаются в нуль в силу второго сопряженного уравнения), и, стало быть, из $\frac{d\psi_2}{dt}(\sigma) = -\rho_1\psi_1(\sigma) > 0$ ($\psi_2(\sigma) = 0$, $\psi_2(\cdot)$ положительна вблизи T) выводим $\psi_1(\sigma) < 0$. Но тогда $\psi_1(\cdot)$ обязана иметь хотя бы нуль в (σ, T) ($\psi_1(T) > 0$) и, обозначив последний из таких нулей через σ' , мы получим

$$\frac{d\psi_1}{dt}(\sigma') = -\mu_y\psi_2(\sigma')y(\sigma')e^{-c(\sigma')} (2\beta_y e^{-c(\sigma')} - 1) \geq 0.$$

Однако это противоречит неравенствам $\psi_2(\sigma') > 0$, $y(\sigma') > 0$, $e^{-c(\sigma')} > \frac{1}{2\beta_y}$. Таким образом, $\psi_2(\cdot)$ положительна на всем временном промежутке $[0, T)$.

Теперь предположим, что $\psi_1(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на временном промежутке $[0, T)$ и, если таких нулей несколько, θ — последний из них. Нуль θ должен быть простым (иначе $\psi_1(\theta), \psi_2(\theta)$ одновременно обращаются в нуль), и, стало быть,

$$\frac{d\psi_1}{dt}(\theta) = -\mu_y\psi_2(\theta)y(\theta)e^{-c(\theta)} (2\beta_y e^{-c(\theta)} - 1) \geq 0.$$

Из полученного противоречия вытекает, что $\psi_1(t) > 0$ для всех $t \in [0, T)$. $\square$

Из соотношений (2.8), (2.13) получаем

$$\psi_3(t)e^{-\gamma_h t} = - \int_t^T e^{-\gamma_h s} f'_0(h(s)) (-a_1\psi_1(s) + a_2\psi_2(s)y(s)) ds, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (-a_1\psi_1 + a_2\psi_2 y) &= -a_1 (\mu_1\psi_1 - \mu_y\psi_2 y e^{-c} (2\beta_y e^{-c} - 1)) + \\ &+ a_2 (-\rho_1\psi_1 + \psi_2 (\mu_y e^{-c} (\beta_y e^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h))) y + \\ &+ a_2\psi_2 (- (\mu_y e^{-c} (\beta_y e^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h))) y + \alpha = \\ &= -a_1\mu_1\psi_1 + a_1\mu_y\psi_2 y e^{-c} (2\beta_y e^{-c} - 1) - a_2\rho_1\psi_1 y + \alpha a_2\psi_2 = \\ &= -(a_1\mu_1 + a_2\rho_1 y)\psi_1 + (a_1\mu_y y e^{-c} (2\beta_y e^{-c} - 1) + \alpha a_2) \psi_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
-a_1\psi_1 + a_2\psi_2y &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(-a_1\psi_1 + a_2\psi_2y) = \\
&= -(a_1\mu_1 + a_2\rho_1y)\psi_1 + (a_1\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) + \alpha a_2) \frac{a_1\psi_1}{a_2y} = \\
&= \frac{\psi_1}{y} \left(-a_2\rho_1y^2 + a_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) - \mu_1 \right) y + \alpha a_1 \right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Обозначим

$$Q(y; c) := -a_2\rho_1y^2 + a_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) - \mu_1 \right) y + \alpha a_1. \tag{2.18}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P(c, y, h) &:= \frac{d}{dt}Q(y; c) = \\
&= \left(-2a_2\rho_1y + a_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) - \mu_1 \right) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(-(\mu_yye^{-c}(\beta_ye^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h))y + \alpha \right) - \\
&\quad - \frac{a_1^2}{a_2}\mu_yye^{-c}(4\beta_ye^{-c} - 1)(-\mu_1c + \rho_1y + f_1(h)).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Кроме того, единственный положительный корень квадратного трехчлена $Q(y; c)$ по переменной y определяется равенством

$$\begin{aligned}
y_r(c) &:= \frac{1}{2a_2\rho_1} \left(a_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) - \mu_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{a_1^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\mu_yye^{-c}(2\beta_ye^{-c} - 1) - \mu_1 \right)^2 + 4\alpha a_1 a_2 \rho_1} \right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Приведем несколько лемм. Первая из них очевидна.

Лемма 2.1. Пусть $\varphi : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, $\varphi_1 : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\varphi_1(t) = \varphi'(t)$ для всех таких точек $t \in [t', t'']$, в которых $\varphi(t) = 0$. Если $\varphi_1(t) < 0$ при любых $t \in [t', t'']$ ($\varphi_1(t) > 0$ при любых $t \in [t', t'']$), то на отрезке $[t', t'']$ $\varphi(\cdot)$ имеет не более одного нуля и неизбежно меняет свой знак с плюса на минус (с минуса на плюс) при прохождении через возможный нуль с увеличением переменной t .

Замечание 2.1. Фраза “ $\varphi(\cdot)$ имеет не более одного нуля и неизбежно меняет свой знак с плюса на минус (с минуса на плюс) при прохождении через возможный нуль с увеличением переменной t ” также означает, что:

- в случае $\varphi(t') = 0$ неравенство $\varphi(t) < 0$ выполнено для всех $t \in (t', t'']$ (неравенство $\varphi(t) > 0$ выполнено для всех $t \in (t', t'']$);
- в случае $\varphi(t'') = 0$ неравенство $\varphi(t) > 0$ выполнено для всех $t \in [t', t'')$ (неравенство $\varphi(t) < 0$ выполнено для всех $t \in [t', t'')$).

Более того, можно обобщить это следующим образом:

- в случае $\varphi(t') \leq 0$ неравенство $\varphi(t) < 0$ выполнено для всех $t \in (t', t'']$ (в случае $\varphi(t') \geq 0$ неравенство $\varphi(t) > 0$ выполнено для всех $t \in (t', t'']$);
- в случае $\varphi(t'') \geq 0$ неравенство $\varphi(t) > 0$ выполнено для всех $t \in [t', t'')$ (в случае $\varphi(t'') \leq 0$ неравенство $\varphi(t) < 0$ выполнено для всех $t \in [t', t'')$).

Лемма 2.2. Пусть $\varphi : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi_1 : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция и $\varphi_1(t) = \varphi'(t)$ для всех таких точек $t \in [t', t'']$, в которых $\varphi(t) = 0$. Пусть также $\varphi_2 : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\varphi_2(t) = \varphi_1'(t)$ для всех таких точек $t \in [t', t'']$, в которых $\varphi_1(t) = 0$. Если $\varphi_2(t) < 0$ при любых $t \in [t', t'']$ или же $\varphi_2(t) > 0$ при любых $t \in [t', t'']$, то на отрезке $[t', t'']$ $\varphi(\cdot)$ имеет не более двух нулей.

Доказательство. Пусть $\varphi_2(t) < 0$ для всех $t \in [t', t'']$ (случай, когда $\varphi_2(t) > 0$ для всех $t \in [t', t'']$, разбирается аналогично). В силу Леммы 2.1 на отрезке $[t', t'']$ $\varphi_1(\cdot)$ имеет не более одного нуля и неизбежно меняет свой знак с плюса на минус при прохождении через возможный нуль с увеличением переменной t . Если $\varphi_1(\cdot)$ не имеет нулей на $[t', t'']$, то остается еще раз применить Лемму 2.1, чтобы убедиться в наличии у $\varphi(\cdot)$ не более одного нуля на $[t', t'']$. Теперь предположим, что $\varphi_1(\cdot)$ имеет единственный нуль на $[t', t'']$.

Докажем, что каждый нуль $\varphi(\cdot)$ на $[t', t'']$ является изолированным. Пусть $t_0 \in [t', t'']$, $\varphi(t_0) = 0$. Если $\varphi'(t_0) = \varphi_1(t_0) \neq 0$, то изолированность нуля t_0 очевидна. Перейдем к случаю $\varphi'(t_0) = \varphi_1(t_0) = 0$. Предположим существование такой последовательности $[t', t''] \setminus \{t_0\} \ni t_{0i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} t_0$, что $\varphi(t_{0i}) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Раскладывая $\varphi(\cdot)$ в ряд Тейлора в окрестности t_0 , получаем

$$\varphi(t_{0i}) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)(t_{0i} - t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2}(t_{0i} - t_0)^2 + o_i,$$

$$\frac{o_i}{(t_{0i} - t_0)^2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

В этом равенстве левая часть и первое слагаемое правой части обнуляются. Кроме того, поскольку $\varphi''(t_0) = \varphi_2(t_0) < 0$, то мы приходим к противоречию:

$$0 > \varphi''(t_0) = -\frac{2o_i}{(t_{0i} - t_0)^2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, полагая, что $t_1 < t_2 < t_3$ — три нуля $\varphi(\cdot)$ на $[t', t'']$, мы можем выбрать их последовательными (так как они изолированы). Для последовательных нулей t_1, t_2, t_3 функция $\varphi(\cdot)$ не принимает нулевых значений на $(t_1, t_2) \cup (t_2, t_3)$, и, стало быть, возможны лишь следующие два случая:

$$\varphi_1(t_1) \leq 0, \varphi_1(t_2) \geq 0, \varphi_1(t_3) \leq 0 \quad \text{или} \quad \varphi_1(t_1) \geq 0, \varphi_1(t_2) \leq 0, \varphi_1(t_3) \geq 0.$$

Напомним, что на $[t', t'']$ $\varphi_1(\cdot)$ имеет не более одного нуля и неизбежно меняет свой знак с плюса на минус при прохождении через возможный нуль с увеличением переменной t . Поэтому $\varphi_1(t_1) > 0$ (если $\varphi_1(t_1) \leq 0$, то $\varphi_1(t_2) < 0$ и $\varphi_1(t_3) < 0$ ввиду Замечания 2.1). Таким образом, первый случай невозможен, т.е. $\varphi_1(t_1) > 0$, $\varphi_1(t_2) \leq 0$, $\varphi_1(t_3) \geq 0$. Однако из $\varphi_1(t_3) \geq 0$ следует, что $\varphi_1(t_2) > 0$ (с учетом Замечания 2.1). Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Замечание 2.2. Пусть $d_1 : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ и $d_2 : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — положительные непрерывные функции. Леммы 2.1, 2.2 останутся справедливыми, если взять такие функции $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$, что $\varphi_1(t) = d_1(t)\varphi'(t)$ для всех таких точек $t \in$

$[t', t'']$, в которых $\varphi(t) = 0$, и $\varphi_2(t) = d_2(t)\varphi_1'(t)$ для всех таких точек $t \in [t', t'']$, в которых $\varphi_1(t) = 0$.

Лемма 2.3. Если $\eta : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, имеющая не более k нулей на $[t', t'']$, то функция $\xi(t) := \int_t^{t''} \eta(s)ds$, $t \in [t', t'']$, имеет не более k нулей на $[t', t'']$.

Доказательство. Имеем $\xi(t'') = 0$, $\xi'(t) = -\eta(t)$, $t \in [t', t'']$. Если число нулей $\xi(\cdot)$ на $[t', t'']$ не меньше $k + 1$, то по теореме Ролля число нулей $\eta(\cdot)$ на (t', t'') не меньше $k + 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

С помощью указанных лемм и замечаний мы получаем следующие теоремы.

Теорема 2.1. Допустим, что Предположение 2.1 выполнено и $(c(\cdot), y(\cdot), h(\cdot))$ есть допустимая фазовая траектория управляемой системы (2.8), (2.2), удовлетворяющая неравенствам (2.14) и одному из следующих двух условий:

$$P(c(t), y_r(c(t)), h(t)) < 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.21)$$

$$P(c(t), y_r(c(t)), h(t)) > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.22)$$

Пусть $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$ — соответствующее решение сопряженной системы (2.13). Тогда $\psi_3(\cdot)$ имеет не более двух нулей на $[0, T]$.

Доказательство. Заметим, что $y(t) > 0$, $\psi_1(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$ в силу неравенств (2.14) и Утверждения 2.1. Положим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= -a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t)y(t), \quad \varphi_1(t) := Q(y(t); c(t)), \\ \varphi_2(t) &:= P(c(t), y_r(c(t)), h(t)) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Тогда из Леммы 2.2, Замечания 2.2, соотношений (2.16)–(2.20) и одного из условий (2.21), (2.22) получаем, что $\varphi(\cdot)$ имеет не более двух нулей на $[0, T]$. Поэтому с учетом условия (2.3) подынтегральная функция в правой части равенства (2.15) имеет не более двух нулей на $[0, T]$. Для завершения доказательства теоремы остается применить Лемму 2.3. $\square$

Теорема 2.2. Допустим, что Предположение 2.1 выполнено и $(c(\cdot), y(\cdot), h(\cdot))$ есть допустимая фазовая траектория управляемой системы (2.8), (2.2), удовлетворяющая неравенствам (2.14) и одному из следующих двух условий:

$$y(t) < y_r(c(t)) \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.23)$$

$$y(t) > y_r(c(t)) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.24)$$

Пусть $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$ — соответствующее решение сопряженной системы (2.13). Тогда имеет место следующее:

- $\psi_3(\cdot)$ имеет не более одного нуля на $[0, T]$;
- если условие (2.23) выполнено и $-a_1\psi_1(T) + a_2\psi_2(T)y(T) \leq 0$, то $-a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t)y(t) < 0$ для всех $t \in [0, T)$ и, следовательно, $\psi_3(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$;
- если условие (2.24) выполнено и $-a_1\psi_1(T) + a_2\psi_2(T)y(T) \geq 0$, то $-a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t)y(t) > 0$ для всех $t \in [0, T)$ и, следовательно, $\psi_3(t) < 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Доказательство. Напомним, что $y_r(c)$ — единственный положительный корень квадратного трехчлена $Q(y; c)$ по переменной y (другой корень отрицателен) и что ветви соответствующей параболы направлены вниз (см. (2.18)). Так как $y(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$, то из условия (2.23) вытекает, что $Q(y(t); c(t)) > 0$ для всех $t \in [0, T]$. В то же время из условия (2.24) следует, что $Q(y(t); c(t)) < 0$ для всех $t \in [0, T]$. Остается взять те же $\varphi(\cdot), \varphi_1(\cdot)$, что и в доказательстве Теоремы 2.1, и воспользоваться Леммами 2.1, 2.3. $\square$

2.3. Вспомогательные оценки

Пусть $(c_0, y_0, h_0) := (c(0), y(0), h(0))$ — фиксированная точка множества G , определенного равенством (2.11).

Поскольку область G сильно инвариантна относительно управляемой системы (2.8),(2.2), то $y(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u(\cdot)) > 0$ для любого $t \in [0, T]$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$.

Для проверки условий (2.14),(2.21)–(2.24) необходимо найти такие функции $c_{\min}(\cdot)$, $c_{\max}(\cdot)$, $y_{\min}(\cdot)$, $y_{\max}(\cdot)$, $h_{\min}(\cdot)$, $h_{\max}(\cdot)$, что для любого $t \in [0, T]$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$

$$\begin{aligned} c_{\min}(t) &\leq c(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u(\cdot)) \leq c_{\max}(t), \\ y_{\min}(t) &\leq y(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u(\cdot)) \leq y_{\max}(t), \\ h_{\min}(t) &\leq h(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u(\cdot)) \leq h_{\max}(t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Функции $h_{\min}(\cdot)$, $h_{\max}(\cdot)$ находятся тривиально:

$$\begin{aligned} h_{\min}(t) &:= h(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u \equiv 0) = h_0 e^{-\gamma_h t}, \\ h_{\max}(t) &:= h(t; 0, (c_0, y_0, h_0), u \equiv R) = \frac{R}{\gamma_h} - \left(\frac{R}{\gamma_h} - h_0 \right) e^{-\gamma_h t}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Покажем, как могут быть выбраны $c_{\min}(\cdot)$, $y_{\min}(\cdot)$, $c_{\max}(\cdot)$, $y_{\max}(\cdot)$.

Заметим, что $\mathbb{R} \ni z \rightarrow z(\beta_y z - 1)$ есть парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной $\left(\frac{1}{2\beta_y}, -\frac{1}{4\beta_y} \right)$.

Предположение 2.2. *Предположим, что $\frac{1}{2\beta_y} < 1$; это равносильно тому, что $x_\infty > \frac{1}{2\beta}$.*

Пусть $y_{\min}^0(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy_{\min}^0}{dt} = -(\mu_y(\beta_y - 1) + \rho_2 + f_2(h_{\max}(t))) y_{\min}^0 + \alpha, \quad y_{\min}^0(0) = y_0. \quad (2.27)$$

По индукции через $c_{\min}^i(\cdot)$ и $y_{\min}^i(\cdot)$ обозначим решения задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{dc_{\min}^i}{dt} &= -\mu_1 c_{\min}^i + \rho_1 y_{\min}^{i-1}(t) + f_1(h_{\min}(t)), \quad c_{\min}^i(0) = c_0, \\ \frac{dy_{\min}^i}{dt} &= -\left(\mu_y e^{-c_{\min}^i(t)} (\beta_y e^{-c_{\min}^i(t)} - 1) + \rho_2 + f_2(h_{\max}(t)) \right) y_{\min}^i + \alpha, \\ y_{\min}^i(0) &= y_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.28)$$

при следующем предположении.

Предположение 2.3. *Предположим, что*

$$\min_{t \in [0, T]} e^{-c_{\min}^i(t)} > \frac{1}{2\beta_y}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

Для произвольного фиксированного номера $i \in \mathbb{N}$ мы можем положить

$$c_{\min}(\cdot) := c_{\min}^i(\cdot), \quad y_{\min}(\cdot) := y_{\min}^i(\cdot) \quad (2.30)$$

(чем больше i , тем точнее оценки).

Пусть $y_{\max}^0(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy_{\max}^0}{dt} = - \left(-\frac{\mu_y}{4\beta_y} + \rho_2 + f_2(h_{\min}(t)) \right) y_{\max}^0 + \alpha, \quad y_{\max}^0(0) = y_0. \quad (2.31)$$

По индукции через $c_{\max}^i(\cdot)$ и $y_{\max}^i(\cdot)$ обозначим решения задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{dc_{\max}^i}{dt} &= -\mu_1 c_{\max}^i + \rho_1 y_{\max}^{i-1}(t) + f_1(h_{\max}(t)), \quad c_{\max}^i(0) = c_0, \\ \frac{dy_{\max}^i}{dt} &= \begin{cases} - \left(\mu_y e^{-c_{\max}^i(t)} (\beta_y e^{-c_{\max}^i(t)} - 1) + \rho_2 + f_2(h_{\min}(t)) \right) y_{\max}^i + \\ \quad \quad \quad + \alpha, \quad e^{-c_{\max}^i(t)} \geq \frac{1}{2\beta_y}, \\ - \left(-\frac{\mu_y}{4\beta_y} + \rho_2 + f_2(h_{\min}(t)) \right) y_{\max}^i + \alpha, \\ \quad \quad \quad e^{-c_{\max}^i(t)} \leq \frac{1}{2\beta_y}, \end{cases} \quad (2.32) \\ y_{\max}^i(0) &= y_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Для произвольного фиксированного номера $i \in \mathbb{N}$ мы можем положить

$$c_{\max}(\cdot) := c_{\max}^i(\cdot), \quad y_{\max}(\cdot) := y_{\max}^i(\cdot) \quad (2.33)$$

(чем больше i , тем точнее оценки).

Предположение 2.4. *Предположим, что*

$$\min_{t \in [0, T]} e^{-c_{\max}(t)} > \frac{1}{2\beta_y}. \quad (2.34)$$

Из справедливости Предположения 2.4 вытекает справедливость первого неравенства из (2.14) и Предположений 2.2, 2.3.

Теперь выведем условия, с помощью которых можно проверить неравенства (2.21)–(2.24).

Обозначим

$$\zeta(c) := a_1 \left(\frac{a_1}{a_2} \mu_y e^{-c} (2\beta_y e^{-c} - 1) - \mu_1 \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что $\zeta'(c) < 0$ при $e^{-c} > \frac{1}{2\beta_y}$. Поэтому

$$y'_r(c) = \frac{1}{2a_2\rho_1} \left(1 + \frac{\zeta(c)}{\sqrt{\zeta^2(c) + 4\alpha a_1 a_2 \rho_1}} \right) \zeta'(c) < 0, \quad e^{-c} > \frac{1}{2\beta_y},$$

т. е. $y_r(c)$ строго убывает при $e^{-c} > \frac{1}{2\beta_y}$. Отсюда вытекают следующие утверждения.

Утверждение 2.2. *Допустим, что $(c_0, y_0, h_0) \in G$ и Предположения 2.1, 2.4 выполнены. Тогда условие (2.23) выполнено при*

$$\max_{t \in [0, T]} \{y_{\max}(t) - y_r(c_{\max}(t))\} < 0. \quad (2.35)$$

Утверждение 2.3. *Допустим, что $(c_0, y_0, h_0) \in G$ и Предположения 2.1–2.3 выполнены. Тогда условие (2.24) выполнено при*

$$\min_{t \in [0, T]} \{y_{\min}(t) - y_r(c_{\min}(t))\} > 0. \quad (2.36)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \max_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)], h \in [h_{\min}(t), h_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h) &= \\ &= \max_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h_{\arg\max, P}(c, t)), \\ \min_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)], h \in [h_{\min}(t), h_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h) &= \\ &= \min_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h_{\arg\min, P}(c, t)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned}
 h_{\arg\max, P}(c, t) &:= \begin{cases} h_{\max}(t), & \chi(c) > 0, \\ h_{\min}(t), & \chi(c) < 0, \\ \text{произвольно из } [h_{\min}(t), h_{\max}(t)], & \chi(c) = 0, \end{cases} \\
 h_{\arg\min, P}(c, t) &:= \begin{cases} h_{\max}(t), & \chi(c) < 0, \\ h_{\min}(t), & \chi(c) > 0, \\ \text{произвольно из } [h_{\min}(t), h_{\max}(t)], & \chi(c) = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 \chi(c) &:= \\
 &:= -a_2 y_r(c) \left(-2a_2 \rho_1 y_r(c) + a_1 \left(\frac{a_1}{a_2} \mu_y e^{-c} (2\beta_y e^{-c} - 1) - \mu_1 \right) \right) - \\
 &\quad - \frac{a_1^3}{a_2} \mu_y e^{-c} (4\beta_y e^{-c} - 1).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.4. Допустим, что $(c_0, y_0, h_0) \in G$ и Предположения 2.1, 2.4 выполнены. Тогда условие (2.21) выполнено при

$$\max_{t \in [0, T]} \max_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h_{\arg\max, P}(c, t)) < 0 \tag{2.40}$$

и условие (2.22) выполнено при

$$\min_{t \in [0, T]} \min_{c \in [c_{\min}(t), c_{\max}(t)]} P(c, y_r(c), h_{\arg\min, P}(c, t)) > 0. \tag{2.41}$$

2.4. Синтез оптимального управления

Основываясь на методологии Главы 1, выведем аналитические представления для поверхностей в расширенном фазовом пространстве (фазовые переменные вместе с обратным временем), на которых совершаются последние переключения допустимых интегральных кривых, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина.

Выпишем задачу Коши для уравнения ГЯБ, соответствующую рассматриваемой задаче оптимального управления (2.8),(2.2),(2.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} S = S(c, y, h, \tau), \quad \tau := T - t, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} = F_1(c, y, h) \frac{\partial S}{\partial c} + F_2(c, y, h) \frac{\partial S}{\partial y} - \gamma_h h \frac{\partial S}{\partial h} + \min_{\bar{u} \in [0, R]} \left\{ \bar{u} \frac{\partial S}{\partial h} \right\}, \\ F_1(c, y, h) := -\mu_1 c + \rho_1 y + f_1(h), \\ F_2(c, y, h) := -(\mu_y e^{-c} (\beta_y e^{-c} - 1) + \rho_2 + f_2(h)) y + \alpha, \\ S(c, y, h, 0) = \Phi(c, y), \quad (c, y, h) \in G. \end{array} \right. \quad (c, y, h, \tau) \in G \times [0, T], \quad (2.42)$$

Для оптимального синтезирующего управления имеем

$$u_{\text{opt}}(c, y, h, \tau) := \left\{ \begin{array}{l} R, \quad \frac{\partial S}{\partial h}(c, y, h, \tau) < 0, \\ 0, \quad \frac{\partial S}{\partial h}(c, y, h, \tau) > 0, \\ \text{не определено,} \\ \nexists \frac{\partial S}{\partial h}(c, y, h, \tau) \text{ или } \frac{\partial S}{\partial h}(c, y, h, \tau) = 0. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Зафиксируем произвольные числа $T_- < 0$, $T_+ > T$.

Пусть S^R и S^0 — решения задач Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S^R}{\partial \tau} = F_1(c, y, h) \frac{\partial S^R}{\partial c} + F_2(c, y, h) \frac{\partial S^R}{\partial y} - \gamma_h h \frac{\partial S^R}{\partial h} + R \frac{\partial S^R}{\partial h}, \\ S^R(c, y, h, 0) = \Phi(c, y), \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S^0}{\partial \tau} = F_1(c, y, h) \frac{\partial S^0}{\partial c} + F_2(c, y, h) \frac{\partial S^0}{\partial y} - \gamma_h h \frac{\partial S^0}{\partial h}, \\ S^0(c, y, h, 0) = \Phi(c, y) \end{array} \right. \quad (2.45)$$

в $G \times (T_-, T_+)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
D^R &:= \text{cl} \left\{ (c, y, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : \frac{\partial S^R}{\partial h}(c, y, h, \tau) < 0 \right\}, \\
D^0 &:= \text{cl} \left\{ (c, y, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : \frac{\partial S^0}{\partial h}(c, y, h, \tau) > 0 \right\}, \\
\gamma^R &:= \left\{ (c, y, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : \frac{\partial S^R}{\partial h}(c, y, h, \tau) = 0 \right\} \cap D^R, \\
\gamma^0 &:= \left\{ (c, y, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : \frac{\partial S^0}{\partial h}(c, y, h, \tau) = 0 \right\} \cap D^0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Тогда S^R — решение задачи (2.42) в D^R и S^0 — решение задачи (2.42) в D^0 .

Характеристики задачи (2.42) и их фазовые компоненты задаются в соответствии с Определением 1.1 из п. 1.1 Главы 1. Нетрудно проверить, что для рассматриваемой задачи оптимального управления (2.8), (2.2), (2.10) справедливы Предположения 1.1–1.3, а вместе с ними и Утверждение 1.2, из п. 1.1 Главы 1. Поэтому для функции цены $S : G \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (2.8), (2.2), (2.10) с ограничением $(c(t), y(t), h(t)) \in G$ при каждом $t \in [0, T]$ (G — сильно инвариантная область управляемой системы (2.8), (2.2)) имеет место следующее:

- S непрерывна и является единственным вязкостным решением задачи (2.42);
- для всякого $\tau \in (0, T)$ функция $G \ni (c, y, h) \rightarrow S(c, y, h, \tau)$ локально липшицева;
- значение $S(c', y', h', \tau')$ в точке $(c', y', h', \tau') \in G \times [0, T]$ представляет собой минимум $\Phi(c'', y'')$ по всем таким (c'', y'') $\in G$, для которых найдется хотя бы одна характеристика

$$\left(\left(\hat{c}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{h}(\cdot) \right), \left(\hat{\psi}_1(\cdot), \hat{\psi}_2(\cdot), \hat{\psi}_3(\cdot) \right) \right) : \hat{J} \rightarrow G \times \mathbb{R}^3 \tag{2.47}$$

задачи (2.42) (см. Определение 1.1), удовлетворяющая равенствам

$$\left(\hat{c}(\tau'), \hat{y}(\tau'), \hat{h}(\tau') \right) = (c', y', h'), \tag{2.48}$$

$$\left(\hat{c}(0), \hat{y}(0), \hat{h}(0) \right) = (c'', y'', h'');$$

- супердифференциал $D^+S(c', y', h', \tau')$ в точке $(c', y', h', \tau') \in G \times (0, T)$ непуст и представляет собой выпуклую оболочку всех таких векторов

$$\left(-\hat{\psi}_1(\tau'), -\hat{\psi}_2(\tau'), -\hat{\psi}_3(\tau'), \right. \\ \left. \mathcal{H} \left(\hat{c}(\tau'), \hat{y}(\tau'), \hat{h}(\tau'), \hat{\psi}_1(\tau'), \hat{\psi}_2(\tau'), \hat{\psi}_3(\tau') \right) \right),$$

что (2.47) — какая-нибудь характеристика задачи (2.42), подчиненная равенствам (2.48) и

$$S(c', y', h', \tau') = \Phi(\hat{c}(0), \hat{y}(0)).$$

Следующая теорема очевидна.

Теорема 2.3. Пусть $(c(\cdot), y(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$ — допустимый процесс управляемой системы (2.8), (2.2), удовлетворяющий принципу максимума Понтрягина, и $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$ — соответствующее решение сопряженной системы (2.13). Если найдется такое $\delta \in (0, T]$, что для всех $t \in [T - \delta, T)$ имеем $\psi_3(t) > 0$ и $u(t) = R$ (соответственно для всех $t \in [T - \delta, T)$ имеем $\psi_3(t) < 0$ и $u(t) = 0$), то первое переключение интегральной кривой, соответствующей данному процессу и рассматриваемой в обратном времени $\tau := T - t$, может быть совершено только на множестве γ^R (соответственно только на множестве γ^0) в расширенном фазовом пространстве переменных (c, y, h, τ) .

