

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Ерошенко Александр Андреевич

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
ПРИ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В
ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯХ

01.01.05 – теория вероятности и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
Шестаков Олег Владимирович

Официальные оппоненты: **Беляев Константин Павлович**
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук
Маркин Артем Васильевич
кандидат физико-математических наук, главный специалист банка «Газпромбанк» (Акционерное общество)

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Защита состоится **11 сентября 2015 г. в 11 часов** на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМК аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «...» 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

О. В. Шестаков

1 Общая характеристика работы

Актуальность. В математических исследованиях с конца XX века и по настоящее время часто находят применение статистические методы вейвлет-анализа. В результате уже сейчас эти методы можно называть стандартным инструментом математики наряду с методами Фурье-анализа, с которыми их часто сравнивают.

Впервые основной принцип вейвлет-анализа описан в работе Гроссмана и Морле, посвященной исследованиям сейсмических сигналов. Там же введен термин «вейвлет» (от англ. «wavelet» – всплеск, маленькая волна), который теперь уже считается общепринятым. Под вейвлетами понимается множество функций особого вида, используемых для разложения сигналов, изображений и других данных. Однако в отличие от Фурье-анализа, где для разложения функций используются тригонометрические функции, в вейвлет-анализе используются функции, полученные с помощью растяжений и сдвигов базового вейвлета, локального во временной и частотной областях.

Начало развития теории было положено А. Хааром в начале двадцатого века. А весомый вклад в дальнейшее развитие теории вейвлет-анализа внесли ученые И. Добеши, И. Мейер, С. Малла и другие. И. Добеши разработала метод построения ортогональных вейвлетов с компактным носителем. И. Мейер был автором одной из первых монографий в области вейвлет-анализа, затрагивающей построение вейвлет-базисов. Кроме того, он предложил вейвлеты с определенными свойствами: так, у преобразования Фурье вейвлетов Мейера ограниченный носитель, а у самих вейвлетов Мейера бесконечное число нулевых моментов. С. Малла разработал кратномасштабный анализ и алгоритмы вейвлет-преобразования асимптотически более быстрые, чем быстрое преобразование Фурье.

Вейвлет-разложение часто используется для передачи сигналов и изображе-

ний, так как для гладких функций в разложениях обычно остается всего несколько отличных от нуля коэффициентов. Кроме того, учеными Д. Донохо и И. Джонстоном был предложен метод фильтрации шума, использующий механизм пороговой обработки вейвлет-коэффициентов разложения функции. Более того, пороговая обработка позволяет «сжимать» сигнал за счет уменьшения количества ненулевых коэффициентов разложения. Развитие теории пороговой обработки в вейвлет-анализе связано с именами Дж. Керкячаряна, Д. Пикарда, Р. Койфмана, В. Хардла, А. Цыбакова, а в последнее время с работами Р.Аверкампа, К. Удре, Т. Цай, Л. Брауна, Й.Элдара, Х. Гао, А. Брюса Г. Нейсона, Я. Ванга, Э. Колашика и других. С появлением быстрых методов разложения и реконструкции в вейвлет-анализе методы фильтрации шума стали широко применять на практике, чтобы улучшить качество сигнала или изображения.

Зачастую целью выбора порога при фильтрации шума является минимизация риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов, то есть уменьшение погрешности оценки сигнала. На практике сам риск остаётся неизвестным, потому что неизвестен исходный сигнал. Но, используя асимптотические свойства риска, можно показать, что такая вейвлет-оценка сигнала должна быть близка к исходному сигналу. Кроме того, неизвестный риск можно оценить, как погрешность пороговой обработки. Такая оценка риска была предложена учеными Д. Донохо и И. Джонстоном, также они показали её состоятельность в ситуации, когда дисперсия шума известна. Далее, в работах О. Шестакова, А. Маркина были показаны важные свойства состоятельности и асимптотической нормальности при оцениваемой дисперсии шума, а также исследована зависимость оценки от способа оценивания дисперсии шума, и получены оценки скорости сходимости к нормальному закону. Рамки исследований ограничивались, в основном, случаем независимого «бело-

