

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Ерошенко Александр Андреевич

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
ПРИ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В
ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯХ

01.01.05 – теория вероятности и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент О. В. Шестаков

Москва – 2015

Содержание

Обозначения	4
Введение	5
Глава 1. Исследование свойств оценки риска при фильтрации сигнала от зависимого шума	12
1.1 Вейвлет-разложение и вейвлет-коэффициенты	12
1.2 Модель с коррелированным шумом	18
1.2.1 Модель краткосрочной зависимости	19
1.2.2 Модель долгосрочной зависимости	20
1.3 Пороговая обработка и оценка риска	21
1.4 Регулярность	24
1.5 Вспомогательные результаты	24
1.6 Асимптотические свойства оценки риска	33
Глава 2. Асимптотическая нормальность оценок риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет коэффициентов линейного преобразования функции	37
2.1 Вейвлет-вейглет-разложение и восстановление функции (WVD) . .	38
2.2 Метод вейглет-вейвлет-разложения функции (VWD)	40
2.3 Модель данных с коррелированным шумом для метода WVD . . .	41
2.4 Модель данных для метода VWD	44
2.5 Оценка риска при пороговой обработке	45
2.6 Вспомогательные результаты для метода WVD	47
2.7 Вспомогательные результаты для метода VWD	50

2.8 Основные теоремы	53
Глава 3. Асимптотические свойства оценки риска в задаче томографии при наличии зависимого шума	60
3.1 Преобразование Радона: вейвлет-вейглет-разложение	60
3.2 Модель данных	64
3.3 Пороговая обработка и оценка риска	68
3.4 Вспомогательные результаты	69
3.5 Основная теорема	73
Заключение	76
Литература	77

Обозначения

$P(\mathcal{A})$	вероятность события $\mathcal{A}$
$\mathbb{E}X$	математическое ожидание случайной величины X
$D X$	дисперсия случайной величины X
$\text{cov}(X, Y)$	ковариация случайных величин X и Y
$\text{corr}(X, Y)$	корреляция случайных величин X и Y
$\xrightarrow{P}$	сходимость по вероятности
$\Rightarrow$	сходимость по распределению
$N(0, 1)$	стандартное нормальное распределение
$a_J \simeq b_J$	$\lim \frac{a_J}{b_J} = 1$ при $J \rightarrow \infty$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	скалярное произведение
$\bar{x}$	комплексное сопряжение числа x
K^*	сопряженный к K оператор
K^{-1}	обратный к K оператор
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\mathbb{L}^2$	пространство функций, интегрируемых в квадрате
R	оператор Радона

Введение

Актуальность. В математических исследованиях с конца XX века и по настоящее время часто находят применение статистические методы вейвлет-анализа. В результате уже сейчас эти методы можно называть стандартным инструментом математики наряду с методами Фурье-анализа, с которыми их часто сравнивают.

Впервые основной принцип вейвлет-анализа описан в работе Гроссмана и Морле [41], посвященной исследованиям сейсмических сигналов. Там же введен термин «вейвлет» (от англ. «wavelet» – всплеск, маленькая волна), который теперь уже считается общепринятым. Под вейвлетами понимается множество функций особого вида, используемых для разложения сигналов, изображений и других данных. Однако в отличие от Фурье-анализа, где для разложения функций используются тригонометрические функции, в вейвлет-анализе используются функции, полученные с помощью растяжений и сдвигов базового вейвлета, локального во времени.

Начало развития теории было положено А. Хааром [42] в начале двадцатого века. А весомый вклад в дальнейшее развитие теории вейвлет-анализа внесли ученые И. Добеши, И. Мейер, С. Малла и другие. И. Добеши разработала метод построения ортогональных вейвлетов с компактным носителем [1, 29]. И. Мейер был автором одной из первых монографий в области вейвлет-анализа, затрагивающей построение вейвлет-базисов [54]. Кроме того, он предложил вейвлеты с определёнными свойствами: так, у преобразования Фурье вейвлетов Мейера ограниченный носитель, а у самих вейвлетов Мейера бесконечное число нулевых моментов. С. Малла разработал кратномасштабный анализ и алгоритмы вейвлет-преобразования асимптотически более быстрые, чем быстрое преобразование Фурье [12].

Вейвлет-разложение часто используется для передачи сигналов и изображений, так как для гладких функций в разложениях обычно остается всего несколько отличных от нуля коэффициентов. Кроме того, учеными Д. Донохо и И. Джонстоном был предложен метод фильтрации шума, использующий механизм пороговой обработки вейвлет-коэффициентов разложения функции [33, 34]. Более того, пороговая обработка позволяет «сжимать» сигнал за счет уменьшения количества ненулевых коэффициентов разложения. Развитие теории пороговой обработки в вейвлет-анализе связано с именами Дж. Керкячаряна, Д. Пикарда, Р. Койфмана, В. Хардла, А. Цыбакова [36, 30, 31, 35, 43], а в последнее время с работами Р.Аверкампа, К. Удре, Т. Цай, Л. Брауна, Й.Элдара, Х. Гао, А. Брюса Г. Нейсона, Я. Ванга, Э. Колашика и других [50, 25, 28, 37, 39, 40, 55, 56, 59]. С появлением быстрых методов разложения и реконструкции в вейвлет-анализе методы фильтрации шума стали широко применять на практике [10], чтобы улучшить качество сигнала или изображения.

Зачастую целью выбора порога является минимизация риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов, то есть уменьшение погрешности оценки сигнала. На практике сам риск остаётся неизвестным, потому что неизвестен исходный сигнал. Но, используя асимптотические свойства риска, можно показать, что такая вейвлет-оценка сигнала должна быть близка к исходному сигналу. Кроме того, неизвестный риск можно оценить, как погрешность пороговой обработки. Эта оценка риска была предложена в [33], где были исследованы её асимптотические свойства, но дисперсией полагалась известной. Далее, в работах О. Шестакова, А. Маркина были показаны важные свойства состоятельности и асимптотической нормальности при оцениваемой дисперсии [15, 19], а также исследована зависимость оценки от дисперсии шума, и получены оценки скорости сходимости

сти к нормальному закону [13, 18, 21, 20, 22]. Рамки исследований ограничивались, в основном, случаем независимого «белого» шума. Но в работах [45, 46] уже рассматриваются задачи с коррелированными исходными данными, предложены общие модели для исследований. Кроме того, для этих моделей, шум в которых определяется как стационарный гауссовский процесс, предложено использовать пороговую обработку вейвлет-коэффициентов, зависящую от уровня вейвлет-разложения. Изучение свойств самой оценки риска пороговой обработки в моделях с коррелированным шумом до данной работы не проводилось и является *основной задачей* данной диссертации.

Теория вейвлетов нашла свое применение не только в задачах, где данные наблюдаются напрямую, но и в некоторых обратных задачах [45, 32, 50, 23]. Свойства оценки риска в задаче восстановления функций после применения линейного преобразования в модели с независимым шумом исследовались, например, в работе [11]. На практике вейвлет-анализ успешно применяется в задаче томографии, где наблюдаются проекции объекта, то есть преобразование Радона исходных данных. Донохо в [24] предложил использовать «вейвлетоподобные» функции (вейглеты) для решения задачи томографии. Этот подход был развит в работах Э.Колашика, Н. Ли, И. Джонстона, Б. Сильвермана, Б. Люсьера, Ф. Абрамовича, Дж. Калифа, С. Малла [51, 50, 23, 45, 47, 48, 49, 52]. В работе [10] были исследованы свойства оценки риска пороговой обработки в задаче томографии. В этих задачах тоже возникает задача оценки риска в моделях с коррелированным шумом.

Объект исследований – оценка риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-разложения данных.

Цель диссертационной работы – исследование свойств оценки риска в задачах, где данные наблюдаются напрямую или после применения линейного опе-

ратора, а также в задаче томографии.

Задачи диссертационной работы:

- Исследование свойств оценки риска при прямом наблюдении данных в моделях с зависимым шумом.
- Обоснование состоятельности и асимптотической нормальности оценки при наблюдении данных после линейного преобразования и наличии коррелированного шума.
- Исследование изменения свойств оценки риска и условий ее применимости в задаче томографии.

Методы исследования. В работе используются методы математического и функционального анализа, неравенства и предельные теоремы теории вероятностей. Также, использованы теория преобразования Радона и методы Фурье-анализа.

Научная новизна и основные результаты. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

- Исследованы асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в задаче фильтрации коррелированного шума.
- Обоснована асимптотическая нормальность оценок риска в задачах, где данные наблюдаются после линейного преобразования, в моделях с коррелированным шумом
- Показана состоятельность оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет коэффициентов.

- Исследованы асимптотические свойства оценки риска в задаче томографии при наличии коррелированного шума.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют, в основном, теоретический характер, но они могут быть использованы на практике в задачах обработки сигналов и изображений. Показанные в работе свойства позволяют использовать оценку риска в задаче томографии при восстановлении изображений, например, для оценки погрешностей и обоснования применимости метода.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего в себя 59 наименований. Работа содержит 7 теорем с основными результатами. Общий объём работы составляет 82 страниц.

В первой главе исследуются асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке коэффициентов разложения функции сигнала по вейвлет-базису в модели с коррелированным шумом. Приводятся условия, при которых имеет место состоятельность и асимптотическая нормальность несмещённой оценки риска.

Во второй главе рассматривается задача оценки функции после применения однородного линейного оператора в модели с коррелированным шумом. Исследуются асимптотические свойства оценок риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет-разложения и вейглет-вейвлет-разложения сигнала. Приводятся условия, при которых имеют место асимптотическая нормальность и состоятельность для несмещённой оценки риска.

В третьей главе рассматривается задача оценки функции при обращении оператора Радона в модели с коррелированным шумом. Исследуются асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения функции изображения. Приводятся условия, при которых имеет место асимптотическая нормальность несмещённой оценки риска.

В заключении сделаны общие выводы по данной диссертации, сформулированы все основные результаты, выносимые на защиту, и описаны перспективы дальнейшей разработки темы.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научном семинаре «Теория риска и смежные вопросы» под руководством профессора В.Ю. Королёва, профессора В. Е. Бенинга и доцента А. А. Кудрявцева, на научном семинаре «Современные методы обработки сигналов и изображений» под руководством доцента О. В. Шестакова и ст. преп. Т. В. Захаровой, на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (2014 г., Сочи - Дагомыс), на XXXII международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (2014, Тронхейм, Норвегия), на научной конференции «Тихоновские чтения» (2014 г., Москва), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (2014 г., Москва).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 5 статей [9, 6, 4, 8, 3] в журналах, входящих в список ВАК *«Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»*, 4 работы в сборниках трудов конференций [38, 7, 5, 2].

Благодарности. Автор глубоко признателен доценту О. В. Шестакову за

постоянное внимание к работе, плодотворные обсуждения, поддержку и разностороннюю помощь в работе над диссертацией.

Глава 1. Исследование свойств оценки риска при фильтрации сигнала от зависящего шума

В последние десятилетия статистические методы вейвлет-анализа все чаще находят применение при анализе, обработке и фильтрации данных с шумом (например, сигналов и изображений). В рамках теории вейвлет-анализа можно строить оценки функций с использованием механизма пороговой обработки коэффициентов вейвлет-разложения наблюдаемой функции. Выбор порога обусловлен постановкой задачи и целью обработки (см., [33, 34, 36, 53]). Обычно порог зависит от уровня вейвлет-разложения и строится таким образом, чтобы минимизировать погрешности при построении вейвлет-оценки функции. Эти погрешности (риск) появляются вследствие наличия шума в наблюдаемой функции. На практике риск вычислить невозможно, так как неизвестна искомая функция, но его можно оценить. Свойства оценки риска в моделях, где шум является независимым, исследовались в работах [33, 34, 36, 53, 24, 13, 15, 18, 21, 19, 20, 22]. В этих работах показаны свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки риска при определенных условиях, накладываемых на функцию и выбранные вейвлеты. В этой главе исследуются оценка риска и ее асимптотические свойства в одномерной (для простоты изложения) модели со стационарным коррелированным шумом. Данная теория может быть перенесена и на многомерный случай. Представленные в этой главе результаты опубликованы в работе [9].

1.1 Вейвлет-разложение и вейвлет-коэффициенты

Вейвлет-анализ – это математический метод исследования функций, который позволяет рассматривать данные (например, функцию сигнала) в виде разло-

жения на колебания, локализованные по времени и частоте. Аппарат вейвлет-анализа уже нашел свое применение в таких практических областях, как обработка изображений и сигналов, геофизика, физика плазма и т.д. Основа метода – разложение данных по базису ортогональных функций, которые и называются вейвлетами.

Пусть функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ описывает одномерный сигнал. Тогда ее вейвлет-разложение представляет собой ряд

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \quad (1)$$

где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, набор функций $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$, функция $\psi(t)$ – так называемая «материнская» вейвлет-функция. В терминологии вейвлет-анализа индекс j в (1) называется «масштабом» или уровнем разложения, индекс k – «сдвигом». «Материнская» вейвлет-функция $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ должна быть допустимой, то есть должно выполняться условие

$$\int_0^\infty \left| \widehat{\psi}(t) \right|^2 \frac{dt}{t} < \infty.$$

Например, допустимой вейвлет-функцией является вейвлет Хаара (рис. 1):

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

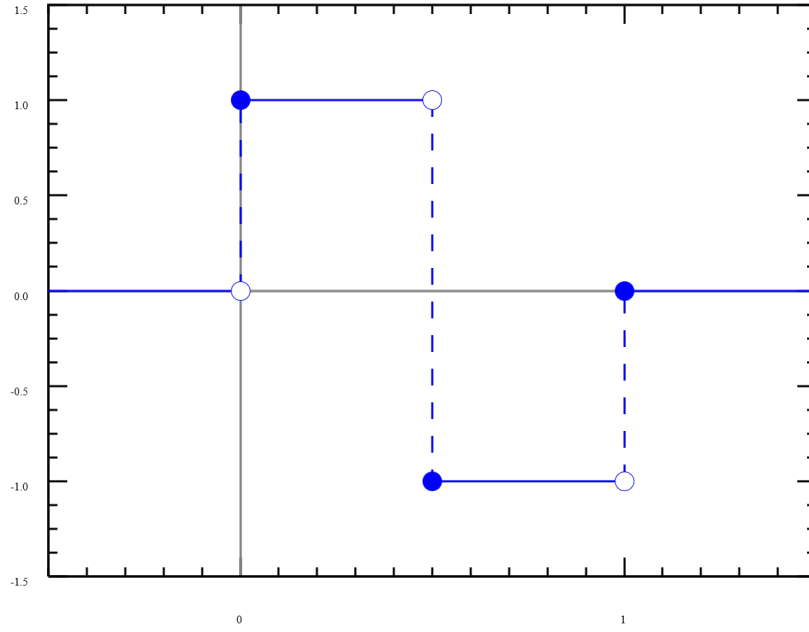


Рис. 1: Вейвлет Хаара.