С целью отыскания аналитических выражений для $S^{R,0}$ выпишем первые интегралы $\Psi_i^{R,0}$, $i = 1, 2, 3$, для расширенной системы (2.8), $\frac{d\tau}{dt} = -1$ с $u \equiv R$ и

$u \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{R,0}(h, \tau) &= h e^{-\gamma_h \tau} + \frac{u^{R,0}}{\gamma_h} (1 - e^{-\gamma_h \tau}), \quad u^R := R, \quad u^0 := 0, \\
Z_1^{R,0}(h, \tau, s) &:= \Psi_1^{R,0}(h, \tau) e^{\gamma_h s} - \frac{u^{R,0}}{\gamma_h} (e^{\gamma_h s} - 1), \\
g^{R,0}(c, h, \tau, s) &:= -\mu_y e^{-c} (\beta_y e^{-c} - 1) - \rho_2 - f_2 \left(Z_1^{R,0}(h, \tau, s) \right), \\
\Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) &= y \exp \left(\int_0^\tau g^{R,0}(c, h, \tau, s) ds \right) - \\
&\quad - \alpha \int_0^\tau \exp \left(\int_0^s g^{R,0}(c, h, \tau, \xi) d\xi \right) ds, \\
\Psi_3^{R,0}(c, y, h, \tau) &= c (\gamma_h h + u^{R,0})^{-\frac{\mu_1}{\gamma_h}} - \\
&\quad - \int_0^h (\rho_1 y + f_1(\eta)) (\gamma_h \eta - u^{R,0})^{1-\frac{\mu_1}{\gamma_h}} d\eta.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
S^{R,0}(c, y, h, \tau) &= \\
&= \begin{cases} x_\infty^2 \exp \left(-2 \frac{\rho_1}{\mu_1} \Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) - \right. \\ \left. - 2 \Psi_3^{R,0}(c, y, h, \tau) \left(\Psi_1^{R,0}(c, y, h, \tau) \right)^{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \right), & \Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) \geq \hat{y}, \\ x_\infty^2 \exp \left(-2 \frac{\rho_1}{\mu_1} \Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) - \right. \\ \left. - 2 \Psi_3^{R,0}(c, y, h, \tau) \left(\Psi_1^{R,0}(c, y, h, \tau) \right)^{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \right) + \\ \left. + A \left(\Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) - \hat{y} \right)^2, & \Psi_2^{R,0}(c, y, h, \tau) \leq \hat{y}. \end{cases} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Заметим, что функции $S^{R,0}$ являются гладкими в $\overline{G} \times [T_-, T_+]$.

Представления множеств $D^{R,0}, \gamma^{R,0}$ получаются из определений (2.46) с использованием соотношений (2.49), (2.50).

Обозначим

$$\nu(c, y) := \begin{cases} -2a_1x_\infty^2e^{-2c}, & y \geq \hat{y}, \\ -2a_1x_\infty^2e^{-2c} + 2a_2Ay(\hat{y} - y), & y \leq \hat{y}. \end{cases} \quad (2.51)$$

В силу соотношений (2.13) имеем $\nu(c(T), y(T)) = -a_1\psi_1(T) + a_2\psi_2(T)y(T)$. Поэтому из равенства (2.15) вытекает, что $\psi_3(\cdot)$ положительна вблизи T при $\nu(c(T), y(T)) < 0$ и отрицательна вблизи T при $\nu(c(T), y(T)) > 0$, т. е. справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.5. *Имеют место представления*

$$\begin{aligned} D_0^0 &= \{(c, y, h) \in G : \nu(c, y) \geq 0\}, \\ D_0^R &= \{(c, y, h) \in G : \nu(c, y) \leq 0\}, \\ \gamma_0^0 &= \gamma_0^R = \{(c, y, h) \in G : \nu(c, y) = 0\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Пусть $(c_0, y_0, h_0) := (c(0), y(0), h(0))$ — фиксированная точка из G . Рассмотрим случай, когда каждый допустимый процесс $(c(\cdot), y(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющий этому начальному условию и принципу максимума Понтрягина, обладает не более чем одним переключением. Достаточным условием для этого является, например, выполнение неравенства (2.34) и одного из неравенств (2.35), (2.36). Для определенности предположим, что выполнено неравенство (2.35) (случай (2.36) рассматривается аналогично). Тогда ввиду Теоремы 2.2 и Утверждения 2.2 единственное переключение может быть совершено только с $u = R$ на $u = 0$ при увеличении переменной t . Поэтому с использованием Теоремы 2.3 мы получаем следующий результат, описывающий алгоритм синтеза оптимального управления (см. Теоремы 1.2, 1.3).

Теорема 2.4. *Допустим, что для фиксированного состояния $(c_0, y_0, h_0) := (c(0), y(0), h(0)) \in G$ выполнены Предположения 2.1, 2.4 и неравенство (2.35).*

Обозначим

$$J^R := \Phi(c(T), y(T))|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0), u \equiv R},$$

$$J^0 := \Phi(c(T), y(T)) \big|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0), u \equiv 0}.$$

Если интегральная кривая

$$\left((c(t), y(t), h(t)) \big|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0), u \equiv R}, T - t \right), \quad t \in (0, T), \quad (2.53)$$

не пересекает γ^0 , то

$$S(c_0, y_0, h_0, T) = \min(J^R, J^0),$$

$$u_{\text{opt}} \big|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0)}(t) = \begin{cases} R & \forall t \in [0, T], \quad J^R < J^0, \\ 0 & \forall t \in [0, T], \quad J^R > J^0. \end{cases}$$

Допустим, что интегральная кривая (2.53) пересекает γ^0 в моменты времени $t_i \in (0, T)$, $i = \overline{1, m}$. Рассмотрим управления

$$u_i(t) := \begin{cases} R, & t \in [0, t_i), \\ 0, & t \in (t_i, T], \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Обозначим

$$J_i := \Phi(c(T), y(T)) \big|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0), u(\cdot) = u_i(\cdot)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда

$$S(c_0, y_0, h_0, T) = \min(J^R, J^0, J_1, J_2, \dots, J_m)$$

и, следовательно, можно взять

$$u_{\text{opt}} \big|_{(c(0), y(0), h(0)) = (c_0, y_0, h_0)}(t) = \begin{cases} R & \forall t \in [0, T], \quad S(c_0, y_0, h_0, T) = J^R, \\ 0 & \forall t \in [0, T], \quad S(c_0, y_0, h_0, T) = J^0, \\ u_i(t) & \forall t \in [0, T], \quad S(c_0, y_0, h_0, T) = J_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

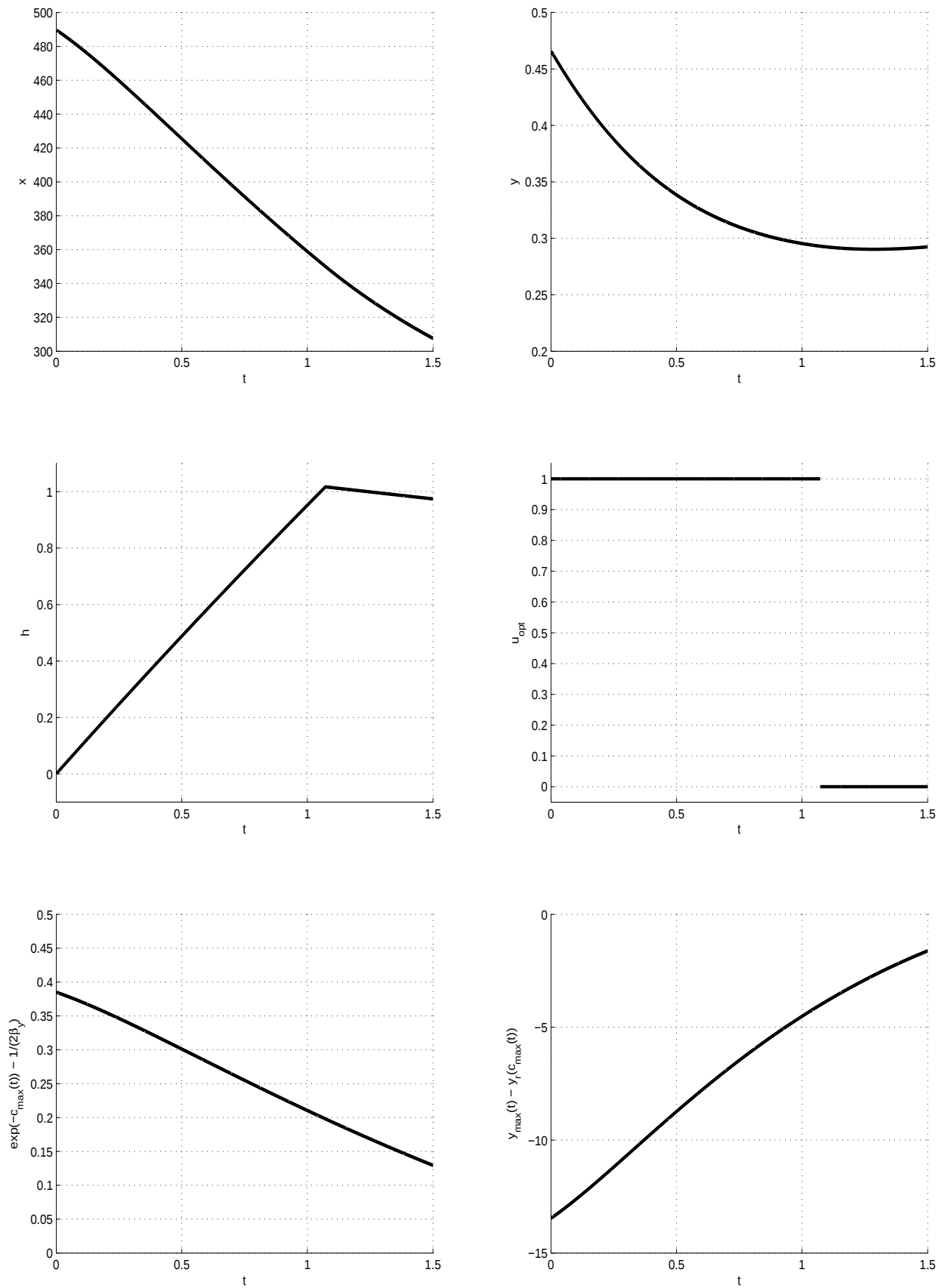


Рис. 2.1. Результаты численного моделирования в случае $a_2 = 0.5$.

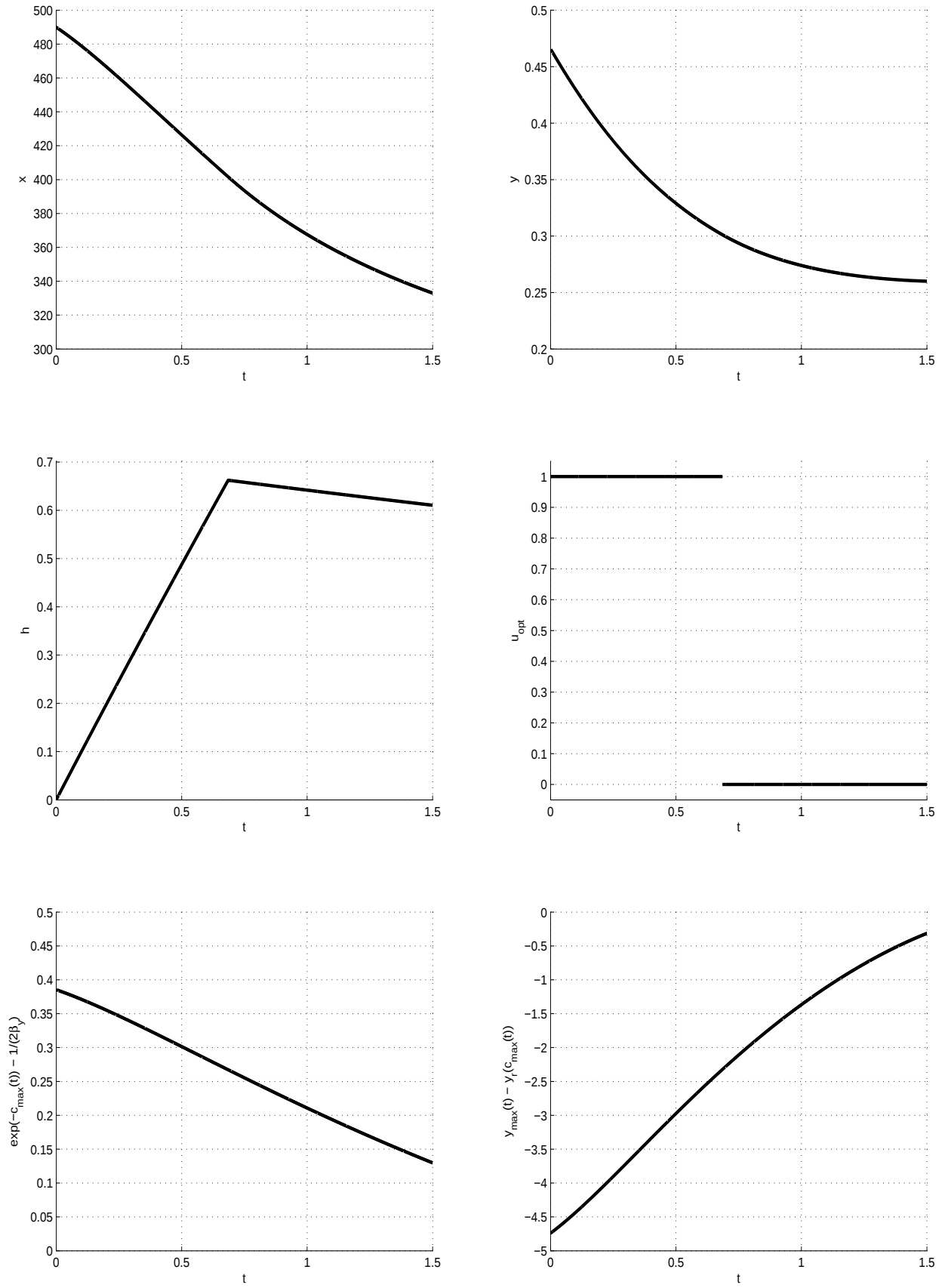


Рис. 2.2. Результаты численного моделирования в случае $a_2 = 0.8$.

2.5. Результаты численного моделирования

Выберем следующие значения параметров [51]: $x_\infty = 780$, $\alpha = 0.1181$, $\beta = 0.00264$ $\left(\frac{1}{2\beta} \approx 189.4\right)$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.37451$, $\mu_1 = 0.5618$, $\mu_2 = 0.00484$. Также возьмем $T = 1.5$, $R = 1$, $\gamma_h = 0.1$, $b = 1$, $A = 10^7$, $\hat{y} = 0.4$, $a_1 = 1$. Будем рассматривать два случая: $a_2 = 0.5$ и $a_2 = 0.8$ (напомним, что увеличение параметра a_2 влечет за собой увеличение негативного влияния химиотерапевтического агента на иммунную реакцию). В обоих случаях для начальной точки $x_0 = 490$ $\left(c_0 := \ln \frac{x_\infty}{x_0}\right)$, $y_0 = 0.466$, $h_0 = 0$ условия Теоремы 2.4 выполнены. Результаты соответствующего численного моделирования представлены на Рисунках 2.1, 2.2. Видно, что при большем значении a_2 время “активной” терапии (когда $u = R$) сокращается и соответственно длительность режима “релаксации” (когда $u = 0$) увеличивается.

Поскольку определенная равенством (2.10) функция Φ , будучи положительной, имеет очень большой разброс значений для указанных параметров, то для численного моделирования мы берем целевую функцию $\ln \Phi$, эквивалентную Φ с точки зрения отношения порядка.

Глава 3

Метод синтеза оптимального управления в задачах с особыми характеристиками и гладкие решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

Данная глава является продолжением Главы 1, в которой при определенных предположениях был изложен метод построения синтеза оптимального управления на основе исследования расположения характеристик задачи Коши для уравнения ГЯБ (выяснения того, как расширенное фазовое пространство заполняется характеристиками). Предлагается метод отыскания глобального решения задачи Коши для уравнения ГЯБ посредством задания граничных значений на поверхности особых характеристик, соответствующих особым оптимальным управлениям [139]. Как и в Главе 1, управление считается одномерным и линейно входящим в систему. Также при описании метода предполагается, что указанная поверхность единственна и что переключение любого допустимого процесса, удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина, может быть совершено только на ней, и притом не более одного раза (соответствующие достаточные условия выводятся). Кроме того, устанавливается гладкость построенной таким образом функции цены. В этом случае поверхность особых характеристик является универсальной согласно модифицированной А. А. Меликяном [37–39, 41] терминологии Р. Айзекса [87]. Разработанный подход продемонстрирован на ряде примеров, в числе которых математические модели терапии однородной твердой несосудистой опухоли и вирусных инфекций.

3.1. Постановка задачи

Рассматривается та же самая задача, что и в Главе 1. Все обозначения Главы 1 до п. 1.2.1 и Предположения 1.1–1.6 (без Предположения 1.7) считаются

сохраняющими силу.

3.2. Описание метода

Через γ^s обозначим пересечение области $G \times (T_-, T_+)$ с совокупностью образов всех таких интегральных кривых системы (1.8), которые соответствуют допустимым особым управлениям [139], пересекают множество $(x, \tau) \in \gamma_0 \times \{0\}$ и рассматриваются до момента первого своего попадания на множество (1.36).

Основная идея предлагаемого метода заключается в задании граничного условия для искомой функции цены на γ^s с целью решения уравнений в частных производных из (1.47) в областях, которые не заполнены интегральными кривыми, составляющими множества Ω^1 и Ω^2 .

Сначала разберем два примера.

Пример 3.1. Рассматривается задача оптимального управления [52]

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -mhe^{-h}, \\ \frac{dh}{dt} = u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \\ \Phi(m(T)) := m(T) \longrightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.1)$$

Имеем

$$\begin{aligned} H(m, h, \psi_1, \psi_2, u) &= -mhe^{-h}\psi_1 + u\psi_2, \\ \begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = he^{-h}\psi_1, & \psi_1(T) = -1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = m(1-h)e^{-h}\psi_1, & \psi_2(T) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $m(t') \neq 0$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $m(t) \neq 0$ и $\text{sign } m(t) \equiv \text{const}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$. Если $h(t') > 0$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $h(t) > 0$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$. Заметим, что $u^s \equiv 0$ — особое управление для фазовых траекторий системы (3.1), удовлетворяющих равенству $h(T) = 1$. Если $h(T) = 1$ и $m(T) \neq 0$, то это единственное особое управление.

Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4,5 Предположения 1.2, положим

$$G := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0, h > 0\}, \quad K := \overline{G},$$

$$G' := \emptyset, \quad G'' := G.$$

Имеем

$$S^1(m, h, \tau) = m \exp \{-\tau h e^{-h}\},$$

$$D^1 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \geq 1\},$$

$$\gamma^1 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h = 1\},$$

$$\Omega^1 = D^1, \quad \gamma^s = \omega^1 = \gamma^1,$$

$$S^2(m, h, \tau) = m \exp \left\{ -\frac{e^{-h}}{R} \left((h+1)(1 - e^{-R\tau}) - R\tau e^{-R\tau} \right) \right\},$$

$$D^2 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \leq \varphi_R(\tau)\},$$

$$\gamma^2 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h = \varphi_R(\tau)\},$$

$$\varphi_R(\tau) := \begin{cases} \frac{R\tau e^{-R\tau}}{1 - e^{-R\tau}}, & \tau \neq 0, \\ 1, & \tau = 0, \end{cases}$$

$$\Omega^2 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \leq 1 - R\tau\},$$

$$\Omega_\tau^2 \subseteq D_\tau^2 \setminus \gamma_\tau^2 \quad \forall \tau \in (0, T_+),$$

$$\gamma_0^1 = \gamma_0^2 = \gamma_0 = \{(m, h) \in G : h = 1\}.$$

Обозначим

$$Q^2 := ((G \times (T_-, T_+)) \setminus D^1) \cup \gamma^1.$$

Пусть S_*^2 — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S_*^2}{\partial \tau} = -\frac{\partial S_*^2}{\partial m} m h e^{-h} + \frac{\partial S_*^2}{\partial h} R, & (m, h, \tau) \in \tilde{Q}^2, \\ S_*^2(m, h, \tau) = S^1(m, h, \tau), & (m, h, \tau) \in \gamma^s = \omega^1 = \gamma^1, \end{cases}$$

где $\tilde{Q}_*^2$ — открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$, определяемая согласно (1.79) и содержащая множество

$$Q_*^2 := ((Q^2 \setminus \Omega^2) \cup \gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T_+)).$$

Тогда

$$S_*^2(m, h, \tau) = m \exp \left\{ \frac{2e^{-1}}{R} - \frac{e^{-h}(h+1)}{R} - \frac{e^{-1}(R\tau + h - 1)}{R} \right\},$$

$$\frac{\partial S_*^2}{\partial h}(m, h, \tau) < 0 \quad \text{при } m > 0, \quad h < 1, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что:

- $S = S^1$ и $u_{\text{opt}} = 0$ в $D^1 \cap (G \times [0, T])$;
- $S = S^2$ и $u_{\text{opt}} = R$ в $\Omega^2 \cap (G \times [0, T])$;
- $S = S_*^2$ и $u_{\text{opt}} = R$ в $Q_*^2 \cap (G \times [0, T])$.

Гладкость построенного решения S всюду в $G \times [0, T]$ проверяется непосредственно. □

Пример 3.2. Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -mh(2-h), \\ \frac{dh}{dt} = -\mu h + u(t), \quad \mu = \text{const} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \quad \frac{R}{\mu} > 1, \\ \Phi(m(T)) := m(T) \longrightarrow \inf \end{cases} \quad (3.2)$$

(отличие от системы из Примера 1.2 лишь в соотношении между константами R и μ). Если $m(t') \neq 0$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $m(t) \neq 0$ и $\text{sign } m(t) \equiv \text{const}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$. Если $0 < h(t') < \frac{R}{\mu}$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, то $0 < h(t) < \frac{R}{\mu}$ на всей временной прямой $t \in (-\infty, +\infty)$.

Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4,5 Предположения 1.2, положим

$$G := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0, \quad \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad K := \bar{G},$$

$$\underline{h} < 0, \quad \bar{h} > \frac{R}{\mu},$$

$$G' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : \underline{h} < h < \bar{h}\}, \quad G'' := \{(m, h) \in \mathbb{R}^2 : m > 0\}.$$

Имеем

$$H(m, h, \psi_1, \psi_2, u) = -mh(2-h)\psi_1 - \mu h\psi_2 + u\psi_2,$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = h(2-h)\psi_1, & \psi_1(T) = -1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = 2m(1-h)\psi_1 + \mu\psi_2, & \psi_2(T) = 0, \end{cases}$$

$$S^1(m, h, \tau) = m \exp \left\{ \frac{h^2}{2\mu} (1 - e^{-2\mu\tau}) - \frac{2h}{\mu} (1 - e^{-\mu\tau}) \right\},$$

$$D^1 = \left\{ (m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \geq \frac{2}{1 + e^{-\mu\tau}} \right\},$$

$$\begin{aligned} S^2(m, h, \tau) = m \exp & \left\{ \frac{1}{2\mu} \left(h - \frac{R}{\mu} \right)^2 (1 - e^{-2\mu\tau}) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\mu} \left(1 - \frac{R}{\mu} \right) \left(h - \frac{R}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu\tau}) - \frac{R}{\mu} \left(2 - \frac{R}{\mu} \right) \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$D^2 = \left\{ (m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \leq \frac{R}{\mu} + 2 \left(1 - \frac{R}{\mu} \right) \frac{1}{1 + e^{-\mu\tau}} \right\},$$

$$\gamma_0^1 = \gamma_0^2 = \gamma_0 = \{(m, h) \in G : h = 1\},$$

$$\Omega_\tau^1 \subseteq D_\tau^1 \setminus \gamma_\tau^1, \quad \Omega_\tau^2 \subseteq D_\tau^2 \setminus \gamma_\tau^2 \quad \forall \tau \in (0, T_+).$$

Если $(m, h)|_{\tau=0} \in \gamma_0$, то $u^s = \mu h$ — единственное особое позиционное управление. Обозначим

$$(m^s(\tau; \tau', (m', h')), h^s(\tau; \tau', h')) :=$$

$$:= (m, h) \Big|_{t=T-\tau}, \quad (m(t=T-\tau'), h(t=T-\tau')) = (m', h'), \quad (3.2), \quad u=\mu h$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall \tau' \in \mathbb{R} \quad \forall (m', h') \in G.$$

Тогда

$$\gamma^s = \{(m^s(\tau; 0, (m', h')), h^s(\tau; 0, h'), \tau) : (m', h') \in \gamma_0,$$

$$\tau \in (T_-, \theta^s(m', h'))\} = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h = 1\},$$

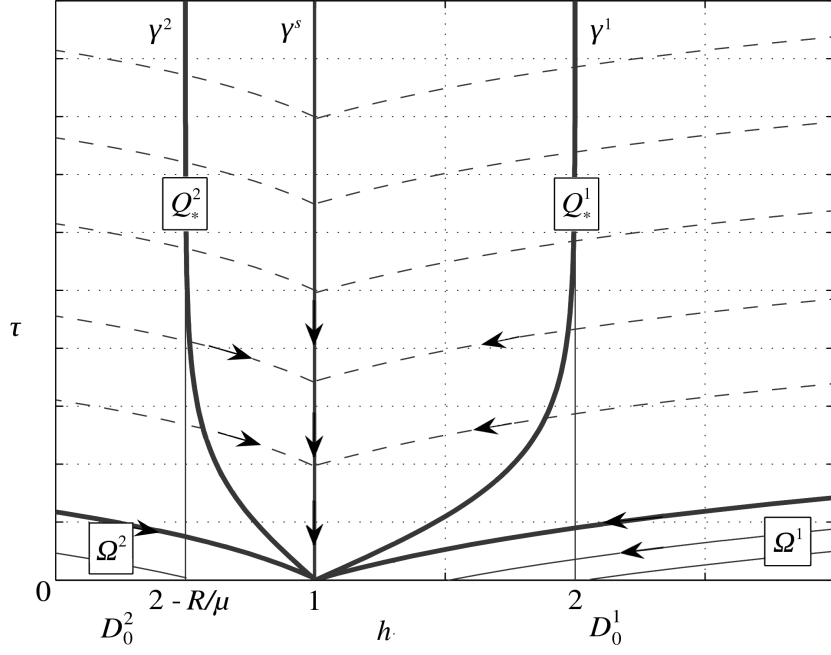


Рис. 3.1. К Примеру 3.2.

где $\theta^s(m', h')$ — первый момент достижения множества (1.36) интегральной кривой

$$(m^s(\tau; 0, (m', h')), h^s(\tau; 0, h'), \tau), \quad \tau \geq 0.$$

Поэтому γ^s делит $G \times (T_-, T_+)$ на две части

$$Q^1 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \geq 1\},$$

$$Q^2 = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h \leq 1\}.$$

Более того,

$$\Omega^i \subset Q^i, \quad Q_*^i \subset \tilde{Q}_*^i,$$

$$Q_*^i := ((Q^i \setminus \Omega^i) \cup \gamma^s \cup \omega^i) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T_+)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_*^i := \{ & (m^s(\tau; \tau', (m', h')), h^s(\tau; \tau', h'), \tau) : \\ & (m', h', \tau') \in \gamma^s, \tau \in (T_-, \tau' + \theta^s(m', h')) \}, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2.$$

Пусть S_{γ^s} , S_*^1 , S_*^2 — решения задач Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{\gamma^s}}{\partial \tau} = \left(-\frac{\partial S_{\gamma^s}}{\partial m} m h (2-h) + \frac{\partial S_{\gamma^s}}{\partial h} (-\mu h + u) \right) \Big|_{u=\mu h, (m,h,\tau) \in \gamma^s} = \\ = -\frac{\partial S_{\gamma^s}}{\partial m} m, \quad (m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+), \\ S_{\gamma^s}(m, h, 0) = m, \quad (m, h) \in G, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_*^1}{\partial \tau} = -\frac{\partial S_*^1}{\partial m} m h (2-h) - \frac{\partial S_*^1}{\partial h} \mu h, \quad (m, h, \tau) \in \tilde{Q}_*^1, \\ S_*^1(m, h, \tau) = S_{\gamma^s}(m, h, \tau), \quad (m, h, \tau) \in \gamma^s, \\ \frac{\partial S_*^2}{\partial \tau} = -\frac{\partial S_*^2}{\partial m} m h (2-h) - \frac{\partial S_*^2}{\partial h} \mu h + \frac{\partial S_*^2}{\partial h} R, \quad (m, h, \tau) \in \tilde{Q}_*^2, \\ S_*^2(m, h, \tau) = S_{\gamma^s}(m, h, \tau), \quad (m, h, \tau) \in \gamma^s. \end{array} \right.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\gamma^s}(m, h, \tau) &= m e^{-\tau}, \\ S_*^1(m, h, \tau) &= m h^{\frac{1}{\mu}} \exp \left\{ \frac{1}{2\mu} (h^2 - 1) - \frac{2}{\mu} (h - 1) - \tau \right\}, \\ S_*^2(m, h, \tau) &= m \left(\frac{\frac{R}{\mu} - h}{\frac{R}{\mu} - 1} \right)^{\frac{1}{\mu} \left(\frac{R}{\mu} - 1 \right)^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\mu} \left(h - \frac{R}{\mu} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\mu} \left(1 - \frac{R}{\mu} \right) \left(h - \frac{R}{\mu} \right) + \frac{3}{2\mu} \left(1 - \frac{R}{\mu} \right)^2 - \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial S_*^1}{\partial h}(m, h, \tau) > 0 \quad m > 0, \quad h > 1, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial S_*^2}{\partial h}(m, h, \tau) < 0 \quad m > 0, \quad h < 1, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что:

- $S = S^1$ и $u_{\text{opt}} = 0$ в $\Omega^1 \cap (G \times [0, T])$;
- $S = S^2$ и $u_{\text{opt}} = R$ в $\Omega^2 \cap (G \times [0, T])$;
- $S = S_*^1$ и $u_{\text{opt}} = 0$ в $Q_*^1 \cap (G \times [0, T])$;
- $S = S_*^2$ и $u_{\text{opt}} = R$ в $Q_*^2 \cap (G \times [0, T])$;

- $S = S_{\gamma^s}$ и $u_{\text{opt}} = \mu h = \mu$ на γ^s .