го» шума. Но в работах И. Джонстона и Б. Сильвермана уже рассматриваются задачи с коррелированными исходными данными, предложены общие модели для исследований. Кроме того, для этих моделей, шум в которых определяется как стационарный гауссовский процесс, предложено использовать пороговую обработку вейвлет-коэффициентов, зависящую от уровня вейвлет-разложения. Изучение свойств самой оценки риска пороговой обработки в моделях с коррелированным шумом ранее не проводилось и является *основной задачей* данной диссертации.

Теория вейвлетов нашла свое применение не только в задачах, где данные наблюдаются напрямую, но и в некоторых обратных задачах. Свойства оценки риска в задаче восстановления функций после применения линейного преобразования в модели с независимым шумом исследовались в работах А. Кудрявцева, О. Шестакова и А. Маркина. На практике вейвлет-анализ успешно применяется в задаче томографии, где наблюдаются проекции объекта, то есть преобразование Радона исходных данных. Донохо предложил использовать «вейвлетоподобные» функции (вейглеты) для решения задачи томографии. Этот подход был развит в работах Э.Колашика, Н. Ли, И. Джонстона, Б. Сильвермана, Б. Люсьера, Ф. Абрамовича, Дж. Калифа, С. Малла. Свойства оценки риска пороговой обработки были исследованы и в задаче томографии. В работах перечисленных выше авторов рассматривались модели с независимым шумом. В частности, было показано, что оценки риска для этих моделей являются состоятельными и асимптотически нормальными при определённых ограничениях на гладкость функции. В данной работе будут исследованы асимптотические свойства оценки риска в моделях с коррелированным шумом.

Объект исследований – оценка риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-разложения данных.

Цель диссертационной работы – исследование свойств оценок риска в задачах, где данные наблюдаются напрямую или после применения линейного оператора, а также в задаче томографии.

Задачи диссертационной работы:

- Исследование свойств оценки риска при прямом наблюдении данных в моделях с зависимым шумом.
- Обоснование состоятельности и асимптотической нормальности оценки при наблюдении данных после линейного преобразования при наличии коррелированного шума.
- Исследование свойств оценки риска и условий ее применимости в задаче томографии.

Методы исследования. В работе используются методы математического и функционального анализа, неравенства и предельные теоремы теории вероятностей. Также использованы теория преобразования Радона и методы Фурье-анализа.

Научная новизна и основные результаты. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

- Исследованы асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в задаче фильтрации коррелированного шума.
- Доказана асимптотическая нормальность оценок риска в задачах, где данные наблюдаются после линейного преобразования в моделях с коррелированным шумом.

- Показана состоятельность оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет коэффициентов.
- Исследованы асимптотические свойства оценки риска в задаче томографии при наличии коррелированного шума.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют, в основном, теоретический характер, но они могут быть использованы на практике в задачах обработки сигналов и изображений. Показанные в работе свойства позволяют использовать оценку риска в задаче томографии при восстановлении изображений, например, для оценки погрешностей и применимости метода.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научном семинаре «Теория риска и смежные вопросы» под руководством профессора В.Ю. Королёва, профессора В. Е. Бенинга и доцента А. А. Кудрявцева, на научном семинаре «Современные методы обработки сигналов и изображений» под руководством доцента О. В. Шестакова и ст. преп. Т. В. Захаровой, на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (2014 г., Сочи - Дагомыс), на XXXII международном семинаре проблемам устойчивости стохастических моделей (2014, Тронхейм, Норвегия), на научной конференции «Тихоновские чтения» (2014 г., Москва), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (2014 г., Москва).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 5 статей [1, 2, 3, 4, 5] в журналах, входящих в список ВАК *«Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание*

ученой степени доктора и кандидата наук», 4 работы в сборниках трудов конференций [6 – 9].