Другой, более сложный пример – вейвлеты Мейера:

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} 2^{-1/2} \exp(-i w/2) \hat{h}(w/2 + \pi), & \text{при } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 2^{-1/2} \exp(-i w/2) \hat{h}(w/4), & \text{при } \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где функция $\hat{h}(w)$ такая, что

$$|\hat{h}(w)|^2 + |\hat{h}(w + \pi)|^2 = 2 \quad (2)$$

и

$$\hat{h}(w) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{при } -\frac{\pi}{3} \leq w \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{при } \frac{2\pi}{3} \leq |w| \leq \pi, \end{cases}$$

При $\frac{\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{2\pi}{3}$ функция $\hat{h}(w)$ может быть задана любым образом, но с соблюдением (2). Можно выбрать $\hat{h}(w)$ так, чтобы она обладала заданным числом

непрерывных производных в точках $|w| = \frac{\pi}{3}$ и $|w| = \frac{2\pi}{3}$, тогда соответствующая вейвлет-функция Мейера ψ достаточно быстро убывает на бесконечности [12]. На рисунке 2 приведен график вейвлета Мейера, для которого доопределена функция $\hat{h}(w)$ при $\pi/3 \leq |w| \leq 2\pi/3$

$$\hat{h}(w) = \sqrt{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{3|w|}{\pi} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

где $\beta(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$. Таким образом, функция $\hat{h}(w)$ имеет 3 непрерывные производные.

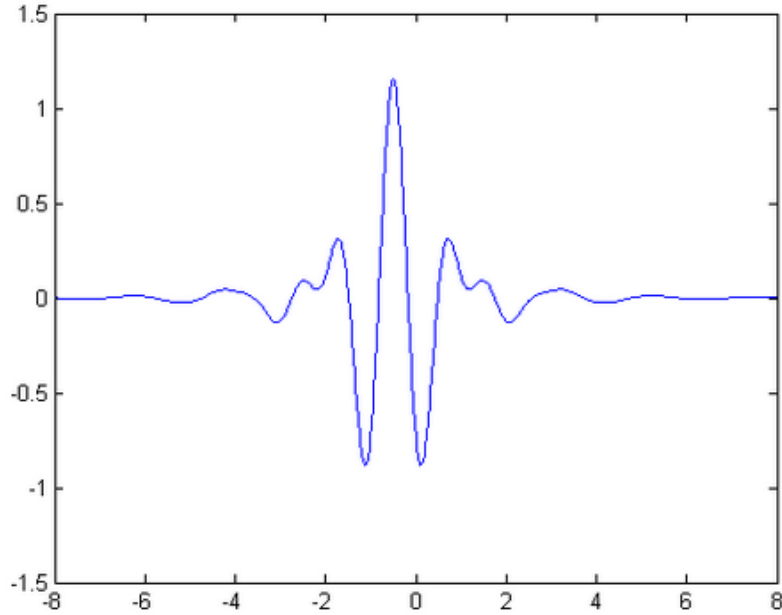


Рис. 2: Вейвлет Мейера, доопределенный в соответствии с выражением (3).

Вейвлеты Мейера часто используют на практике вследствие того, что можно добиться нужной гладкости. По этой же причине далее в работе будем рассматривать разложения данных только на основе вейвлетов Мейера.

Можно заметить, что вейвлет-функции $\psi_{jk}(t)$ получаются с помощью сдвигов и растяжений функций $\psi(t)$. Именно такая структура базиса позволяет выделить локальные особенности сигнала, несущие важную информацию. За счёт

изменения ширины носителя вейвлета можно получать временную и частотную информацию, сужая носитель для анализа коротких высокочастотных колебаний и расширяя его для выделения длительных низкочастотных участков.

Материнскую вейвлет-функцию можно выбрать таким образом, что она будет обладать некоторыми полезными свойствами [1]. Например, можно выбрать такую функцию, что она будет дифференцируема нужное число раз, и имеет заданное количество M_0 нулевых моментов, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, M_0 - 1.$$

К примеру, широко распространены вейвлеты Добеши, имеющие компактный носитель, заданное число непрерывных производных и заданное число нулевых моментов, в отличие от вейвлетов Мейера, которые имеют бесконечное число нулевых моментов, но не имеют компактного носителя.

Для функций сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$, заданных на конечном отрезке $[a, b]$ и равномерно регулярных по Липшицу с некоторым параметром $\gamma > 0$, известно свойство убывания вейвлет-коэффициентов [12]. Оно формулируется так: если вейвлет-функция

- M раз непрерывно дифференцируема ($M \geq \gamma$),
- имеет M нулевых моментов,
- достаточно быстро убывает на бесконечности, т. е. существует такая константа $C_A > 0$, что $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|^\gamma) |\psi(t)| dt \leq C_A$,

то найдется константа $A > 0$, для которой

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq \frac{A}{2^{j(\gamma+1/2)}}. \quad (4)$$

В разложении (1) при $j \rightarrow -\infty$ происходит растяжение базисных вейвлет-функций, поэтому иногда удобнее использовать подход, разработанный С. Малла и И. Мейером в 1988/89 гг. Такой подход получил название кратномасштабного анализа и является фундаментальным в теории вейвлетов. Для кратномасштабного анализа был разработан быстрый алгоритм вычислений, подобный быстрому преобразованию Фурье. При таком подходе функция сигнала f раскладывается следующим образом, при произвольном $j_0 \in Z$

$$f = \sum_k \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad k, j \in Z,$$

где функция $\phi_{j_0,k}(x) = 2^{j_0/2} \phi(2^{j_0}x - k)$, а $\phi(x)$ – «отцовский» вейвлет или «масштабирующая» функция. Она должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1.$$

Масштабирующую функцию не всегда можно определить, но на практике для большинства базисов она существует. Коэффициенты $\langle f, \phi_{j_0,k} \rangle$ в разложении функции f называют коэффициентами аппроксимации, а $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ – коэффициентами деталей.

На практике сигнал всегда задан дискретной функцией и имеет конечную длину. Поэтому далее рассмотрим функцию f , заданную в дискретных отсчётах $i/2^J$ ($i = 1, \dots, 2^J$): $f_i = f(i/2^J)$ на конечном отрезке. Без ограничивая общности, считаем, что это отрезок $[0, 1]$. Обозначим вектор значений функции f через $\bar{f}$.

В дискретном случае используется скалярное произведение в смысле l_2 : $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{2^J} p_i q_i$. Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой набор коэффициентов, получаемых умножением вектора значений $\bar{f}$ на матрицу W . Данная матрица является ортогональной и определяется выбранной вейвлет-функцией

$\psi: \sqrt{2^J} W_{jk,i} \approx \psi_{jk}(i/2^J)$ [12]. Таким образом, дискретные вейвлет-коэффициенты вычисляются по формуле $\bar{f}^W = W\bar{f}$. Заметим, что дискретные и непрерывные вейвлет-коэффициенты связаны следующим образом: $f_{jk}^W \approx 2^{J/2} \langle f, \psi_{jk} \rangle$ (см., например, [24] или [12]). Это приближение становится точнее с увеличением J . В связи с использованием вейвлет-разложения на конечном отрезке неизбежно возникают краевые эффекты. Подробно с проблемой краевых эффектов и методами борьбы с ними можно ознакомиться, например, в [26].

1.2 Модель с коррелированным шумом

В реальных задачах в наблюдениях всегда присутствует шум, поэтому рассматриваем следующую модель данных, для $i \in \mathbb{Z}$:

$$Y_i = f_i + e_i \quad i = 1, \dots, 2^J. \quad (5)$$

Здесь $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$ – стационарный гауссовский процесс с ковариационной последовательностью $r_k = \mathbf{cov}(e_i, e_{i+k})$. Пусть e_i имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Для $t \in [0, 1]$ определим наблюдаемый процесс

$$Y_J(t) = \frac{1}{2^J} \sum_{i=1}^{[2^J t]} Y_i = F_J(t) + \frac{1}{2^J} \sum_{i=1}^{[2^J t]} e_i,$$

где $F_J(t) = 1/2^J \sum_{i=1}^{[2^J t]} f(i/2^J)$ – «суммарный» сигнал. Как и в работах [45, 46] в зависимости от скорости убывания автоковариационной функции шумового процесса получаем два случая.

1.2.1 Модель краткосрочной зависимости

Пусть $\sum_{-\infty}^{+\infty} |r_k| < \infty$. Положим $\tau^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} r_k$. Из работы [58] (лемма 5.1) следует, что в этом случае сумма $\frac{1}{\sqrt{2^J}} \sum_{i=1}^{[2^J t]} e_i$ слабо сходится к стандартному Броуновскому движению, то есть

$$2^{J/2}(Y_J(t) - F_J(t)) \Rightarrow \tau \mathbf{B}(t) \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

где $\mathbf{B}(t)$ - процесс стандартного Броуновского движения. Обозначим, $\epsilon = \tau 2^{-J/2}$. Отметим, что параметр масштаба τ заранее известен и без ограничения общности полагаем, что $\tau = 1$. Далее, можно аппроксимировать наблюдаемый процесс $Y_J(t)$ с помощью $Y(t)$ для $t \in [0, 1]$:

$$Y(t) = F(t) + \epsilon \mathbf{B}(t), \quad (7)$$

где $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Предположим, что $\{\psi_{jk}(t), t \in [0, 1]\}$ – вейвлет-базис, полученный из подходящей материнской вейвлет-функции ψ . Применяя к (7) вейвлет-разложение и аппроксимируя его дискретным вейвлет-преобразованием, приходим к следующей модели дискретных вейвлет-коэффициентов [46]:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + z_{jk}, \quad (8)$$

где $\mu_{jk} = f_{jk}^W$ – коэффициенты вейвлет-разложения незашумлённого сигнала, а шумовые коэффициенты z_{jk} независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Далее, мы не будем подробно рассматривать модель с краткосрочной зависимостью, поскольку рассуждения аналогичны случаю с независимым шумом. Заметим лишь, что модели, в которых шум не коррелированный, рассматриваются в работах [33, 13, 15, 18, 21, 19, 20, 10, 22, 14, 11].

Замечание 1.1. Как отмечается в работе [46], в силу краевых эффектов нормальные случайные величины z_{jk} с нулевым средним при фиксированном j на

самом деле имеют ковариационную матрицу, удовлетворяющую:

$$\sigma_a^2 I \leq \Gamma_j \leq \sigma_b^2 I, \quad (9)$$

где неравенства рассматриваются в смысле неотрицательно определённых матриц, и константы σ_a, σ_b не зависят от j , а только от выбранного вейвлет-базиса. Таким образом, модель (8) справедлива с точностью до ограничений (9).

1.2.2 Модель долгосрочной зависимости

Далее рассмотрим шумовой процесс, у которого автоковариационная функция убывает медленно согласно $r_k \sim Ak^{-\alpha}$, где справедливо $0 < \alpha < 1$. Положим $\tau^2 = 2A/(1 - \alpha)(2 - \alpha)$ и $H = 1 - \alpha/2 \in (1/2, 1)$. Аналогично случаю с краткосрочной зависимостью здесь также без ограничения общности далее считаем, что $\tau = 1$.

Определим дробное Броуновское движение $\mathbf{B}_H(t)$ – гауссовский процесс на $\mathbb{R}$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$r(s, t) = \frac{V_H}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

где

$$V_H = D(\mathbf{B}_H(1)) = \frac{-\Gamma(2 - 2H) \cos(\pi H)}{\pi H(2H - 1)}.$$

Здесь лемма 5.1 Такку из [58] показывает сходимость

$$2^{\alpha J/2}(Y_J - F_J) \Rightarrow \tau \mathbf{B}_H(t), \quad t \in [0, 1].$$

Полагая $\epsilon = \tau^{1/\alpha} 2^{-J/2}$, можно аппроксимировать наблюдаемый процесс $Y_J(t)$ с помощью $Y(t)$ для $t \in [0, 1]$:

$$Y(t) = F(t) + \epsilon^\alpha \mathbf{B}_H(t).$$

Аналогично случаю с краткосрочной зависимости, переходим к модели дискретных вейвлет-коэффициентов [46]:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} z_{jk}, \quad (10)$$

где шумовые переменные определяются $z_{jk} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$. Они имеют стандартное нормальное распределение, но не являются независимыми.

1.3 Пороговая обработка и оценка риска

Как уже отмечалось, на практике сигналы содержат не только полезную информацию, но и некоторые помехи. Принято считать, что шум находится в высокочастотной области спектра сигнала. В такой модели для очищения сигнала от шума применима пороговая обработка вейвлет-коэффициентов. Её смысл состоит в удалении достаточно маленьких коэффициентов, которые и считаются шумом. Выбор порога осуществляется разными методами, и почти всегда он зависит от уровня разложения сигнала.

К каждому вейвлет-коэффициенту применяется пороговая функция $\rho_{T_j}(x)$ с порогом T_j , зависящим от уровня j . В случае так называемой *мягкой* пороговой обработки

$$\rho_{T_j}(x) = \begin{cases} x - T_j, & \text{при } x > T_j, \\ x + T_j, & \text{при } x < -T_j, \\ 0, & \text{при } |x| \leq T_j, \end{cases}$$

где T_j – порог, зависящий от уровня j . При таком подходе обнуляются вейвлет-коэффициенты, которые по модулю не превосходят порога T_j , а абсолютные величины остальных коэффициентов уменьшаются на величину порога T_j .