Гладкость построенного решения S всюду в $G \times [0, T]$ проверяется непосредственно.

Аналогичная картина наблюдается и в общем случае системы [44–46]

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = q(m) - \alpha m f(h), \\ \frac{dh}{dt} = -\mu h + u(t), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad R = \text{const} > 0, \\ \Phi(m(T)) := m(T) \longrightarrow \inf, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $q(m)$ определяется согласно (1.51) или (1.52), r, β, θ — положительные константы, функция $f : [\underline{h}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $\underline{h}$ — отрицательная константа,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(h) > 0 \quad \text{при} \quad h > 0, \\ f'(h) &> 0 \quad \text{при} \quad \underline{h} \leq h < h_0, \quad f'(h_0) = 0, \\ f'(h) &< 0 \quad \text{при} \quad h > h_0, \quad h_0 = \text{const} \in \left(0, \frac{R}{\mu}\right); \end{aligned} \quad (3.4)$$

например, $f(h) := a h e^{-bh}$ с константами $a > 0$, $b > \frac{\mu}{R}$. Примем (1.53) с (1.54). Здесь $\gamma^s = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h = h_0\}$, $u^s \equiv \mu h_0$, функция цены представляется аналитически и является гладкой (соответствующие выкладки проведены в [44–46]). Это математическая модель терапии однородной твердой несосудистой опухоли с немонотонной функцией $f(h)$ (см. Пример из п. 1.2, где функция терапии $f(h)$ была строго возрастающей на полупрямой $h \in [\underline{h}, +\infty)$). При этом $m(t)$ — количество опухолевых клеток в момент времени t , $h(t)$ — концентрация лекарства в момент t , функция $q(\cdot)$ задает логистический закон (в случае (1.51)) либо закон Гомперца (в случае (1.52)) для роста опухоли. $\square$

Опишем формально общую ситуацию, имеющую место в Примере 3.2. Рассмотрим случай, когда особое управление u^s принимает значения только внутри множества P ($u_1 < u^s < u_2$). Случай тривиальных особых управлений ($u^s \equiv u_i$,

$\gamma^s = \omega^i$ для фиксированного $i \in \{1, 2\}$, наблюдаемый в Примере 3.1, может быть разобран аналогично.

Предположение 3.1. *Предположим, что функции f^1, f^2 трижды непрерывно дифференцируемы в K .*

Нетрудно проверить, что $u(\cdot)$ не присутствует явно в производной

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \psi, f^2(x) \rangle \right|_{(1.42)},$$

выраженной через (x, ψ) посредством соотношений (1.42).

Имеем

$$\langle \psi(T), f^2(x(T)) \rangle \Big|_{(1.43)} = \left. \frac{d}{dt} \langle \psi, f^2(x) \rangle \right|_{t=T, (1.42), (1.43)} = 0 \text{ при } x(T) \in \gamma_0. \quad (3.5)$$

Вторая производная $\frac{d^2}{dt^2} \langle \psi, f^2(x) \rangle$ с помощью соотношений (1.42) может быть записана в форме

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \langle \psi, f^2(x) \rangle \right|_{(1.42)} = a_1(x, \psi) + a_2(x, \psi) \cdot u, \quad (3.6)$$

где функции $a_i : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы (в силу Предположения 3.1).

С учетом представления (3.6) из условия $\frac{d^2}{dt^2} \langle \psi, f^2(x) \rangle = 0$ получаем, что

$$u = \tilde{u}^s(x, \psi) := -\frac{a_1(x, \psi)}{a_2(x, \psi)} \text{ при } (x, \psi) \in G \times \mathbb{R}^n, \quad a_2(x, \psi) \neq 0. \quad (3.7)$$

Предположение 3.2. *Предположим, что:*

1) *справедливо включение*

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &:= \{(x, -\nabla \Phi(x)) : x \in \gamma_0\} \subseteq \\ &\subseteq \tilde{E}^s := \{(x, \psi) \in \text{int } K \times \mathbb{R}^n : a_2(x, \psi) > 0\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(тем самым в $\tilde{E}^s$ функция $\tilde{u}^s$ из (3.7) определена и непрерывно дифференцируема, а также выполнено усиленное условие Келли [139]

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = a_2(x, \psi) > 0 \quad \forall (x, \psi) \in \tilde{E}^s, \quad (3.9)$$

или, что то же самое, усиленное условие Лежандра-Клебша [140, 141]), через E^s обозначена открытая связная компонента открытого множества $\tilde{E}^s$, содержащая Γ_0 (существование E^s очевидно, так как Γ_0 связно в силу Предположения 1.6 и пункта 5 Предположения 1.3);

2) при любом $x^0 \in \gamma_0$ задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -f^1(x) - \tilde{u}^s(x, \psi) \cdot f^2(x), \\ \frac{d\psi}{d\tau} = (D_x(f^1(x) + \tilde{u}^s(x, \psi) \cdot f^2(x)))^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$x|_{\tau=0} = x^0, \quad \psi|_{\tau=0} = -\nabla\Phi(x^0), \quad (3.11)$$

рассматриваемая только в открытой области $(x, \psi) \in E^s$ своего фазового пространства, обладает единственным решением $(x^s(\cdot; 0, x^0), \psi^s(\cdot; 0, x^0))$, продолжимым на целый временной полуинтервал $\tau \in (T_-, \theta^s(x^0)]$, где $\theta^s(x^0)$ — первый положительный момент попадания соответствующей интегральной траектории на множество всех позиций $(x, \psi, \tau) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ с $(x, \tau) \in C$ (C определяется согласно (1.36));

3) при любом $x^0 \in \gamma_0$ задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f^1(x) + \tilde{u}^s(x, \psi) \cdot f^2(x), \\ \frac{d\psi}{dt} = -(D_x(f^1(x) + \tilde{u}^s(x, \psi) \cdot f^2(x)))^\top \cdot \psi, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$x|_{t=T} = x^0, \quad \psi|_{t=T} = -\nabla\Phi(x^0), \quad (3.13)$$

тоже рассматриваемая лишь в открытой области $(x, \psi) \in E^s$ своего фазового пространства, имеет единственное решение, продолжимое на целый временной полуинтервал $t \in [T - \theta^s(x^0), T - T_-)$;

4) выполнено требование

$$x \in \text{int } Z^s \text{ и } \tilde{u}^s(x, \psi) = u_{Z^s}^s(x) \in (u_1, u_2) \quad \forall (x, \psi) \in \Gamma^s, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma^s := \{ (x^s(\tau; 0, x^0), \psi^s(\tau; 0, x^0)) : \\ x^0 \in \gamma_0, \tau \in (T_-, \theta^s(x^0)) \}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Z^s — замыкание некоторой выпуклой открытой области в $\mathbb{R}^n$, являющейся его внутренностью $\text{int } Z^s$, $u_{Z^s}^s : Z^s \rightarrow P$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Из пункта 2 Предположения 3.2 (где система (3.10) рассматривается только в области $(x, \psi) \in E^s$) следует, что $\Gamma^s \subseteq E^s$, а потому на основании требования (3.9) усиленное условие Келли справедливо и на Γ^s .

Положим

$$u^s(x) := u_{Z^s}^s(\text{proj}_{Z^s} x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

В силу пункта 4 Предположения 3.2 из равенств

$$\langle \psi(t), f^2(x(t)) \rangle \equiv \frac{d}{dt} \langle \psi(t), f^2(x(t)) \rangle \Big|_{(1.42)} \equiv 0$$

и соотношений (1.42), (1.43) с $x' \in \gamma_0$ выводится, что включение $\tilde{u}^s(x, \psi) \in (u_1, u_2) = \text{int } P$ и независимость $\tilde{u}^s(x, \psi)$ от ψ имеют место тождественно на Γ^s . В Примере 3.2 и примере из п. 3.3 мы таким образом получаем аналитические выражения для $u^s(x) = u_{Z^s}^s(x)$ при $x \in Z^s$.

Из Утверждения 1.7 непосредственно вытекает следующий результат.

Утверждение 3.1. В Предположениях 1.1–1.6, 3.1, 3.2

$$\begin{aligned} \gamma^s &:= \{ (x, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x, \psi, \tau) \in \Gamma^s, \psi \in \mathbb{R}^n \} = \\ &= \{ (x^s(\tau; 0, x^0), \tau) : x^0 \in \gamma_0, \tau \in (T_-, \theta^s(x^0)) \} \end{aligned} \quad (3.17)$$

есть связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, делящая $G \times (T_-, T_+)$ на две части, которые при удалении из них γ^s становятся открытыми областями в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим

$$\theta_T^s(x) := \min(T, \theta^s(x)) \quad \forall x \in \gamma_0. \quad (3.18)$$

Из представления (3.6) и Предположения 3.2 следует, что [140, 141] если

$$\begin{aligned} (x', \psi') &= (x^s(\tau'; 0, x^0), \psi^s(\tau'; 0, x^0)), \\ x^0 &\in \gamma_0, \quad \tau' \in [0, \theta_T^s(x^0)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

то для некоторых чисел $\delta_i(x^0, \tau') \in (0, \theta_T^s(x^0) - \tau')$, $i = 1, 2$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \langle \psi^1(\tau; \tau', x', \psi'), f^2(x^1(\tau; \tau', x')) \rangle &< 0 \\ \forall \tau &\in (\tau', \tau' + \delta_1(x^0, \tau')), \\ \langle \psi^2(\tau; \tau', x', \psi'), f^2(x^2(\tau; \tau', x')) \rangle &> 0 \\ \forall \tau &\in (\tau', \tau' + \delta_2(x^0, \tau')) \end{aligned} \quad (3.20)$$

(см. Определение 1.4). Таким образом, локальный синтез экстремалей в некоторой окрестности особой поверхности γ^s строится посредством соединения особых интегральных траекторий с регулярными (соответствующими постоянным граничным управлениям $u \equiv u_i$, $i = 1, 2$). Более того, части полученных при этом траекторий, лежащие в некоторой окрестности γ^s , удовлетворяют принципу максимума Понтрягина.

Предположение 3.3. *Предположим, что из представления (3.19) следуют неравенства*

$$\begin{aligned} \langle \psi^1(\tau; \tau', x', \psi'), f^2(x^1(\tau; \tau', x')) \rangle &< 0 \quad \forall \tau \in (\tau', \theta_T^s(x^0)), \\ \langle \psi^2(\tau; \tau', x', \psi'), f^2(x^2(\tau; \tau', x')) \rangle &> 0 \quad \forall \tau \in (\tau', \theta_T^s(x^0)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Заметим, что неравенства (3.21) представляют собой глобальный аналог локальных неравенств (3.20).

Предположение 3.4. *Предположим, что*

$$\Omega_\tau^i \subseteq D_\tau^i \setminus \gamma_\tau^i \quad \forall \tau \in (0, T], \quad i = 1, 2. \quad (3.22)$$

Предположение 3.4 в ряде случаев может быть проверено с помощью Утверждений 1.9, 1.10.

Предположения 3.3, 3.4 позволяют нам сформулировать алгоритм глобального синтеза оптимального управления (без них можно было бы говорить лишь о локальном синтезе в некоторой окрестности особой поверхности γ^s) в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.6, 3.1–3.4, $x' \in G$, $t' \in [0, T)$. Обозначим*

$$J_i := \Phi(x(T; t', x', (1.1), u \equiv u_i)), \quad i = 1, 2.$$

Пусть при $i = 1, 2$ интегральная кривая

$$(x(t; t', x', (1.1), u \equiv u_i), T - t), \quad t \in [t', T],$$

пересекает особую поверхность γ^s в моменты времени $\hat{t}_{ij} \in [t', T]$, $j = \overline{1, m_i}$, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($m_i = 0$ означает отсутствие таких пересечений). Рассмотрим позиционные управления

$$\hat{u}_{ij}(t, x) := \begin{cases} u_i, & t \in [t', \hat{t}_{ij}), \\ u^s(x) = u_{Z^s}^s(x), & t \in (\hat{t}_{ij}, T], \end{cases} \quad j = \overline{1, m_i}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$\hat{J}_{ij} := \Phi(x(T; t', x', (1.1), u = \hat{u}_{ij}(t, x))), \quad j = \overline{1, m_i}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$S(x', T - t') = \min \left(J_1, J_2, \hat{J}_{11}, \hat{J}_{12}, \dots, \hat{J}_{1m_1}, \hat{J}_{21}, \hat{J}_{22}, \dots, \hat{J}_{2m_2} \right).$$

Определение 3.1. *Обозначим через Q^1, Q^2 множества, на которые $G \times (T_-, T_+)$ делится поверхностью γ^s согласно Утверждению 3.1, справедливо-*

му в Предположениях 1.1–1.6, 3.1, 3.2. Кроме того, положим

$$\begin{aligned} Q_\tau^i &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in Q^i\}, \\ \gamma_\tau^s &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \tau) \in \gamma^s\} \\ \forall \tau \in (T_-, T_+), \quad i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Предположение 3.5. Предположим, что, какова бы ни была точка $(x, \tau) \in \gamma^s$, если $n_{\gamma^s}^1(x, \tau)$ — какой-нибудь нормальный вектор к γ^s в точке (x, τ) , принадлежащий (ради определенности) нормальному конусу $N_{Q^1}^{\text{Cl}}(x, \tau)$ (тогда в Предположениях 1.1–1.6, 3.1, 3.2 $n_{\gamma^s}^2(x, \tau) := -n_{\gamma^s}^1(x, \tau)$ — нормальный вектор к γ^s в (x, τ) , принадлежащий $N_{Q^2}^{\text{Cl}}(x, \tau)$), то выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle n_{\gamma^s}^1(x, \tau), (-f(x, u_1), 1) \rangle &< 0, \\ \langle n_{\gamma^s}^1(x, \tau), (-f(x, u_2), 1) \rangle &> 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Например, в рассмотренной выше задаче (3.3) с немонотонной функцией терапии, удовлетворяющей требованиям (3.4), имеем $\gamma^s = \{(m, h, \tau) \in G \times (T_-, T_+) : h = h_0\}$, $u^s \equiv \mu h_0 \in (0, R)$ и справедливость Предположения 3.5 проверяется элементарно.

Нетрудно видеть, что в сделанных предположениях

$$Q_0^i = \Omega_0^i = D_0^i, \quad \Omega_\tau^i \subseteq Q_\tau^i \setminus \gamma_\tau^s \quad \forall \tau \in (0, T_+), \quad i = 1, 2 \quad (3.25)$$

(см. Рисунок 3.1).

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.2. Допустим, что выполнены Предположения 1.1–1.6, 3.1–3.5,

$$Q_*^i := ((Q^i \setminus \Omega^i) \cup \gamma^s \cup \omega^i) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T_+)), \quad i = 1, 2 \quad (3.26)$$

(см. Рисунок 3.1). Тогда при $i = 1, 2$ существует единственное гладкое решение $S_*^i : \tilde{Q}_*^i \times (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial S_*^i}{\partial \tau} = \langle \nabla_x S_*^i, f^1(x) \rangle + \langle \nabla_x S_*^i, f^2(x) \rangle u_i, & (x, \tau) \in \tilde{Q}_*^i, \\ S_*^i(x, \tau) = S_{\gamma^s}(x, \tau), & (x, \tau) \in \gamma^s, \end{cases} \quad (3.27)$$

где

$$\tilde{Q}_*^i := \{ (x^i(\tau; \tau', x'), \tau) : (x', \tau') \in \gamma^s, \tau \in (T_-, \tau' + \theta^i(x')) \} \quad (3.28)$$

есть содержащая множество Q_*^i открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. Определение 1.4), а функция $S_{\gamma^s} : \gamma^s \rightarrow \mathbb{R}$ с учетом представления (3.17) определяется так:

$$\begin{aligned} \forall (x', \tau') \in \gamma^s \quad \exists! x^{s,0}(x', \tau') \in \gamma_0 \text{ такое, что} \\ x' = x^s(\tau'; 0, x^{s,0}(x', \tau')), \\ S_{\gamma^s}(x', \tau') := \Phi(x^{s,0}(x', \tau')) \quad \forall (x', \tau') \in \gamma^s. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Более того,

$$S(x, \tau) = \begin{cases} S^i(x, \tau), & (x, \tau) \in \Omega^i \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ S_*^i(x, \tau), & (x, \tau) \in Q_*^i \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ & i = 1, 2, \\ S_{\gamma^s}(x, \tau), & (x, \tau) \in \gamma^s, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$u_{\text{opt}}(x, T - \tau) = \begin{cases} u_i, & (x, \tau) \in Q^i \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]), \\ & i = 1, 2, \\ u^s(x) = u_{Z^s}^s(x), & (x, \tau) \in \gamma^s \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T]). \end{cases} \quad (3.31)$$

О схеме доказательства Теоремы 3.2 см. в Приложении В.

3.3. Математическая модель терапии вирусных инфекций

Рассматривается математическая модель терапии вирусных инфекций [52]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 - \gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_1 f_1(h), \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 + \alpha_3 f_3(h) - \gamma_2 x_2 - \alpha_2 x_2 f_2(h), \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_3 h + u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad t \in [0, T], \\ \Phi(x_1(T), x_2(T)) := x_1^2(T) + \varepsilon x_2^2(T) \longrightarrow \inf, \end{cases} \quad (3.32)$$

где:

- $x_1(t)$ — численность основных вирусов в момент t , $x_2(t)$ — численность вирусов-мутантов в момент t , $h(t)$ — концентрация лекарства в момент t ;
- $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, — скорости воспроизводства основных и мутировавших вирусов;
- $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$, — показатели смертности вирусов двух типов, $\gamma_3 > 0$ — коэффициент диссипации лекарства;
- α_i , $i = 1, 2, 3$, R , ε — положительные константы;
- $f_i(h) = f(h) := \frac{h}{B+h}$, $i = 1, 2$, $B = \text{const} > 0$, — функции терапии, характеризующие интенсивность негативного влияния лекарства на клетки, зараженные основными и мутировавшими вирусами,

$$f'(h) = \frac{B}{(B+h)^2} > 0 \quad \forall h > -B; \quad (3.33)$$

- $f_3(h) := \frac{h^2}{A+h^2}$, $A = \text{const} > 0$, — функция, описывающая увеличение скорости воспроизводства вирусов-мутантов под воздействием лекарства,

$$f'_3(h) = \frac{2Ah}{(A+h^2)^2} > 0 \quad \forall h > 0; \quad (3.34)$$

- $u(t)$ — управляющая функция, которая задает количество лекарства, поступающего в организм пациента в единицу времени.

Чтобы обеспечить выполнение пунктов 4,5 Предположения 1.2, возьмем

$$\begin{aligned}
G &:= \left\{ (x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x}_1 < x_1 < \bar{x}_1, \underline{x}_2 < x_2 < \bar{x}_2, \right. \\
&\quad \left. 0 < h < \frac{R}{\gamma_3} \right\}, \\
K &:= \bar{G}, \\
G' &:= \left\{ (x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x}_1 < x_1 < \bar{x}_1, \underline{x}_2 < x_2 < \bar{x}_2 \right\}, \\
G'' &:= \left\{ (x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^3 : 0 < h < \frac{R}{\gamma_3} \right\}, \\
0 < \underline{x}_1 &< \frac{\lambda_1}{\gamma_1 + \alpha_1 f\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}, \quad \bar{x}_1 > \frac{\lambda_1}{\gamma_1}, \\
0 < \underline{x}_2 &< \frac{\lambda_2}{\gamma_2 + \alpha_2 f\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}, \quad \bar{x}_2 > \frac{\lambda_2 + \alpha_3 f_3\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}{\gamma_2}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Запишем сопряженную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = (\gamma_1 + \alpha_1 f(h))\psi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = (\gamma_2 + \alpha_2 f(h))\psi_2, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \alpha_1 x_1 f'(h)\psi_1 + (\alpha_2 x_2 f'(h) - \alpha_3 f'_3(h))\psi_2 + \gamma_3 \psi_3, \\ \psi_1(T) = -2x_1(T), \quad \psi_2(T) = -2\varepsilon x_2(T), \quad \psi_3(T) = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Из (3.32), (3.36) имеем

$$\begin{aligned}
h(t) &= e^{\gamma_h(T-t)} \left(h(T) - \int_t^T e^{-\gamma_h(T-s)} u(s) ds \right), \\
x_1(t) &= x_1(T) \exp \left(\int_t^T (\gamma_1 + \alpha_1 f(h(s))) ds \right) - \\
&\quad - \lambda_1 \int_t^T \exp \left(\int_t^s (\gamma_1 + \alpha_1 f(h(\xi))) d\xi \right) ds,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_2(T) \exp \left(\int_t^T (\gamma_2 + \alpha_2 f(h(s))) ds \right) - \\
&\quad - \int_t^T (\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h(s))) \exp \left(\int_t^s (\gamma_2 + \alpha_2 f(h(\xi))) d\xi \right) ds,
\end{aligned}$$

$$\psi_1(t) = -2x_1(T) \exp \left(- \int_t^T (\gamma_1 + \alpha_1 f(h(s))) ds \right), \tag{3.38}$$

$$\psi_2(t) = -2\varepsilon x_2(T) \exp \left(- \int_t^T (\gamma_2 + \alpha_2 f(h(s))) ds \right),$$

$$\psi_1(t) < 0 \text{ и } \psi_2(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ при } (x_1(T), x_2(T), h(T)) \in G, \tag{3.39}$$

$$\psi_3(t) = -e^{-\gamma_3 t} \int_t^T e^{\gamma_3 s} \rho(x_1(s), x_2(s), h(s), \psi_1(s), \psi_2(s)) ds, \tag{3.40}$$

$$\rho(x_1, x_2, h, \psi_1, \psi_2) := \alpha_1 x_1 f'(h) \psi_1 + (\alpha_2 x_2 f'(h) - \alpha_3 f'_3(h)) \psi_2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \alpha_1 \psi_1 (x_1 f'(h)(\gamma_1 + \alpha_1 f(h)) + (\lambda_1 - (\gamma_1 + \alpha_1 f(h))x_1) \cdot \\
&\cdot f'(h) + x_1 f''(h)(-\gamma_3 h + u(t))) + \psi_2 ((\gamma_2 + \alpha_2 f(h))(\alpha_2 x_2 \cdot \\
&\cdot f'(h) - \alpha_3 f'_3(h)) + \alpha_2 ((\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h) - (\gamma_2 + \alpha_2 f(h))x_2) \cdot \\
&\cdot f'(h) + x_2 f''(h)(-\gamma_3 h + u(t))) - \alpha_3 f''_3(h)(-\gamma_3 h + u(t))) = \\
&= \alpha_1 \psi_1 (\lambda_1 f'(h) + x_1 f''(h)(-\gamma_3 h + u(t))) + \psi_2 (-\alpha_3 f'_3(h)(\gamma_2 + \\
&+ \alpha_2 f(h)) + \alpha_2 f'(h)(\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h)) + (\alpha_2 x_2 f''(h) - \alpha_3 f''_3(h)) \cdot \\
&\cdot (-\gamma_3 h + u(t))) = \alpha_1 \lambda_1 \psi_1 f'(h) + \psi_2 (-\alpha_3 f'_3(h)(\gamma_2 + \\
&+ \alpha_2 f(h)) + \alpha_2 f'(h)(\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h))) + (\alpha_1 \psi_1 x_1 f''(h) + \\
&+ \psi_2 (\alpha_2 x_2 f''(h) - \alpha_3 f''_3(h))) (-\gamma_3 h + u(t)),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{dt^2} = \frac{d\rho}{dt} + \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + \gamma_3 (\rho(x_1, x_2, h, \psi_1, \psi_2) + \gamma_3 \psi_3), \tag{3.42}$$

$$a_2(x_1, x_2, h, \psi_1, \psi_2) = \alpha_1 \psi_1 x_1 f''(h) + \psi_2 (\alpha_2 x_2 f''(h) - \alpha_3 f''_3(h)),$$

$$\rho = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = \psi_2 \cdot \frac{\alpha_3 f'_3(h) - \alpha_2 x_2 f'(h)}{\alpha_1 x_1 f'(h)}, \tag{3.43}$$

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0} = \psi_2 \cdot \zeta(x_1, x_2, h, u(t)),$$

$$\begin{aligned}
\zeta(x_1, x_2, h, u) &:= \lambda_1 x_1^{-1} (\alpha_3 f'_3(h) - \alpha_2 x_2 f'(h)) - \\
&- \alpha_3 f'_3(h)(\gamma_2 + \alpha_2 f(h)) + \alpha_2 f'(h)(\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h)) + \\
&+ \alpha_3 \left(\frac{f'_3(h) f''(h)}{f'(h)} - f''_3(h) \right) (-\gamma_3 h + u),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$a_2(x_1, x_2, h, \psi_1, \psi_2)|_{\rho=0} = \alpha_3 \psi_2 \left(\frac{f'_3(h) f''(h)}{f'(h)} - f''_3(h) \right), \tag{3.45}$$

$$\zeta(x_1, x_2, h, u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow u &= v^s(x_1, x_2, h) := \gamma_3 h - \\
&- \left(\alpha_3 \left(\frac{f'_3(h) f''(h)}{f'(h)} - f''_3(h) \right) \right)^{-1} (\lambda_1 x_1^{-1} (\alpha_3 f'_3(h) - \\
&- \alpha_2 x_2 f'(h)) - \alpha_3 f'_3(h)(\gamma_2 + \alpha_2 f(h)) + \\
&+ \alpha_2 f'(h)(\lambda_2 + \alpha_3 f_3(h))).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Примем обозначения (1.104).

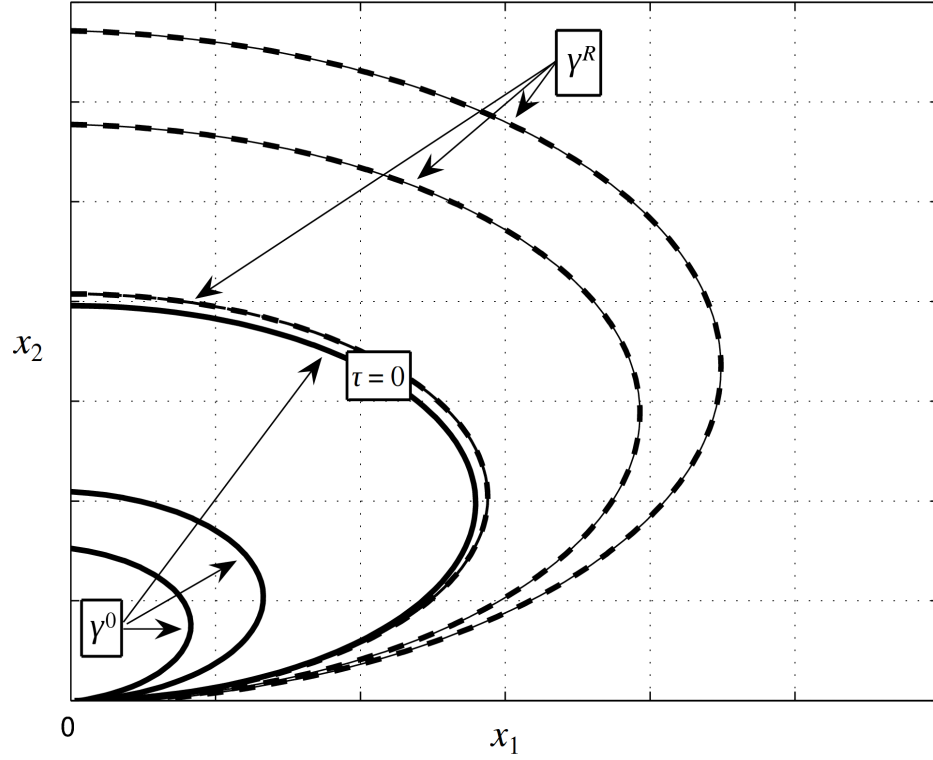


Рис. 3.2. Множества γ^0, γ^R в математической модели терапии вирусных инфекций.

Проанализируем знак

$$\text{sign } \left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} = \text{sign } \rho|_{t=T}. \quad (3.47)$$

Положим

$$\nu(x_1, x_2, h) := -2\alpha_1 f'(h) x_1^2 - 2\varepsilon x_2 (\alpha_2 x_2 f'(h) - \alpha_3 f'_3(h)). \quad (3.48)$$

Если $\nu(x_1(T), x_2(T), h(T)) < 0$, то $\rho(T) < 0$ и, следовательно, $\left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} < 0$.

Если $\nu(x_1(T), x_2(T), h(T)) > 0$, то $\rho(T) > 0$ и, следовательно, $\left. \frac{d\psi_3}{dt} \right|_{t=T} > 0$.

На основании Утверждения 1.8 получаем следующий результат (см. также Утверждение 1.11).