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего в себя 59 наименований. Работа содержит 7 теорем с основными результатами. Общий объём работы составляет 82 страниц.

Благодарности. Автор глубоко признателен доценту О. В. Шестакову за постоянное внимание к работе, плодотворные обсуждения, поддержку и разностороннюю помощь в работе над диссертацией.

2 Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая значимость полученных результатов, в кратком виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе исследуются асимптотические свойства несмещенной оценки риска при пороговой обработке коэффициентов разложения функции сигнала по вейвлет-базису в модели с коррелированным шумом.

Рассматривается сигнал, который задается в дискретных точках отсчета i :

$$Y_i = f_i + e_i, \quad (1)$$

Вейвлет-разложение функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, описывающей сигнал, представляет собой ряд $f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$, где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, а $\psi(t)$ – материнская вейвлет-функция (семейство $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$). Индекс j называется масштабом, а индекс k – сдвигом. Материнскую вейвлет-функцию ψ можно выбрать так, чтобы она имела достаточное количество нулевых моментов и непрерывных производных. Сама функция сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$ также должна обладать определенными свойствами: задана на конечном отрезке $[a, b]$, равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > 0$. В модели (1) предполагается наличие коррелированного шума: $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$ – стационарный гауссовский процесс с ковариационной последовательностью $r_k = \text{cov}(e_i, e_{i+k})$, нулевым средним и дисперсией σ^2 .

В (1) возможны две модели: с краткосрочной и с долгосрочной зависимостями, в зависимости от скорости убывания ковариационной последовательности r_k . Первая – эквивалентна моделям с некоррелированным шумом, которые были иссле-

дованы в других работах. Вторая модель после применения дискретного вейвлет-преобразования к (1) имеет вид

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} z_{jk}, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, 2^j, \quad (2)$$

$0 < \alpha < 1$ – параметр модели, $z_{jk} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$ – коэффициенты коррелированного шума, а μ_{jk} – незашумленные дискретные вейвлет-коэффициенты функции f .

Используя механизм мягкой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов, можно строить оценки для зашумленных данных (сигналов, изображений и т.д.). Смысл пороговой обработки состоит в удалении достаточно маленьких коэффициентов, которые и считаются шумом. В диссертации используется так называемая мягкая пороговая обработка с «универсальным» порогом $T_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln 2^J}$: к каждому вейвлет-коэффициенту применяется функция

$$\rho_{T_j}(x) = \begin{cases} x - T_j, & \text{при } x > T_j, \\ x + T_j, & \text{при } x < -T_j, \\ 0, & \text{при } |x| \leq T_j. \end{cases}$$

Применение пороговой обработки приводит к погрешностям в оценках зашумленных данных. Эти погрешности (риск) определяется следующим образом:

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}))^2, \quad (3)$$

Вычислить эти погрешности нельзя, поскольку они зависят от неизвестных незашумленных вейвлет-коэффициентов, но их можно оценить:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j],$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$. Известно, что данная оценка является состоятельной и асимптотически нормальной в случае независимого шума. В диссертации для модели с зависимым шумом (2) показана асимптотическая нормальность этой оценки [1].

Теорема 1.1. Пусть $\alpha > 1/2$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j имеет место следующая сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad D_J^2 = C_\alpha 2^J, \quad J \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где C_α – константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α и выбранного вейвлет-базиса.

Кроме того, в рамках модели (2) показана состоятельность оценки риска [1].

Теорема 1.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > 0$. Тогда для $b > 1 - \alpha + \alpha(2\gamma + 1)^{-1}$ при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j выполняется

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Во второй главе рассматривается задача оценки функции после применения однородного линейного оператора в модели с коррелированным шумом. Исследуются асимптотические свойства оценок риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет-разложений сигнала.