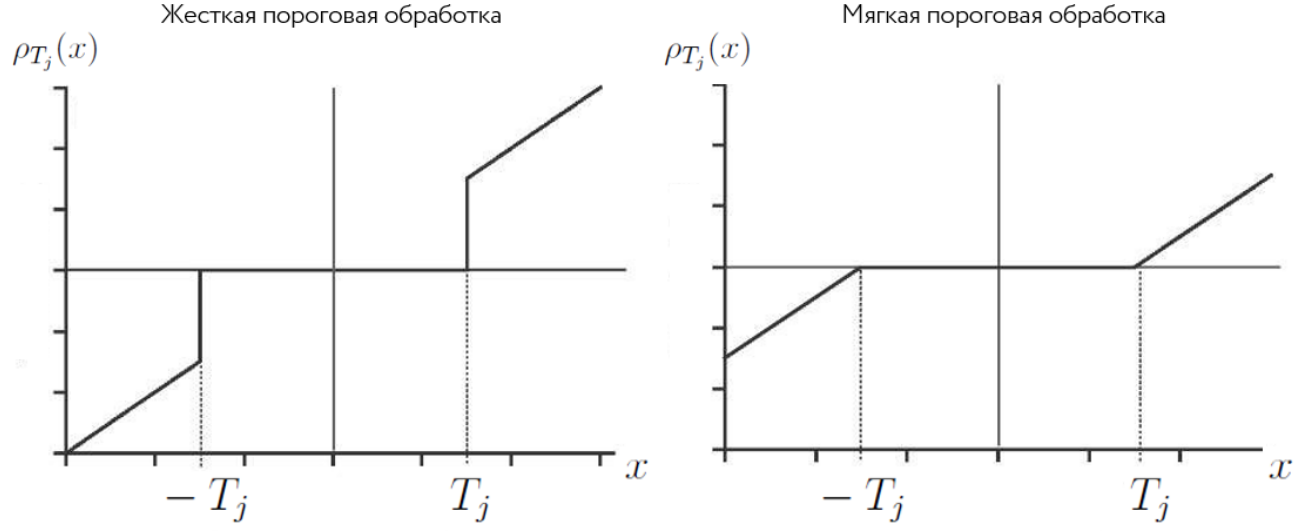


Рис. 3: Мягкая и жёсткая пороговые функции

Кроме мягкой пороговой обработки, существует ещё и *жёсткая*. В этом случае

$$\rho_{T_j}(x) = \begin{cases} x, & \text{при } |x| > T_j, \\ 0, & \text{при } |x| \leq T_j. \end{cases}$$

Основным недостатком жёсткой пороговой обработки является разрывность функции $\rho_{T_j}(x)$ (см. Рис. 3). Другие возможные пороговые функции рассмотрены, например, в [10].

Таким образом, оценка исходного сигнала происходит в три этапа: разложение функции сигнала по вейвлет-базису, пороговая обработка дискретных коэффициентов разложения, восстановление функции по уже «исправленным» коэффициентам. Погрешность этой оценки с мягкой пороговой обработкой определяется следующим образом:

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} \left(\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}) \right)^2, \quad (11)$$

где μ_{jk} – вейвлет-коэффициенты «чистой» функции, а X_{jk} – коэффициенты разложения наблюдаемой функции.

В дальнейшем будет использоваться порог вида $T_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln 2^J}$, называемый «универсальным». Он был предложен в работах [34, 36]. Причем именно при таком пороге риск близок к минимальному [34].

Поскольку в выражении для риска (11) присутствуют неизвестные величины μ_{jk} , то вычислить значение $R_J(f)$ нельзя. Однако риск можно оценить [33]. В качестве оценки риска используется следующая величина:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \quad (12)$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2) \mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2) \mathbf{1}(|x| > T^2)$.

В работе [12] показано, что оценка риска $\hat{R}_J(f)$ является несмещённой оценкой для $R_J(f)$ при использовании мягкой пороговой обработки. Далее в работе будет исследована оценка риска при мягкой пороговой обработке. В случае жёсткой пороговой обработки оценка риска является смещённой, но смещение оценки стремится к нулю при делении на $2^{J/2}$, подробнее [12]. В дальнейшем мы будем рассматривать мягкую пороговую обработку.

Оценка (12) и её асимптотические свойства были исследованы в работах [13, 15, 18, 21, 19, 20, 22], где рассматривались модели с независимым шумом. Было показано, что при определённых ограничениях на гладкость функции имеет место состоятельность и асимптотическая нормальность данной оценки.

Для модели данных с краткосрочной зависимостью справедлива модель данных (8). Следовательно, результаты указанных работ переносятся на этот случай с точностью до ограничений (9). Далее будут исследованы асимптотические свойства оценки (12) в модели эмпирических вейвлет-коэффициентов с долгосрочной

зависимостью.

1.4 Регулярность

В этой части обратим внимание на требования на регулярность функции сигнала, позволяющие получить ограничения на ее вейвлет-коэффициенты. Пусть функция f регулярна по Липшицу с коэффициентом $\gamma > 0.5$. А значит, справедливо

$$\exists p'' : \frac{1}{2\gamma + 1} < p'' < \frac{1}{2}.$$

Исходя из условий выбора p'' имеем $(\gamma + \frac{1}{2})p'' > 1/2$, тогда в силу (4)

$$\forall j : p''J \leq j < J, \quad |(Wf)(n2^{-j}, 2^{-j}k)| \leq \frac{C2^{J/2}}{2^{p''J(\gamma + \frac{1}{2})}} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Данное ограничение не выполнено лишь на «грубых» масштабах, то есть на уровнях разложения $j < p''J$.

1.5 Вспомогательные результаты

В этом разделе доказываются некоторые результаты, касающиеся характера зависимости эмпирических вейвлет-коэффициентов.

Начнем с рассмотрения ковариации случайных величин в модели (10) [46]:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{jk}, X_{il}) &= 2^{J(1-\alpha)} \mathbb{E} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H \overline{\int \psi_{il} d\mathbf{B}_H} = \\ &= 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int \hat{\psi}_{jk}(\xi) \overline{\hat{\psi}_{il}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi. \end{aligned}$$

Для преобразования Фурье вейвлет-функции выполняется

$$\hat{\psi}_{jk}(\xi) = 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi). \quad (14)$$

Кроме того, одним из важных свойств вейвлетов Мейера является то, что для преобразования Фурье «материнской» вейвлет-функции $\widehat{\psi}$ и любой натуральной константы M_0 найдется константа $C_{M_0} > 0$ такая, что $|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C_{M_0} |\xi|^{M_0} \mathbf{1}(\xi \in \text{supp}(\widehat{\psi}))$ (см. [45]).

Перейдем к оценке ковариации для эмпирических коэффициентов разложения на разных уровнях $\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})$. Без ограничения общности полагаем, что $j \geq i$. Обозначим, $\Delta = j - i \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il}) &= 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int 2^{-\frac{j}{2}} e^{ik\xi 2^{-j}} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) 2^{-\frac{i}{2}} \overline{e^{il\xi 2^{-i}} \widehat{\psi}(2^{-i}\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi = \\ &= 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} \int e^{i\xi(k2^{-\Delta} - l)} \widehat{\psi}(2^{-\Delta}\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Из описанного выше свойства вейвлетов Мейера следует,

$$\begin{aligned} |\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| &\leq \frac{1}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{-\frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} \left| \int e^{i\xi(k2^{-\Delta} - l)} \widehat{\psi}(2^{-\Delta}\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{C_{M_0}}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{-\frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0} \int |\widehat{\psi}(\xi)| |\xi|^{M_0 - (1-\alpha)} d\xi \leq \\ &\leq \frac{C'_{M_0}}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{-\frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0} \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, можно выбрать вейвлет Мейера таким образом с достаточным числом непрерывных производных, чтобы функция

$$H(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-\Delta}\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)}$$

имела $2M_1$ непрерывных производных по ξ . Используя определение вейвлетов Мейера и то, что $\Delta > 0$, можно показать, что существует $C_{M_1} > 0$, не зависящая от Δ , такая, что

$$\int \left| \frac{d^s H(\xi)}{d^s \xi} \right| < C_{M_1}, \forall s \in [0, 2M_1].$$

Тогда, из свойств преобразования Фурье следует, что существует константа $C'_{M_1} > 0$ такая, что при $k2^{-\Delta} \neq l$

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leq 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} \frac{C'_{M_1}}{(k2^{-\Delta} - l)^{2M_1}}. \quad (17)$$

Для любых $p \geq 0$ и $q \geq 0$ выполняется неравенство $(\min(p, q))^2 \leq pq$. Тогда для оценок (16), (17) найдется константа $C_M > 0$ такая, что при $k2^{-\Delta} \neq l$ выполняется

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leq 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0/2} \frac{C_M}{|k2^{-\Delta} - l|^{M_1}}. \quad (18)$$

Поскольку степень $M_0 > 0$ можно выбрать любой, то в множителе $2^{-\Delta M_0/2}$ можно убрать деление на 2 в степени, не ограничивая общности дальнейших рассуждений. При $k2^{-\Delta} = l$ справедлива оценка (16).

Таким образом, для некоторой константы $C' > 0$ такая, что

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leq \begin{cases} C' 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0} \frac{1}{|k2^{-\Delta}-l|^{M_1}}, & k2^{-\Delta} \neq l; \\ C' 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0}, & k2^{-\Delta} = l. \end{cases} \quad (19)$$

Далее приведем вспомогательное утверждение о ковариации квадратов случайных величин.

Утверждение 1.1. Пусть вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение. Тогда,

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y). \quad (20)$$

Доказательство: По условию утверждения найдутся две случайные величины $\xi, \eta \sim N(0, 1)$ такие, что $a = \mathbf{cov}(\xi, \eta)$ и $X = m + v\xi, Y = \mu + \nu\eta$, где m, μ, v, ν — некоторые константы, а вектор (ξ, η) имеет двумерное нормальное распределение, тогда

$$\eta = a\xi + \sqrt{1-a^2}Z \quad (\text{равенство по распределению}),$$

где случайная величина $Z \sim N(0, 1)$, а Z и ξ независимы. Далее,

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(\xi^2, \eta^2) &= \mathbb{E}\xi^2\eta^2 - \mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{E}\xi^2(a\xi + \sqrt{1-a^2}Z)^2 - \mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}(a\xi + \sqrt{1-a^2}Z)^2 = \\
&= \mathbb{E}\xi^2(a^2\xi^2 + 2\sqrt{1-a^2}aZ\xi + (1-a^2)Z^2) - \mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}(a^2\xi^2 + 2\sqrt{1-a^2}aZ\xi + (1-a^2)Z^2) = \\
&= \mathbb{E}(a^2\xi^4 + 2\sqrt{1-a^2}aZ\xi^3 + (1-a^2)Z^2\xi^2) - \mathbb{E}\xi^2(a^2\mathbb{E}\xi^2 + 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}Z\xi + (1-a^2)\mathbb{E}Z^2) = \\
&= a^2\mathbb{E}\xi^4 + 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}Z\xi^3 + (1-a^2)\mathbb{E}Z^2\xi^2 - a^2\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\xi^2 - \\
&\quad - 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}Z\xi - (1-a^2)\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}Z^2 = \\
&= a^2\mathbb{E}\xi^4 + 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}Z\mathbb{E}\xi^3 + (1-a^2)\mathbb{E}Z^2\mathbb{E}\xi^2 - a^2\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\xi^2 - \\
&\quad - 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}Z\mathbb{E}\xi - (1-a^2)\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}Z^2 = \\
&\quad = a^2\mathbb{E}\xi^4 - a^2(\mathbb{E}\xi^2)^2 = 2a^2.
\end{aligned}$$

Последний переход обусловлен тем, что $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}Z = 0, \mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}Z^2 = 1, \mathbb{E}\xi^4 = 3$.

Далее, используя, что $\mathbb{E}\xi^3 = \mathbb{E}\xi = \mathbb{E}Z = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(\xi, \eta^2) &= \mathbb{E}\xi\eta^2 - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{E}\xi(a\xi + \sqrt{1-a^2}Z)^2 - 0\mathbb{E}\eta^2 = \\
&= \mathbb{E}\xi(a^2\xi^2 + 2\sqrt{1-a^2}aZ\xi + (1-a^2)Z^2) = \mathbb{E}(a^2\xi^3 + 2\sqrt{1-a^2}aZ\xi^2 + (1-a^2)Z^2\xi) = \\
&= a^2\mathbb{E}\xi^3 + 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}Z\xi^2 + (1-a^2)\mathbb{E}Z^2\xi = \\
&= a^2\mathbb{E}\xi^3 + 2\sqrt{1-a^2}a\mathbb{E}Z\mathbb{E}\xi^2 + (1-a^2)\mathbb{E}Z^2\mathbb{E}\xi = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(\xi^2, \eta) &= \mathbb{E}\xi^2\eta - \mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi^2(a\xi + \sqrt{1-a^2}Z) = \mathbb{E}(a\xi^3 + \sqrt{1-a^2}Z\xi^2) = \\
&= a\mathbb{E}\xi^3 + \sqrt{1-a^2}\mathbb{E}Z\xi^2 = a\mathbb{E}\xi^3 + \sqrt{1-a^2}\mathbb{E}Z\mathbb{E}\xi^2 = 0.
\end{aligned}$$

Вернемся к случайным величинам $X = m + v\xi, Y = \mu + \nu\eta$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}(X^2, Y^2) &= \mathbf{cov}((m + v\xi)^2, (\mu + \nu\eta)^2) = \\
&= \mathbf{cov}(m^2 + 2mv\xi + v^2\xi^2, \mu^2 + 2\mu\nu\eta + \nu^2\eta^2) = \mathbf{cov}(2mv\xi + v^2\xi^2, 2\mu\nu\eta + \nu^2\eta^2) = \\
&= \mathbf{cov}(2mv\xi, 2\mu\nu\eta) + \mathbf{cov}(2mv\xi, \nu^2\eta^2) + \mathbf{cov}(v^2\xi^2, 2\mu\nu\eta) + \mathbf{cov}(v^2\xi^2, \nu^2\eta^2) = \\
&= 4m\mu\nu\nu\mathbf{cov}(\xi, \eta) + 2mv\nu^2\mathbf{cov}(\xi, \eta^2) + 2v^2\mu\nu\mathbf{cov}(\xi^2, \eta) + v^2\nu^2\mathbf{cov}(\xi^2, \eta^2) = \\
&= 4m\mu\nu\nu a + 2mv\nu^2\mathbf{cov}(\xi, \eta^2) + 2v^2\mu\nu\mathbf{cov}(\xi^2, \eta) + 2v^2\nu^2 a^2 = 4m\mu\nu\nu a v^2\nu^2 + 2v^2\nu^2 a^2.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{cov}(m + v\xi, \mu + \nu\eta) = v\nu a$, $\mathbb{E}X = m$, $\mathbb{E}Y = \mu$. А значит,

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y).$$

утверждение доказано.

Далее сформулируем лемму о дисперсии оценки риска в модели (10).

Лемма 1.1. Пусть $\alpha > 1/2$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j справедливо

$$D_J^2 = D \hat{R}_J(f) \simeq C_\alpha 2^J,$$

где константа C_α зависит от α , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: Из условий леммы следует, что $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha)^{-1}$. Выберем p'' такое, что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$ и $p''J$ – целое число. Тогда в силу (13) $\mu_{jk} \rightarrow 0$ для всех $j: p''J \leq j < J$ при $J \rightarrow \infty$. Разобьем выражение для риска (12) на две суммы:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \hat{R}_1 + \hat{R}_2. \quad (21)$$

Из общего вида $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]$ следует, что существует константа $C_F > 0$ такая, что $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leq C_F T_j^2 = C_F J 2^{(J-j)(1-\alpha)}$. Тогда можно ограничить первую сумму $\widehat{R}_1$

$$|\widehat{R}_1| \leq C_F \sum_{i=0}^{p''J} \sum_{l=0}^{2^i-1} J 2^{(J-i)(1-\alpha)} \leq C'_F J 2^{J(1-\alpha+\alpha p'')} \quad (\text{почти всюду}) \quad (22)$$

с некоторой константой $C'_F > 0$. Далее, для дисперсии оценки риска справедливо представление

$$\mathbb{D} \widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \text{cov}(F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]^2, F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]^2). \quad (23)$$

Сумму дисперсий можно представить следующим образом,

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j].$$

Здесь, в силу (72), первая сумма не превосходит $C''_F J^2 2^{2J(1-\alpha+\alpha p'')}$, где C''_F — некоторая положительная константа, и так как $p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$, имеем $2(1-\alpha+\alpha p'') < 1$.