Утверждение 3.2. *Имеют место представления*

$$\begin{aligned} D_0^0 &= \{(x_1, x_2, h) \in G : \nu(x_1, x_2, h) \geq 0\}, \\ D_0^R &= \{(x_1, x_2, h) \in G : \nu(x_1, x_2, h) \leq 0\}, \\ \gamma_0^0 &= \gamma_0^R = \gamma_0 = \{(x_1, x_2, h) \in G : \nu(x_1, x_2, h) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Также отметим, что сечения множеств $\gamma_\tau^0, \gamma_\tau^R$, $\tau \in \mathbb{R}$, плоскостями с фиксированными значениями $h = \tilde{h} \in \left(0, \frac{R}{\gamma_3}\right)$ являются частями представляемых аналитически эллипсов на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами (x_1, x_2) [52] (см. Рисунок 3.2). В частности,

$$\begin{aligned} \gamma_0^0 &= \gamma_0^R = \gamma_0 = \left\{ (x_1, x_2, h) \in G : \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^2 + \varepsilon \left(x_2 - \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 = \varepsilon \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

В силу (3.33), (3.34) имеем

$$f''(h) = -\frac{2B}{(B+h)^3}, \quad f_3''(h) = 2A \frac{A-3h^2}{(A+h^2)^3}. \quad (3.51)$$

Предположение 3.6. *Предположим, что*

$$-h^4 - 4Bh^3 + 3(A-B^2)h^2 + 4ABh + AB^2 > 0 \quad \forall h \in \left[0, \frac{R}{\gamma_3}\right], \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &< \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \varepsilon} \cdot \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}{f'\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)} < \bar{x}_1, \\ \underline{x}_2 &< \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}{f'\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}{f'\left(\frac{R}{\gamma_3}\right)}\right)^2 - \frac{\alpha_1}{\varepsilon \alpha_2} \underline{x}_1^2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Утверждение 3.3. *Допустим, что для рассматриваемой задачи (3.32) справедливо Предположение 3.6. Тогда γ_0 — связная регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^3$, делящая G на две части D_0^0 и D_0^R .*

Утверждение 3.3 доказано в Приложении В.

Для выполнения усиленного условия Келли (усиленного условия Лежандра-Клебша), упомянутого в пункте 1 Предположения 3.2, с учетом неравенств (3.39) и представления (3.45) потребуем, чтобы

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{f'_3(h)f''(h)}{f'(h)} - f''_3(h) = \frac{1}{f'(h)} (f'_3(h)f''(h) - f''_3(h)f'(h)) = \\
&= -\frac{1}{f'(h)} \left(\frac{2Ah}{(A+h^2)^2} \cdot \frac{2B}{(B+h)^3} + 2A \frac{A-3h^2}{(A+h^2)^3} \cdot \frac{B}{(B+h)^2} \right) = \\
&= -\frac{2AB}{(A+h^2)^3 (B+h)^3} (2h(A+h^2) + (A-3h^2)(B+h)) = \\
&= \frac{2AB}{(A+h^2)^3 (B+h)^3} (h^3 + 3Bh^2 - 3Ah - AB),
\end{aligned}$$

т. е. мы приходим к следующему предположению.

Предположение 3.7. *Предположим, что*

$$h^3 + 3Bh^2 - 3Ah - AB < 0 \quad \forall h \in \left[0, \frac{R}{\gamma_3}\right]. \quad (3.54)$$

Также будем считать, что все значения непрерывной функции $v^s : K \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой согласно (3.46), в целой области G (а не только при $(x_1, x_2, h) \in \gamma^s$) принадлежат интервалу $\text{int } P = (0, R)$.

Предположение 3.8. *Предположим, что*

$$0 < v^s(x_1, x_2, h) < R \quad \forall (x_1, x_2, h) \in G. \quad (3.55)$$

Тогда можно положить

$$Z^s := K := \overline{G}, \quad u_{Z^s}^s(x_1, x_2, h) := v^s(x_1, x_2, h) \quad \forall (x_1, x_2, h) \in Z^s. \quad (3.56)$$

Таким образом, принимая во внимание Предположения 3.6–3.8, мы приходим к выводу, что в данной задаче справедливы Предположения 1.1–1.6, 3.1, 3.2, а потому и применимо Утверждение 3.1.

Убедимся в том, что при этом выполнены и Предположения 3.3, 3.4. Для этого достаточно, зафиксировав момент $T' \in (0, T]$, показать, что в сделанных

предположениях имеют место импликации

$$\begin{aligned}
& \{\psi_3(T') = 0, \quad \rho(x_1(T'), x_2(T'), h(T'), \psi_1(T'), \psi_2(T')) \leq 0, \\
& \quad u(t) = R \quad \forall t \in (0, T')\} \Rightarrow \{\psi_3(t) > 0 \quad \forall t \in (0, T')\}, \\
& \{\psi_3(T') = 0, \quad \rho(x_1(T'), x_2(T'), h(T'), \psi_1(T'), \psi_2(T')) \geq 0, \\
& \quad u(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T')\} \Rightarrow \{\psi_3(t) < 0 \quad \forall t \in (0, T')\}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Учитывая справедливость представления, получаемого из первого равенства в (3.40) заменой T на T' , при условии $\psi_3(T') = 0$, мы заключаем, что истинность (3.57) будет следовать из выполнения импликаций

$$\begin{aligned}
& \{\psi_3(T') = 0, \quad \rho(x_1(T'), x_2(T'), h(T'), \psi_1(T'), \psi_2(T')) \leq 0, \\
& \quad u(t) = R \quad \forall t \in (0, T')\} \Rightarrow \{\rho(x_1(t), x_2(t), h(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) < \\
& \quad \quad \quad < 0 \quad \forall t \in (0, T')\}, \\
& \{\psi_3(T') = 0, \quad \rho(x_1(T'), x_2(T'), h(T'), \psi_1(T'), \psi_2(T')) \geq 0, \\
& \quad u(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T')\} \Rightarrow \{\rho(x_1(t), x_2(t), h(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) > \\
& \quad \quad \quad > 0 \quad \forall t \in (0, T')\}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Согласно (3.44) $\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0}$ представляется в виде выражения, линейного по $u(t)$, причем соответствующий коэффициент при $u(t)$ равен (3.45) и положителен на основании неравенств (3.39) и Предположения 3.7. Кроме того, в силу (3.46) $\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0}$ обращается в нуль только при $u = v^s(x_1, x_2, h)$. Поэтому вследствие Предположения 3.8 имеем

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0, u \equiv 0} < 0 = \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0, u=v^s(x_1, x_2, h)} < \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\rho=0, u \equiv R}.$$

Отсюда уже непосредственно вытекают импликации (3.58), что и требовалось доказать.

Стало быть, для задачи (3.32) в Предположениях 3.6–3.8 алгоритм синтеза оптимального управления описывается Теоремой 3.1.

Чтобы можно было применить Теорему 3.2, необходимо проверить выполнение Предположения 3.5. Однако в рассматриваемом примере не было получе-

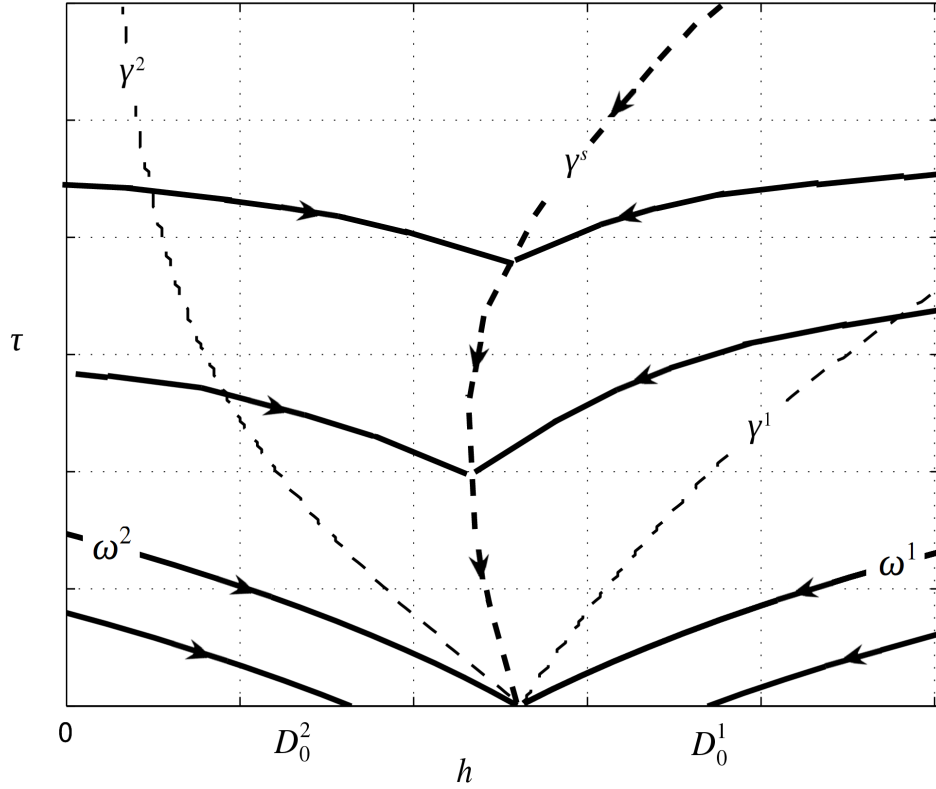


Рис. 3.3. Синтез оптимального управления в математической модели терапии вирусных инфекций при справедливых Предположениях 3.5–3.8.

но аналитическое представление для γ^s , а потому вопрос установления справедливости Предположения 3.5 аналитическим путем остается нерешенным. Напомним, что в обсуждавшейся выше задаче (3.3) с немонотонной функцией терапии, удовлетворяющей условиям (3.4), γ^s обладает тривиальным аналитическим представлением и выполнение Предположения 3.5 проверяется элементарно.

Вместе с тем, действуя неформально, можно проводить численную проверку справедливости Предположения 3.5 для имеющихся конкретных значений параметров следующим образом. Численно строятся интегральные кривые, составляющие γ^s . Для каждой точки (x'_1, x'_2, h', τ') из конечного подмножества $\mathbb{R}^4$, аппроксимирующего γ^s , нужно убедиться в том, что при $i = 1, 2$ для доста-

точно малых $\beta_i > 0$ имеет место включение

$$(x'_1, x'_2, h', \tau') + \beta_i \cdot (-f(x'_1, x'_2, h', u_i), 1) \in Q^i \setminus \gamma^s;$$

здесь f — функция, задающая правую часть системы уравнений динамики из (3.32), $u_1 = 0$, $u_2 = R$. При этом можно использовать представление

$$\begin{aligned} Q^i \setminus \gamma^s &= \{(x''_1, x''_2, h'', \tau'') \in G \times (T_-, T_+) : \\ & (x_1(T), x_2(T), h(T)) \big|_{(3.32)}, u = v^s(x_1, x_2, h), (x_1(t''), x_2(t''), h(t'')) = (x''_1, x''_2, h'') \in \\ & \in D_0^i \setminus \gamma_0, t'' = T - \tau''\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

3.4. Гладкие решения уравнения ГЯБ

Исследуем вопрос проверки гладкости функции цены (решения задачи Коши для уравнения ГЯБ) в условиях Теоремы 3.2.

Нетрудно убедиться в том, что в условиях Теоремы 3.2 фазовые компоненты характеристик задачи (1.44) с разными начальными позициями при $\tau = 0$ (т. е. при $t = T$) не пересекаются друг с другом. Эта ситуация наблюдалась в п. 1.2.3.

По аналогии с рассуждениями из доказательства Теоремы 1.6 (приведенного в Приложении В) может быть установлена следующая теорема.

Теорема 3.3. *В условиях Теоремы 3.2 функция цены является гладкой всюду в $G \times (0, T)$.*

Гладкость функций цены, построенных явно, аналитически в Примерах 3.1, 3.2, проверялась непосредственно. Если задача из п. 3.3 удовлетворяет всем условиям Теоремы 3.2, то гладкость соответствующей функции цены вытекает из Теоремы 3.3.

Таким образом, в условиях Теоремы 3.2 поверхность γ^s , во всех точках которой сохраняется гладкость функции цены, является универсальной согласно модифицированной А. А. Меликяном [37–39, 41] терминологии Р. Айзекса [87].

Оценка альтернативных стратегий управления системами с асимптотически устойчивыми положениями равновесия

Как известно, отыскание решений многих прикладных задач оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования затруднительно. Кроме того, использование итерационных методов оптимального управления [148, 154] часто оказывается чрезвычайно трудоемким процессом и далеко не всегда может быть обосновано той или иной теоремой о сходимости по функционалу. Однако для ряда автономных систем с терминальным целевым функционалом, имеющих при каждом фиксированном значении управляющего параметра единственное и асимптотически устойчивое положение равновесия, удастся построить “разумное” допустимое управление, руководствуясь лишь анализом свойств динамики. Такие управления принято называть “альтернативными” [48, 49, 80] по отношению к управлениям, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина. В данной главе для указанного класса систем предложен способ априорного оценивания отклонения значения целевого функционала на альтернативном управлении от оптимального значения, основанный на применении аппарата функций Ляпунова и результатов предварительного исследования принципом максимума Понтрягина.

Разработанный подход продемонстрирован на несколько измененном примере из Главы 1 (см. также [48, 80]), в котором рассматривается математическая модель терапии лейкоза. Альтернативное управление формируется на основе содержательного смысла задачи и состоит в том, чтобы как можно быстрее привести концентрацию лекарства к определенному равновесному значению и

впоследствии поддерживать ее постоянной до конечного момента времени. С помощью уточнения теоремы Гершгорина о локализации собственных значений [155] построена функция Ляпунова, зависящая от управляющего параметра и соответствующего асимптотически устойчивого положения равновесия.

Оценка альтернативного управления в примере выведена не для сколь угодно большого конечного момента времени T ввиду наложенных на параметры задачи ограничений, поэтому утверждать, что отклонение по функционалу от оптимального значения сходится к нулю при $T \rightarrow +\infty$, мы не можем. Несмотря на это, результаты численного моделирования показывают относительную малость правой части оценки для достаточно больших допустимых T .

4.1. Пример

Прежде чем сформулировать утверждения для общего случая, продемонстрируем возможность построения альтернативного управления и оценки его погрешности по функционалу на конкретном примере.

Рассматривается математическая модель терапии лейкоза [48]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = r_l L \ln \frac{L_a}{L} - \gamma_l L - f_l(h)L, \\ \frac{dN}{dt} = r_n N \ln \frac{N_a}{N} - \gamma_n N - cNL - f_n(h)N, \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ L(0) = L_0, \quad N(0) = N_0, \quad h(0) = h_0, \\ \Phi_1(L(T), N(T)) := (L(T))^2 + \alpha \left(N(T) - \check{N} \right)^2 \longrightarrow \inf, \\ f_l(h) := a_l f_0(h), \quad f_n(h) := a_n f_0(h), \quad f_0(h) := h e^{-bh}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$f_l(h) := a_l f_0(h), \quad f_n(h) := a_n f_0(h), \quad f_0(h) := h e^{-bh}. \quad (4.2)$$

В данном случае функции терапии немонотонны:

$$\begin{aligned} f'_0(h) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq h < h_m, \quad f'_0(h_m) = 0, \\ f'_0(h) &< 0 \quad \text{при} \quad h > h_m, \quad h_m := \frac{1}{b}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Замена переменных (1.62) приводит задачу (4.1) к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dl}{dt} = -r_l l + \gamma_l + f_l(h), \\ \frac{dn}{dt} = -r_n n + \gamma_n + c_a e^{-l} + f_n(h), \\ \frac{dh}{dt} = -\gamma_h h + u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ l(0) = l_0 := \ln \frac{L_a}{L_0}, \quad n(0) = n_0 := \ln \frac{N_a}{N_0}, \quad h(0) = h_0, \\ \Phi(l(T), n(T)) := L_a^2 e^{-2l(T)} + \alpha N_a^2 \left(e^{-n(T)} - e^{-\check{n}} \right)^2 \longrightarrow \inf, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

где $c_a := cL_a$, $\check{n} := \ln \frac{\check{N}}{N_0}$. Ясно, что для достаточно больших положительных чисел $\bar{l}, \bar{n}, \bar{h}$ параллелепипед

$$D := \{0 \leq l \leq \bar{l}, 0 \leq n \leq \bar{n}, 0 \leq h \leq \bar{h}\} \quad (4.5)$$

сильно инвариантен относительно управляемой системы (4.4), т. е. вектор правой части соответствующей системы уравнений динамики не направлен вне D на всей границе ∂D при любом допустимом значении управляющего параметра. В самом деле, $\bar{l}, \bar{n}, \bar{h}$ можно подобрать, исходя из неравенств

$$\begin{aligned} -\gamma_h \bar{h} + R &\leq 0, \quad \bar{h} \geq h_0, \\ -r_l \bar{l} + \gamma_l + a_l h_m e^{-b h_m} &\leq 0, \quad \bar{l} \geq l_0, \\ -r_n \bar{n} + \gamma_n + c_a + a_n h_m e^{-b h_m} &\leq 0, \quad \bar{n} \geq n_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \bar{h} &:= \max \left\{ h_0, \frac{R}{\gamma_h} \right\}, \\ \bar{l} &:= \max \left\{ l_0, \frac{\gamma_l + \frac{a_l}{b e}}{r_l} \right\}, \\ \bar{n} &:= \max \left\{ n_0, \frac{\gamma_n + c_a + \frac{a_n}{b e}}{r_n} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Далее всюду считается, что $(l, n, h) \in D$.

А. Зафиксируем произвольное $\bar{u} \in [0, R]$. При $u(t) \equiv \bar{u}$ система (4.4) обладает единственным положением равновесия $(l^*(\bar{u}), n^*(\bar{u}), h^*(\bar{u}))$, где

$$\begin{aligned} h^*(\bar{u}) &= \frac{\bar{u}}{\gamma_h} \in \left[0, \frac{R}{\gamma_h}\right], \quad l^*(\bar{u}) = \frac{\gamma_l + f_l(h^*(\bar{u}))}{r_l} > 0, \\ n^*(\bar{u}) &= \frac{\gamma_n + c_a e^{-l^*(\bar{u})} + f_n(h^*(\bar{u}))}{r_n} > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Замена

$$\tilde{l} := l - l^*(\bar{u}), \quad \tilde{n} := n - n^*(\bar{u}), \quad \tilde{h} := h - h^*(\bar{u}) \quad (4.8)$$

приводит систему (4.4) с $u(t) \equiv \bar{u}$ к виду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{l}}{dt} = -r_l \tilde{l} + f_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) - f_l(h^*(\bar{u})), \\ \frac{d\tilde{n}}{dt} = -r_n \tilde{n} + c_a \left(e^{-(\tilde{l} + l^*(\bar{u}))} - e^{-l^*(\bar{u})} \right) + \\ \quad + f_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) - f_n(h^*(\bar{u})), \\ \frac{d\tilde{h}}{dt} = -\gamma_h \tilde{h}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Обозначим вектор правой части системы (4.9) через $\tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u})$.

Матрица Якоби системы (4.9)

$$D_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})} \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} -r_l & 0 & f'_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ -c_a e^{-(\tilde{l} + l^*(\bar{u}))} & -r_n & f'_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ 0 & 0 & -\gamma_h \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

для всех $(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in \mathbb{R}^3$ имеет отрицательные собственные значения $-r_l, -r_n, -\gamma_h$, откуда вытекает локальная экспоненциальная устойчивость [156, Глава 4, §10] положения равновесия (4.7).

В. Переходим к вопросу построения функции Ляпунова. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &:= (0, 0, 0), \quad x := (l, n, h), \quad \tilde{x} := (\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}), \\ x^*(\bar{u}) &:= (l^*(\bar{u}), n^*(\bar{u}), h^*(\bar{u})), \quad D^{\bar{u}} := \{x - x^*(\bar{u}) : x \in D\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Будем искать такую непрерывно дифференцируемую по x в D (соответственно по $\tilde{x}$ в $D^{\bar{u}}$) функцию Ляпунова

$$\varphi(x, \bar{u}) := \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}) = \tilde{\varphi}(x - x^*(\bar{u}), \bar{u}), \quad (4.12)$$

для которой выполнены условие положительной определенности

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}) > 0 \quad \forall \tilde{x} \in D^{\bar{u}} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \tilde{\varphi}(\mathbf{0}, \bar{u}) = 0 \quad (4.13)$$

и условие отрицательной определенности производной в силу системы (4.9) в виде

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x \varphi(x, \bar{u}), f(x, \bar{u}) \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}), \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \rangle \leq \\ &\leq -\beta \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}) \quad \forall \tilde{x} = x - x^*(\bar{u}) \in D^{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\tilde{x}} \left(\left\| \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\|^2 \right), \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\rangle &= \\ &= \tilde{f}^\top(\tilde{x}, \bar{u}) \cdot \left(D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) + \left(D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right)^\top \right) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \quad \forall \tilde{x} \in D^{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Рассмотрим случай, когда найдется такая непрерывно дифференцируемая функция $\eta(\cdot, \bar{u}) : D^{\bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\eta(\mathbf{0}, \bar{u}) = 0$, $\eta(\tilde{x}, \bar{u}) \geq 0$ при всех $\tilde{x} \in D^{\bar{u}}$ и

$$\left\langle \nabla_{\tilde{x}} \eta(\tilde{x}, \bar{u}), \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\rangle \leq \tilde{f}^\top(\tilde{x}, \bar{u}) \cdot Q(\tilde{x}, \bar{u}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \quad \forall \tilde{x} \in D^{\bar{u}}, \quad (4.16)$$

причем для каждого $\tilde{x} \in D^{\bar{u}}$ $Q(\tilde{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная матрица и все собственные значения матрицы

$$D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) + \left(D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right)^\top + Q(\tilde{x}, \bar{u}) \quad (4.17)$$

(являющиеся вещественными ввиду симметричности последней) не превосходят $-\beta$, где $\beta > 0$ не зависит от $\tilde{x}$ и $\bar{u}$. Тогда функция

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}) := \left\| \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\|^2 + \eta(\tilde{x}, \bar{u}) \quad (4.18)$$

удовлетворяет условиям (4.13), (4.14), поскольку $\tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) = 0$ лишь для $\tilde{x} = 0$ и в силу равенств (4.15), (4.16) имеем

$$\left\langle \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}), \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\rangle \leq -\beta \left\| \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{u}) \right\|^2 \leq -\beta \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \bar{u}) \quad \forall \tilde{x} \in D^{\bar{u}}.$$

Таким образом, мы получили функцию Ляпунова (4.12), отвечающую асимптотически устойчивому положению равновесия $x = x^*(\bar{u})$ системы (4.9).

Покажем, как для системы (4.9) может быть найдена функция η .

С этой целью проведем локализацию собственных значений матрицы

$$\begin{aligned} D_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})} \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) + \left(D_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})} \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \right)^\top = \\ = \begin{pmatrix} -2r_l & -c_a e^{-(\tilde{l}+l^*(\bar{u}))} & f'_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ -c_a e^{-(\tilde{l}+l^*(\bar{u}))} & -2r_n & f'_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ f'_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) & f'_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) & -2\gamma_h \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

используя следующий результат [155, п. 8.1.2]: если $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — произвольные положительные числа, то все собственные значения матрицы A принадлежат множеству

$$\bigcup_{i=1}^n S_i, \quad S_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{p_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j |a_{ij}| \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.20)$$

Зафиксируем произвольные

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad \beta \in (0, 2 \min\{r_l, r_n\}) \quad (4.21)$$

и подберем $p_3 > 0$ так, чтобы для матрицы (4.19) при любых $(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in D^{\bar{u}}$ множества S_1 и S_2 располагались целиком в замкнутой полуплоскости

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -\beta\}. \quad (4.22)$$

Для этого с учетом того, что

$$f'_l(h) \leq a_l, \quad f'_n(h) \leq a_n, \quad c_a e^{-l} \leq c_a \quad \text{для всех } h \geq 0, \quad l \geq 0,$$

достаточно добиться выполнения неравенств

$$\frac{1}{p_1}(p_2c_a + p_3a_l) \leq 2r_l - \beta, \quad \frac{1}{p_2}(p_1c_a + p_3a_n) \leq 2r_n - \beta,$$

из которых получаем

$$p_3 = \min \left\{ \frac{p_1(2r_l - \beta) - p_2c_a}{a_l}, \frac{p_2(2r_n - \beta) - p_1c_a}{a_n} \right\}. \quad (4.23)$$

Чтобы обеспечить положительность p_3 , наложим на параметры $r_l, r_n, c_a, p_1, p_2, \beta$ ограничение

$$c_a < \min \left\{ \frac{p_1}{p_2}(2r_l - \beta), \frac{p_2}{p_1}(2r_n - \beta) \right\}. \quad (4.24)$$

Однако для соблюдения неравенства

$$\frac{1}{p_3}(p_1a_l + p_2a_n) \leq 2\gamma_h - \beta,$$

из которого следовала бы принадлежность всех точек S_3 к полуплоскости (4.22), необходимо потребовать, чтобы параметр γ_h был достаточно велик по сравнению с a_l, a_n, β , а это не соответствует содержательному смыслу задачи (см. значения параметров, взятые в [48] для численного моделирования). В связи с этим прибавим к (4.19) матрицу

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{p_3}(p_1a_l + p_2a_n) - 2\gamma_h + \beta\right) \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

считая, что

$$\frac{1}{p_3}(p_1a_l + p_2a_n) - 2\gamma_h + \beta > 0. \quad (4.26)$$

Тем самым будет получена матрица

$$\begin{pmatrix} -2r_l & -c_a e^{-(\tilde{l}+l^*(\bar{u}))} & f'_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ -c_a e^{-(\tilde{l}+l^*(\bar{u}))} & -2r_n & f'_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) \\ f'_l(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) & f'_n(\tilde{h} + h^*(\bar{u})) & -\left(\frac{1}{p_3}(p_1a_l + p_2a_n) + \beta\right) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

для которой помимо S_1, S_2 ещё и S_3 содержится в полуплоскости (4.22), поскольку

$$\frac{1}{p_3}(p_1 a_l + p_2 a_n) \leq \left(\frac{1}{p_3}(p_1 a_l + p_2 a_n) + \beta \right) - \beta.$$

Стало быть, при любых $(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in D^{\bar{u}}$ все собственные значения симметричной матрицы (4.27) (являющиеся вещественными) не превосходят $-\beta$.

Таким образом, искомую функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям (4.13), (4.14), можно искать в форме

$$\tilde{\varphi}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) := \left\| \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \right\|^2 + \eta(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}),$$

где функция η должна подчиняться неравенству

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})} \eta(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}), \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \right\rangle &\leq \\ &\leq \tilde{f}^\top(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \cdot Q \cdot \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \quad \forall (\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in D^{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что можно положить

$$\eta(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) := \nu \tilde{h}^2, \quad \nu := \frac{\gamma_h}{2} \left(\frac{1}{p_3}(p_1 a_l + p_2 a_n) - 2\gamma_h + \beta \right). \quad (4.28)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})}(\nu \tilde{h}^2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_h \left(\frac{1}{p_3}(p_1 a_l + p_2 a_n) - 2\gamma_h + \beta \right) \tilde{h} \end{pmatrix} = \\ &= Q \cdot \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}), \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h})}(\nu \tilde{h}^2), \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \right\rangle &= \\ &= \tilde{f}^\top(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \cdot Q \cdot \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \quad \forall (\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in D^{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) := \left\| \tilde{f}(\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}, \bar{u}) \right\|^2 + \nu \tilde{h}^2 \quad \forall (\tilde{l}, \tilde{n}, \tilde{h}) \in D^{\bar{u}}, \quad (4.29)$$

где постоянная ν определяется формулой (4.28). Обозначив через $f(l, n, h, u)$ вектор правой части системы (4.4), на основании представления (4.12) будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi(l, n, h, \bar{u}) &:= \tilde{\varphi}(l - l^*(\bar{u}), n - n^*(\bar{u}), h - h^*(\bar{u}), \bar{u}) = \\ &= \|f(l, n, h, \bar{u})\|^2 + \nu \cdot (h - h^*(\bar{u}))^2 \quad \forall (l, n, h) \in D.\end{aligned}\quad (4.30)$$

С. Докажем, что при определенных предположениях функция Ляпунова $\varphi(l(\cdot), n(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$, рассматриваемая на произвольном фиксированном допустимом процессе $(l(\cdot), n(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$ системы (4.4), подчиненном принципу максимума Понтрягина, не возрастает при переходе через точки переключения соответствующего управления, которое, кроме того, не имеет особых участков и обладает не более чем одним переключением, причем только с R на 0 при возрастании временной переменной t , но не наоборот.