Здесь используется следующая модель исходных данных:

$$Y_i = (Kf)_i + e_i, \quad (6)$$

где i – номер отсчета измеряемого сигнала, K – однородный линейный оператор с параметром β в $\mathbb{L}^2$, f – искомая функция, e_i – коррелированный гауссовский

шум с нулевым математическим ожиданием.

Для построения оценки сигнала в таких задачах используют так называемые вейглет-функции. Вейглеты – это «вейвлетоподобные» функции $\{\xi_{jk}\}$, такие что $\langle Kf, \xi_{jk} \rangle = \langle f, \psi_{jk} \rangle$ или $\langle Kf, \psi_{jk} \rangle = \langle f, \xi_{jk} \rangle$. Они используются в качестве базиса в вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет-разложениях функции, соответственно. Переходя к дискретному вейвлет-вейглет-разложению, получаем модель эмпирических дискретных вейглет-коэффициентов:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{J(1-\alpha)/2} w_{jk}, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, 2^j, \quad (7)$$

где $0 < \alpha < 1$ – параметр модели, μ_{jk} – незашумленные дискретные вейглет-коэффициенты, $w_{j,k} = \int \xi_{jk} d\mathbf{B}_H$ – коэффициенты зависящего шума.

Для дискретного вейглет-вейвлет-разложения модель имеет вид:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} z_{jk}, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, 2^j, \quad (8)$$

где μ_{jk} – вейвлет-коэффициенты незашумленного линейного преобразования функции Kf , а $z_{jk} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$ – коэффициенты зависящего шума.

По аналогии с первой главой к эмпирическим коэффициентам разложения также применяется мягкая пороговая обработка с «универсальным» порогом вида $T_j = \sqrt{2 \ln 2^j} \sigma_j$. Выбор порога обусловлен тем, что при таком пороге погрешности (риск) пороговой обработки близки к минимуму. Порог при использовании вейвлет-вейглет-разложения отличается от порога в случае вейвлет-вейглет-разложения, что объясняется различием дисперсий коэффициентов разложений X_{jk} в моделях (7) и (8).

Риск мягкой пороговой обработки $R_J(f)$ при использовании вейвлет-вейглет-

преобразования определяется следующим образом:

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}))^2, \quad (9)$$

а несмещенная оценка риска имеет вид:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \quad (10)$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$.

Для вейглет-вейвлет-разложения риск мягкой пороговой обработки можно определить, как

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 \mathbb{E} (\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}))^2, \quad (11)$$

а оценка риска имеет вид:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \quad (12)$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$.

Известно, что в моделях с независимым шумом оценки риска (10) и (12) при определенных условиях обладают свойствами состоятельности и асимптотической нормальности. В диссертации эти оценки рассматриваются в моделях с коррелированным шумом.

Для модели (7) показана асимптотическая нормальность оценки риска [2].

Теорема 2.1. Пусть $\alpha + 2\beta > 1/2$ и функция f равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > (4(\alpha + 2\beta) - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad D_J^2 = \tilde{C}2^{J(1+4\beta)}, \quad J \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где $\tilde{C}$ - константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α , β и выбранного вейвлет-базиса.

Также для (7) показано свойство состоятельности [5].

Теорема 2.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta$, функция f регулярна с параметром $\gamma > 0$. Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения с «универсальным» порогом и $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbf{1}(\alpha + 2\beta \geq 0.5))$ выполняется

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{P} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Для модели (8) также показана асимптотическая нормальность [3].

Теорема 2.3. Пусть $\alpha > 1/2$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j справедлива следующая сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad J \rightarrow \infty, \quad D_J^2 = C 2^{(4\beta+1)J}, \quad (15)$$

где C - константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α , β и выбранного вейвлет-базиса.

А при более слабых ограничениях на параметры модели (8) показана состоятельность оценки риска [5].