Исходя из вида функции $F[X^2, T, \sigma]$, справедливо

$$\begin{aligned} F[X^2, T, \sigma] - \mathbb{E}F[X^2, T, \sigma] &= (X^2 - \sigma^2)\mathbf{1}(|X| \leq T) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|X| > T) - \\ &\quad - \mathbb{E}(X^2 - \sigma^2)\mathbf{1}(|X| \leq T) - (\sigma^2 + T^2)\mathbb{P}(|X| > T) = \\ &= (X^2\mathbf{1}(|X| \leq T) - \mathbb{E}X^2\mathbf{1}(|X| \leq T)) + \\ &\quad + (2\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|X| > T) + (2\sigma^2 + T^2)\mathbb{P}(|X| > T) \end{aligned}$$

Если $T \rightarrow \infty$ при $J \rightarrow \infty$, то, учитывая (4), справедливо неравенство [17, гл. 7]

$$\mathbb{P}(|X| > T) = O\left(\frac{\exp\left(-\frac{T^2}{2\sigma^2}\right)}{T}\right) \quad (24)$$

Легко показать, что при $J \rightarrow \infty$

$$F[X^2, T, \sigma] - \mathbb{E}F[X^2, T, \sigma] \simeq X^2 - \mathbb{E}X^2.$$

Учитывая это, а также вид порога T_j и то, что $\alpha > 1/2$, для второй суммы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] &\simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 = \\ &= \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2\sigma_j^2(\sigma_j^2 + \mu_{jk}^2) \simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2\sigma_j^4 = \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2 \frac{2^{2J(1-\alpha)}}{2^{2j(1-\alpha)}} = \\ &= 2^{2J(1-\alpha)+1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} 2^{-j+2\alpha j} \simeq 2^J \frac{2}{(2^{2\alpha-1} - 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \simeq \sum_{j=p''J+1}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 \simeq C'_\alpha 2^J, \quad (25)$$

где C'_α – положительная константа.

Рассмотрим теперь сумму ковариаций в (23). Аналогично сумме дисперсий,

имеем

$$\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]) \simeq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(X_{il}^2, X_{jk}^2).$$

Из (20) следует, что для вектора (X, Y) , который имеет двумерное нормальное распределение, справедливо

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y).$$

Используя (19) и (20), имеем

$$S_{\mathbf{cov}} = \frac{1}{2} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{jk}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{\Delta=0}^{J-i-1} \sum_{k=\begin{cases} l+1, & \Delta=0; \\ 0, & \Delta>0. \end{cases}}^{2^{i+\Delta}-1} \mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{i+\Delta,k}) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \left(\sum_{\delta=1}^{2^i-l} C'^2 \delta^{-2M_0} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} + \right. \\
&+ \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_0)} \frac{\mathbf{1}(\{|k2^{-\Delta} \neq l|\})}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M_1}} C'^2 + \\
&+ \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_0)} \mathbf{1}(\{|k2^{-\Delta} \neq l|\}) C'^2 \Big) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \left(\sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{\delta=1}^{2^i-l-1} C'^2 \delta^{-2M_0} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} + \right. \\
&+ \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_0)} \sum_{l=0}^{2^i-1} C'^2 \left(\sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} \frac{\mathbf{1}(\{|k2^{-\Delta} \neq l|\})}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M_1}} + 1 \right) \Big) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} \left(2^i H_0 + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \left(2^{i-2M_0\Delta} H_1 + 2^{i-(2M_0+1)\Delta} H_2 \right) \right) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^i H_3 \leq C''_{\alpha} 2^J, \tag{26}
\end{aligned}$$

где H_0, H_1, H_2, H_3 и C''_{α} – константы, зависящие от α . Также, с учетом (13) и (19)

можно показать

$$\left| \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mu_{il} \mu_{jk} \mathbf{cov}(X_{il}, X_{jk}) \right| \leq H_{\alpha} 2^{J(1-\alpha(1-p''))}, \tag{27}$$

где H_{α} – некоторая константа, зависящая от α .

Из (25), (26) и (27) получаем утверждение леммы.

Следствие 1.1. Пусть $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда справедлива следующее ограничение сверху для оценки риска $\widehat{R}_2$ из (21):

$$\widehat{R}_2 \leq \begin{cases} C_\alpha 2^J, & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}; \\ C_\alpha J 2^J, & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}; \\ C_\alpha 2^{2J((1-\alpha)-\frac{\nu''}{2}(1-2\alpha))}, & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

где константа C_α зависит от α , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: Полностью повторяя рассуждения леммы 1.1, приходим к следующему представлению для $\widehat{R}_2$:

$$\widehat{R}_2 \simeq \mathbb{D} \widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 + \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(X_{il}^2, X_{jk}^2). \quad (28)$$

Можно заметить, что для первого и второго слагаемых в лемме 1.1 получены оценки (25) и (26) справедливые при условии $\alpha > 1/2$. Если изменить это ограничение на $\alpha > 0$, то нетрудно получить для первого слагаемого и некоторой константы $C'_\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 &\simeq \sum_{j=p''J+1}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 \leq H' 2^{2J(1-\alpha)+1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} 2^{-j+2\alpha j} \leq \\ &\leq \begin{cases} C'_\alpha 2^J, & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}; \\ C'_\alpha J 2^J, & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}; \\ C'_\alpha 2^{2J((1-\alpha)-\frac{\nu''}{2}(1-2\alpha))}, & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

где H' – некоторая константа, зависящая от α . И для второго слагаемого и неко-

торой константы $C''_\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \text{cov}(X_{il}^2, X_{jk}^2) &\simeq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \text{cov}^2(X_{il}, X_{jk}) \leq \\ &\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} H'' 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^i \leq \begin{cases} C''_\alpha 2^J, & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}; \\ C''_\alpha J 2^J, & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}; \\ C''_\alpha 2^{2J((1-\alpha)-\frac{p''}{2}(1-2\alpha))}, & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

где H'' – некоторая константа, зависящая от α .

Поскольку константы $C'_\alpha > 0$ и C''_α не зависят от самой функции, а только от α , то из (28), (29) и (30) вытекает справедливость утверждения. Следствие доказано.

1.6 Асимптотические свойства оценки риска

Переходим к доказательству асимптотических свойств оценки риска (12) для модели с долгосрочной зависимостью (10).

Покажем свойство асимптотической нормальности оценки [9].

Теорема 1.1. Пусть $\alpha > 1/2$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j имеет место следующая сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad D_J^2 = C_\alpha 2^J, \quad J \rightarrow \infty, \quad (31)$$

где C_α – константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α и выбранного вейвлет-базиса.

Доказательство: Из условия $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$ следует $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha)^{-1}$.

А значит, найдется p'' такое, что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$. Тогда, справедливо

$1 - \alpha + \alpha p'' < 1/2$. Далее, действуя как в лемме 1.1, выражение в (31) можно разбить

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} &= \frac{\sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J} + \\ &\quad + \frac{\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J}, \quad (32) \end{aligned}$$

где $D_J^2 = \mathbb{D} \widehat{R}_J(f) \simeq C_\alpha 2^J$. Следовательно, первая сумма стремится к нулю почти всюду.

Повторяя рассуждения леммы 1.1, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \sup_J \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 &= \\ &= \sup_J \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] < \infty. \quad (33) \end{aligned}$$

В [45] показано, что последовательность $\{X_{jk}\}, j = p''J + 1 \dots J - 1, k = 1 \dots 2^j$ обладает свойствами ρ -перемешивания, следовательно, $\{F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]\}, j = p''J + 1 \dots J - 1, k = 1 \dots 2^j$ также обладает свойством ρ -перемешивания.

Теперь покажем, что выполнено условие Линдеберга.

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 \times \\ \times \mathbf{1}(|F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| > \epsilon D_J) \rightarrow 0, \quad J \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (34) \end{aligned}$$

Необходимо заметить, что из леммы 1.1 имеем $D_J^2 = C_\alpha 2^J$ и $|F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| \leq C_F J 2^{(J-j)(1-\alpha)}$ почти всюду. Следовательно, начиная с некоторого J , при $\alpha > 1/2$ все индикаторы в (34) обращаются в ноль.

Таким образом, выполнены все условия утверждений из работ [57] и [44], и, значит, справедлива сходимость по распределению (31). Теорема доказана.

Замечание 1.2 На практике оказывается полезным знать, как вычисляется константа C_α , например, для построения асимптотических доверительных интервалов для риска. В отличие от независимого случая, константа зависит не только от параметра α , но и от выбранного вейвлет-базиса. Константу C_α можно вычислить достаточно точно, а именно, из (23) следует, что $C_\alpha = C'_\alpha + C''_\alpha$. В силу леммы 1.1

$$C''_\alpha = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{cov}}}{2^J},$$

а из (26) следует, что предел существует. Слагаемые S_{cov} вычисляются с помощью формул (15). В выражении (25) C'_α вычисляется довольно просто, например, можно использовать константу $C'_\alpha = \frac{2}{2^{2\alpha-1}-1}$.

Далее покажем свойство состоятельности оценки риска, которое имеет место при более слабых ограничениях на α и γ [9].

Теорема 1.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > 0$. Тогда для $b > 1 - \alpha + \alpha(2\gamma + 1)^{-1}$ при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j выполняется

$$\frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{P} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Доказательство: Из условий теоремы следует, что можно выбрать p'' таким, что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < (b + \alpha - 1)/\alpha$. Следовательно, справедливо неравенство

$1 - \alpha + \alpha p'' < b$. Выражение в (35) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_J(f) - R_J(f) &= \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) + \\ &\quad + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \equiv R_1 + R_2. \end{aligned}$$

Как и в лемме 1.1, получаем, что $|R_1| \leq C_1 J 2^{J(1-\alpha+\alpha p'')}$ с некоторой константой $C_1 > 0$. А значит, $R_1 2^{-bJ} \rightarrow 0$ почти всюду. Таким образом, $\mathbf{D} \widehat{R}_J(f) \simeq \mathbf{D} R_2$. Ослабив ограничение на $\alpha > 0$ в лемме 1.1, нетрудно показать, что для некоторой константы C_α

$$\mathbf{D} R_2 \simeq \mathbf{D} \widehat{R}_J(f) \simeq \begin{cases} C_\alpha 2^J, & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}; \\ C_\alpha J 2^J, & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}; \\ C_\alpha 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Далее из неравенства Чебышева следует

$$\mathbf{P}\left(\frac{|R_2|}{2^{bJ}} \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbf{D} \widehat{R}_J(f)}{2^{2bJ} \delta^2} \rightarrow 0, \quad \forall \delta > 0. \quad (36)$$

Действительно, в случае $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ правая часть (36) стремится к нулю при $b > \frac{1}{2}$.

А для случая $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ — при $b > 1 - \alpha$. И теорема доказана.

Глава 2. Асимптотическая нормальность оценок риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет коэффициентов линейного преобразования функции

В этой главе речь пойдет о восстановлении функции после однородного линейного преобразования и в условиях наличия коррелированного шума. Такая постановка задачи встречается в анализе физике плазмы, телекоммуникационного трафика, в задаче компьютерной томографии, то есть там, где данные наблюдаются не напрямую. Предполагается, что в наблюдениях присутствует коррелированный шум. Для его удаления применяется метод пороговой обработки эмпирических коэффициентов разложения функции.

В этой главе рассматривается вейвлет-вейглет-разложение сигнала. Наличие шума в сигнале всегда приводит к риску при оценке исходной функции. Свойства оценки риска при пороговой обработке вейглет-вейвлет коэффициентов в модели с независимым шумом уже были исследованы в работах [32, 51, 14] и в независимом случае показаны свойства состоятельности и асимптотической нормальности. В этой главе будут исследованы асимптотические свойства оценки риска в моделях со стационарным коррелированным шумом.

В условиях этой же задачи будет рассмотрено применение метода пороговой обработки коэффициентов в вейглет-вейвлет-разложении. В этом методе для разложения наблюдаемого сигнала применяется вейвлет-базис, а для реконструкции – вейглет-базис, в отличие от вейвлет-вейглет-разложения, где сначала используются вейглеты, а затем вейвлеты. Будет показано, что при определенных условиях

на гладкость функции имеют место некоторые асимптотические свойства оценки риска при восстановлении функции методом мягкой пороговой обработки.

Результаты этой главы опубликованы в работах [6, 4, 3].

2.1 Вейвлет-вейглет-разложение и восстановление функции (WVD)

Рассматривается функция сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$ на конечном отрезке $[a, b]$, равномерно регулярная по Липшицу с некоторым параметром $\gamma > 0$. Ее вейвлет-разложение имеет вид:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \quad (37)$$

где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$. Как отмечалось в главе 1, если вейвлет-функция M раз непрерывно дифференцируема ($M \geq \gamma$), имеет M нулевых моментов и достаточно быстро убывает на бесконечности, то справедливо свойство убывания вейвлет-коэффициентов (4).