Предположим, что

$$\begin{aligned}h_0 &< \frac{R}{\gamma_h}, \\ h_{\max}(T) &:= h(T; 0, h_0, u \equiv R) = \\ &= \frac{R}{\gamma_h} - \left(\frac{R}{\gamma_h} - h_0 \right) e^{-\gamma_h T} < h_m := \frac{1}{b}.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Для отыскания оптимального закона управления системой (4.4) выпишем соответствующую сопряженную систему (см. формулы (1.67), (1.68) и уравнения в (1.69)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} = r_l \psi_1 + c_a e^{-l} \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = r_n \psi_2, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_1 f'_l(h) - \psi_2 f'_n(h) + \gamma_h \psi_3 = \\ \quad = -e^{-bh}(1 - bh)(a_l \psi_1 + a_n \psi_2) + \gamma_h \psi_3, \\ \psi_1(T) = 2L_a^2 e^{-2l(T)} > 0, \\ \psi_2(T) = 2\alpha N_a^2 e^{-n(T)} (e^{-n(T)} - e^{-\check{n}}), \\ \psi_3(T) = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1(t) &= \psi_1(t)e^{-r_l t} = \psi_1(0) + c_a \int_0^t e^{-r_l s - l(s)} \psi_2(s) ds, \\ \psi_2(t) &= \psi_2(0)e^{r_n t} = \psi_2(T)e^{-r_n(T-t)}, \\ \tilde{\psi}_1(t) &= \psi_1(0) + c_a \psi_2(0) \int_0^t e^{(r_n - r_l)s - l(s)} ds,\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\tilde{\psi}_3(t) = \psi_3(t)e^{-\gamma_h t} = \int_t^T e^{-\gamma_h s - b h(s)} (1 - b h(s)) (a_l \psi_1(s) + a_n \psi_2(s)) ds. \tag{4.33}$$

На параметры задачи дополнительно наложим ограничение

$$r_n - r_l > -\frac{c_a a_l}{a_n} \exp \left\{ -\max_{s \in [0, T]} l_{\max}(s) \right\}. \tag{4.34}$$

Здесь $l_{\max}(s)$ — точная верхняя грань множества компонент

$$l(s; 0, (l_0, n_0, h_0), u(\cdot))$$

фазовых траекторий системы (4.4) в момент времени s для всевозможных допустимых управлений $u(\cdot)$. Заметим, что [48, Лемма 3]

$$\max_{s \in [0, T]} l_{\max}(s) \leq \max \left\{ l_0, \frac{\gamma_l}{r_l} \right\} + \frac{a_l}{r_l b e}. \tag{4.35}$$

Принимая во внимание то, что $1 - b h_{\max}(t) > 0$ при каждом $t \in [0, T]$ (ввиду второго неравенства в (4.31)), представление (4.33) и неравенство (4.34), можно аналогично Утверждениям 1.6, 1.7 (см. также [48, Теорема 2]) показать, что у $\psi_3(\cdot)$ не более одного нуля на $[0, T]$, т. е. всякое удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина допустимое управление на $[0, T]$ не имеет особых участков и обладает не более чем одним переключением. При этом, обозначив

$$\delta(t) := e^{-r_l t} (a_l \psi_1(t) + a_n \psi_2(t)) = a_l \tilde{\psi}_1(t) + a_n \psi_2(0) e^{(r_n - r_l)t}, \tag{4.36}$$

получим, что производная

$$\delta'(t) = \psi_2(0) e^{(r_n - r_l)t} \left(a_l c_a e^{-l(t)} + a_n (r_n - r_l) \right) \tag{4.37}$$

сохраняет на всем отрезке $[0, T]$ один и тот же знак, равный знаку $\psi_2(0)$, т. е. $\delta(\cdot)$ возрастает при $\psi_2(0) > 0$ и убывает при $\psi_2(0) < 0$.

Предположим, что

$$a_n \geq c_a a_l \int_0^T e^{(r_n - r_l)s} ds, \quad (4.38)$$

и убедимся в том, что с увеличением времени функция $\psi_3(\cdot)$ может менять знак только с плюса на минус.

Возможны следующие ситуации:

- если $\psi_2(0) = 0$, то из того, что в этом случае $\delta(t) \equiv a_l \psi_1(0) > 0$ при любом $t \in [0, T]$, и из представления (4.33) вытекает положительность функции $\psi_3(\cdot)$ на $[0, T]$, а отсюда и отсутствие переключений;
- если $\psi_2(0) \neq 0$ и $\delta(T) = 0$, то на $[0, T)$ функция $\delta(\cdot)$, будучи строго монотонной, не обращается в нуль и сохраняет знак, откуда в силу представления (4.33) следует, что $\psi_3(\cdot)$ тоже не обнуляется и сохраняет знак на $[0, T)$, т. е. переключений нет;
- если $\psi_2(0) \neq 0$ и $\delta(T) < 0$, то ввиду представления (4.33) функция $\psi_3(\cdot)$, меняющая знак на $[0, T]$ не более одного раза, вблизи T принимает отрицательные значения, а потому с увеличением времени переключение $u_{\text{тр}}(\cdot)$ возможно лишь с R на 0;
- если $\psi_2(0) < 0$ и $\delta(T) > 0$, то на $[0, T)$ функция $\delta(\cdot)$, будучи убывающей (согласно соотношениям (4.34), (4.37)), принимает только положительные значения, что на основании представления (4.33) влечет за собой положительность функции $\psi_3(\cdot)$ на $[0, T)$ и тем самым отсутствие переключений;
- если $\psi_2(0) > 0$, $\delta(T) > 0$, $\psi_1(0) \geq 0$, то $\delta(0) > 0$ и, значит, на $[0, T)$ функция $\delta(\cdot)$, будучи возрастающей (согласно соотношениям (4.34), (4.37)), принимает только положительные значения, т. е. переключений нет.

Рассмотрим оставшийся случай $\psi_2(0) > 0$, $\delta(T) > 0$, $\psi_1(0) < 0$. Из равенства (4.32) и из $\psi_2(0) > 0$ следует, что $\tilde{\psi}_1(\cdot)$ возрастает на $[0, T]$. Поскольку $\tilde{\psi}_1(0) < 0$, $\tilde{\psi}_1(T) > 0$, то найдется единственная точка $t' \in (0, T)$, в которой

$$\tilde{\psi}_1(t') = \psi_1(0) + c_a \psi_2(0) \int_0^{t'} e^{(r_n - r_l)s - l(s)} ds = 0,$$

т. е.

$$\psi_1(0) \geq -c_a \psi_2(0) \int_0^{t'} e^{(r_n - r_l)s - l(s)} ds \geq -c_a \psi_2(0) \int_0^T e^{(r_n - r_l)s} ds.$$

Поэтому вследствие неравенства (4.38)

$$\delta(0) = a_l \psi_1(0) + a_n \psi_2(0) \geq \psi_2(0) \left(a_n - c_a a_l \int_0^T e^{(r_n - r_l)s} ds \right) \geq 0.$$

Кроме того, в силу соотношений (4.34), (4.37) $\delta(\cdot)$ возрастает на $[0, T]$, так как $\psi_2(0) > 0$. Стало быть, $\delta(t) > 0$ при всех $t \in (0, T]$, поэтому из представления (4.33) вытекает положительность функции $\psi_3(\cdot)$ на $[0, T]$ и тем самым отсутствие переключений у $u_{\text{мр}}(\cdot)$.

Таким образом, установлено, что с увеличением времени $\psi_3(\cdot)$ может менять знак только с плюса на минус, т. е. $u_{\text{мр}}(\cdot)$ может переключаться лишь с R на 0.

Примем еще одно ограничение

$$h_{\text{max}}(T) := h(T; 0, h_0, u \equiv R) = \frac{R}{\gamma_h} - \left(\frac{R}{\gamma_h} - h_0 \right) e^{-\gamma_h T} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\gamma_h}, \quad (4.39)$$

равносильное в принятых допущениях неравенству

$$T \leq \frac{1}{\gamma_h} \ln \left(2 \frac{\frac{R}{\gamma_h} - h_0}{\frac{R}{\gamma_h}} \right). \quad (4.40)$$

Для того чтобы доказать, что функция Ляпунова $\varphi(l(\cdot), n(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$, рассматриваемая на произвольном фиксированном допустимом процессе $(l(\cdot), n(\cdot), h(\cdot), u(\cdot))$ системы (4.4), подчиненном принципу максимума Понтрягина, не возрастает при переходе через точки переключения соответствующего управления,

остается проверить справедливость неравенства

$$\varphi(l, n, h, 0) \leq \varphi(l, n, h, R) \quad (4.41)$$

в каждой точке любой допустимой фазовой траектории системы (4.4) на временном отрезке $[0, T]$.

Зафиксируем произвольный вектор $(l, n, h) \in D$ с $h \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\gamma_h}$ (учитываются ограничения (4.39), (4.40)). Так как

$$f(l, n, h, \bar{u}) := (f_1(l, h), f_2(l, n, h), -\gamma_h h + \bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in [0, R]$$

и в силу представления (4.30)

$$\begin{aligned} \varphi(l, n, h, \bar{u}) &= \|f(l, n, h, \bar{u})\|^2 + \nu(h - h^*(\bar{u}))^2 = \\ &= (f_1(l, h))^2 + (f_2(l, n, h))^2 + (-\gamma_h h + \bar{u})^2 + \nu(h - h^*(\bar{u}))^2 = \\ &= (f_1(l, h))^2 + (f_2(l, n, h))^2 + (\gamma_h^2 + \nu)(h - h^*(\bar{u}))^2, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \varphi(l, n, h, R) - \varphi(l, n, h, 0) &= (\gamma_h^2 + \nu) \left(\left(h - \frac{R}{\gamma_h} \right)^2 - h^2 \right) = \\ &= (\gamma_h^2 + \nu) \frac{R}{\gamma_h} \left(\frac{R}{\gamma_h} - 2h \right) \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

D. Построим “разумное” допустимое управление, основываясь лишь на анализе свойств динамики системы (4.4).

Рассмотрим конечномерную задачу нахождения минимального по значению целевого функционала положения равновесия $(l^*(\bar{u}), n^*(\bar{u}), h^*(\bar{u}))$:

$$\Phi(l^*(\bar{u}), n^*(\bar{u})) \longrightarrow \min_{\bar{u} \in [0, R]}. \quad (4.42)$$

Будем считать, что существует $\bar{u}^* \in [0, R]$ — решение задачи (4.42). Тогда

$$\Phi(l^*(\bar{u}^*), n^*(\bar{u}^*)) = \min_{\bar{u} \in [0, R]} \Phi(l^*(\bar{u}), n^*(\bar{u})). \quad (4.43)$$

Предположим, что

$$\bar{u}^* < R. \quad (4.44)$$

В соответствии с [48] управление $\hat{u}(\cdot)$, альтернативное по отношению к экстремальным управлениям, строится так, чтобы максимально быстро привести концентрацию лекарства к значению $h^*(\bar{u}^*)$ и впоследствии поддерживать ее постоянной до конечного момента времени. Тем самым имеем

$$\begin{cases} \hat{u}(t) = R, & 0 \leq t < \hat{t}, \\ \hat{h}(\hat{t}) = h^*(\bar{u}^*), \\ \hat{u}(t) = \bar{u}^*, \quad \frac{d\hat{h}}{dt}(t) = 0, & \hat{t} < t \leq T. \end{cases} \quad (4.45)$$

Если $h_0 = h^*(\bar{u}^*)$, то $\hat{t} = 0$. Найдем $\hat{t}$ при $h_0 < h^*(\bar{u}^*)$:

$$\begin{aligned} \frac{R}{\gamma_h} - \left(\frac{R}{\gamma_h} - h_0 \right) e^{-\gamma_h \hat{t}} &= \frac{\bar{u}^*}{\gamma_h}, \\ \hat{t} &= \frac{1}{\gamma_h} \ln \frac{1 - \frac{\gamma_h h_0}{R}}{1 - \frac{\bar{u}^*}{R}} > 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Если $\hat{t} \geq T$, то $\hat{u}(t) \equiv R$ при всех $t \in [0, T]$.

Пусть

$$h_0 < h^*(\bar{u}^*), \quad \hat{t} < T. \quad (4.47)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \varphi(l, n, h, R) - \varphi(l, n, h, \bar{u}^*) &= \\ &= (\gamma_h^2 + \nu) \cdot \left(\left(h - \frac{R}{\gamma_h} \right)^2 - \left(h - \frac{\bar{u}^*}{\gamma_h} \right)^2 \right) = \\ &= (\gamma_h^2 + \nu) \cdot \frac{R - \bar{u}^*}{\gamma_h} \cdot \left(\frac{R + \bar{u}^*}{\gamma_h} - 2h \right) \geq 0 \\ &\quad \text{при } (l, n, h) \in D, \quad h \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\gamma_h}, \end{aligned}$$

то функция Ляпунова $\varphi(\hat{l}(\cdot), \hat{n}(\cdot), \hat{h}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, рассматриваемая на допустимом процессе, отвечающем альтернативному управлению $\hat{u}(\cdot)$, при переходе через точку переключения $t = \hat{t}$ не возрастает (может иметь только направленный вниз скачок).

4.2. Общий случай

Переходим к разбору общего случая.

Рассмотрим автономную управляемую динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \quad u(t) \in P, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x^0, \quad (4.48)$$

где $t \geq 0$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, а значения управляющей функции $u(t)$ выбираются из заданного компакта $P \subseteq \mathbb{R}^m$. Начальное состояние системы $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть D — некоторая компактная область в $\mathbb{R}^n$, $x^0 \in D$. Будем считать выполненными достаточные условия существования и единственности для произвольной функции $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([0, +\infty), P)$ соответствующего решения системы (4.48) с любым начальным состоянием $x(0) \in D$. Предположим, что D сильно инвариантна относительно управляемой системы (4.48).

Рассмотрим систему (4.48) на фиксированном конечном временном отрезке $[0, T]$ ($T > 0$). В качестве допустимых программных управлений возьмем класс $U_{0,T}$ всех измеримых функций $u : [0, T] \rightarrow P$. Качество управления оценивается терминальным функционалом

$$J(u(\cdot)) := J_{T,0,x^0}(u(\cdot)) := \Phi(x(T; 0, x^0, u(\cdot))) \longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in U_{0,T}}, \quad (4.49)$$

где $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, $x(\cdot; 0, x^0, u(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — фазовая траектория системы (4.48), выходящая из начальной позиции $(0, x^0)$ под воздействием допустимого управления $u(\cdot)$. Обозначим

$$J_* := \inf_{u(\cdot) \in U_{0,T}} J(u(\cdot)). \quad (4.50)$$

Далее полагаем, что выполнены достаточные условия существования оптимального управления [32, Теорема 3].

Введем следующие предположения.

Предположение А. Пусть для любой точки $\bar{u} \in P$ система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \bar{u}), \quad t \geq 0, \quad (4.51)$$

зависящая от $\bar{u}$ как от параметра, имеет в D единственное положение равновесия $x^*(\bar{u})$, являющееся асимптотически устойчивым.

Предположение В. Пусть при каждом $\bar{u} \in P$ найдется такая непрерывно дифференцируемая в D функция Ляпунова $\varphi(\cdot, \bar{u})$, для которой выполнено условие положительной определенности

$$\varphi(x, \bar{u}) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{x^*(\bar{u})\}, \quad \varphi(x^*(\bar{u}), \bar{u}) = 0 \quad (4.52)$$

и условие отрицательной определенности производной в силу системы (4.51) в виде

$$\langle \nabla_x \varphi(x, \bar{u}), f(x, \bar{u}) \rangle \leq -\beta \cdot \varphi(x, \bar{u}) \quad \forall x \in D, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (4.53)$$

Тогда если $x(t; t_1, x^1, \bar{u})$, $t \in [t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$, есть фазовая траектория системы (4.51) при фиксированном $\bar{u} \in P$, соответствующая начальной позиции $(t_1, x^1) \in [0, +\infty) \times D$, то

$$\varphi(x(t_2; t_1, x^1, \bar{u}), \bar{u}) \leq \varphi(x^1, \bar{u}) e^{-\beta(t_2-t_1)} \xrightarrow[t_2 \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (4.54)$$

В силу достаточных условий асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова $x(t_2; t_1, x^1, \bar{u}) \rightarrow x^*(\bar{u})$ и $\Phi(x(t_2; t_1, x^1, \bar{u})) \rightarrow \Phi(x^*(\bar{u}))$ при $t_2 \rightarrow +\infty$. Поскольку поверхности уровня $\{x \in D : \varphi(x, \bar{u}) = c\}$, $c > 0$, стягиваются в точку $x^*(\bar{u})$ при $c \rightarrow 0+$ [157, Глава 1, п. 1.3], то

$$\Delta_{\Phi, \bar{u}}(c) := \max_{x \in D : \varphi(x, \bar{u}) \leq c} |\Phi(x) - \Phi(x^*(\bar{u}))| \xrightarrow[c \rightarrow 0+]{} 0 \quad \forall \bar{u} \in P. \quad (4.55)$$

Очевидно, что для всех $\bar{u} \in P$ $\Delta_{\Phi, \bar{u}}(0) = 0$ и, кроме того, $\Delta_{\Phi, \bar{u}}(c_1) \leq \Delta_{\Phi, \bar{u}}(c_2)$ при $0 \leq c_1 < c_2$.

На основе этих рассуждений будем искать точку $\bar{u}^* \in P$ как решение конечномерной задачи математического программирования

$$\Phi(x^*(\bar{u}^*)) = \min_{\bar{u} \in P} \Phi(x^*(\bar{u})). \quad (4.56)$$

Пусть, исходя из физического смысла исследуемой задачи или же из применения какой-либо процедуры улучшения управления с начальным приближением $u \equiv \bar{u}^*$, построена управляющая функция $\hat{u}(\cdot)$, для которой требуется

выяснить, насколько велико отклонение значения функционала $J(\hat{u}(\cdot))$ от точной нижней грани J_* .

Функцию $\hat{u}(\cdot)$ будем рассматривать в качестве альтернативного управления. Будем считать, что на некотором промежутке $(\hat{t}, T]$, где $0 \leq \hat{t} < T$, примыкающем к концу временного отрезка $[0, T]$, она принимает постоянное значение $\bar{u}^*$, определяемое равенством (4.56):

$$\hat{u}(t) \equiv \bar{u}^*, \quad \hat{t} < t \leq T \quad (4.57)$$

(см. соотношения (4.45)).

Определение 4.1. Будем говорить, что допустимое управление $u(\cdot)$ удовлетворяет условию **C1**, если оно, начиная с некоторого момента времени $t_0 \in [0, T)$, является с точностью до множества нулевой меры Лебега в $\mathbb{R}^m$ кусочно постоянным с конечным числом точек переключения, не превышающим $q - 1$, т. е.

$$u(t) = u^i \in P \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = \overline{1, q}, \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_q = T,$$

и для соответствующей фазовой траектории $x(\cdot)$ системы (4.48) при переходе через точки переключения выполнены неравенства

$$\varphi(x(t_i), u^i) \leq c \cdot \varphi(x(t_i), u^{i-1}), \quad i = \overline{2, q}, \quad c = \text{const} \geq 1, \quad (4.58)$$

ограничивающие значения скачков функции Ляпунова, задаваемой условиями (4.52), (4.53), по управляющей переменной.

Предположение С. Пусть всякое подчиненное принципу максимума Понтрягина в задаче (4.48), (4.49) допустимое управление $u_{\text{мр}}(\cdot)$ удовлетворяет условию **C1** с параметрами $\check{q}$, $\check{t}_{i-1}$, $\check{u}^i$, $i = \overline{1, \check{q}}$, $\check{c}$, причем $\check{t}_0$, $\check{q}$, $\check{c}$ взяты не зависящими от $u_{\text{мр}}(\cdot)$, а пара $(\check{u}^1, \check{u}^{\check{q}})$ принадлежит не зависящему от $u_{\text{мр}}(\cdot)$ множеству $\check{U}^{1, \check{q}} \subseteq P \times P$. Независимость $\check{u}^i$, $i = \overline{2, \check{q} - 1}$, и $\check{t}_j$, $j = \overline{1, \check{q} - 1}$, от $u_{\text{мр}}(\cdot)$ не предполагается.

Отметим, что предположения **A,B,C** выполняются для задачи (4.4), при исследовании которой соответствующие утверждения помечались для удобства теми же буквами.

Пусть также для каждого $t \in [0, T]$ $X_t \subseteq D$ есть некоторая внешняя оценка множества достижимости системы (4.48) в момент времени t ($X_0 = \{x^0\}$).

Лемма 4.1. Пусть допустимое управление $\check{u}(\cdot)$ удовлетворяет условию **C1** с параметрами $\check{q}$, $\check{t}_{i-1}$, $\check{u}^i$, $i = \overline{1, \check{q}}$, $\check{c}$. Тогда справедлива оценка

$$|\Phi(\check{x}(T)) - \Phi(x^*(\check{u}^{\check{q}}))| \leq \Delta_{\Phi, \check{u}^{\check{q}}} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\check{t}_0}} \varphi(x, \check{u}^1) \right). \quad (4.59)$$

Доказательство. Последовательно применяя неравенства (4.54) и (4.58), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\check{x}(T), \check{u}^{\check{q}}) &= \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}}), \check{u}^{\check{q}}) \leq \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}-1}), \check{u}^{\check{q}}) e^{-\beta(T-\check{t}_{\check{q}-1})} \leq \\ &\leq \check{c} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}-1}), \check{u}^{\check{q}-1}) \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_{\check{q}-1})} \leq \check{c} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}-2}), \check{u}^{\check{q}-1}) \cdot \\ &\cdot e^{-\beta(\check{t}_{\check{q}-1}-\check{t}_{\check{q}-2})} e^{-\beta(T-\check{t}_{\check{q}-1})} = \check{c} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}-2}), \check{u}^{\check{q}-1}) \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_{\check{q}-2})} \leq \\ &\leq \check{c}^2 \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_{\check{q}-2}), \check{u}^{\check{q}-2}) \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_{\check{q}-2})} \leq \dots \leq \check{c}^{\check{q}-1} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_1), \check{u}^1) \cdot \\ &\cdot e^{-\beta(T-\check{t}_1)} \leq \check{c}^{\check{q}-1} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_0), \check{u}^1) \cdot e^{-\beta(\check{t}_1-\check{t}_0)} e^{-\beta(T-\check{t}_1)} = \\ &= \check{c}^{\check{q}-1} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_0), \check{u}^1) \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)}, \end{aligned}$$

откуда с помощью обозначения (4.55) приходим к искомому неравенству

$$\begin{aligned} |\Phi(\check{x}(T)) - \Phi(x^*(\check{u}^{\check{q}}))| &\leq \Delta_{\Phi, \check{u}^{\check{q}}} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \varphi(\check{x}(\check{t}_0), \check{u}^1) \right) \leq \\ &\leq \Delta_{\Phi, \check{u}^{\check{q}}} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\check{t}_0}} \varphi(x, \check{u}^1) \right), \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.2. Пусть для задачи (4.48), (4.49) существует оптимальное управление $u_*(\cdot)$ и выполнены Предположения **A,B,C**. Тогда

$$(u_*(\check{t}_0 + 0), u_*(T - 0)) \in \check{U}^{1, \check{q}}$$

и справедлива оценка

$$\begin{aligned}
|J_* - \Phi(x^*(u_*(T-0)))| &\leq \\
&\leq \Delta_{\Phi, u_*(T-0)} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\check{t}_0}} \varphi(x, u^*(\check{t}_0+0)) \right) \leq \\
&\leq \sup_{(\bar{u}^1, \bar{u}^{\check{q}}) \in \check{U}^{1, \check{q}}} \Delta_{\Phi, \bar{u}^{\check{q}}} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\check{t}_0}} \varphi(x, \bar{u}^1) \right).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Доказательство. Для установления неравенства (4.60) следует взять оптимальное управление $u_*(\cdot)$, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина, в виде функции $\check{u}(\cdot)$ из Леммы 4.1 (тогда для соответствующей оптимальной траектории $x_*(\cdot) = \check{x}(\cdot)$ имеем $\Phi(\check{x}(T)) = J_*$) и воспользоваться неравенством (4.59). $\square$

Следствие 4.1. Если условия Леммы 4.2 выполнены для сколь угодно больших T , параметры $\check{t}_0$, $\check{q}$, $\check{U}^{1, \check{q}}$, $\check{c}$ можно выбрать не зависящими от T и соответственно от $u_{\text{mp}}(\cdot) = u_{\text{mp}, T}(\cdot)$, $\check{U}^{1, \check{q}}$ — конечное множество, то

$$|J_{*, T} - \Phi(x^*(u_{*, T}(T-0)))| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Доказательство. Достаточно принять во внимание свойство (4.55), неравенство (4.60) и конечность множества $\check{U}^{1, \check{q}}$. $\square$

Теорема 4.1. Пусть для задачи (4.48), (4.49) существует оптимальное управление, выполнены Предположения А, В, С и дано допустимое альтернативное управление $\hat{u}(\cdot)$, удовлетворяющее требованию (4.57) при фиксированном $\hat{t} \in [0, T)$ и условию С1 с параметрами $\hat{t}_0$ (если не удастся подобрать $\hat{t}_0$, меньшее $\hat{t}$, то всегда можно положить $\hat{t}_0 := \hat{t}$), $\hat{q}$, $\hat{c}$, $\hat{u}^1 = \hat{u}(\hat{t}_0+0)$, $\hat{u}^{\hat{q}} = \hat{u}(T-0) = \bar{u}^*$. Тогда имеют место оценки

$$|\Phi(\hat{x}(T)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))| \leq \Delta_{\Phi, \bar{u}^*} \left(\hat{c}^{\hat{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\hat{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\hat{t}_0}} \varphi(x, \hat{u}^1) \right), \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
J(\hat{u}(\cdot)) - J_* &\leq |\Phi(\hat{x}(T)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))| + \\
&+ \sup_{(\bar{u}^1, \bar{u}^{\hat{q}}) \in \check{U}^{1, \hat{q}}} \Delta_{\Phi, \bar{u}^{\hat{q}}} \left(\check{c}^{\check{q}-1} \cdot e^{-\beta(T-\check{t}_0)} \cdot \sup_{x \in X_{\check{t}_0}} \varphi(x, \bar{u}^1) \right).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Доказательство. Неравенство (4.61) непосредственно вытекает из Леммы 4.1. Для вывода неравенства (4.62) достаточно учесть, что в силу равенства (4.56) и включения $u_*(T-0) \in P$ ($\check{U}^{1,\check{q}} \subseteq P \times P$)

$$\begin{aligned} J(\hat{u}(\cdot)) - J_* &= (J(\hat{u}(\cdot)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))) + (\Phi(x^*(\bar{u}^*)) - J_*) \leq \\ &\leq (\Phi(\hat{x}(T)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))) + (\Phi(x^*(u_*(T-0))) - J_*), \end{aligned}$$

и воспользоваться неравенством (4.60) для получения верхней оценки второго слагаемого в правой части последнего неравенства. $\square$

Следствие 4.2. Если условия Теоремы 4.1 выполнены для сколь угодно больших T , параметры $\check{t}_0, \check{q}, \check{U}^{1,\check{q}}, \check{c}$ можно выбрать не зависящими от T и соответственно от $u_{\text{mp}}(\cdot) = u_{\text{mp},T}(\cdot)$, $\check{U}^{1,\check{q}}$ — конечное множество, параметры $\hat{t}_0, \hat{q}, \hat{c}$ можно взять не зависящими от T , то

$$0 \leq J_T(\hat{u}_T(\cdot)) - J_{*,T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Доказательство. Достаточно принять во внимание соотношение (4.55), неравенства (4.61), (4.62) и конечность множества $\check{U}^{1,\check{q}}$. $\square$

Приведенная теорема позволяет при выполнении определенных требований вычислить верхнюю оценку отклонения значения целевого функционала на альтернативном управлении от оптимального значения. Ключевым условием является соблюдение для любого удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина допустимого управления ограничений (4.58) на величины скачков функции Ляпунова при переходе соответствующей фазовой траектории через точки переключения. Это довольно жесткое требование, для проверки справедливости которого чрезвычайно сложно отыскать какие-либо простые формальные достаточные условия, поэтому необходимо использовать принцип максимума Понтрягина и проводить исследование сопряженной системы, что и было сделано в конкретном примере.

Для задачи (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \check{t}_0 = \hat{t}_0 = 0, \quad \check{q} = \hat{q} = 2, \quad \check{c} = \hat{c} = 1, \quad \hat{u}^1 = R, \quad \hat{u}^2 = \bar{u}^*, \\ \check{U}^{1,2} = \{(0, 0), (R, R), (R, 0)\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$|\Phi(\hat{x}(T)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))| \leq \Delta_{\Phi, \bar{u}^*}(e^{-\beta T} \cdot \varphi(x^0, R)), \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} J(\hat{u}(\cdot)) - J_* \leq |\Phi(\hat{x}(T)) - \Phi(x^*(\bar{u}^*))| + \\ + \max_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \check{U}^{1,2}} \Delta_{\Phi, \bar{u}^2}(e^{-\beta T} \cdot \varphi(x^0, \bar{u}^1)); \end{aligned} \quad (4.65)$$

константа β определяется согласно включению (4.21), а функция φ с константой ν задаются равенствами (4.28), (4.30).

Несмотря на то, что параметры (4.63) не зависят от T , оценки (4.64), (4.65) получены не для сколь угодно больших T ввиду наличия ограничений (4.38), (4.40), т. е. утверждать сходимость $J_T(\hat{u}_T(\cdot)) - J_{*,T}$ к нулю при $T \rightarrow +\infty$ мы не можем. Вместе с тем, представленные ниже результаты численного моделирования показывают относительную малость правой части оценки для достаточно больших допустимых T .

Отметим еще следующее важное обстоятельство. На первый взгляд, может показаться, что к положению $x^*(\bar{u}^*)$ и соответственно к значению функции $\Phi(x^*(\bar{u}^*))$ систему (4.48) быстрее всего приводит постоянное управление $u \equiv \bar{u}^*$. Однако, как будет показано в следующем пункте, это не всегда так: альтернативное управление с определенными переключениями может оказаться гораздо более предпочтительным и по значению целевого терминального функционала, и по малости правой части оценки вида (4.62), и по скорости приближения соответствующей фазовой траектории к $x^*(\bar{u}^*)$.