Теорема 2.4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta$, функция f регулярна с параметром $\gamma > 0$. Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейглет-вейвлет-разложения с «универсальным» порогом и $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbf{1}(\alpha + 2\beta \geq 0.5))$ выполняется

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{P} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В третьей главе рассматривается задача оценки функции при обращении оператора Радона в модели с коррелированным шумом. Также исследуются асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения функции изображения.

Рассматривается задача компьютерной томографии: $Y_{ij} = (Rf)_{ij} + e_{ij}$, где R – оператор Радона. Оператор Радона R определяется как набор интегралов от функции f по всевозможным прямым плоскости:

$$(Rf)(s, \theta) = \int_{L_{s,\theta}} f(x, y) dl, \quad (17)$$

а интегрирование ведется вдоль прямой, описываемой уравнением

$$L_{s,\theta} = \{(x, y) : x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0\},$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$ – угол между осью x и перпендикуляром, опущенным из начала координат на эту прямую, а $s \in R$ – расстояние до прямой из начала координат. Преобразование Радона широко используется на практике для описания модели в задаче томографии с параллельной схемой сканирования (рис. 1): сканирующие лучи источника распространяются параллельно друг другу и, проходя через объект $f(x, y)$ и теряя интенсивность, измеряются в приемнике. В рамках этой модели при фиксированном θ функцию $(Rf)(s, \theta)$ принято называть проекцией $f(x, y)$ под углом θ .

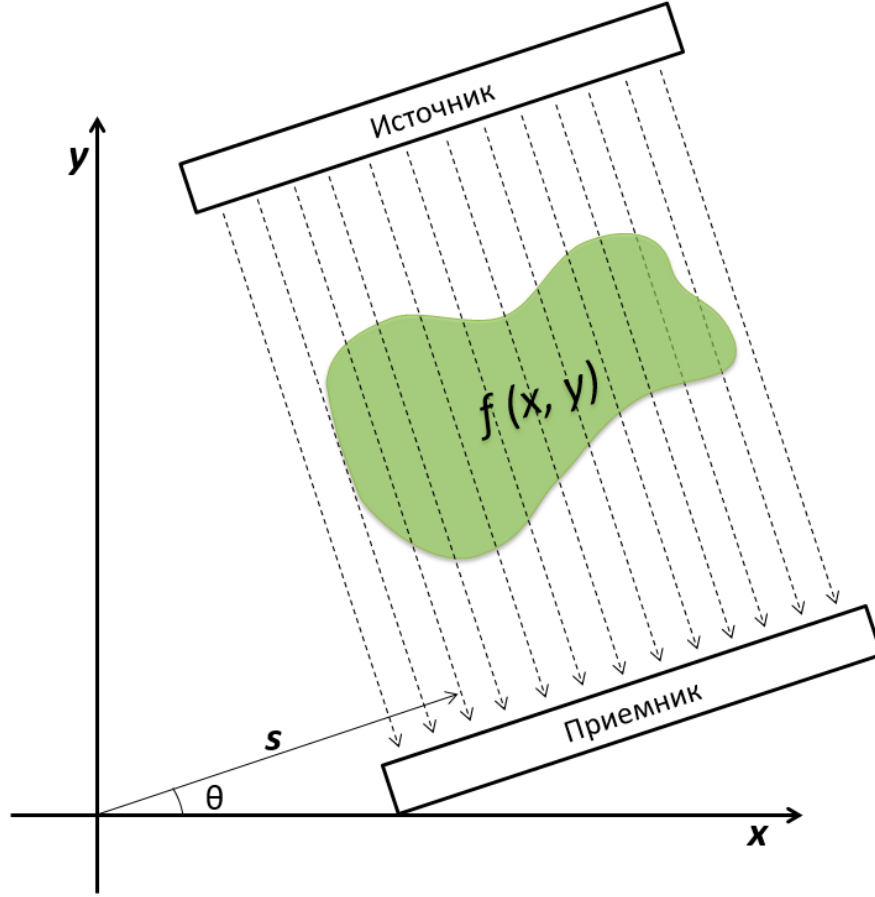


Рис. 1: Томография: параллельная схема сканирования.