К искомой функции f применяется линейный оператор K , который является однородным в $\mathbb{L}^2$ с показателем однородности $\beta > 0$ [32], то есть для любого x_0 и $a > 0$ выполняется $K[f(a(x - x_0))] = a^{-\beta}(Kf)[a(x - x_0)]$. Следовательно, существуют такие функции, называемые вейглетами [32], что

$$\langle Kf, \xi_{jk} \rangle = \langle f, \psi_{jk} \rangle. \quad (38)$$

Подставляя (38) в формулу (37) получим метод реконструкции функции при вейвлет-вейглет-разложении

$$f = \sum_{j,k} \langle Kf, \xi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \quad (39)$$

Также как и вейвлеты, вейглет-функции $\xi_{jk}(t)$ представляют собой сдвиги и растяжения некоторой функции $\xi(t)$. Из (38) следует

$$\langle f, \xi_{jk} \rangle = \langle f, (K^*)^{-1} \psi_{jk} \rangle.$$

Тогда, $\xi_{jk} = (K^*)^{-1} \psi_{jk}$. Пусть, $\beta_{jk} = \|(K^*)^{-1} \psi_{jk}\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{jk} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} ((K^*)^{-1} [2^{j/2} \psi(2^j x - k)])^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{j/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (2^{\gamma j} ((K^*)^{-1} \psi) [2^j x - k])^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{(1/2+\gamma)j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (((K^*)^{-1} \psi) [2^j x - k])^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{\gamma j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (((K^*)^{-1} \psi) [y])^2 dy \right)^{1/2} = 2^{\gamma j} \beta_{00}. \end{aligned}$$

Функция f представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k} \beta_{jk} \langle Kf, u_{jk} \rangle \psi_{jk}. \quad (40)$$

В отличие от вейвлет-функций вейглеты $\{\xi_{jk}\}$ не обладают свойством ортонормированности. Однако, нормированные вейглет-функции $u_{jk} = 2^{-\beta j} \xi_{jk}$ образуют устойчивый базис [32], то есть найдутся константы $0 < A \leq B < \infty$, для которых соотношение

$$A \|c_{jk}\|^2 \leq \left\| \sum_j \sum_k c_{jk} u_{jk} \right\|^2 \leq B \|c_{jk}\|^2$$

выполняется для любой последовательности $\{c_{jk}\}$: $\sum_j \sum_k |c_{jk}|^2 < \infty$.

Таким образом, восстановление исходной незашумленной функции происходит в три этапа: разложение наблюдаемой функции Kf по вейглет-базису, применение пороговой обработки к эмпирическим вейглет-коэффициентам, восстановление функции f по коэффициентам, используя вейвлет-базис.

2.2 Метод вейглет-вейвлет-разложения функции (VWD)

Продолжая теоретические рассуждения предыдущего параграфа, по вейвлет-базису $\{\psi_{jk}\}_{jk \in Z}$ можно раскладывать не саму функцию сигнала f , а ее наблюдаемое линейное преобразование $Kf \in L^2(\mathbb{R})$:

$$Kf = \sum_{j,k \in Z} \langle Kf, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

Предполагая, что функция Kf достаточно гладкая (см. главу 1), можно выбрать «материнскую» вейвлет-функцию ψ с нужным числом нулевым моментов и дифференцируемую нужное число раз, чтобы выполнялось

$$|\langle Kf, \psi_{jk} \rangle| \leq \frac{A}{2^{j(\gamma+1/2)}}, \quad (41)$$

Существуют такие функции u_{jk} , что $\langle f, u_{jk} \rangle = \langle Kf, \psi_{jk} \rangle$. Если преобразование K однородно с показателем β , то K^{-1} однородно с показателем $-\beta$ [51]. Пусть $\lambda_{jk} = \|K^{-1}\psi_{jk}\|$, тогда можно показать, что $\lambda_{jk} = 2^{\beta j} \lambda_{00}$. Для функции f справедливо представление [26]

$$f = \sum_{j,k \in Z} \lambda_{jk} \langle Kf, \psi_{jk} \rangle u_{jk}, \quad u_{jk} = K^{-1}\psi_{jk} / \lambda_{jk}.$$

По аналогии с описанным в 2.1 методом u_{jk} также называются «вейглетами». Последовательность $\{u_{jk}\}$ также не образует ортонормированную систему. Однако, при выполнении некоторых условий гладкости на $K^*\psi$ и $K^{-1}\psi$ [51], последовательность нормированных вейглетов $\{u_{jk}\}$ также образует устойчивый базис.

В этом методе восстановления исходной незашумленной функции начинается с разложения наблюдаемой функции Kf по вейвлет-базису, после применения пороговой обработки к коэффициентам разложения происходит реконструкция функции на основе обновленных коэффициентов и вейглетов, а не наоборот, как в методе с вейвлет-вейглет-разложением.

2.3 Модель данных с коррелированным шумом для метода WVD

Перейдем к обсуждению модели, для $i \in \mathbb{Z}$:

$$Y_i = Kf(i/n) + z_i, \quad i = 1, \dots, 2^J. \quad (42)$$

где K – однородный линейный оператор в $\mathbb{L}^2$ с показателем однородности $\beta > 0$ [32]. Пусть $\{z_i\}$ – стационарный гауссовский процесс с ковариационной последовательностью $r_k = \mathbf{cov}(z_i, z_{i+k})$. Потребуем, чтобы она убывала со скоростью $r_k \sim Ak^{-\alpha}$, и $0 < \alpha < 1$. Задача построить оценку функции f .

Действуя по аналогии с первой главой, из (42) определим наблюдаемый процесс, для $t \in [0, 1]$

$$Y_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i = KF_n(t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} z_i,$$

где $KF_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} Kf(i/n)$ – «суммарный сигнал».

Пусть, $\tau^2 = 2A/(1 - \alpha)(2 - \alpha)$ и $H = 1 - \alpha/2 \in (1/2, 1)$.

Определяем дробное Броуновское движение $\mathbf{B}_H(t)$ и из [58] следует, что

$$n^{\alpha/2}(Y_n(t) - KF_n(t)) \rightarrow \tau \mathbf{B}_H(t), \quad t \in [0, 1].$$

Обозначим $\epsilon = \tau^{1/\alpha} 2^{-J/2}$, где τ – параметр масштаба и без ограничения общности $\tau = 1$. Тогда наблюдаемый процесс $Y_n(t)$ можно аппроксимировать процессом $Y(t), t \in [0, 1]$, то есть

$$Y(t) = KF(t) + \epsilon^\alpha \mathbf{B}_H(t), \quad KF(t) = \int_0^t Kf(s) ds. \quad (43)$$

Применяем вейглет-разложение и с учетом (38) получаем

$$\langle Y, \xi_{j,k} \rangle = \langle KF, \xi_{j,k} \rangle + \epsilon^\alpha \langle W, \xi_{j,k} \rangle = \langle F, \psi_{j,k} \rangle + \epsilon^\alpha \langle W, \xi_{j,k} \rangle.$$

Далее, переходя к дискретному вейглет-преобразованию, по аналогии с дискретным вейвлет-преобразованием в первой главе, получаем модель дискретных вейглет-коэффициентов

$$\begin{aligned} X_{j,k} &= \mu_{j,k} + 2^{J(1-\alpha)/2} w_{j,k}, \\ \mu_{j,k} &= 2^{J/2} [KF, \xi_{j,k}], \\ w_{j,k} &= [W, \xi_{j,k}] = \int \xi_{j,k} d\mathbf{B}_H. \end{aligned} \quad (44)$$

Дисперсии коэффициентов $X_{j,k}$ не зависят от k и постоянны на одном уровне [45, 46]:

$$\sigma_j^2 = 2^{J(1-\alpha)} \mathbb{D} \left\{ \int \xi_{j,k} d\mathbf{B}_H \right\} = 2^{J(1-\alpha)} 2^{2\beta j} \mathbb{D} \left\{ \int u_{j,k} d\mathbf{B}_H \right\} = C_{\alpha\beta} 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j},$$

где $C_{\alpha\beta} > 0$ – константа, зависящая от α и β .

Ковариация между коэффициентами $\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})$ при $j \geq i$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(X_{j,k}, X_{i,l}) &= \frac{1}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{j\beta} 2^{i\beta} \int 2^{-\frac{j}{2}} e^{ikz} 2^{-j} \hat{u}(2^{-j}z) 2^{-\frac{i}{2}} \overline{e^{ilz} 2^{-i} \hat{u}(2^{-i}z)} |z|^{-(1-\alpha)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} \int e^{iz(k2^{-\Delta}-l)} \hat{u}(2^{-\Delta}z) \overline{\hat{u}(z)} |z|^{-(1-\alpha)} dz, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\Delta = j - i \geq 0$.

Далее будут использоваться вейвлеты Мейера, в том числе вейглет-разложение на основе вейвлетов Мейера [12]. Как уже говорилось, для вейвлетов Мейера справедливо: $|\hat{\psi}(w)| \leq C'_{M_0} |w|^{M_0} \mathbf{1}(w \in \text{supp}(\hat{\psi}))$ для любого натурального M_0 . Аналогичное неравенство $|\hat{u}(w)| \leq C_{M_1} |w|^{M_1} \mathbf{1}(w \in \text{supp}(\hat{u}))$ с некоторой константой $M_1 > 0$ для вейглет-функции $u(t)$, полученной из вейвлет-функции $\psi(t)$, справедливо для многих линейных однородных операторов таких, как оператор интегрирования, оператор Рисса, преобразования Абеля и Гильберта. Можно также выбрать вейвлеты Мейера таким образом, чтобы функция $\hat{u}(w) |\omega|$ была дифференцируема нужное число раз.

Имеем, с одной стороны

$$\begin{aligned}
|\mathbf{cov}(X_{j,k}, X_{i,l})| &\leq \frac{1}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} \left| \int e^{iz(k2^{-\Delta}-l)} \hat{u}(2^{-\Delta}z) \overline{\hat{u}(z)} |z|^{M_1-(1-\alpha)} dz \right| \leq \\
&\leq \frac{C_{M_1}}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_1} \int |\overline{\hat{u}(z)}| |z|^{M_1-(1-\alpha)} dz \leq \\
&\leq \frac{C'_{M_1}}{2\pi} 2^{J(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_1}
\end{aligned}$$

С другой стороны, можно выбрать такой вейвлет-базис, чтобы у функции $H(z) = \hat{u}(2^{-\Delta}z) \overline{\hat{u}(z)} |z|^{-(1-\alpha)}$ было $2M$ непрерывных производных по z . Из свойств преобразования Фурье следует, что существует такая константа $C_M > 0$, что при $k2^{-\Delta} \neq l$

$$|\mathbf{cov}(X_{j,k}, X_{i,l})| \leq 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} \frac{M}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M}}.$$

Тогда справедливо

$$|\mathbf{cov}(X_{j,k}, X_{i,l})| \leq 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\Delta M_1/2} \frac{M}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M}}.$$

Поскольку $M_1 > 0$ можно выбрать любой, то, не ограничивая общности, в множителе $2^{-\Delta M_1/2}$ можно убрать деление на 2, а также потребовать $M_1 > 1 - \alpha$ и $M_1 > \beta$. Тогда для константы $C > 0$ справедливо

$$|\mathbf{cov}(X_{j,k}, X_{i,l})| \leq \begin{cases} C 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\Delta M_1} \frac{1}{|k2^{-\Delta}-l|^M}, & |k2^{-\Delta} - l| > 1; \\ C 2^{J(1-\alpha)-\frac{\Delta}{2}-i(1-\alpha)} 2^{(2i+\Delta)\beta} 2^{-\Delta M_1}, & |k2^{-\Delta} - l| \leq 1. \end{cases} \quad (46)$$

Соответственно, для ковариации между коэффициентами разложения на одном уровне, то есть при $i = j$ и $k \geq 1$:

$$|\mathbf{cov}(X_{j,0}, X_{j,k})| \leq C 2^{2\beta j} 2^{(J-j)(1-\alpha)} \frac{1}{|k|^M}. \quad (47)$$

2.4 Модель данных для метода VWD

В методе, основанном на вейглет-вейвлет-разложения, используется та же модель исходных данных (42) и рассуждения повторяют ход параграфа 2.3: определяем наблюдаемый процесс и вводим дробное Броуновское движение, приходим к (43). Применяя вейвлет-разложение на основе вейвлетов Мейера и аппроксимируя его дискретным вейвлет-преобразованием, приходим к следующей модели дискретных вейвлет-коэффициентов [46]:

$$X_{jk} = \mu_{jk} + 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} z_{jk}, \quad \mu_{jk} = (Kf)_{jk}^W \approx 2^{J/2} \langle Kf, \psi_{jk} \rangle, \quad (48)$$

где μ_{jk} – вейлет-коэффициенты незашумленного линейного преобразования функции, а $z_{jk} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$ – коэффициенты зависящего шума.

Ковариация между коэффициентами вейглет-разложения X_{jk} и X_{il} имеет вид [46]:

$$\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il}) = 2^{J(1-\alpha)} \mathbb{E} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H \overline{\int \psi_{il} d\mathbf{B}_H} = 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int \hat{\psi}_{jk}(\xi) \overline{\hat{\psi}_{il}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi.$$

Для преобразования Фурье вейвлет-функции справедливо

$$\hat{\psi}_{jk}(\xi) = 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi).$$

Рассмотрим ковариацию в пределах одного уровня j :

$$\mathbf{cov}(X_{j0}, X_{jk}) = 2^{(J-j)(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int e^{ik\xi} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi.$$

Выберем вейвлет-функцию ψ с $2M$ непрерывными производными, действуя как в главе 1 можно показать, что найдется такая константа $C_M > 0$, что для $\Delta = j - i \geq 0$

$$|\mathbf{cov}(X_{j0}, X_{jk})| \leq \frac{C_M 2^{(J-j)(1-\alpha)}}{k^M}. \quad (49)$$

Теперь рассмотрим ковариацию между вейглет-коэффициентами на разных уровнях $\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})$, предполагая, что $j > i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il}) &= 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int 2^{-\frac{j}{2}} e^{ik\xi 2^{-j}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) 2^{-\frac{i}{2}} \overline{e^{il\xi 2^{-i}} \hat{\psi}(2^{-i}\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi = \\ &= 2^{J(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} \int e^{i\xi(k2^{-\Delta} - l)} \hat{\psi}(2^{-\Delta}\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} |\xi|^{-(1-\alpha)} d\xi, \quad (50)\end{aligned}$$

Далее, как и в главе 1, можно получить следующую оценку для некоторой константы $C_{Me} > 0$

$$|\mathbf{cov}(X_{jk}, X_{il})| \leq \begin{cases} C_{Me} 2^{J(1-\alpha) - \frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0} \frac{1}{(k2^{-\Delta} - l)^M}, & |k2^{-\Delta} - l| > 1; \\ C_{Me} 2^{J(1-\alpha) - \frac{\Delta}{2} - i(1-\alpha)} 2^{-\Delta M_0}, & |k2^{-\Delta} - l| \leq 1. \end{cases} \quad (51)$$

Дисперсия коэффициентов модели (48) имеет вид

$$\sigma_j^2 = 2^{(1-\alpha)(J-j)}.$$

2.5 Оценка риска при пороговой обработке

В методе вейвлет-вейглет-разложения пороговая обработка (мягкая) коэффициентов разложения применяется для удаления достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. По аналогии с первой главой будем использовать «универсальным» порог $T_j = \sqrt{2 \ln 2^j} \sigma_j$ [50], зависящий от уровня разложения j . К каждому коэффициенту применяется пороговая функция $\rho_{T_j}(x) = \mathbf{sgn}(x) (|x| - T_j)_+$. Определим риск мягкой пороговой обработки $R_J(f)$, как

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}))^2, \quad (52)$$

где μ_{jk} – неизвестные коэффициенты разложения «чистой» функции. Следовательно, риск в (52) вычислить нельзя. Но его можно оценить [33]:

$$\widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \quad (53)$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$. Оценка $\widehat{R}_J(f)$ является несмещенной для $R_J(f)$ [12]. Также известно, что в моделях с независимым шумом оценка риска (53) при определенных условиях является состоятельной и асимптотически нормальной [14].