4.3. Результаты численного моделирования

В задаче (4.4) возьмем следующие значения параметров [48]: $r_l = r_n = 0.25$, $\gamma_l = \gamma_n = \gamma_h = 0.01$, $c_a = 3.7 \cdot 10^{-5}$, $a_l = 4$, $a_n = 1.8$, $b = 0.01$, $R = 1$, $L_a = N_a = 10^{10}$, $L_0 = 1.8 \cdot 10^8$, $N_0 = 10^8$, $h_0 = 0$, $\alpha = 0.75$, $\check{N} = 2.7 \cdot 10^7$, $1 \leq T \leq$

68, $p_1 = p_2 = 1$, $\beta = 0.45$; p_3 и ν определяются соотношениями (4.23) и (4.28) соответственно. Тогда ограничения (4.21), (4.24), (4.26), (4.31), (4.34), (4.38)–(4.40) выполнены.

Численно решая конечномерную задачу оптимизации (4.42), получаем $\bar{u}^* = 0.008226 < 1 = R$. Тем самым находим альтернативное управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} R = 1, & 0 \leq t < \hat{t} = 0.826049, \\ \bar{u}^* = 0.008226, & \hat{t} < t \leq T. \end{cases} \quad (4.66)$$

Условия (4.44), (4.47) выполнены.

Функция $\Phi(l, n)$ из соотношений (4.4) при указанных значениях параметров имеет крайне большой разброс значений и ограничена снизу положительным числом на D , т. е. $J_* > 0$. В связи с этим при численном моделировании предпочтительнее рассматривать эквивалентную ей с точки зрения отношения порядка функцию $\ln \Phi(l, n)$. Тогда оценка альтернативного управления преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ln J(\hat{u}(\cdot)) - \ln J_* &\leq \mu(T) := \\ &:= \left| \ln \Phi(\hat{l}(T), \hat{n}(T)) - \ln \Phi(l^*(\bar{u}^*), n^*(\bar{u}^*)) \right| + \\ &\quad + \max_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \check{U}^{1,2}} \Delta_{\ln \Phi, \bar{u}^2} \left(e^{-\beta T} \cdot \varphi(l_0, n_0, h_0, \bar{u}^1) \right), \\ &\quad \frac{J(\hat{u}(\cdot))}{J_*} \leq e^{\mu(T)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ниже приведен график зависимости величины $\mu(T)$ от конечного момента времени T . Невысокая скорость убывания последней связана с небольшим значением параметра $\beta \in (0, 2 \min\{r_l, r_n\})$ (см. условие (4.21)). Если r_l и r_n взять больше, то можно будет выбрать большее β и в таком случае $\mu(T)$ будет сильнее убывать с увеличением T . Также на Рисунке 4.1 изображен график зависимости от T величины

$$\rho(T) := \ln \Phi(\hat{l}(T), \hat{n}(T)) - \ln \Phi(l^*(\bar{u}^*), n^*(\bar{u}^*)). \quad (4.68)$$

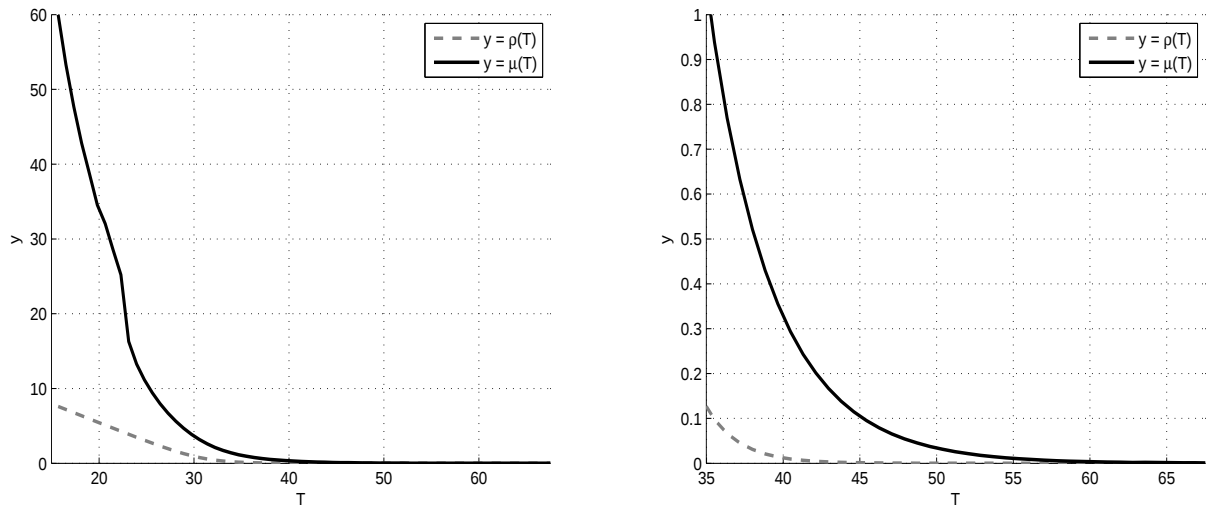


Рис. 4.1. Зависимость $\mu(T)$ и $\rho(T)$ от конечного момента времени T .

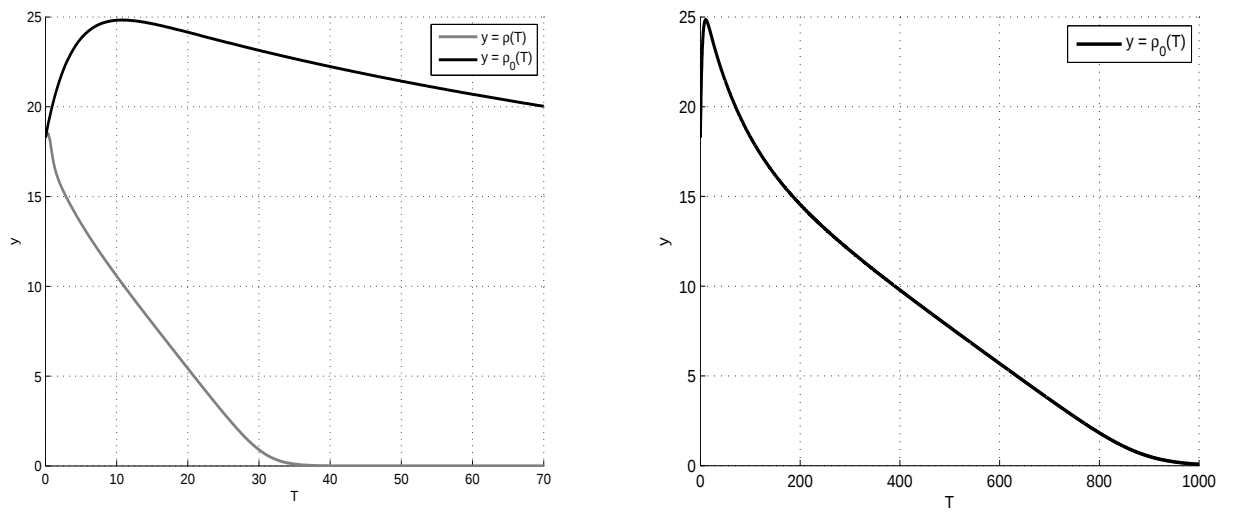


Рис. 4.2. Зависимость $\rho_0(T)$ и $\rho(T)$ от конечного момента времени T .

На Рисунке 4.2 приведен график зависимости от T величины

$$\begin{aligned} \rho_0(T) := \ln \Phi([l, n](T; 0, (l_0, n_0, h_0), u \equiv \bar{u}^*)) - \\ - \ln \Phi(l^*(\bar{u}^*), n^*(\bar{u}^*)). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Видно, что при $T \in (0, 70]$ $\rho_0(T) > \rho(T)$, т. е.

$$\Phi([l, n](T; 0, (l_0, n_0, h_0), u \equiv \bar{u}^*)) > \Phi(\hat{l}(T), \hat{n}(T)),$$

и что $\rho_0(T) = |\rho_0(T)|$ с увеличением T приближается к нулю гораздо медленнее $\rho(T) = |\rho(T)|$. Это свидетельствует о том, что в данном случае альтернативное управление $\hat{u}(\cdot)$, обладающее одной точкой переключения, предпочтительнее постоянного управления $u \equiv \bar{u}^*$.

Заключение

В диссертационной работе предложены новые численно-аналитические методы решения задач синтеза оптимального управления, использующие аппарат обобщенных характеристик задачи Коши для уравнения ГЯБ и применимые к системам с одномерным линейно входящим управлением при отсутствии фазовых ограничений.

В Главе 1 разработан метод глобального синтеза оптимального управления в задачах без особых режимов и с не более чем одним переключением. В качестве примера рассмотрена математическая модель терапии лейкоза с подчиненной закону Гомперца динамикой численностей здоровых и зараженных клеток, стандартным линейным фармакокинетическим уравнением и монотонно возрастающими функциями терапии.

В Главе 2 решена задача синтеза оптимального управления в математической модели терапии злокачественной опухоли, учитывающей реакцию иммунной системы, основанной на модели Н. В. Степановой и содержащей стандартное линейное фармакокинетическое уравнение. Проведены вычислительные эксперименты и дана соответствующая биологическая интерпретация.

В Главе 3 разработан метод глобального синтеза оптимального управления в задачах с особыми характеристиками и разобран ряд примеров, в числе которых математические модели терапии однородной твердой несосудистой опухоли и вирусных инфекций. Получены достаточные условия гладкости функции цены, и установлено, что они выполнены в рассматриваемых примерах.

В Главе 4 разработан подход к оценке альтернативных стратегий управления системами с асимптотически устойчивыми положениями равновесия и проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие уменьшение правой части априорной теоретической оценки с увеличением конечного момента времени.

В Приложении А исследованы два специальных примера моделей механи-

ки, в первом из которых разработанные методы синтеза оптимального управления не применимы, а во втором аналитически находится точное решение уравнения ГЯБ для задачи другого вида, нежели рассматривавшийся при изложении методов.

В Приложении Б сформулированы используемые в диссертационной работе вспомогательные определения и классическая теорема о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

В Приложении В доказан ряд утверждений и теорем из Глав 1,3.

Разработанный подход к построению синтеза оптимального управления, несмотря на сложность и ограниченность своего применения, имеет важное теоретическое и практическое значение. В дальнейшем планируется развивать предложенные методы для решения детерминированных задач с фазовыми ограничениями (в том числе задач выживаемости) и стохастических задач.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. Clarke F. H., Ledyaev Y. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth analysis and control theory. New York: Springer-Verlag, 1998.
4. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov processes and viscosity solutions. New York: Springer-Verlag, 2006.
5. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
6. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Boston: Birkhauser, 2008.
7. Schattler H., Ledzewicz U. Geometric optimal control: Theory, methods and examples. New York: Springer, 2012.
8. Falcone M., Ferretti R. Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1998. Vol. 35, no. 3. P. 909–940.
9. Falcone M. Numerical methods for differential games based on partial differential equations // International Game Theory Review. 2006. Vol. 8. P. 231–272.
10. Cristiani E., Falcone M. Fast semi-Lagrangian schemes for the Eikonal equation and applications // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2007. Vol. 45. P. 1979–2011.

11. Cristiani E., Martinon P. Initialization of the shooting method via the Hamilton-Jacobi-Bellman approach // Journal of Optimization Theory and Applications. 2010. Vol. 146, no. 2. P. 321–346.
12. Bokanowski O., Desilles A., Zidani H. ROC-HJ: Reachability analysis and Optimal Control problems — Hamilton-Jacobi equations / École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Institut des sciences et technologies de Paris. 2013. URL: <http://uma.ensta-paristech.fr/files/ROC-HJ>.
13. Crandall M. G., Lions P.-L. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 43, no. 167. P. 1–19.
14. Barles G., Souganidis P. E. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations // Asymptotic Analysis. 1991. Vol. 4, no. 3. P. 271–283.
15. Osher S., Shu C.-W. High essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1991. Vol. 28, no. 4. P. 907–922.
16. Jiang G., Peng D. P. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2000. Vol. 21, no. 6. P. 2126–2143.
17. Zhang Y.-T., Shu C.-W. High-order WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. Vol. 24, no. 3. P. 1005–1030.
18. Alvarez O., Carlini E., Monneau R., Rouy E. A convergent scheme for a non-local Hamilton-Jacobi equation modelling dislocation dynamics // Numerical Mathematics. 2006. Vol. 104, no. 4. P. 413–444.
19. Bokanowski O., Forcadel N., Zidani H. Reachability and minimal times for

- state constrained nonlinear problems without any controllability assumption // SIAM Journal on Control and Optimization. 2010. Vol. 48. P. 4292–4316.
20. Bokanowski O., Martin S., Munos R., Zidani H. An anti-diffusive scheme for viability problems // Applied Numerical Mathematics. 2006. Vol. 56, no. 9. P. 1147–1162.
 21. Bokanowski O., Megdich N., Zidani H. Convergence of a non-monotone scheme for Hamilton-Jacobi-Bellman equations with discontinuous data // Numerical Mathematics. 2010. Vol. 115, no. 1. P. 1–44.
 22. Bokanowski O., Cristiani E., Zidani H. An efficient data structure and accurate scheme to solve front propagation problems // Journal of Scientific Computing. 2010. Vol. 42, no. 2. P. 251–273.
 23. Osher S., Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // Journal of Computational Physics. 1988. Vol. 79. P. 12–49.
 24. Osher S. A level set formulation for the solution of the Dirichlet problem for Hamilton–Jacobi equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1993. Vol. 24, no. 5. P. 1145–1152.
 25. Sethian J. Level set methods: Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science. New York: Cambridge University Press, 1996.
 26. Mitchell I., Tomlin C. Level set methods for computation in hybrid systems // Hybrid Systems: Computation and Control (Lynch N. and Krogh B. H., eds.), Springer-Verlag. 2000. no. 1790 in LNCS. P. 310–323.
 27. Mitchell I., Bayen A., Tomlin C. Computing reachable sets for continuous dy-

- dynamic games using level set methods. 2002. URL: <http://hybrid.stanford.edu/~bayen/publications.html>.
28. Mitchell I., Bayen A., Tomlin C. Validating a Hamilton-Jacobi approximation to hybrid system reachable sets // Hybrid Systems: Computation and Control (Di Benedetto M. and Sangiovanni-Vincentelli A., eds.), Springer-Verlag. 2001. no. 2034 in LNCS. P. 418–432.
29. Mitchell I., Bayen A., Tomlin C. A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. Vol. 50, no. 7. P. 947–957.
30. Mitchell I. A Toolbox of Level Set Methods / Department of Computer Science, University of British Columbia. 2012. URL: <http://www.cs.ubc.ca/~mitchell/ToolboxLS>.
31. Субботина Н. Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 3–132.
32. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Об эффективности сеточного оптимального синтеза в задачах оптимального управления с фиксированным моментом окончания // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1651–1662.
33. Субботина Н. Н., Колпакова Е. А. О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в терминах классических характеристик // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.
34. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Оптимальный синтез в задаче управления с липшицевыми входными данными // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2008. Т. 262. С. 240–252.

35. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Оценка погрешности сеточного оптимального синтеза в нелинейных задачах оптимального управления предписанной продолжительности // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 141–156.
36. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2010. Т. 271. С. 259–277.
37. Melikyan A. A. Generalized characteristics of first order PDEs: application in optimal control and differential games. Boston: Birkhauser, 1998.
38. Меликян А. А. Особые характеристики дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в оптимальном уравнении и дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНТИ. 1999. Т. 64. С. 179–196.
39. Day M. V., Melikyan A. A. Simple singularities for Hamilton-Jacobi equations with max-concave Hamiltonians and generalized characteristics // Journal of Optimization Theory and Applications. 2008. Vol. 138, no. 2. P. 155–174.
40. Melikyan A. A., Bernhard P. Geometry of optimal paths around focal singular surfaces in differential games // Applied Mathematics and Optimization. 2005. Vol. 52. P. 23–37.
41. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности фазовых портретов различной структуры в окрестности особой дуги // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 129–141.
42. Меликян А. А. Граничные сингулярные характеристики уравнения Гамильтона-Якоби // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 2. С. 202–215.

43. Melikyan A. A., Olsder G. J. Boundary singularities and characteristics of Hamilton-Jacobi equation // Journal of Dynamical and Control Systems. 2010. Vol. 16, no. 1. P. 77–99.
44. Братусь А. С., Чумерина Е. С. Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 946–966.
45. Чумерина Е. С. Выбор оптимальной стратегии химиотерапии в модели Гомперца // Известия РАН: Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 170–176.
46. Чумерина Е. С. Синтез оптимального управления в математических моделях химиотерапии опухоли, растущей по закону Гомперца и логистическому закону: Кандидатская диссертация / Московский государственный университет путей сообщения. 2009.
47. Todorov Y., Fimmel E., Bratus A. S. et al. An optimal strategy for leukemia therapy: a multi-objective approach // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26, no. 6. P. 589–604.
48. Bratus A. S., Fimmel E., Todorov Y. et al. On strategies on a mathematical model for leukemia therapy // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2012. Vol. 13. P. 1044–1059.
49. Fimmel E., Semenov Y. S., Bratus A. S. On optimal and suboptimal treatment strategies for a mathematical model of leukemia // Mathematical Biosciences and Engineering. 2013. Vol. 10, no. 1. P. 151–165.
50. Степанова Н. В. Динамика иммунной реакции при развитии злокачественной опухоли // Биофизика. 1979. Т. 24, № 5. С. 890.

51. Ledzewicz U., Naghnaeian M., Schattler H. An optimal control approach to cancer treatment under immunological activity // *Applicationes Mathematicae*. 2011. Vol. 38, no. 1. P. 17–31.
52. Братусь А. С., Зайчик С. Ю. Гладкое решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в математической модели оптимальной терапии вирусных инфекций // *Дифференциальные уравнения*. 2010. Т. 46, № 11. С. 1571–1583.
53. Ledzewicz U., Schattler H. The influence of PK/PD on the structure of optimal controls in cancer chemotherapy models // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2005. Vol. 2, no. 3. P. 561–578.
54. Ledzewicz U., Schattler H. Optimal controls for a model with pharmacokinetics maximizing bone marrow in cancer chemotherapy // *Mathematical Biosciences*. 2007. Vol. 206, no. 2. P. 320–342.
55. Ledzewicz U., Schattler H. Singular controls and chattering arcs in optimal control problems arising in biomedicine // *Control and Cybernetics*. 2009. Vol. 38, no. 4B. P. 1501–1523.
56. Ledzewicz U., Maurer H., Schattler H. Optimal and suboptimal protocols for a mathematical model for tumor anti-angiogenesis in combination with chemotherapy // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2011. Vol. 8, no. 2. P. 307–323.
57. Ledzewicz U., Naghnaeian M., Schattler H. Bifurcation of singular arcs in an optimal control problem for cancer immune system interactions under treatment // *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. 2010. P. 7039–7044.
58. Ledzewicz U., Mosalman M. S. F., Schattler H. Optimal controls for a mathematical model of tumor-immune interactions under targeted chemotherapy

- with immune boost // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B. 2013. Vol. 18, no. 4. P. 1031–1051.
59. Ledzewicz U., Olumoye O., Schattler H. On optimal chemotherapy with a strongly targeted agent for a model of tumor-immune system interactions with generalized logistic growth // Mathematical Biosciences and Engineering. 2013. Vol. 10, no. 3. P. 787–802.
 60. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНТИ. 2002. Т. 90. С. 5–189.
 61. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 11. С. 3–161.
 62. Schattler H. On the local structure of time-optimal bang-bang trajectories in $\mathbb{R}^3$ // SIAM Journal on Control and Optimization. 1988. Vol. 26, no. 1. P. 186–204.
 63. Schattler H. The local structure of time-optimal trajectories in dimension 3 under generic conditions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1988. Vol. 26, no. 4. P. 899–918.
 64. Krener A. J., Schattler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120–147.
 65. Schattler H., Jankovic M. A synthesis of time-optimal controls in the presence of saturated singular arcs // Forum Mathematicum. 1993. Vol. 5. P. 203–241.
 66. Schattler H. A local field of extremals near boundary arc — interior arc junc-

- tions // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Sevilla, Spain. 2005. P. 945–950.
67. Schattler H. A local field of extremals for optimal control problems with state constraints of relative degree 1 // Journal of Dynamical and Control Systems. 2006. Vol. 12, no. 4. P. 563–599.
 68. Bonnard B., Busvelle E., Launay G. Geometric optimal control of the atmospheric arc for a space shuttle // Contemporary Trends in Nonlinear Geometric Control Theory and Its Applications (Anzaldo-Meneses A., Bonnard B., Gauthier J. P., Monroy-Pérez F., eds.), World Scientific. 2002. P. 233–256.
 69. Bonnard B., Faubourg L., Launay G., Trélat E. Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 2003. Vol. 9, no. 2. P. 155–199.
 70. Братусь А. С., Гончаров А. С., Тодоров Й. Т. Оптимальное управление в математической модели терапии лейкемии с фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета: Вычислительная математика и кибернетика. 2012. Т. 36, № 4. С. 25а–29.
 71. Bratus A., Todorov Y., Yegorov I., Yurchenko D. Solution of the feedback control problem in the mathematical model of leukaemia therapy // Journal of Optimization Theory and Applications. 2013. Vol. 159, no. 3. P. 590–605.
 72. Егоров И. Е. Обобщение метода характеристик Коши для построения гладких решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в задачах оптимального управления с особыми режимами // Вестник Московского университета: Вычислительная математика и кибернетика. 2014. Т. 38, № 3. С. 30–39.
 73. Егоров И. Е. Оптимальное позиционное управление в математической модели терапии злокачественной опухоли с учетом реакции иммунной систе-

- мы // Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9, № 1. С. 257–272.
74. Братусь А. С., Волосов К. А. Точные решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач оптимальной коррекции с ограниченным суммарным ресурсом управления // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 5. С. 819–832.
75. Волосов К. А. Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами: Докторская диссертация / Московский государственный университет путей сообщения. 2007.
76. Dimentberg M., Iourtchenko D., Bratus A. Optimal bounded control of steady-state random vibrations // Probabilistic Engineering Mechanics. 2000. Vol. 15, no. 4. P. 381–386.
77. Bratus A., Dimentberg M., Iourtchenko D. Optimal bounded response control for a second-order system under a white-noise excitation // Journal of Vibration and Control. 2000. Vol. 6, no. 5. P. 741–755.
78. Bratus A., Dimentberg M., Iourtchenko D., Noori M. Hybrid solution method for dynamic programming equations for MDOF stochastic systems // Dynamics and Control. 2000. Vol. 10, no. 1. P. 107–116.
79. Братусь А. С., Иванова А. П., Меньяльди Ж. Л., Юрченко Д. В. Локальные решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для некоторых стохастических задач // Автоматика и телемеханика. 2007. № 6. С. 99–115.
80. Егоров И. Е. Оценка альтернативных стратегий управления системами с асимптотически устойчивыми положениями равновесия // Вестник Московского университета: Вычислительная математика и кибернетика. 2013. Т. 37, № 3. С. 38–48.

81. Егоров И. Е. Обобщение метода характеристик Коши для построения гладких решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана // Сборник тезисов секции «Вычислительная математика и кибернетика» XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 9–13 апреля 2012 г.). М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова. 2012. С. 76–78.
82. Кружков С. Н. К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 6. С. 112–118.
83. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. I // Математический сборник. 1966. Т. 70, № 3. С. 394–415.
84. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. II // Математический сборник. 1967. Т. 72, № 1. С. 108–134.
85. Lions P.-L. Generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. Boston: Pitman, 1982.
86. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. P. 1–42.
87. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
88. Evans L. C. Envelopes and nonconvex Hamilton–Jacobi equations // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2013.

89. Hopf E. Generalized solutions of nonlinear equations of first order // Journal of Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 14. P. 951–973.
90. Bardi M., Evans L. C. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations // Nonlinear Analysis. 1984. Vol. 8. P. 1373–1381.
91. Evans L. C., Souganidis P. E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations // Indiana University Mathematics Journal. 1984. Vol. 33. P. 773–797.
92. Evans L. C. Adjoint and compensated compactness methods for Hamilton-Jacobi PDE // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2010. Vol. 197. P. 1053–1088.
93. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
94. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об оптимальном описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
95. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
96. Куржанский А. Б., Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993. Т. 333, № 4. С. 578–581.
97. Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.

98. Куржанский А. Б., Мельников Н. Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона-Якоби // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 6. С. 69–100.
99. Куржанский А. Б. О синтезе управлений по результатам измерений // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 547–563.
100. Куржанский А. Б. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 12–22.
101. Куржанский А. Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Труды института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
102. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1996.
103. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
104. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I. External approximations // Optimization Methods and Software. 2002. Vol. 17, no. 2. P. 177–206.
105. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II. Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization Methods and Software. 2002. Vol. 17, no. 2. P. 207–237.
106. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. Vol. 41, no. 1. P. 181–216.
107. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability under state

- constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 2006. Vol. 45, no. 4. P. 1369–1394.
108. Kurzhanski A. B., Mitchell I. M., Varaiya P. Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521.
109. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty // Journal of Optimization Theory and Applications. 2011. Vol. 151, no. 1. P. 11–32.
110. Куржанский А. Б., Месяц А. И. Оптимальное управление эллипсоидальными движениями // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1525–1532.
111. Kurzhanski A. A. Ellipsoidal Toolbox for MATLAB / Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California in Berkeley. 2013. URL: <http://code.google.com/p/ellipsoids/>.
112. Гусев М. И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
113. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Нелинейный синтез управления при двойных ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1476–1484.
114. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1474–1486.
115. Куржанский А. Б. О синтезе импульсных управлений и теории быстрых

- управлений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2010. Т. 268. С. 215–230.
116. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнев А. В. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1491–1500.
117. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Синтез управлений в классе обобщенных функций высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1443–1453.
118. Дарьин А. Н., Дигайлова И. А., Куржанский А. Б. О задаче синтеза импульсных управлений по результатам измерений // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 92–105.
119. Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Быстрые воздействия в задаче синтеза управлений при неопределенности // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 963–971.
120. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
121. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, Физматлит, 1997.
122. Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, 1997.
123. Ухин М. Ю. Приближенный синтез оптимального управления. М.: Физматлит, 2006.
124. Гурман В. И., Кань Ни Минь, Ухин М. Ю. Практические схемы опти-

- мизации управления на основе принципа расширения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 25–41.
125. Никифорова Л. Н., Ухин М. Ю. Улучшение и оценка приближенно оптимального позиционного управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 39–48.
126. Гурман В. И., Трушкова Е. А. Приближенные методы оптимизации управляемых процессов // Программные системы: теория и приложения. 2010. Т. 4, № 4. С. 85–104.
127. Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76–108.
128. Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.
129. Дыхта В. А. Некоторые приложения неравенств Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2009. Т. 2, № 1. С. 183–196.
130. Дыхта В. А. Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // Вестник Тамбовского государственного университета им. Г. Р. Державина. 2010. Т. 15, № 1. С. 405–426.
131. Дыхта В. А., Сорокин С. П. Неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими концевыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 13–27.
132. Зеликина Л. Ф. Универсальные многообразия и теоремы о магистрали для

- некоторого класса задач оптимального управления // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224, № 1. С. 31–34.
133. Зеликина Л. Ф. Многомерный синтез и теоремы о магистралях // В кн.: Вероятностные проблемы управления в экономике. 1977. С. 33–114.
134. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85–166.
135. Зеликина Л. Ф., Зеликин М. И., Хлюстов К. В. Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1161–1167.
136. Зеликин М. И. Структура оптимального синтеза в окрестности особых многообразий для аффинных по управлению задач // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. С. 174–196.
137. Зеликина Л. Ф. К вопросу о регулярном синтезе // Доклады АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 532–535.
138. Zelikina L. F. On the smoothness of the Bellman function in optimal control problems with incomplete data // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1986. Vol. 81. P. 747–754.
139. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.
140. Gardner-Moyer H. Sufficient conditions for a strong minimum in singular control problems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1973. Vol. 11, no. 4. P. 620–636.
141. Ledzewicz U., Schattler H. On the optimality of singular controls for a class of

- mathematical models for tumor anti-angiogenesis // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B. 2009. Vol. 11, no. 3. P. 691–715.
142. Aubin J.-P., Bayen A., Saint-Pierre P. Viability Theory. New Directions. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
 143. Altarovici A., Bokanowski O., Zidani H. A general Hamilton-Jacobi framework for nonlinear state-constrained control problems // ESAIM: Control, optimisation and calculus of variations. 2013. Vol. 19, no. 2. P. 337–357.
 144. Lygeros J. On reachability and minimum cost optimal control // IFAC Automatica. 2004. Vol. 40, no. 6. P. 917–927.
 145. Panagou D., Margellos K., Summers S. et al. A viability approach for the stabilization of an underactuated underwater vehicle in the presence of current disturbances // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P. R. China. 2009. P. 8612–8617.
 146. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
 147. Todorov Y., Nuernberg F. Optimal therapy protocols in the mathematical model of acute leukemia with several phase constraints // Optimal Control Applications and Methods. 2013. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/oca.2087>.
 148. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
 149. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
 150. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

151. Финогенко И. А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью (Серия «Неклассические задачи динамики и управления», Выпуск 1). Иркутск: Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 2013.
152. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
153. Бибииков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
154. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
155. Цехан О. Б. Матричный анализ. Гродно: Издательский центр ГрГУ им. Янки Купалы, 2010.
156. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
157. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001.
158. Иванов А. О., Тужилин А. А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. М.: Университетская книга, Логос, 2009.
159. Трушков В. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Переславль-Залесский: Издательство Университета города Переславля, 2006.
160. Yue R. Properties of the Bellman function in time-optimal control problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1997. Vol. 94, no. 1. P. 155–168.
161. Bony J. M. Principe du maximum, inegalite de Harnack et unicite du probleme de Cauchy pour les operateurs elliptiques degenerate // Annales de L’Institut Fourier, Universite de Grenoble. 1969. Vol. 19. P. 277–304.

162. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Часть 2. М.: Физматлит, 2001.

Приложение А

Специальные примеры

Рассматриваются пример задачи вида (1.1), (1.2), в которой для обоих индексов $i = 1, 2$ $\Omega_\tau^i \not\subseteq D_\tau^i$ при всех достаточно малых $\tau > 0$ и тем самым описанные в Главах 1–3 методы синтеза оптимального управления не применимы, и пример аналитического построения точного решения уравнения ГЯБ для задачи отличного от (1.1), (1.2) вида, в которой исследуются колебания математического маятника при ограниченном суммарном ресурсе управления.

Пример 1. Рассматривается задача

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \omega^2 \tilde{x} = \tilde{u}(\tilde{t}), \\ -\tilde{R} \leq \tilde{u}(\tilde{t}) \leq \tilde{R}, \quad \tilde{t} \in [0, \tilde{T}], \\ \tilde{\Phi}\left(\tilde{x}(\tilde{T}), \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}(\tilde{T})\right) := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \left(\tilde{x}(\tilde{T}) \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}(\tilde{T}) \right)^2 \right) \longrightarrow \inf, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где $\omega, \tilde{R}, \tilde{T}$ — положительные константы. С помощью замен

$$\begin{aligned} t &:= \omega \tilde{t}, \quad T := \omega \tilde{T}, \quad x(t) := \tilde{x}(\tilde{t}), \quad u(t) := \frac{\tilde{u}(\tilde{t})}{\omega^2}, \quad R := \frac{\tilde{R}}{\omega^2}, \\ x_1 &:= x, \quad x_2 := \frac{dx}{dt}, \quad \Phi(x_1(T), x_2(T)) := \frac{2}{\omega^2} \cdot \tilde{\Phi}\left(\tilde{x}(\tilde{T}), \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}(\tilde{T})\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u(t), \\ -R \leq u(t) \leq R, \quad t \in [0, T], \\ \Phi(x_1(T), x_2(T)) = (x_1(T))^2 + (x_2(T))^2 \longrightarrow \inf. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

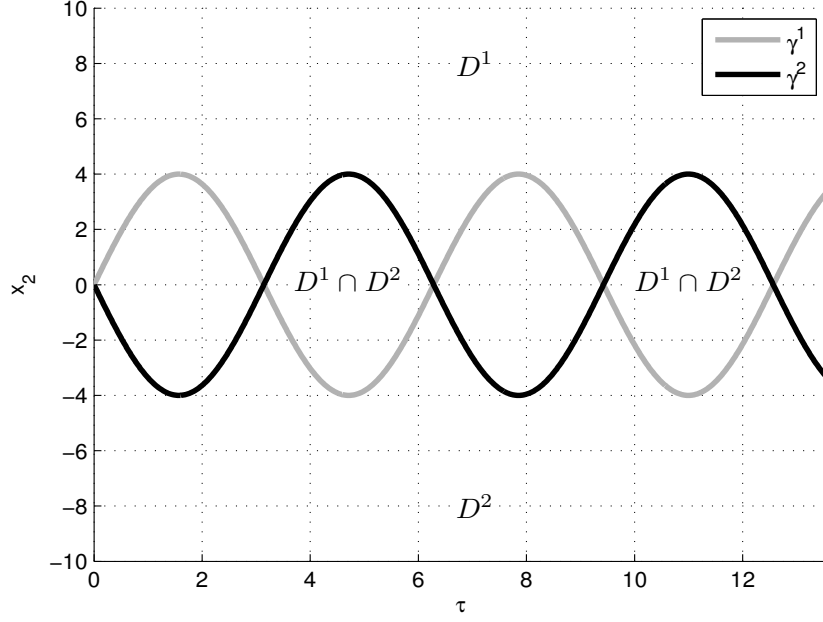


Рис. А.1. Множества D^i, γ^i , $i = 1, 2$, в Примере 1.

Соответствующая задача Коши для уравнения ГЯБ принимает вид

$$\begin{cases} S = S(x_1, x_2, \tau), & \tau := T - t, \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} = x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} - R \left| \frac{\partial S}{\partial x_2} \right|, \\ S(x_1, x_2, 0) = x_1^2 + x_2^2. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Имеем

$$\begin{aligned} S^1(x_1, x_2, \tau) &= (x_2 - R \sin \tau)^2 + (x_1 + R(1 - \cos \tau))^2, \\ S^2(x_1, x_2, \tau) &= (x_2 + R \sin \tau)^2 + (x_1 - R(1 - \cos \tau))^2, \\ D^1 &= \{x_2 \geq R \sin \tau\}, \quad \gamma^1 = \{x_2 = R \sin \tau\}, \\ D^2 &= \{x_2 \leq -R \sin \tau\}, \quad \gamma^2 = \{x_2 = -R \sin \tau\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Склеить функции S^1 и S^2 по непрерывности при $T \geq \pi$ здесь заведомо невозможно, так как разрыв всегда будет иметь место в точках

$$(x_1, x_2, \tau) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1 \neq 0, x_2 = 0, \tau = (2k - 1)\pi\} \subset \gamma^1 \cap \gamma^2.$$

В самом деле,

$$S^1(x_1, 0, (2k-1)\pi) = (x_1 + 2R)^2, \quad S^2(x_1, 0, (2k-1)\pi) = (x_1 - 2R)^2 \\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(лишь для $x_1 = 0$ здесь можно добиться равенства значений S^1 и S^2), в то время как

$$S^1(x_1, 0, 2k\pi) = S^2(x_1, 0, 2k\pi) = x_1^2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Найдем траекторию системы (A.3) в обратном времени $\tau := T - t \in [0, T]$ для $u \equiv -R$ с начальной точкой $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$:

$$x_1^1(\tau) = x_1^0 \cos \tau - x_2^0 \sin \tau - R + R \cos \tau, \\ x_2^1(\tau) = x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau + R \sin \tau. \quad (\text{A.6})$$

Это часть окружности (при $T \geq 2\pi$ целая окружность)

$$(x_1 + R)^2 + x_2^2 = (x_1^0 + R)^2 + (x_2^0)^2,$$

так как

$$(x_1^1(\tau) + R)^2 + (x_2^1(\tau))^2 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + R^2 + \\ + 2R \cos \tau (x_1^0 \cos \tau - x_2^0 \sin \tau) + 2R \sin \tau (x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau) = \\ = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + R^2 + 2Rx_1^0 = (x_1^0 + R)^2 + (x_2^0)^2.$$

Теперь найдем траекторию системы (A.3) в обратном времени $\tau := T - t \in [0, T]$ для $u \equiv R$ с той же начальной точкой:

$$x_1^2(\tau) = x_1^0 \cos \tau - x_2^0 \sin \tau + R - R \cos \tau, \\ x_2^2(\tau) = x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau - R \sin \tau. \quad (\text{A.7})$$

Это часть окружности (при $T \geq 2\pi$ целая окружность)

$$(x_1 - R)^2 + x_2^2 = (x_1^0 - R)^2 + (x_2^0)^2,$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned}
(x_1^2(\tau) - R)^2 + (x_2^2(\tau))^2 &= (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + R^2 - \\
&- 2R \cos \tau (x_1^0 \cos \tau - x_2^0 \sin \tau) - 2R \sin \tau (x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau) = \\
&= (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + R^2 - 2Rx_1^0 = (x_1^0 - R)^2 + (x_2^0)^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что при $x_2^0 \neq 0$ эти окружности пересекаются не только в начальной точке (x_1^0, x_2^0) , но и в $(x_1^0, -x_2^0)$, т.е. имеем пересекающиеся не только в общей начальной точке фазовые траектории системы в обратном времени с $u \equiv -R$ и $u \equiv R$.

Убедимся в том, что, несмотря на равенства $\Omega_0^1 = D_0^1$ и $\Omega_0^2 = D_0^2$, имеет место следующее:

$$\Omega_\tau^1 \not\subseteq D_\tau^1, \quad \Omega_\tau^2 \not\subseteq D_\tau^2 \quad \text{при } \tau > 0, \quad \tau \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{A.8})$$

Зафиксируем $\tau > 0, \tau \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $\sin \tau \neq 0$. Если $(x_1, x_2, \tau) \in \Omega_\tau^1$, то в силу соотношений (A.5), (A.6) $x_2 = x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau + R \sin \tau$ для некоторых $x_1^0 \in \mathbb{R}, x_2^0 \geq R \sin 0 = 0$. Для установления того, что $\Omega_\tau^1 \not\subseteq D_\tau^1$, достаточно подобрать такие числа $x_1^0 \in \mathbb{R}, x_2^0 \geq 0$, которые удовлетворяют неравенству

$$x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau + R \sin \tau < R \sin \tau,$$

или

$$x_1^0 \sin \tau < -x_2^0 \cos \tau.$$

Этого можно добиться выбором достаточно большого по модулю числа x_1^0 со знаком, противоположным знаку $\sin \tau \neq 0$, при фиксированных x_2^0, τ .

Если же $(x_1, x_2, \tau) \in \Omega_\tau^2$, то в силу соотношений (A.5), (A.7) $x_2 = x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau - R \sin \tau$ для некоторых $x_1^0 \in \mathbb{R}, x_2^0 \leq -R \sin 0 = 0$. Для установления того, что $\Omega_\tau^2 \not\subseteq D_\tau^2$, достаточно подобрать такие числа $x_1^0 \in \mathbb{R}, x_2^0 \leq 0$, которые удовлетворяют неравенству

$$x_1^0 \sin \tau + x_2^0 \cos \tau - R \sin \tau > -R \sin \tau,$$

или

$$x_1^0 \sin \tau > -x_2^0 \cos \tau.$$

Этого можно добиться выбором достаточно большого по модулю числа x_1^0 с тем же знаком, что и $\sin \tau \neq 0$, при фиксированных x_2^0, τ .

Доказанное свойство (A.8) свидетельствует о том, что в данном примере описанные в Главах 1–3 методы синтеза оптимального управления не применимы. $\square$

Пример 2. Рассматривается задача оптимального управления для системы, описывающей колебания математического маятника при ограниченном суммарном ресурсе управления [74, 75]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\omega^2 x_1 - 2\alpha x_2 + u(t), \\ \omega = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \omega > \alpha, \\ \exists \int_0^T |u(t)|^n dt < +\infty, \\ n := \frac{2k_1}{2k_2 - 1} > 1, \quad k_j = \text{const} \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad k_1 \geq k_2, \\ \Phi(x_1(T), x_2(T)) \longrightarrow \inf. \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

Здесь x_1 — координата маятника, x_2 — его скорость в направлении координаты x_1 , ω — собственная частота, α — коэффициент трения, Φ — функция одного из двух типов

$$\Phi(x_1, x_2) := \varphi_0(x_1), \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi(x_1, x_2) := \varphi_0(x_2), \quad (\text{A.11})$$

$\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ — четная дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi_0(0) = \varphi'_0(0) = 0$, $\varphi'_0(x) > 0$ для всех $x > 0$ (например, $\varphi_0(x) = x^2$).

Введем новую переменную

$$q(t) := \int_t^T |u(s)|^n ds, \quad \frac{dq}{dt} = -|u(t)|^n, \quad q(T) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Обозначим

$$\kappa := \omega^2 - \alpha^2 > 0. \quad (\text{A.13})$$

Определим вторую новую переменную соотношениями

$$\begin{aligned} y(t) &= (x_2(t) + \alpha x_1(t)) \exp(-\alpha(T-t)) \sin(\sqrt{\kappa}(T-t)) + \\ &+ \sqrt{\kappa} x_1(t) \exp(-\alpha(T-t)) \cos(\sqrt{\kappa}(T-t)), \quad y(T) = \sqrt{\kappa} x_1(T), \quad (\text{A.14}) \\ \frac{dy}{dt} &= \exp(-\alpha(T-t)) \sin(\sqrt{\kappa}(T-t)) u(t) \end{aligned}$$

в случае (A.10) и соотношениями

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{\kappa} x_2(T) \exp(-\alpha(T-t)) \cos(\sqrt{\kappa}(T-t)) - \\ &- (\omega^2 x_1 + \alpha x_2) \exp(-\alpha(T-t)) \sin(\sqrt{\kappa}(T-t)), \\ y(T) &= \sqrt{\kappa} x_2(T), \quad (\text{A.15}) \\ \frac{dy}{dt} &= (\sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}(T-t)) - \alpha \sin(\sqrt{\kappa}(T-t))) \cdot \\ &\cdot \exp(-\alpha(T-t)) u(t) \end{aligned}$$

в случае (A.11).

Таким образом, в обоих случаях (A.10),(A.11) мы приходим к задаче вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t)u(t), \\ \frac{dq}{dt} = -|u(t)|^n, \quad q(T) = 0, \\ \varphi(y(T)) := \varphi_0\left(\frac{y(T)}{\sqrt{\kappa}}\right) \longrightarrow \inf, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

где $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция, которая может иметь лишь изолированные нули.

Запишем соответствующую задачу Коши для уравнения ГЯБ:

$$\begin{cases} S_t + \inf_{u \in \mathbb{R}} \{f(t)uS_y - |u|^n S_q\} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad q > 0, \quad t \in [0, T), \\ S(y, q, t = T) = \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0, \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Argmin} \{f(t)uS_y - |u|^n S_q : u \in \mathbb{R}\} &= \\ &= \left\{ \left(\frac{|S_y f(t)|}{-nS_q} \right)^\mu \operatorname{sign}(S_y f(t)) \right\} \quad \text{при } S_q < 0, \quad \mu := \frac{1}{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Замена переменных

$$\tau(t) := \int_t^T f^2(s) ds \quad (\text{A.19})$$

переводит задачу (A.17) в

$$\begin{cases} S_\tau = (n-1)p_n(\tau) \left(\frac{|S_y|}{-nS_q} \right)^{\mu+1} S_q, \\ y \in \mathbb{R}, \quad q > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_{\max} := \int_0^T f^2(s) ds, \quad S_q(y, q, \tau) < 0, \\ S(y, q, 0) = \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0, \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$p_n(\tau) := |f(t(\tau))|^{\mu-1} \quad (\text{A.21})$$

$(\tau(t), t \in [0, T])$, — строго убывающая функция, так как $f(\cdot)$ может иметь только изолированные нули).

Поскольку функция $\varphi(\cdot)$ предполагается четной и дважды непрерывно дифференцируемой, то задача (A.20) инвариантна относительно преобразования $y \rightarrow -y$. Следовательно, задачу (A.20) можно рассматривать при $y \geq 0$, если добавить граничное условие

$$S_y(0, q, \tau) = 0, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}. \quad (\text{A.22})$$

Обозначим

$$P_n(q, \tau) := q^{\frac{1}{n}} (\Theta_n(\tau))^{1-\frac{1}{n}}, \quad \Theta_n(\tau) := \int_0^\tau p_n(\xi) d\xi; \quad (\text{A.23})$$

$(P_n)_q(q, \tau)$ определена для $q > 0$ и $\tau \geq 0$, $(P_n)_\tau(q, \tau)$ определена для $\tau > 0$ и $q \geq 0$, $P_n(q, \tau) > 0$ при $q > 0$ и $\tau > 0$.

Непосредственно проверяется, что

$$S_1(y, q, \tau) := \varphi(y - P_n(q, \tau)) \quad (\text{A.24})$$

есть такое классическое, гладкое решение уравнения ГЯБ из (A.20) на множестве

$$D_1^n := \{(y, q, \tau) : y > P_n(q, \tau), q > 0, 0 < \tau \leq \tau_{\max}\}, \quad (\text{A.25})$$

что

$$\begin{aligned} \forall (y, q, \tau) \in D_1^n \quad (S_1)_q(y, q, \tau) &< 0, \quad (S_1)_y(y, q, \tau) > 0, \\ \forall (y', q', \tau') \in \gamma^n &:= \{(y, q, \tau) : y = P_n(q, \tau), q > 0, 0 < \tau \leq \tau_{\max}\} \\ \lim_{D_1^n \ni (y, q, \tau) \rightarrow (y', q', \tau')} S_1(y, q, \tau) &= \\ = \lim_{D_1^n \ni (y, q, \tau) \rightarrow (y', q', \tau')} (S_1)_y(y, q, \tau) &= \\ = \lim_{D_1^n \ni (y, q, \tau) \rightarrow (y', q', \tau')} (S_1)_q(y, q, \tau) &= \\ = \lim_{D_1^n \ni (y, q, \tau) \rightarrow (y', q', \tau')} (S_1)_\tau(y, q, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

(напомним, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$).

Обозначим

$$D_2^n := \{(y, q, \tau) : 0 \leq y < P_n(q, \tau), q \geq 0, 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}\}. \quad (\text{A.27})$$

Таким образом, непрерывная функция $S : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, \tau_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством

$$S(y, q, \tau) := \begin{cases} S_1(y, q, \tau) = \varphi(y - P_n(q, \tau)), & (y, q, \tau) \in \overline{D_1^n}, \\ 0, & (y, q, \tau) \in \overline{D_2^n}, \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

есть классическое, гладкое решение уравнения ГЯБ из (A.20) на множестве

$$D^n := D_1^n \cup \gamma^n \cup D_2^n, \quad (\text{A.29})$$

удовлетворяющее граничному условию из (A.20) при $y \geq 0, q \geq 0$ и требованию (A.22) при $q \geq 0, 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$. Для $y < 0$ положим

$$S(y, q, \tau) := S(|y|, q, \tau), \quad y < 0, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}. \quad (\text{A.30})$$

На основании соотношений (A.18), (A.23), (A.26) имеем

$$u_{\text{opt}}(y, q, \tau) = -|f(t(\tau))|^\mu \left(\frac{q}{\Theta_n(\tau)} \right)^{\frac{1}{n}} \text{sign } f(t(\tau)), \quad (y, q, \tau) \in D_1^n. \quad (\text{A.31})$$

Более того, правая часть равенства (A.31) определена на γ^n , и произвольная интегральная кривая переписанной для новой временной переменной τ (см. определение (A.19)) системы (A.16) с управлением (A.31), выходящая из точки $(y', q', \tau') \in D_1^n \cup \gamma^n$, лежит целиком на поверхности

$$\{(y, q, \tau) : y - P_n(q, \tau) = y' - P_n(q', \tau'), \quad q > 0, \quad \tau' \leq \tau \leq \tau_{\max}\}. \quad (\text{A.32})$$

Действительно, можно непосредственно проверить обнуление скалярного произведения нормального вектора к (A.32) и правой части переписанной для временной переменной τ системы (A.16) с управлением (A.31).

Следовательно, мы имеем право распространить равенство (A.31) на все множество $(y, q, \tau) \in D_1^n \cup \gamma^n$.

Заметим, что при $u \equiv 0$ из системы (A.16) получаем $y \equiv \text{const}$, $q \equiv \text{const}$ и, стало быть, начиная движение на D_2^n , с увеличением временной переменной t (с уменьшением переменной τ) мы достигнем поверхности $\{(y, q, \tau) : y = P_n(q, \tau), \quad q > 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}\}$ (очевидно, что $q > 0$ и $\tau > 0$ в D_2^n), на которой $S \equiv 0$. Поэтому можно положить

$$u_{\text{opt}}(y, q, \tau) = 0, \quad (y, q, \tau) \in D_2^n. \quad (\text{A.33})$$

Осталось разобрать тривиальный случай $q = 0$. Если $y' \in \mathbb{R}$, $0 < \tau' \leq \tau_{\max}$ и $(y, q)|_{\tau=\tau'} = (y', 0)$, то из соотношений (A.12), (A.16) получаем, что $q \equiv 0$, $u \equiv 0$ и $y \equiv y'$ для всех $\tau \in [0, \tau']$, т. е.

$$S(y, 0, \tau) = \varphi(y), \quad u_{\text{opt}}(y, 0, \tau) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}. \quad (\text{A.34})$$

Приложение Б

Вспомогательные определения и классическая теорема о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

Укажем, что в данной диссертационной работе понимается под непрерывными и регулярными l -мерными поверхностями без краевых точек в $\mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $l < m$.

Непрерывной l -мерной поверхностью без краевых точек в $\mathbb{R}^m$ мы называем множество $\sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее следующему требованию: для любой точки из σ найдется такая связная ее окрестность в $\mathbb{R}^m$, пересечение которой с σ гомеоморфно некоторой открытой области в $\mathbb{R}^l$ и которую можно выбрать сколь угодно малой (т. е. целиком лежащей в шаровой окрестности сколь угодно малого фиксированного радиуса).

Регулярной l -мерной поверхностью без краевых точек в $\mathbb{R}^m$ мы называем множество $\sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее следующим трем эквивалентным условиям (см., например, [158, Лекция 3]):

- для любой точки $P \in \sigma$ найдется такая связная ее окрестность $O'_m(P)$ в $\mathbb{R}^m$, что

$$\sigma \cap O'_m(P) = \{y \in O'_m(P) : f_{\sigma,P}(y) = 0\},$$

где $f_{\sigma,P} : O'_m(P) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция с ненулевым всюду в $O'_m(P)$ градиентом;

- для всякой точки $P \in \sigma$ существуют такая связная ее окрестность $O''_m(P)$

в $\mathbb{R}^m$ и такой номер $i = i(\sigma, P) \in \{1, 2, \dots, m\}$, что

$$\sigma \cap O_m''(P) = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in O_m''(P) :$$

$$y_i = g_{\sigma, P}(y_1, y_2, \dots, y_{i-2}, y_{i-1}, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_m)\},$$

где $g_{\sigma, P} : \text{pr}_{(y_1, y_2, \dots, y_{i-2}, y_{i-1}, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_m)} O_m''(P) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция (заданная в открытой области, являющейся ортогональной проекцией $O_m''(P)$ на координатную гиперплоскость переменных $(y_1, y_2, \dots, y_{i-2}, y_{i-1}, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_m)$ в $\mathbb{R}^m$);

- для каждой точки $P \in \sigma$ найдется такая связная ее окрестность $O_m'''(P)$ в $\mathbb{R}^m$, что

$$\sigma \cap O_m'''(P) = \{r_{\sigma, P}(v) : v \in V_{\sigma, P}^l\},$$

где $V_{\sigma, P}^l$ — открытая область в $\mathbb{R}^l$, $r_{\sigma, P} : V_{\sigma, P}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение с матрицей Якоби, имеющей ранг l во всех точках $V_{\sigma, P}^l$ (ввиду эквивалентности этого определения двум предыдущим область $O_m'''(P)$ здесь можно выбирать сколь угодно малой).

$(m-1)$ -мерные поверхности в $\mathbb{R}^m$ принято называть гиперповерхностями.

Также подчеркнем, что в данной работе мы рассматриваем только связные поверхности и отождествляем понятие связности с понятием линейной связности (подмножество $\mathbb{R}^m$ называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в нем).

Будем говорить, что связная непрерывная гиперповерхность σ без краевых точек в $\mathbb{R}^m$ делит открытую область $M \subseteq \mathbb{R}^m$ на две части M_1, M_2 , если выполнены следующие требования:

- $M = M_1 \cup M_2$;
- $\sigma = M_1 \cap M_2$;
- $M_1 \setminus \sigma$ и $M_2 \setminus \sigma$ — открытые области в $\mathbb{R}^m$;

- всякая непрерывная кривая в $\mathbb{R}^m$, соединяющая две произвольные точки $P_1 \in M_1$, $P_2 \in M_2$ и целиком лежащая в M , проходит хотя бы через одну точку из σ ;
- каковы бы ни были точка $P \in \sigma$ и ее окрестность $O_m(P)$ в $\mathbb{R}^m$, имеем

$$(O_m(P) \setminus \sigma) \cap M_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2.$$

Пусть N — произвольное непустое подмножество $\mathbb{R}^m$ и задана функция $N \ni y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \rightarrow \varphi(y)$. Она называется дифференцируемой в точке $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \in N$, если найдутся такие числа $a_j(y^0; \varphi(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, что

$$\lim_{y \rightarrow y^0, y \in N} \frac{\varphi(y) - \varphi(y^0) - \sum_{j=1}^m a_j(y^0; \varphi(\cdot)) (y - y^0)}{\|y - y^0\|} = 0;$$

при этом

$$a_j(y^0; \varphi(\cdot)) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(y^0) := \lim_{y_j \rightarrow y_j^0, (y_1^0, y_2^0, \dots, y_{j-2}^0, y_{j-1}^0, y_j, y_{j+1}^0, y_{j+2}^0, \dots, y_m^0) \in N} \frac{\varphi(y_1^0, y_2^0, \dots, y_{j-2}^0, y_{j-1}^0, y_j, y_{j+1}^0, y_{j+2}^0, \dots, y_m^0) - \varphi(y^0)}{y_j - y_j^0}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Функция $\varphi(\cdot)$ называется непрерывно дифференцируемой (на множестве N), если она дифференцируема в каждой точке из N и функции $N \ni y \rightarrow a_j(y, \varphi(\cdot))$, $j = \overline{1, m}$, непрерывны.

Теорема Б.1 ([159], п. 16.1.2). *Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m b_j(y) \cdot \frac{\partial w}{\partial y_j} = b_{m+1}(y) \cdot w + b_{m+2}(y), \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in M, \\ w(y) = w_\sigma(y), \quad y \in \sigma, \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

где:

- M — открытая область в $\mathbb{R}^m$;
- $\sigma \subset M$ — регулярная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^m$;
- функции $b_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m+2}$, непрерывно дифференцируемы;
- функция $w_\sigma : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема;
- $\sum_{j=1}^m |b_j(y)| > 0$ во всех точках $y \in M$.

Пусть при любом $y' \in M$ решение задачи Коши для рассматриваемой в области $y \in M$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{ds} = b_j(y), \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{Б.2})$$

с начальным условием $y|_{s=0} = y'$, заданное на максимальном интервале своего существования (т. е. на максимальном интервале своего прохождения в области M , см., например, [153, Глава II, §4]) и называемое характеристикой уравнения (Б.1), пересекает поверхность σ один и только один раз, причем без касания. Тогда существует единственное гладкое решение задачи (Б.1), заданное в M .

Приложение В

Доказательства некоторых утверждений и теорем

В.1. Доказательство Утверждения 1.1

Первое и третье свойства в (1.19) непосредственно вытекают из [149, §2.4, Следствие 2 Теоремы 2.4.7].

Проверим второе свойство (четвертое устанавливается аналогично). Очевидно, что функции g и $-g$ локально липшицевы в $\mathbb{R}^n$. С учетом представления (1.15) и [149, §2.3, Предложения 2.3.1 и 2.3.12] имеем

$$\begin{aligned} \text{ext } G &= \{y \in \mathbb{R}^n : -g(y) \leq 0 = -g(x)\}, \\ D^{\text{Cl}}(-g)(y) &= -D^{\text{Cl}}g(y) = -\text{conv} \{\nabla g_i(y) : i \in I(y)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.1}) \\ I(y) &:= \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : g_i(y) = g(y)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Поэтому $0 \notin D^{\text{Cl}}(-g)(x)$ на основании неотрицательной линейной независимости градиентов $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$. Таким образом, с помощью равенств (B.1) и [149, §2.4, Следствие 1 Теоремы 2.4.7] получаем

$$\begin{aligned} N_{\text{ext } G}^{\text{Cl}}(x) &\subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0} \lambda (-\text{conv} \{\nabla g_i(x) : i \in I(x)\}) = \\ &= \left\{ \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla g_i(x) : \mu_i \leq 0 \quad \forall i \in I(x) \right\} = -N_G^{\text{Cl}}(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

В.2. Доказательство Утверждения 1.5

В данной ситуации мы наблюдаем тривиальный случай задачи оптимального быстрогодействия с замкнутым целевым множеством $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ при отсутствии управления в правой части системы уравнений динамики. В [160,

Следствие 3.1] приведены достаточные условия локальной липшицевости функции цены в задаче оптимального быстрогодействия с замкнутым целевым множеством. При этом ключевую роль там играют Предположение (A4) (Предположения (A1)–(A3) естественны и выполнены для (1.35) в силу непрерывности функции (1.4), ее глобальной липшицевости по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно по $u \in P$ и оценки (1.27)) и требование отрицательности функции $p(\cdot)$ во всех граничных точках целевого множества, а в формулировке (A4) и определении $p(\cdot)$ задействован конус единичных внешних нормалей в смысле Бони [161]. Последний всегда содержится в пересечении нормального конуса Кларка и единичной сферы с центром в начале координат [149, §2.5, Предложение 2.5.7]. Поэтому в нашем случае отрицательность $p(\cdot)$ в каждой граничной точке целевого множества непосредственно следует из неравенства (1.17).