По наблюдаемым проекционным данным требуется восстановить искомую функцию. Переходя к дискретному вейглет-преобразованию получаем модель дискретных вейглет-коэффициентов:

$$X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = \mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} + 2^{(1-\alpha)J/2} e_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad k_1 = 1, \dots, 2^j, \quad k_2 = 1, \dots, 2^j, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (18)$$

$$\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = 2^J [Rf, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}], \quad e_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = [\mathbf{B}'_H, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}] = \int \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} d\mathbf{B}'_H.$$

Чтобы очистить данные от шума в задаче компьютерной томографии к коэффициентам вейглет-разложения также применяется метод мягкой пороговой обработки с порогом $T_{\lambda,j} = \sqrt{2 \ln 2^{2j}} \sigma_{\lambda,j}$.

Функция риска определяется следующим образом:

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{E} \left(\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} - \rho_{T_{\lambda,j}}(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}) \right)^2, \quad (19)$$

а оценка риска имеет вид:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}], \quad (20)$$

где $F(x, T, \sigma) = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T)$. Известно, что в моделях с независимым шумом при определенных условиях гладкости эта оценка является состоятельной и асимптотически нормальной. В диссертации показана асимптотическая нормальность оценки $\hat{R}_J(f)$ в модели (18) данных с коррелированным шумом [4].

Теорема 3.1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция f равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > (1+\alpha)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом $T_{\lambda,j}$ имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad J \rightarrow \infty, \quad D_J^2 = \tilde{C}2^{4J} \quad (21)$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и выбранного вейвлет-базиса.

В заключении сделаны общие выводы по диссертации, сформулированы все основные результаты, выносимые на защиту, и указаны перспективы дальнейшей разработки темы.

3 Результаты, выносимые на защиту

В диссертационной работе установлен ряд асимптотических свойств оценок риска при удалении коррелированного шума с помощью пороговой обработки вейвлет- и вейглет-коэффициентов.

На защиту выносятся следующие результаты:

- Обоснование свойств состоятельности и асимптотической нормальности оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов в моделях с коррелированным шумом, в которых данные наблюдаются напрямую.
- Обоснование асимптотических свойств оценок риска в моделях с коррелированным шумом, где данные наблюдаются после линейного преобразования.
- Обоснование асимптотической нормальности оценки риска пороговой обработки в задаче томографии при наличии коррелированного шума.

4 Список публикаций по теме диссертации

1. *Ерошенко А.А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в модели с коррелированным шумом // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. № 1. С. 36–44.
2. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет-вейглет разложении функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2014. № 3. С. 110–117.
3. *Ерошенко А. А., Кудрявцев А. А., Шестаков О. В.* Предельное распределение оценки риска метода вейглет-вейвлет-разложения сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2015. № 1. С. 12–18
4. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска в задаче восстановления изображения с коррелированным шумом при обращении преобразования Радона // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. № 4. С. 32–40.
5. *Ерошенко А. А.* Состоятельность оценок риска при вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложениях функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 103–114.
6. *Eroshenko A. A., Shestakov O. V.* On asymptotic normality of risk estimate for Wavelet and Wavelet-Vaguelette decompositions of a signal with a correlated noise // XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2014. P. 27–29.
7. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска в задачах фильтрации сигнала в моделях с зависимым шумом // Тезисы научной

конференции «Тихоновские чтения». 2014. С. 82–83.

8. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет и вейвлет-вейглет разложениях функции сигнала в моделях с коррелированным шумом // Тезисы научной конференции «Ломоносовские чтения». 2014. С. 77–78.

9. *Ерошенко А. А.* Асимптотические свойства оценки риска в задачах фильтрации сигнала с зависимым шумом // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2014. Т. 21. № 4. С. 108.