При использовании метода вейглет-вейвлет-разложения к коэффициентам разложения также применяется мягкая пороговая обработка с порогом $T_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln 2^J}$. Риск мягкой пороговой обработки в этом случае определяется так,

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 \mathbb{E} (\mu_{jk} - \rho_{T_j}(X_{jk}))^2. \quad (54)$$

Величины μ_{jk} в выражении для риска (54) неизвестны, а значит, вычислить значение риска невозможно. Для оценки риска по-прежнему используем следующую величину:

$$\widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], \quad (55)$$

где $F[x, T, \sigma] = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$. Данная оценка является несмещенной [12]. Также известно, что при определенных условиях в моделях с независимым шумом оценка $\widehat{R}_J(f)$ является состоятельной и асимптотически нормальной. Далее будет исследовано асимптотическое поведение оценок (53) и (55) в модели данных с долгосрочной зависимостью.

2.6 Вспомогательные результаты для метода WVD

Далее приведены результаты, касающиеся характера зависимости эмпирических вейвлет-коэффициентов. Также как и в первой главе, предполагается, что используются вейвлеты Мейера [22], обладающие нужным количеством нулевых моментов и непрерывных производных. Оценим дисперсию коэффициентов модели.

Лемма 2.1. Пусть $\alpha + 2\beta > 1/2$ и $\gamma > (4(\alpha + 2\beta) - 2)^{-1}$, тогда $D_J^2 = \mathbb{D} \hat{R}_J(f) \simeq \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}$, где константа $\tilde{C}$ зависит от α и β , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: Из условий леммы $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha + 4\beta)^{-1}$. Значит, можно выбрать такое p'' , что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < 1 - (2\alpha + 4\beta)^{-1}$ и $p''J$ – целое число. Из (13) следует, что $\mu_{jk} \rightarrow 0$ для всех $j: p''J \leq j < J$ при $J \rightarrow \infty$. Разобьем выражение для оценки риска (53) на две суммы:

$$\hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \hat{R}_1 + \hat{R}_2. \quad (56)$$

Учитывая (53) и вид порога T_j , выполняется $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leq C_F j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j}$ почти всюду, где константа $C_F > 0$. Тогда справедливо ограничение на сумму коэффициентов на «грубых» масштабах $\hat{R}_1$, для некоторой $C'_F > 0$

$$|\hat{R}_1| \leq C_F \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j} \leq C'_F J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')} \quad (\text{почти всюду}). \quad (57)$$

Дисперсия оценки риска имеет вид

$$\mathbb{D} \hat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \text{cov}(F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]^2, F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]^2). \quad (58)$$

Переходим к рассмотрению суммы дисперсий,

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j].$$

Из (57) найдется некоторая константа $C_F'' > 0$ такая, что первая сумма не превосходит $C_F'' J^2 2^{2J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')}$. Но p'' был выбран таким, что $p'' < 1 - (2\alpha + 4\beta)^{-1}$, поэтому выполняется $2(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'') < 1+4\beta$. Из условий леммы $\alpha+2\beta > 1/2$. Учитывая это, а также вид порога T_j , для второй суммы справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] &\simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 = \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2\sigma_j^2(\sigma_j^2 + \mu_{jk}^2) \simeq \\ &\simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2\sigma_j^4 = \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2C_{\alpha\beta}^2 \frac{2^{2J(1-\alpha)}}{2^{2j(1-\alpha)}} 2^{4\beta j} \simeq \tilde{C}' 2^{J(1+4\beta)}. \end{aligned}$$

Для некоторой $\tilde{C}' > 0$

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \simeq \sum_{j=p''J+1}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} X_{jk}^2 \simeq \tilde{C}' 2^{J(1+4\beta)}. \quad (59)$$

По аналогии с суммой дисперсий, рассмотрим сумму ковариаций в (58),

$$\sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]) \simeq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}(X_{il}^2, X_{jk}^2).$$

Из утверждения 1.1 в главе 1 следует, что если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение, то

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y).$$

Учитывая это, а также (46) и (47), получаем

$$S_{\mathbf{cov}} = \frac{1}{2} \sum_{i=p''J}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{jk}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{\Delta=0}^{J-i-1} \sum_{k=\begin{cases} l+1, & \Delta=0; \\ 0, & \Delta>0. \end{cases}}^{2^{i+\Delta}-1} \mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{i+\Delta,k}) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \left(\sum_{\delta=1}^{2^i-l} C^2 \delta^{-2M} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{4i\beta} + \right. \\
&+ \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} C^2 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_1)} 2^{(4i+2\Delta)\beta} \frac{\mathbf{1}(\{k2^{-\Delta} \neq l\})}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M}} + \\
&+ \left. \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} C^2 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_1)} 2^{(4i+2\Delta)\beta} \mathbf{1}(\{k2^{-\Delta} = l\}) \right) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \left(\sum_{\delta=1}^{2^i-l-1} C^2 \delta^{-2M} 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{4i\beta} + \right. \\
&+ \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} C^2 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{-\Delta(1+2M_1)} 2^{(4i+2\Delta)\beta} \left(\sum_{k=0}^{2^{i+\Delta}-1} \frac{\mathbf{1}(\{k2^{-\Delta} \neq l\})}{|k2^{-\Delta} - l|^{2M}} + 1 \right) \Big) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} C^2 2^{2(J-i)(1-\alpha)} \left(H_0 2^{i(1+4\beta)} + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} 2^{i(1+4\beta)} 2^{(2\beta-2M_1)\Delta} \left(H_1 + 2^{-1\Delta} H_2 \right) \right) \leq \\
&\leq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} C^2 2^{2(J-i)(1-\alpha)} 2^{i(1+4\beta)} \left(H_0 + H_3 \right) \simeq H_4 2^{J(1+4\beta)}, \tag{60}
\end{aligned}$$

Заметим, что последний переход справедлив при условии леммы $\alpha + 2\beta > 1/2$.

Здесь H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и H_4 – положительные константы, зависящие от α и β .

Также, учитывая (13), (46) и (47) можно показать, что

$$\left| \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mu_{il} \mu_{jk} \mathbf{cov}(X_{il}, X_{jk}) \right| \leq H_{\alpha\beta} J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')}, \tag{61}$$

где $H_{\alpha\beta}$ – константа, зависящая от α и β . Объединяя (59), (60) и (61), получаем утверждение леммы.

Следствие 2.1. Пусть $\alpha + 2\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда справедлива следующая оценка сверху для $\widehat{R}_2$ из (56):

$$\mathbb{D} \widehat{R}_2 \leq \begin{cases} \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C} J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C} 2^{2J((1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5; \end{cases}$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и β , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: По аналогии с доказательством следствия 1.1 из главы 1 можно заметить, что оценки (59) и (60) в лемме 1 справедливы при условии $\alpha + 2\beta > 1/2$. Если убрать это изменить это ограничение на $\alpha + 2\beta > 0$, то нетрудно получить утверждение леммы.

2.7 Вспомогательные результаты для метода VWD

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства эмпирических коэффициентов вейвлет-разложения в модели (42). Несмотря на то, что ход доказательств во многом совпадает с доказательствами в методе вейвлет-вейглет-разложения, описанными выше, однако некоторые выкладки отличаются, поэтому доказательства приведены полностью. Сформулируем лемму о дисперсии оценки риска.

Лемма 2.2. Пусть $\alpha > 1/2$ и $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда $D_J^2 = \mathbb{D} \widehat{R}_J(f) \simeq C 2^{(4\beta+1)J}$, где константа C зависит от α и β , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство. Из условий леммы $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha)^{-1}$. А значит, можно выбрать такое p'' , что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$ и $p''J$ – целое число. Из

неравенства (41) следует $\mu_{jk} \rightarrow 0$ для всех $j: p''J \leq j < J$ при $J \rightarrow \infty$. Разобьем выражение для оценки риска (55) на две суммы:

$$\widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2. \quad (62)$$

Из (55) и вида порога T_j следует $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leq C_F T_j^2 = C_F J 2^{(J-j)(1-\alpha)}$ почти всюду, где константа $C_F > 0$. Тогда для первой суммы справедливо ограничение, для некоторой $C'_F > 0$

$$|\widehat{R}_1| \leq C_F \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 J 2^{(J-j)(1-\alpha)} \leq C'_F J 2^{(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')J} \quad \text{почти всюду.} \quad (63)$$

Структура дисперсии оценки риска имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \widehat{R}_J(f) &= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \\ &+ \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{il}^2 \lambda_{jk}^2 \text{cov}(F[X_{il}^2, T_i, \sigma_i]^2, F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]^2), \end{aligned} \quad (64)$$

где $(i, l) \neq (j, k)$ во второй сумме. Переходим к сумме дисперсий:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j].$$

Учитывая (63), существует константа $C''_F > 0$ такая, что первая сумма не превосходит $C''_F J 2^{2(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')J}$. Но p'' был выбран таким, что $p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$, поэтому $2(1 - \alpha + (\alpha + 2\beta)p'') < 4\beta + 1$. А для второй суммы справедливо:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{D} X_{jk}^2 = \\ &= \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 2\sigma_j^2 (\sigma_j^2 + \mu_{jk}^2) \simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 2\sigma_j^4 = \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 2 \frac{2^{2(1-\alpha)J}}{2^{2(1-\alpha)j}} = \end{aligned}$$

Из условия леммы $\alpha > 1/2$, для некоторой $C' > 0$

$$= 2^{2(1-\alpha)J+1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} (2^{\beta j} \lambda_{00})^4 2^{-j+2\alpha j} \simeq C' 2^{(4\beta+1)J}. \quad (65)$$

Аналогично сумме дисперсий, рассмотрим сумму ковариаций в (64)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{il}^2 \lambda_{jk}^2 \mathbf{cov}(F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j], F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \simeq \\ & \simeq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{il}^2 \lambda_{jk}^2 \mathbf{cov}(X_{il}^2, X_{jk}^2). \end{aligned}$$

Из утверждения 1.1 в главе 1, если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение, то

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y).$$

Из этого и (51), используя условие леммы $\alpha > 1/2$ и повторяя ход рассуждения леммы 1 из главы 2, нетрудно получить

$$S_{\mathbf{cov}} = \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{il}^2 \lambda_{jk}^2 \mathbf{cov}^2(X_{il}, X_{jk}) \leq C'' 2^{(4\beta+1)J}, \quad (66)$$

где C'' – некоторая константа. Аналогично, с учетом (41), для некоторого C^*

$$\left| \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{il}^2 \lambda_{jk}^2 \mu_{il} \mu_{jk} \mathbf{cov}(X_{il}, X_{jk}) \right| \leq C^* 2^{(1-\alpha(1-p'')+4\beta)J}, \quad (67)$$

Объединяя (65), (66) и (67), получаем, что $\mathbf{D} \hat{R}_J(f) \simeq C 2^{(4\beta+1)J}$. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Пусть $\alpha + 2\beta > 0$ и $\gamma > 0$, тогда для модели (48) справедлива

оценка для $\widehat{R}_2$ из представления (62):

$$D \widehat{R}_2 \leq \begin{cases} \tilde{C}' 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C}' J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C}' 2^{2J((1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5; \end{cases}$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и β , но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: Из доказательства леммы следует, что оценки (65) и (66) справедливы только при $\alpha > 1/2$. Избавившись от этого ограничения, нетрудно получить утверждение данного следствия. Доказательство повторяет ход доказательства следствия 1.1 в главе 1. Поэтому здесь мы его опустим.

2.8 Основные теоремы

Перейдем к основным теоретическим результатам второй главы. Далее приводится доказательство асимптотических свойств оценки риска (53) для модели (42) и разложения на основе вейвлетов Мейера. Покажем свойство асимптотической нормальности [6].

Теорема 2.1. Пусть $\alpha + 2\beta > 1/2$ и функция f равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > (4(\alpha + 2\beta) - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow N(0, 1), \quad D_J^2 = \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}, \quad J \rightarrow \infty, \quad (68)$$

где $\tilde{C}$ - константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α , β и выбранного вейвлет-базиса.

Доказательство: Из условия $\gamma > (4(\alpha + 2\beta) - 2)^{-1}$ имеем $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha + 4\beta)^{-1}$. Следовательно, можно выбрать такое p'' , что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' <$

$1 - (2\alpha + 4\beta)^{-1}$. Отсюда $1 - \alpha + (\alpha + 2\beta)p'' < 1/2 + 2\beta$. Разобьем выражение в (68) на две суммы:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} &= \frac{\sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J} + \\ &\quad + \frac{\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J}. \end{aligned}$$

Из леммы 2.1 $\mathbb{D} \widehat{R}_J(f) \simeq D_J^2 = \tilde{C}2^{J(1+4\beta)}$. Из (57) следует, что первая сумма стремится к нулю почти всюду.

Повторяя ход рассуждений леммы 2.1, можно показать, что

$$\begin{aligned} \sup_{J>0} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 &= \\ &= \sup_{J>0} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] < \infty. \quad (69) \end{aligned}$$

В [45] было показано, что последовательность $\{X_{jk}\}, j = p''J + 1 \dots J - 1, k = 1 \dots 2^j$, обладает свойством ρ -перемешивания. Следовательно, последовательность $\{F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]\}, j = p''J + 1 \dots J - 1, k = 1 \dots 2^j$, также обладает свойством ρ -перемешивания.

Теперь покажем, что выполнено условие Линдеберга,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 \times \\ \times \mathbf{1}(|F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| > \epsilon D_J) \rightarrow 0, \quad J \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (70) \end{aligned}$$

Действительно, поскольку $D_J^2 = \tilde{C}2^{J(1+4\beta)}$, а $|F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| \leq C_F j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j} = C_F j 2^{J(1-\alpha)} 2^{j(\alpha+2\beta-1)}$ почти всюду. Тогда, начиная с некоторого J , при $\alpha+2\beta > 1/2$, все индикаторы в (70) обращаются в ноль.

Таким образом, выполнены условия утверждений из работ [57] и [44], и, значит, справедлива сходимость по распределению (68). Теорема доказана.