По аналогии с Утверждением 1.1 имеем

$$C = \left\{ (x, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tilde{g}(x, \tau) := \max \left\{ \max_{i \in J'} g_i(x), \tau - T_+ \right\} \geq 0 \right\}$$

и

$$\begin{aligned} N_C^{\text{Cl}}(x, \tau) &\subseteq \left\{ \sum_{i \in \tilde{I}(x, \tau)} \mu_i \nabla \tilde{g}_i(x, \tau) : \mu_i \leq 0 \quad \forall i \in \tilde{I}(x, \tau) \right\}, \\ \tilde{g}_i(x, \tau) &:= g_i(x) \quad \forall i \in J', \quad \tilde{g}_{r+1}(x, \tau) := \tau - T_+, \\ \tilde{I}(x, \tau) &:= \{i \in J' \cup \{r+1\} : \tilde{g}_i(x, \tau) = \tilde{g}(x, \tau)\} \\ \forall (x, \tau) \in \partial C &= \{(y, s) : y \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}, \tilde{g}(y, s) = 0\}. \end{aligned}$$

Учитывая пункты 1,5 Предположения 1.2, можно по аналогии с рассуждениями из [160, Замечание 3.1] установить в нашем случае справедливость Предположения (A4) из [160]. Осталось применить [160, Следствие 3.1]. $\square$

В.3. Доказательство Утверждения 1.6

1. Множество

$$\{(x^0, \tau^0, \tau) \in \mathbb{R}^{n+2} : (x^0, \tau^0) \in \sigma, \tau \in (T_-, \tau^0 + \theta^*(x^0))\} \quad (\text{B.2})$$

связно. Действительно, для произвольных двух его точек $(x^{0i}, \tau^{0i}, \tau^i)$, $i = 1, 2$, найдется целиком лежащая в нем и соединяющая их непрерывная кривая в $\mathbb{R}^{n+2}$, которая состоит из следующих трех кусков:

- первый — отрезок с концами $(x^{01}, \tau^{01}, \tau^1)$ и $(x^{01}, \tau^{01}, \tau^{01})$;
- второй — непрерывная кривая в $\mathbb{R}^{n+2}$, соединяющая точки $(x^{01}, \tau^{01}, \tau^{01})$, $(x^{02}, \tau^{02}, \tau^{02})$ и существующая ввиду связности σ (найдется непрерывная кривая в $\mathbb{R}^{n+1}$, целиком лежащая на σ и соединяющая точки (x^{01}, τ^{01}) , (x^{02}, τ^{02}) , достаточно продублировать последнюю координату каждой ее точки);
- третий — отрезок с концами $(x^{02}, \tau^{02}, \tau^{02})$ и $(x^{02}, \tau^{02}, \tau^2)$.

Поэтому M связно как образ связного множества при непрерывном отображении.

Докажем открытость M . Пусть $(x^*(\tau; \tau^0, x^0), \tau) \in M$, где (x^0, τ^0, τ) принадлежит множеству (B.2). В силу непрерывности поверхности σ (соответствующее определение дано в Приложении Б) существует такая связная окрестность $O_{n+1}(x^0, \tau^0)$ точки (x^0, τ^0) в $\mathbb{R}^{n+1}$, что

$$\sigma \cap O_{n+1}(x^0, \tau^0) = \sigma^0 := \{r_{\sigma^0}(v) : v \in V_{\sigma^0}^n\},$$

где $V_{\sigma^0}^n$ — открытая область в $\mathbb{R}^n$,

$$r_{\sigma^0} : V_{\sigma^0}^n \rightarrow \sigma^0 \quad (\text{B.3})$$

есть гомеоморфизм.

Кроме того, по Утверждению 1.5 найдутся такая связная окрестность $O'_{n+1}(x^0, \tau^0) \subseteq G \times (T_-, T_+)$ точки (x^0, τ^0) в $\mathbb{R}^{n+1}$ и такое число $T' \in (\tau^0, \tau^0 + \theta^*(x^0))$, что

$$s + \theta^*(y) > T' \quad \forall (y, s) \in O'_{n+1}(x^0, \tau^0).$$

Далее, можно подобрать открытую область $W_{\sigma^0}^n \subseteq V_{\sigma^0}^n$ в $\mathbb{R}^n$, для которой

$$(x^0, \tau^0) \in \sigma' := \{r_{\sigma^0}(v) : v \in W_{\sigma^0}^n\} \subseteq O'_{n+1}(x^0, \tau^0),$$

т. е.

$$s + \theta^*(y) > T' \quad \forall (y, s) \in \sigma'.$$

Таким образом, множество

$$\{(x^*(\xi; s, y), \xi) : (y, s) = r_{\sigma^0}(v), v \in W_{\sigma^0}^n, \xi \in (T_-, T')\} \subseteq M \quad (\text{B.4})$$

содержит точку $(x^*(\tau; \tau^0, x^0), \tau)$ и является образом открытой области при композиции

$$W_{\sigma^0}^n \times (T_-, T') \ni (v, \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; s, y), \xi) \big|_{(y,s)=r_{\sigma^0}(v)} \quad (\text{B.5})$$

двух отображений

$$W_{\sigma^0}^n \ni v \longrightarrow r_{\sigma^0}(v),$$

$$\sigma' \times (T_-, T') \ni ((y, s), \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; s, y), \xi).$$

Последние к тому же еще являются гомеоморфизмами в силу гомеоморфности отображения (B.3) и Утверждения 1.4. Следовательно, (B.5) — гомеоморфизм. Отсюда приходим к выводу, что (B.4) открыто как прообраз открытого множества $W_{\sigma^0}^n \times (T_-, T')$ при непрерывном отображении, обратном к (B.5). Стало быть, (B.4) — открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому M открыто.

2. Вторая часть утверждения непосредственно вытекает из Теоремы Б.1. □

В.4. Доказательство Утверждения 1.7

1. Связность множества σ^* устанавливается аналогично связности множества M в доказательстве Утверждения 1.6.

Покажем, что σ^* — непрерывная гиперповерхность без краевых точек в $\mathbb{R}^{n+1}$ (определение непрерывной поверхности дано в Приложении Б). Зафиксируем точку $(x^*(\tau; 0, x^0), \tau) \in \sigma^*$, где $x^0 \in \sigma_0$, $\tau \in (T_-, \theta^*(x^0))$. По Утверждению 1.5 найдутся такая связная окрестность $O'_n(x^0) \subseteq G$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$ и такое число $T' \in (\tau, \theta^*(x^0))$, что

$$\theta^*(y) > T' \quad \forall y \in O'_n(x^0). \quad (\text{B.6})$$

В силу непрерывности поверхности σ_0 существует такая связная окрестность $O_n(x^0) \subseteq O'_n(x^0)$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$, что

$$\sigma_0 \cap O_n(x^0) = \sigma_0^0 := \{r_{\sigma_0^0}(v) : v \in V_{\sigma_0^0}^{n-1}\}, \quad (\text{B.7})$$

где $V_{\sigma_0^0}^{n-1}$ — открытая область в $\mathbb{R}^{n-1}$, $r_{\sigma_0^0} : V_{\sigma_0^0}^{n-1} \rightarrow \sigma_0^0$ — гомеоморфизм. Отсюда, принимая во внимание еще и вытекающую из Утверждения 1.4 гомеоморфность отображения

$$O_n(x^0) \times (T_-, T') \ni (y, \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; 0, y), \xi),$$

получаем, что для произвольных чисел $T_1 \in [T_-, \tau)$, $T_2 \in (\tau, T']$ отображение

$$V_{\sigma_0^0}^{n-1} \times (T_1, T_2) \ni (v, \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; 0, r_{\sigma_0^0}(v)), \xi)$$

гомеоморфно, а соответствующий образ, содержащий точку $(x^*(\tau; 0, x^0), \tau)$, представляет собой пересечение σ^* с открытой областью

$$\{(x^*(\xi; 0, y), \xi) : y \in O_n(x^0), \xi \in (T_1, T_2)\}.$$

Осталось заметить, что $O_n(x^0)$ можно выбрать сколь угодно малой, а числа T_1, T_2 — сколь угодно близкими к τ .

2. Из Утверждения 1.4 следует гомеоморфность отображения

$$\{(z, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \in G, \eta \in (T_-, \theta^*(z))\} \ni (y, \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; 0, y), \xi), \quad (\text{B.8})$$

множество задания которого является открытой областью (здесь связность устанавливается аналогично связности множества M в доказательстве Утверждения 1.6, а открытость выводится с использованием Утверждения 1.5) и образ которого представляет собой открытую область $G \times (T_-, T_+)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ (на основании сильной инвариантности пары (G, F) , вытекающей из пункта 4 Предположения 1.2). Осталось учесть сформулированное в Приложении Б определение того, что связная непрерывная гиперповерхность без краевых точек делит открытую область на две части.

3. Связность σ^* следует из пункта 1 данного утверждения.

Докажем регулярность σ^* (см. последнее из трех эквивалентных определений регулярной поверхности, приведенных в Приложении Б). Зафиксируем точку $(x^*(\tau; 0, x^0), \tau) \in \sigma^*$, где $x^0 \in \sigma_0$, $\tau \in (T_-, \theta^*(x^0))$. По Утверждению 1.5 найдутся такая связная окрестность $O'_n(x^0) \subseteq G$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$ и такое число $T' \in (\tau, \theta^*(x^0))$, что имеет место (B.6).

В силу регулярности поверхности σ_0 существует такая связная окрестность $O_n(x^0) \subseteq O'_n(x^0)$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$, что справедливо представление (B.7), где $V_{\sigma_0}^{n-1}$ — открытая область в $\mathbb{R}^{n-1}$, $r_{\sigma_0} : V_{\sigma_0}^{n-1} \rightarrow \sigma_0^0$ — непрерывно дифференцируемое отображение с матрицей Якоби, имеющей ранг $n - 1$ во всех точках $V_{\sigma_0}^{n-1}$. Кроме того, поскольку функция $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, \tau) \longrightarrow u^*(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой открытой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащей σ^* , то гомеоморфизм (B.8) непрерывно дифференцируем на множестве

$$\{(z, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \in \sigma_0, \eta \in (T_-, \theta^*(z))\}, \quad (\text{B.9})$$

причем на соответствующем образе (B.9) имеет место непрерывная дифференцируемость обратного к (B.8) отображения. Здесь мы применили теорему о непрерывной дифференцируемости решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным [153, Глава V,

§2]. Из невырожденности матрицы Якоби тождественного отображения в $\mathbb{R}^{n+1}$ вытекает невырожденность матрицы Якоби гомеоморфизма (B.8) на множестве (B.9).

С учетом всего этого нетрудно убедиться в том, что отображение

$$V_{\sigma_0}^{n-1} \times (T_-, T') \ni (v, \xi) \longrightarrow (x^*(\xi; 0, r_{\sigma_0}(v)), \xi) \quad (\text{B.10})$$

непрерывно дифференцируемо и ранг соответствующей матрицы Якоби равен n во всех точках $V_{\sigma_0}^{n-1} \times (T_-, T')$. Осталось заметить, что образ (B.10) содержит точку $(x^*(\tau; 0, x^0), \tau)$ и представляет собой пересечение σ^* с открытой областью

$$\{(x^*(\xi; 0, y), \xi) : y \in O_n(x^0), \xi \in (T_-, T')\}. \quad \square$$

В.5. Доказательство Теоремы 1.4

Из Предположения 1.10 вытекает, что при $i = 1, 2$ всякая интегральная кривая $(x(\tau), \tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 < \tau_2$, системы (1.8) с $u \equiv u_i$ пересекает поверхность γ^1 не более одного раза, причем без касания, а в соответствующей возможной точке пересечения вектор скорости $(-f(x, u_i), 1)$ направлен внутрь множества Q^2 . Поэтому имеет место следующее:

- в силу еще и первого включения из (1.62) множество $D^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T])$ совпадает с совокупностью образов всех интегральных кривых $(x(\cdot), \cdot)$ системы (1.8) при $u \equiv u_1$, удовлетворяющих условию $x|_{\tau=0} \in D_0^1$ и рассматриваемых на временных промежутках

$$\tau \in \begin{cases} [0, \theta_{x(\cdot)}^{1,T}), & x(\theta_{x(\cdot)}^{1,T}) \in \partial G, \\ [0, \theta_{x(\cdot)}^{1,T}], & x(\theta_{x(\cdot)}^{1,T}) \in G, \end{cases}$$

где $\theta_{x(\cdot)}^{1,T}$ — первый неотрицательный момент достижения множества $\gamma^1 \cup (\mathbb{R}^n \times [T, +\infty))$ (см. Рисунок 1.4);

- согласно Утверждению 1.6 $\tilde{Q}_*^2$ — открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$ и существует единственное гладкое решение задачи Коши (1.78).

Теперь с учетом Предположения 1.7 и второго включения из (1.62) для завершения доказательства данного утверждения осталось показать, что $Q_*^2 \subseteq \tilde{Q}_*^2$. Зафиксируем произвольную точку $(x', \tau') \in Q_*^2$. Задача Коши для системы (1.1) при $u \equiv u_2$ с начальным условием $x|_{t=T-\tau'} = x'$ обладает единственным решением $x(\cdot; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2)$ на всем временном интервале $t \in (T - \tau' - \theta^2(x'), T + |T_-|)$. При этом на основании Предположения 1.6, определений (1.59), (1.77) и включения (1.76) имеем $x(T; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2) \in D_0^1$ (см. Рисунок 1.4). Тогда по пункту 1 Предположения 1.10 интегральная кривая

$$x(t; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2), \quad t \in [T - \tau', T],$$

обязательно пересекает поверхность γ^1 , причем лишь в одной точке ввиду его пункта 2. Стало быть, $Q_*^2 \subseteq \tilde{Q}_*^2$ вследствие представления (1.79). $\square$

В.6. Доказательство Теоремы 1.6

Пусть справедливы условия Теоремы 1.4 (случай выполнения условий Теоремы 1.5 разбирается аналогично).

А. Согласно определениям (1.48), (1.49), (1.59), Предположению 1.10, включению (1.76), представлению (1.77) и формуле (1.80) (где функции S^1 , S^2 и S_*^2 являются гладкими соответственно на множествах D^1 , Ω^2 и $\tilde{Q}_*^2 \supseteq Q_*^2$) нужно доказать непрерывную дифференцируемость функции цены S на каждом из двух непересекающихся множеств $\gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ и $\omega^2 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ (см. Рисунок 1.4). Для этого в силу Утверждения 1.3 достаточно проверить равенства

$$\begin{aligned} \nabla S^1(x, \tau) &= \nabla S_*^2(x, \tau) \quad \forall (x, \tau) \in \gamma^1, \\ \nabla S^2(x, \tau) &= \nabla S_*^2(x, \tau) \quad \forall (x, \tau) \in \omega^2. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Также ясно, что в условиях Теоремы 1.4 или Теоремы 1.5 фазовые компоненты характеристик задачи (1.44) с разными начальными позициями при $\tau = 0$ (т. е. при $t = T$) не пересекаются друг с другом, откуда с учетом пункта 4 Утверждения 1.2 выводим одноэлементность супердифференциала функции цены в любой точке из $G \times (0, T)$ (в частности, из $(\gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$).

Таким образом, по пункту 4 Утверждения 1.2 искомые равенства (B.11) будут вытекать из непрерывности на $(\gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ отображения, ставящего в соответствие произвольной точке $(x', \tau') \in G \times (0, T)$ вектор

$$\left(-\hat{\psi}(\tau'; x'), \mathcal{H}(x', \hat{\psi}(\tau'; x')) \right),$$

где $\hat{\psi}(\tau'; x')$ — значение в момент $\tau = \tau'$ сопряженной компоненты такой характеристики задачи (1.44), фазовая компонента которой в момент $\tau = \tau'$ проходит через x' и которая определена единственным образом вследствие вышесказанного. Для установления этого, в свою очередь, достаточно показать, что сама функция

$$G \times (0, T) \ni (x', \tau') \longrightarrow \hat{\psi}(\tau'; x') \quad (\text{B.12})$$

непрерывна на $(\gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$, поскольку функция

$$K \times \mathbb{R}^n \ni (x, \psi) \longrightarrow \mathcal{H}(x, \psi) := \max_{\bar{u} \in P} H(x, \psi, \bar{u})$$

непрерывна согласно теореме о непрерывности функции максимума (или минимума), берущегося по компакту метрического пространства.

В. Для любой точки $(x', \tau') \in \tilde{Q}_*^2$ через $\theta_*^2(x', \tau')$ обозначим момент прямого времени t , в который интегральная кривая

$$(x(t; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2), T - t), \quad t \in (T - \tau' - \theta^2(x'), T + |T_-|),$$

пересекает γ^1 . В условиях Теоремы 1.4 функция $\theta_*^2 : \tilde{Q}_*^2 \rightarrow (T_-, T_+)$ определена однозначно и по Теореме Б.1 представляет собой единственное гладкое решение

задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_*^2}{\partial \tau} + \langle \nabla_x \theta_*^2, f(x, u_2) \rangle = 1, & (x, \tau) \in \tilde{Q}_*^2, \\ \theta_*^2(x, \tau) = T - \tau, & (x, \tau) \in \gamma^1, \end{cases}$$

заданное в $\tilde{Q}_*^2$.

С. Теперь рассмотрим произвольную фиксированную точку $(x', \tau') \in \gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$. Ввиду регулярности поверхности γ^1 (см. последнее из трех эквивалентных определений регулярной поверхности, приведенных в Приложении Б) найдется такая связная окрестность $O_{n+1}(x', \tau') \subseteq G \times (0, T)$ точки (x', τ') в $\mathbb{R}^{n+1}$, что

$$\gamma^1 \cap O_{n+1}(x', \tau') = \gamma'^1 := \{r_{\gamma'^1}(v) : v \in V_{\gamma'^1}^n\},$$

где $V_{\gamma'^1}^n$ — открытая область в $\mathbb{R}^n$, $r_{\gamma'^1} : V_{\gamma'^1}^n \rightarrow \gamma'^1$ — непрерывно дифференцируемое отображение с матрицей Якоби, имеющей ранг n всюду в $V_{\gamma'^1}^n$. Отсюда, воспользовавшись теоремами о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и о его непрерывной дифференцируемости по начальным данным [153, §§3,4 Главы II и §§1,2 Главы V], а также тем фактом, что диффеоморфизм, заданный в открытой области из $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, и переводящий ее в подмножество $\mathbb{R}^m$, обладает невырожденной всюду в ней матрицей Якоби (это доказывается путем рассмотрения равной тождественному оператору композиции диффеоморфизма со своим обратным отображением), мы получаем непрерывную дифференцируемость отображения

$$V_{\gamma'^1}^n \ni v \longrightarrow x(T; T - r_{\gamma'^1}^\tau(v), r_{\gamma'^1}^x(v), (1.1), u \equiv u_1), \quad (\text{B.13})$$

где

$$(r_{\gamma'^1}^x(v), r_{\gamma'^1}^\tau(v)) := r_{\gamma'^1}(v), \quad r_{\gamma'^1}^x(v) \in \mathbb{R}^n, \quad r_{\gamma'^1}^\tau(v) \in \mathbb{R},$$

и невырожденность соответствующей матрицы Якоби размера $n \times n$ в каждой точке $V_{\gamma'^1}^n$. При этом образ (B.13) является, как и $V_{\gamma'^1}^n$, открытой областью в

$\mathbb{R}^n$ (см., например, [162, Глава 10, п. 2.2]). Возьмем область $V_{\gamma^1}^n$ настолько малой, чтобы добиться диффеоморфности отображения (B.13) на свой образ [162, Глава 10, п. 2.2].

Далее, отображение

$$\gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T)) \ni (y, s) \longrightarrow x(T; T - s, y, (1.1), u \equiv u_1)$$

непрерывно, а потому переводит $\gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ (связную гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$) в некоторое связное множество из $\mathbb{R}^n$, которое мы обозначим через E_0^1 . На основании рассуждений предыдущего абзаца E_0^1 еще и открыто в $\mathbb{R}^n$, т.е. с учетом связности представляет собой открытую область в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, в силу Предположений 1.6, 1.10 (см. неравенство (1.74) при $i = 1$) и первого включения в (1.62) имеем

$$E_0^1 \subseteq D_0^1 \setminus \gamma_0 = \text{int } D_0^1$$

и для каждой точки $y \in E_0^1$ единственным образом определен момент $\theta_*^1(y)$ обратного времени $\tau := T - t$, в который рассматриваемая на полуинтервале $\tau \in [0, \min(T, \theta^1(y))]$ (см. Определение 1.4) интегральная кривая системы (1.8) при $u \equiv u_1$ с начальной позицией $(x, \tau) = (y, 0)$ пересекает γ^1 .

Из того, что при любых $(x', \tau') \in \gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times (0, T))$ исследовавшееся выше отображение (B.13) можно считать диффеоморфным (т.е. соответствующее обратное отображение, заданное в некоторой открытой подобласти множества E_0^1 , тоже непрерывно дифференцируемо), вытекает непрерывная дифференцируемость функции $\theta_*^1 : E_0^1 \rightarrow (0, T)$.

D. Теперь, зафиксировав произвольную точку $x' \in \gamma_0$, покажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется открытый шар $B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \subseteq G$ в $\mathbb{R}^n$ с центром x' и радиусом длины $\delta(x', \varepsilon) > 0$, подчиненный требованиям

$$\begin{aligned} B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \cap \text{int } D_0^1 &\subseteq E_0^1, \\ \theta_*^1(y) < \varepsilon \quad \forall y \in B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \cap \text{int } D_0^1. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Отсюда будет следовать, что $\gamma_0 \subset \overline{E_0^1}$ и что, доопределив функцию θ_*^1 нулем на γ_0 , мы обеспечим ее непрерывность всюду в $E_0^1 \cup \gamma_0$.

Напомним, что функции θ^i , x^i , ψ^i , $i = 1, 2$, введены в Определении 1.4.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \min(T, \theta^1(x')))$. Ввиду Предположения 1.10 (см. неравенство (1.74) при $i = 1$) $Q^2 \setminus \gamma^1$ — открытая область в $\mathbb{R}^{n+1}$ и

$$(x^1(\varepsilon; 0, x'), \varepsilon) \in Q^2 \setminus \gamma^1.$$

Поэтому на основании Утверждения 1.5 (из которого вытекает локальная липшицевость, а значит, и непрерывность функции $\theta^1 : G \rightarrow (0, T_+]$) и теоремы о непрерывности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным [153, Глава V, §1] существует такой открытый шар $B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \subseteq G$ в $\mathbb{R}^n$ с центром x' и радиусом длины $\delta(x', \varepsilon) > 0$, что

$$\theta^1(y) > \varepsilon \text{ и } (x^1(\varepsilon; 0, y), \varepsilon) \in Q^2 \setminus \gamma^1 \quad \forall y \in B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \forall y \in B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \cap \text{int } D_0^1 \quad \exists \varepsilon_1(y) \in (0, \varepsilon) \text{ такое, что} \\ (x^1(\varepsilon_1(y); 0, y), \varepsilon_1(y)) \in \gamma^1, \end{aligned}$$

и условия (B.14) выполнены, так как

$$\varepsilon_1(y) = \theta_*^1(y) \quad \forall y \in B_n(x'; \delta(x', \varepsilon)) \cap \text{int } D_0^1.$$

Е. Заметим, что функция

$$\begin{aligned} G \times (T_-, T_+) \ni (x', \tau') &\longrightarrow x'^0(x', \tau') := \\ &:= \begin{cases} x(T; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_1), & (x', \tau') \in D^1, \\ x(T; T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2), & (x', \tau') \in \Omega^2, \\ x(T; \theta_*^2(x', \tau'), x(\theta_*^2(x', \tau'); T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2), (1.1), \\ & u \equiv u_1), & (x', \tau') \in Q_*^2, \end{cases} \end{aligned}$$

непрерывна на γ^1 и на ω^2 , поскольку

$$\theta_*^2(x', \tau') = T - \tau' \quad \forall (x', \tau') \in \gamma^1, \quad \theta_*^2(x', \tau') = T \quad \forall (x', \tau') \in \omega^2$$

(см. пункт **B** данного доказательства). Поэтому она непрерывна всюду в $G \times (T_-, T_+)$. Отсюда и из пункта 5 Предположения 1.3 следует непрерывность функции

$$G \times (T_-, T_+) \ni (x', \tau') \longrightarrow \psi^0(x', \tau') := -\nabla \Phi(x^0(x', \tau')).$$

Имеем

$$x^0(x', \tau') \in E_0^1 \cup \gamma_0 \quad \forall (x', \tau') \in Q_*^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)),$$

так как

$$\begin{aligned} & (x(\theta_*^2(x', \tau'); T - \tau', x', (1.1), u \equiv u_2), \theta_*^2(x', \tau')) \in \\ & \in (\gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T))) \quad \forall (x', \tau') \in Q_*^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)). \end{aligned}$$

Следовательно, значение $\theta_*^1(x^0(x', \tau'))$ определено в каждой точке $(x', \tau') \in Q_*^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T))$ (здесь принят во внимание пункт **D** текущего доказательства).

Таким образом, справедливо представление

$$\begin{aligned} G \times [0, T) \ni (x', \tau') & \longrightarrow \hat{\psi}(\tau'; x') = \\ & = \begin{cases} \psi^1(\tau'; 0, x^0(x', \tau'), \psi^0(x', \tau')), & (x', \tau') \in D^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)), \\ \psi^2(\tau'; 0, x^0(x', \tau'), \psi^0(x', \tau')), & (x', \tau') \in \Omega^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)), \\ \psi^2(\tau'; \theta_*^1(x^0(x', \tau')), x^1(\theta_*^1(x^0(x', \tau'))); 0, x^0(x', \tau')), \\ \quad \psi^1(\theta_*^1(x^0(x', \tau'))); 0, x^0(x', \tau'), \psi^0(x', \tau')), & \\ & (x', \tau') \in Q_*^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда получаем непрерывность функции (B.12) на $(\gamma^1 \cup \omega^2) \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T))$,

так как

$$\begin{aligned} \theta_*^1(x^0(x', \tau')) &= \tau' \quad \forall (x', \tau') \in \gamma^1 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)), \\ x^0(x', \tau') \in \gamma_0 \text{ и, стало быть, } \theta_*^1(x^0(x', \tau')) &= 0 \\ &\quad \forall (x', \tau') \in \omega^2 \cap (\mathbb{R}^n \times [0, T)). \end{aligned}$$

Это и требовалось установить согласно пункту **A** данного доказательства. $\square$

В.7. О схеме доказательства Теоремы 3.2

Данная теорема доказывается по аналогии с Теоремой 1.4 (см. п. В.5). Отметим одно обстоятельство. В процессе доказательства используется непосредственно вытекающая из Теоремы Б.1 вторая часть Утверждения 1.6. Чтобы последнюю можно было применить к задачам Коши (3.27) с $i = 1, 2$, необходимо установить непрерывную дифференцируемость функции

$$\gamma^s \ni (x', \tau') \longrightarrow S_{\gamma^s}(x', \tau') := \Phi(x(T; T - \tau', x', (1.1), u = u_{Z^s}^s(x))).$$

Осталось принять во внимание пункт 5 Предположения 1.3, пункт 4 Предположения 3.2 и теорему о непрерывной дифференцируемости решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным [153, Глава V, §2]. $\square$

В.8. Доказательство Утверждения 3.3

При каждом фиксированном $h = \tilde{h} > 0$ на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами (x_1, x_2) уравнение

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^2 + \varepsilon \left(x_2 - \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 = \varepsilon \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 \quad (\text{В.15})$$

задает эллипс с центром в точке $(0, b(h))$, где

$$b(h) := \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)},$$

длиной горизонтальной полуоси

$$a(h) := \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \varepsilon} \cdot \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)}$$

и длиной вертикальной полуоси $b(h)$.

Имеем

$$\frac{f'_3(0)}{f'(0)} = 0, \quad \frac{f'_3(h)}{f'(h)} > 0 \quad \forall h > 0.$$

Из условия (3.52) получаем

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right) > 0 \quad \forall h \in \left[0, \frac{R}{\gamma_3} \right],$$

т. е. функция $\frac{d}{dh} \left(\frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)$ переменной h строго возрастает на отрезке $h \in \left[0, \frac{R}{\gamma_3} \right]$, поскольку для всех $h > -B$

$$\frac{f'_3(h)}{f'(h)} = \frac{2A(B+h)^2h}{B(A+h^2)^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \left(\frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right) &= \frac{2A}{B} \cdot \frac{1}{(A+h^2)^4} \cdot \left((3h^2 + 4Bh + B^2) (A+h^2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (h^3 + 2Bh^2 + B^2h) \cdot 4h (A+h^2) \right) = \frac{2A}{B(A+h^2)^3} \left((3h^2 + 4Bh + B^2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (A+h^2) - 4h (h^3 + 2Bh^2 + B^2h) \right) = \frac{2A}{B(A+h^2)^3} (3Ah^2 + 4ABh + \\ &\quad + AB^2 + 3h^4 + 4Bh^3 + B^2h^2 - 4h^4 - 8Bh^3 - 4B^2h^2) = \frac{2A}{B(A+h^2)^3} \cdot \\ &\quad \cdot (-h^4 - 4Bh^3 + 3(A-B^2)h^2 + 4ABh + AB^2). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенства (3.53), приходим к выводу, что на интервале $\left(0, \frac{R}{\gamma_3} \right)$ найдется единственный корень $h = \underline{h}$ уравнения

$$\min(a(h) - \underline{x}_1, b(h) + \Delta(\underline{x}_1, h) - \underline{x}_2) = 0,$$

где

$$\Delta(x_1, h) := \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 - \frac{\alpha_1}{\varepsilon\alpha_2} x_1^2} \quad \forall x_1 \in [0, a(h)] \quad \forall h > 0.$$

Заметим, что при любых фиксированных $h = \tilde{h} > 0$ и $\tilde{x}_1 \in (0, a(h))$ на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами (x_1, x_2) прямая $x_1 = \tilde{x}_1$ пересекает эллипс (B.15) только в двух разных точках $(\tilde{x}_1, b(h) - \Delta(\tilde{x}_1, h))$, $(\tilde{x}_1, b(h) + \Delta(\tilde{x}_1, h))$.

Таким образом, множество (3.50) допускает параметрическое представление

$$\underline{h} < h < \frac{R}{\gamma_3},$$

$$\max(\underline{x}_2, b(h) - \Delta(\underline{x}_1, h)) < x_2 < \min(\bar{x}_2, b(h) + \Delta(\underline{x}_1, h)),$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \varepsilon \left(\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \frac{f'_3(h)}{f'(h)} \right)^2 - (x_2 - b(h))^2 \right)},$$

с помощью которого непосредственно проверяется справедливость утверждения. □