Замечание 2.1 Дисперсия оценки риска в случае использования метода вейвлет-вейглет-разложения довольно сложно зависит от выбранного вейвлет базиса, а именно, через константу $\tilde{C}$, которая кроме того, зависит еще и от α и β . Константу $\tilde{C}$ можно вычислить достаточно точно, а именно, из (58) следует, что $\tilde{C} = \tilde{C}' + H_4$. Из леммы 2.1 следует, что

$$H_4 = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{cov}}}{2^{J(1+4\beta)}},$$

а в силу (60) предел существует. Слагаемые S_{cov} вычисляются по формулам (45). Константу $\tilde{C}'$ можно вычислить, исходя из (59): $\tilde{C}' = \frac{2C_{\alpha\beta}^2}{2^{2\alpha+4\beta-1}-1}$, а $C_{\alpha\beta}$ – константа, получаемая при вычислении дисперсии коэффициентов модели (42)

Далее покажем свойство состоятельности оценки риска, справедливое при более слабых ограничениях на α , β и γ , чем те, которые используются для доказательств асимптотической нормальности в теореме 2.1 [3].

Теорема 2.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 0$, функция f равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > 0$. Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения с «универсальным» порогом и $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbf{1}(\alpha + 2\beta \geq 0.5))$ выполняется

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{P} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (71)$$

Доказательство: Условия теоремы позволяют выбрать p'' таким, что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < \min(\frac{b+\alpha-1}{\alpha+2\beta}, 1)$. Разобьем выражение в числителе (71) на две суммы:

$$\hat{R}_J(f) - R_J(f) = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) +$$

$$+ \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \equiv R_1 + R_2.$$

Поскольку найдется такая константа $C_F > 0$, что $F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \leq C_F j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j}$, для первой суммы имеем

$$\left| \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] \right| \leq C_F \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} j 2^{(J-j)(1-\alpha)} 2^{2\beta j} \leq C'_F J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')} \quad (72)$$

почти всюду, с некоторой константой $C'_F > 0$. Получаем, что $|R_1| \leq C_1 J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2\beta)p'')}$ почти всюду с некоторой константой $C_1 > 0$. При этом $1 - \alpha + (\alpha + 2\beta)p'' < b$ в силу выбора p'' . Следовательно, $R_1 2^{-bJ} \rightarrow 0$ почти всюду. Используя следствие из леммы 2.1, для некоторой константы $\tilde{C}$

$$\mathbb{D} R_2 \leq \begin{cases} \tilde{C} 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C} J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C} 2^{2J((1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5. \end{cases}$$

Используя неравенство Чебышева, имеем при любом $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|R_2|}{2^{bJ}} \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbb{D} \hat{R}_J(f)}{2^{2bJ} \delta^2}. \quad (73)$$

При $\alpha + 2\beta \geq 0.5$ правая часть (73) стремится к нулю при $b > 2\beta + 0.5$. А при $\alpha + 2\beta < 0.5$ правая часть (73) стремится к нулю при $b > (1 - \alpha) - \frac{p''}{2}(1 - 2(\alpha + 2\beta))$, а учитывая, что $p'' > (2\gamma + 1)^{-1}$, получаем, что $b > (1 - \alpha) - \frac{1-2(\alpha+2\beta)}{2(2\gamma+1)}$. Отсюда следует утверждение (71). Теорема доказана.

Далее приводится доказательство асимптотических свойств оценки риска (55) в случае вейглет-вейвлет-преобразования для модели (48) и разложения на основе вейвлетов Мейера. Покажем свойство асимптотической нормальности [4].

Теорема 2.3. Пусть $\alpha > 1/2$ и функция f регулярна с параметром $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом T_j справедлива

сходимость по распределению:

$$\frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow \mathbf{N}(0, 1), \quad J \rightarrow \infty, \quad D_J^2 = C2^{(4\beta+1)J}, \quad (74)$$

где C – константа, которая не зависит от функции сигнала f , а только от α , β и выбранного вейвлет-базиса.

Доказательство: Из условия $\gamma > (4\alpha - 2)^{-1}$, имеем $(2\gamma + 1)^{-1} < 1 - (2\alpha)^{-1}$. Следовательно, можно выбрать такое p'' , что $(2\gamma + 1)^{-1} < p'' < 1 - (2\alpha)^{-1}$. Отсюда $1 - \alpha + (\alpha + 2\beta)p'' < 2\beta + 1/2$. Разобьем выражение в (74) на две суммы:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} &= \frac{\sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J} + \\ &+ \frac{\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])}{D_J}, \end{aligned}$$

Из леммы 2.3 следует, что $\mathbf{D} \widehat{R}_J(f) \simeq D_J^2 = C2^{(4\beta+1)J}$. Из (63) следует, что первая сумма стремится к нулю п. в.

Кроме того, повторяя ход рассуждений в лемме 2.3, можно показать, что

$$\begin{aligned} \sup_J \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 &= \\ &= \sup_J \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbf{D} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] < \infty. \end{aligned} \quad (75)$$

В работе [45] было показано, что последовательность $\{X_{jk}\}, j = p''J+1, \dots, J-1, k = 1, \dots, 2^j$, обладает свойством ρ -перемешивания. Следовательно, последовательность $\{\lambda_{jk}^2 F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]\}, j = p''J+1, \dots, J-1, k = 1, \dots, 2^j$, также обладает свойством ρ -перемешивания.

Теперь покажем справедливость условия Линдеберга: для любого $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^4 \mathbb{E} (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j])^2 \times \\ & \times \mathbf{1}(\lambda_{jk}^2 |F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E} F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| > \epsilon D_J) \rightarrow 0, \quad J \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (76)$$

Действительно, $D_J^2 = C2^{(4\beta+1)J}$, а $|F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]| \leq C_F J 2^{(J-j)(1-\alpha)}$ почти всюду. Тогда, начиная с некоторого J , при $\alpha > 1/2$ все индикаторы в (76) обращаются в нуль.

Таким образом, выполнены все условия утверждений из работ [57] и [44], и, значит, справедлива сходимость по распределению (74). Теорема доказана.

Замечание 2.2 Дисперсия оценки риска в случае использования метода вейглет-вейвлет-разложения также зависит от выбранного вейвлет базиса через константу C , которая, зависит еще и от α и β . Из (64) следует, что $C = C' + C''$. Из леммы 2.3 следует, что

$$C'' = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{cov}}}{2^{(4\beta+1)J}},$$

а из (66) следует, что предел существует. Слагаемые S_{cov} вычисляются по формулам (50). Константу $\tilde{C}'$ можно вычислить, исходя из (65): $\tilde{C}' = \frac{2\lambda_{00}^4}{2^{2\alpha+4\beta-1}-1}$.

Переходим к доказательству свойства состоятельности рассматриваемой оценки риска, которая имеет место при более слабых ограничениях на α , β и γ , чем требуются для асимптотической нормальности в теореме 2.3 [3].

Теорема 2.4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta$, функция f регулярна с параметром $\gamma > 0$. Тогда при пороговой обработке коэффициентов вейглет-вейвлет-разложения с «универсальным» порогом и $b > \max(1 - \alpha + \frac{\alpha+2\beta}{2\gamma+1}, (2\beta + 0.5)\mathbf{1}(\alpha + 2\beta \geq 0.5))$ выполняется

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{2^{bJ}} \xrightarrow{P} 0, \quad J \rightarrow \infty. \quad (77)$$

Доказательство: Из условия теоремы $(2\gamma + 1)^{-1} < \min(\frac{b+\alpha-1}{\alpha+2\beta}, 1)$. А значит, можно выбрать p'' таким, что $(2\gamma+1)^{-1} < p'' < \min(\frac{b+\alpha-1}{\alpha+2\beta}, 1)$. Разобьем выражение в числителе (77) на две суммы:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_J(f) - R_J(f) &= \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) + \\ &+ \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{jk}^2 (F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j] - \mathbb{E}F[X_{jk}^2, T_j, \sigma_j]) \equiv R_1 + R_2. \end{aligned}$$

Повторяя ход рассуждений доказательства теоремы 2.2, можно показать, что $R_1 2^{-bJ} \rightarrow 0$ почти всюду. Далее, используя следствие 2.2, для некоторой константы $\tilde{C}'$

$$\mathbb{D} R_2 \leq \begin{cases} \tilde{C}' 2^{J(1+4\beta)}, & \text{если } \alpha + 2\beta > 0.5; \\ \tilde{C}' J 2^{2J(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha + 2\beta = 0.5; \\ \tilde{C}' 2^{2J((1-\alpha) - \frac{p''}{2}(1-2(\alpha+2\beta)))}, & \text{если } \alpha + 2\beta < 0.5. \end{cases}$$

Применяя неравенство Чебышева, получим утверждение (77). Теорема доказана.

Глава 3. Асимптотические свойства оценки риска в задаче томографии при наличии зависимого шума

В этой главе исследуются асимптотические свойства оценки риска в задаче компьютерной томографии. В этой задаче данные наблюдаются после преобразования Радона. Также известно, что эти наблюдения неизбежно содержат шум. Далее будет исследована модель со стационарным коррелированным шумом. Будет показано, что при определенных условиях оценка риска восстановления исходной функции обладает свойствами состоятельности и асимптотической нормальности. Основные результаты этой главы опубликованы в статье [8].

3.1 Преобразование Радона: вейвлет-вейглет-разложение

Формально оператор Радона R определяется как набор интегралов от функции f по всевозможным прямым плоскости:

$$(Rf)(s, \theta) = \int_{L_{s,\theta}} f(x, y) dl, \quad (78)$$

а интегрирование ведется вдоль прямой, описываемой уравнением

$$L_{s,\theta} = \{(x, y) : x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0\},$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$ – угол между осью x и перпендикуляром, опущенным из начала координат на эту прямую, а $s \in R$ – расстояние до прямой из начала координат. Преобразование Радона широко используется на практике для описания модели в задаче томографии с параллельной схемой сканирования (рис. 4): сканирующие лучи источника распространяются параллельно друг другу и, проходя через объект $f(x, y)$ и теряя интенсивность, измеряются в приемнике. В рамках этой модели

при фиксированном θ функцию $(Rf)(s, \theta)$ принято называть проекцией $f(x, y)$ под углом θ .

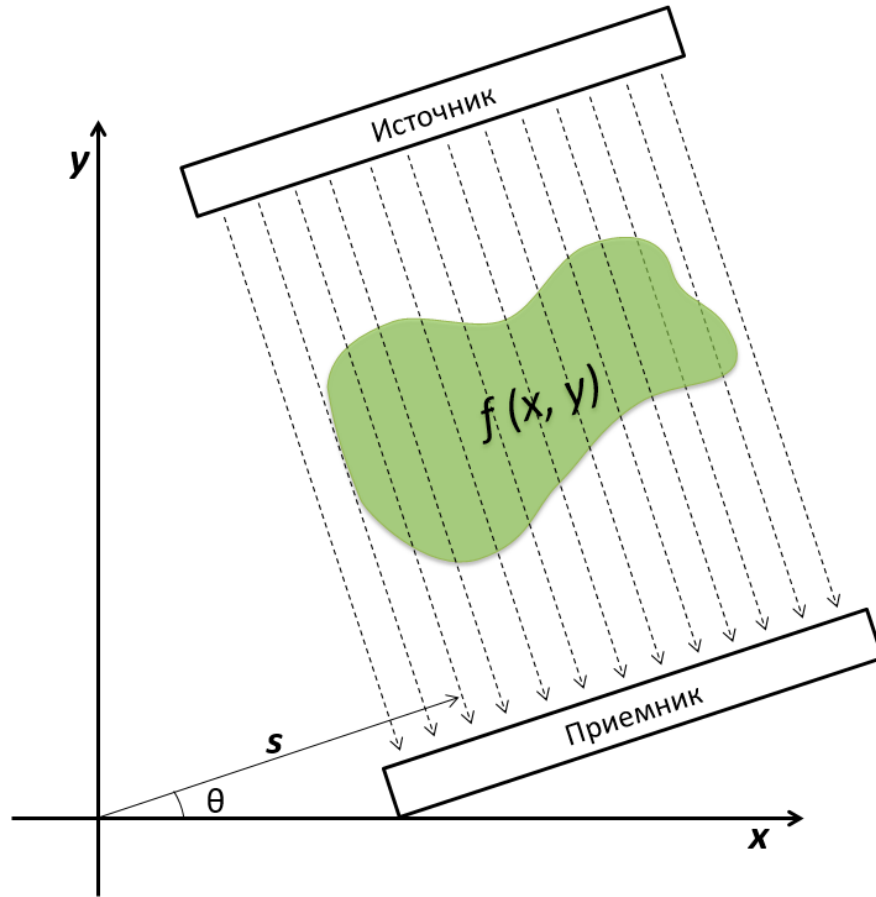


Рис. 4: Томография: параллельная схема сканирования.

Задача томографии – восстановить функцию f по наборам ее линейных интегралов Rf . В 1917 году И. Радон был получен формула обращения преобразования (78). В дальнейшем были разработаны различные методы обращения. В частности, метод фильтрации и обратного проецирования основан на формуле

$$f = \frac{1}{2} R^* I^{-1} R f, \quad (79)$$

где R^* – оператор обратного проецирования (сопряжённый к оператору R):

$$(R^* g)(x, y) = \int_0^{2\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta,$$

а оператор I^p называется потенциалом Рисса:

$$(\mathcal{F}I^p g)(w) = |w|^{-p}(\mathcal{F}g)(w)$$

Однако, формула (79) имеет ряд недостатков, существенных при ее использовании на практике: небольшие изменения во входных данных могут сильно повлиять на результат, для более точного восстановления требуется как можно больше проекций, что не всегда возможно (например, если объект исследования – человек), и к тому же для обработки и получения результата требуется использование мощных вычислительных систем. В связи с этим, активное развитие теории происходило уже во второй половине двадцатого века.

Кроме описанных выше недостатков, преобразование Радона не допускает локального обращения, то есть для восстановления функции $f(x, y)$ в некоторой точке требуется знание всех проекций. Для решения этой проблемы в [32] было предложено использовать метод вейвлет-вейглет-разложения для построения оценки искомой функции f .

Пусть $\phi(x)$ и $\psi(x)$ – «отцовский» и «материнский» вейвлет-функции, описанные в главе 1.1. Тогда, можно определить «материнские» вейвлет-функции в двумерном случае:

$$\begin{aligned}\psi_{j,k_1,k_2}^{[1]}(x, y) &= 2^j \phi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2), \\ \psi_{j,k_1,k_2}^{[2]}(x, y) &= 2^j \psi(2^j x - k_1) \phi(2^j y - k_2), \\ \psi_{j,k_1,k_2}^{[3]}(x, y) &= 2^j \psi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2).\end{aligned}\tag{80}$$

Семейство $\{\psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}\}_{\lambda,j,k_1,k_2}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}^2)$. По аналогии с одномерным вейвлет-разложением индекс j в (80) называется масштабом, а k_1 и k_2 – сдвигами.

Тогда вейвлет-разложение функции f будет имеет вид:

$$f(x, y) = \sum_{\lambda, j, k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle \psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]}(x, y), \quad \lambda = 1, \dots, 3. \quad (81)$$

Обычно, функция f задается в дискретных отсчетах в некотором круге. Не ограничивая общности, будем считать, что это круг единичного радиуса с центром в начале координат. Далее будем рассматривать «растянутую» версию функции $\bar{f}(Nx, Ny) = f(x, y)$. По аналогии с теорией вейвлет-анализа для одномерного случая, для дискретных вейвлет-коэффициентов в двумерном случае справедливо: $f_{j, k_1, k_2}^{W^{[\lambda]}} \approx 2^J \langle f, \psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle$. Также потребуем, чтобы функция f была равномерно регулярной по Липшицу с некоторым параметром $\gamma > 0$. То есть для некоторой константы C

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq C(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2)^{\gamma/2}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

Тогда существует константа A такая, что [12]:

$$\left| f_{j, k_1, k_2}^{W^{[\lambda]}} \right| \leq \frac{A 2^J}{2^{j(\gamma+1)}}. \quad (82)$$

Для обращения оператора Радона можно определить вейглет-функции следующим образом [32]:

$$\xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} = I^{-1} R \psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]}, \quad \hat{I}^p g(w) = |w|^{-p} \hat{g}(w). \quad (83)$$

Для вейглет-функций справедливо

$$\langle Rf, \xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle = \langle f, \psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle.$$

Следовательно, в вейвлет-разложении (81) можно использовать наблюдаемые проекционные данные.

3.2 Модель данных

Будем считать проекционные данные измеряются при $(s, \theta) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$. Тогда модель проекционных данных с шумом имеет вид:

$$Y_{i,j} = Rf(-1 + 2i/n, j\pi/n) + e_{i,j} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad n = 2^J,$$

где $\{e_{i,j}, i, j \in \mathbb{Z}\}$ – стационарное гауссовское поле с ковариационной последовательностью $r_{k,p} = \mathbf{cov}(e_{i,j}, e_{i+k, j+p})$.

Необходимо заметить, что структура ковариации шума для преобразования Радона должна отражать типичную ситуацию: на практике проекции для разных углов регистрируются независимо друг от друга [8]. В рассматриваемой модели ошибок получают независимые наблюдения в случае разных углов и стационарный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием, конечной дисперсией и ковариационной последовательностью $r_\delta \sim A\delta^{-\alpha}$ для одинаковых углов, где $0 < \alpha < 1$.

По аналогии с одномерным случаем, описанным в главе 2, создаем для равномерных отсчетов наблюдаемое поле при $(s, \theta) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$:

$$Y_n(s, \theta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{[n(s+1)/2]} \sum_{j=1}^{[n\theta/\pi]} Y_{i,j} = RF_n(s, \theta) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{[n(s+1)/2]} \sum_{j=1}^{[n\theta/\pi]} e_{i,j},$$

где $RF_n(s, \theta)$ – суммарный «сигнал» поля, определяемый как

$$RF_n(s, \theta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{[n(s+1)/2]} \sum_{j=1}^{[n\theta/\pi]} Rf(-1 + 2i/n, j\pi/n)$$

Действуя как и в прошлой главе, положим $H = 1 - \alpha/2, H \in (1/2, 1)$ и определим дробное броуновское движение $\mathbf{B}_H(s)$.

Далее по аналогии с моделью (44), описанной в главе 2, рассматриваем непре-

рывную аппроксимацию

$$Y(s, \theta) = RF(s, \theta) + n^{-(1+\alpha)/2} \tau \mathbf{B}'_H(s, \theta), \quad RF(s, \theta) = \int_{-1}^s \int_0^\theta Rf(t, q) dt dq, \quad (84)$$

где нормировочный множитель $\tau = \sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha)(2-\alpha)}}$ без ограничения общности можно считать равным единице, а $\mathbf{B}'_H(s, \theta)$ – случайная функция, которая для каждого фиксированного угла θ представляет собой дробное броуновское движение $\mathbf{B}_H(s)$ и имеет некоррелированные приращения по θ [16].

Применяя к (84) вейглет-разложение, имеем

$$\begin{aligned} \langle Y, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle &= \langle Rf, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle + n^{-(1+\alpha)/2} \langle \mathbf{B}'_H, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle, \\ \langle Y, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle &= \langle f, \psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle + n^{-(1+\alpha)/2} \langle \mathbf{B}'_H, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle, \end{aligned}$$

Переходя к дискретному вейглет-преобразованию получаем модель дискретных вейглет-коэффициентов:

$$X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = \mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} + 2^{(1-\alpha)J/2} e_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}, \quad (85)$$

$$\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = 2^J [Rf, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}], \quad e_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = [\mathbf{B}'_H, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}] = \int \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} d\mathbf{B}'_H.$$

Учитывая (80) и (83), преобразование Фурье вейглет-функций по первому аргументу имеет вид:

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{j,k_1,k_2}^{[1]}(w, \theta) &= |w| 2^{-j} e^{-i(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) 2^{-j} w} \widehat{\phi}(2^{-j} w \cos \theta) \widehat{\psi}(2^{-j} w \sin \theta), \\ \widehat{\xi}_{j,k_1,k_2}^{[2]}(w, \theta) &= |w| 2^{-j} e^{-i(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) 2^{-j} w} \widehat{\psi}(2^{-j} w \cos \theta) \widehat{\phi}(2^{-j} w \sin \theta), \\ \widehat{\xi}_{j,k_1,k_2}^{[3]}(w, \theta) &= |w| 2^{-j} e^{-i(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) 2^{-j} w} \widehat{\psi}(2^{-j} w \cos \theta) \widehat{\psi}(2^{-j} w \sin \theta). \end{aligned}$$

Рассмотрим ковариации коэффициентов модели в случае $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 3)$. Пусть $\Delta = j - i \geq 0$. Проинтегрируем по углу и воспользуемся свойствами $\mathbf{B}_H(s)$ [46].

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[3]}, X_{j,k_1,k_2}^{[3]}) &= \frac{1}{2\pi} 2^{(1-\alpha)J} \int \int \widehat{\xi}_{j,k_1,k_2}^{[3]}(w, \theta) \overline{\widehat{\xi}_{i,l_1,l_2}^{[3]}(w, \theta)} |w|^{-(1-\alpha)} dw d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2^{(1-\alpha)J} \int \int 2^{-j-i} w^2 e^{-i((k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)2^{-j} - (l_1 \cos \theta + l_2 \sin \theta)2^{-i})w} \times \\ &\times \widehat{\psi}(2^{-j}w \cos \theta) \widehat{\psi}(2^{-j}w \sin \theta) \overline{\widehat{\psi}(2^{-i}w \cos \theta) \widehat{\psi}(2^{-i}w \sin \theta)} |w|^{-(1-\alpha)} dw d\theta = \end{aligned}$$

сделаем замену $w' = 2^{-i}w$ и перейдем от полярных координат к декартовым:

$$w_1 = w \cos \theta, w_2 = w \sin \theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha-\Delta} \int \int e^{-i((k_1 2^{-\Delta} - l_1)w_1 + (k_2 2^{-\Delta} - l_2)w_2)} \times \\ &\times |w_1^2 + w_2^2|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\psi}(2^{-\Delta}w_1) \widehat{\psi}(2^{-\Delta}w_2) \overline{\widehat{\psi}(w_1) \widehat{\psi}(w_2)} dw_1 dw_2 \end{aligned}$$

Из свойств вейвлетов Мейера [24] следует, что при любом натуральном M_0 существует константа $C_{M_0} > 0$ такая, что $|\widehat{\psi}(w)| \leq C_{M_0} |w|^{M_0} \mathbf{1}_{w \in \text{supp}(\widehat{\psi})}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[3]}, X_{j,k_1,k_2}^{[3]}) \right| &\leq \frac{C_{M_0}^2}{2\pi} 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha-\Delta} 2^{-2\Delta M_0} \int_{\text{supp}(\widehat{\psi})} \int_{\text{supp}(\widehat{\psi})} |w_1^2 + w_2^2|^{\frac{\alpha}{2}} \times \\ &\times |w_1 w_2|^{M_0} \overline{\widehat{\psi}(w_1) \widehat{\psi}(w_2)} dw_1 dw_2 \leq \\ &\leq C'_{M_0} 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha-\Delta} 2^{-2\Delta M_0} \quad (86) \end{aligned}$$

Предположим, что выбранный вейвлет Мейера имеет достаточное число непрерывных производных, чтобы функция

$$g(w_1, w_2) = |w_1^2 + w_2^2|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\psi}(2^{-\Delta}w_1) \widehat{\psi}(2^{-\Delta}w_2) \overline{\widehat{\psi}(w_1) \widehat{\psi}(w_2)}$$

имела $2M_1$ непрерывных производных по w_1 и w_2 , и воспользуемся свойствами обратного преобразования Фурье. При $k_1 2^{-\Delta} \neq l_1$ и $k_2 2^{-\Delta} \neq l_2$

$$\left| \text{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[3]}, X_{j,k_1,k_2}^{[3]}) \right| \leq 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha-\Delta} \frac{C'_{M_1}}{|k_1 2^{-\Delta} - l_1|^{2M_1} |k_2 2^{-\Delta} - l_2|^{2M_1}} \quad (87)$$

где C'_{M_1} – некоторая положительная константа.

Как уже отмечалось для всех $p, q \geq 0$ справедливо $\min(p, q)^2 \leq pq$, тогда для (86) и (87) найдется положительная константа C'_M такая, что

$$\left| \text{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[3]}, X_{j,k_1,k_2}^{[3]}) \right| \leq 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha-\Delta} 2^{-\Delta M_0} \frac{C'_M}{|k_1 2^{-\Delta} - l_1|^{M_1} |k_2 2^{-\Delta} - l_2|^{M_1}}$$

Отдельно рассмотрим случай $k_1 2^{-\Delta} = l_1$ и $k_2 2^{-\Delta} = l_2$, для некоторой константой $C_e > 0$

$$|\text{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda]}, X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})| \leq C_e 2^{J(1-\alpha)+i\alpha-\Delta(2M_0+1)}.$$

Аналогично, рассматриваются случаи, когда $k_1 2^{-\Delta} = l_1$ и $k_2 2^{-\Delta} = l_2$ выполнены не одновременно. Варианты других комбинаций (λ_1, λ_2) рассматриваются аналогично.

Таким образом, для некоторой константой $C' > 0$

$$|\text{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda]}, X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})| \leq \begin{cases} C' 2^{J(1-\alpha)+i\alpha-(2M_0+1)\Delta}, & \text{если } k_1 2^{-\Delta} = l_1 \text{ и } k_2 2^{-\Delta} = l_2, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-(M_0-M_1-1)\Delta}}{|k_2-2^\Delta l_2|^{M_1}}, & \text{если } k_1 2^{-\Delta} = l_1, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-(M_0-M_1-1)\Delta}}{|k_1-2^\Delta l_1|^{M_1}}, & \text{если } k_2 2^{-\Delta} = l_2, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-(M_0-2M_1-1)\Delta}}{|k_1-2^\Delta l_1|^{M_1} |k_2-2^\Delta l_2|^{M_1}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Для последующих рассуждений достаточно, чтобы коэффициент при δ был отрицательным. Этого можно добиться, выбрав M_0 так, чтобы $M_0 > 2M_1 + 1$. Таким

образом существует такая константа $M' > 0$, что

$$|\mathbf{cov}(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda]}, X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})| \leq \begin{cases} C' 2^{J(1-\alpha)+i\alpha-M'\Delta}, & \text{если } k_1 2^{-\Delta} = l_1 \text{ и } k_2 2^{-\Delta} = l_2, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-M'\Delta}}{|k_2-2^\Delta l_2|^{M_1}}, & \text{если } k_1 2^{-\Delta} = l_1, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-M'\Delta}}{|k_1-2^\Delta l_1|^{M_1}}, & \text{если } k_2 2^{-\Delta} = l_2, \\ C' \frac{2^{(1-\alpha)J+i\alpha-M'\Delta}}{|k_1-2^\Delta l_1|^{M_1} |k_2-2^\Delta l_2|^{M_1}}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (88)$$

причем $M' = \min(M_0 - M_1 - 1, M_0 - 2M_1 - 1, 2M_0 + 1)$ при $M_0 > 2M_1 + 1$.

Дисперсия для коэффициентов модели имеет вид:

$$\sigma_{\lambda,i}^2 = C_{\lambda,\alpha} 2^{(1-\alpha)J} 2^{i\alpha}, \quad (89)$$

где константа $C_{\lambda,\alpha}$ зависит от параметра α и выбранного вейвлет-базиса и не зависит от наблюдаемых в модели данных.

3.3 Пороговая обработка и оценка риска

Чтобы очистить данные от шума к коэффициентам вейвлет-вейглет-разложения здесь также применим метод мягкой пороговой обработки. Порог $T_{\lambda,j}$ зависит от уровня j . Функция риска мягкой пороговой обработки определяется следующим образом:

$$R_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{E} \left(\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} - \rho_{T_{\lambda,j}}(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}) \right)^2. \quad (90)$$

Как и в случае пороговой обработки вейглет-коэффициентов, далее будет использоваться такой вид порога $T_{\lambda,j} = \sqrt{2 \ln 2^{2j}} \sigma_{\lambda,j}$ [50]. Этот порог также называется «универсальным».

Заметим, что в (90) присутствуют неизвестные величины $\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}$, поэтому вычислить значение $R_J(f)$ нельзя. Однако его можно оценить [12]:

$$\widehat{R}_J(f) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}], \quad (91)$$

где $F(x, T, \sigma) = (x - \sigma^2)\mathbf{1}(|x| \leq T^2) + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}(|x| > T^2)$. Эта оценка $\widehat{R}_J(f)$ является несмещенной для $R_J(f)$ [12]. В работе Маркина и Шестакова [50] показано, что в моделях с независимым шумом при определенных условиях гладкости эта оценка является состоятельной и асимптотически нормальной. Кроме того, в работе [50] не учитывается зависимость, возникающая из-за того, что базис в вейвлет-вейглет-разложении не ортогонален. Далее будет исследовано асимптотическое поведение оценки $\widehat{R}_J(f)$ в модели данных с долгосрочной зависимостью.

3.4 Вспомогательные результаты

Докажем некоторые результаты, связанные с характером зависимости эмпирических коэффициентов вейглет-вейвлет-разложения. Предполагается, что используются вейвлеты Мейера, обладающие нужным количеством нулевых моментов и непрерывных производных. Оценим дисперсию оценки риска в модели (85)

Лемма 3.1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\gamma > (1 + \alpha)^{-1}$ выполняется $D_J^2 = \mathbf{D} \widehat{R}_J(f) \simeq \tilde{C} 2^{4J}$, где константа $\tilde{C}$ зависит от α и выбранного вейвлет-базиса, но не зависит от функции сигнала f .

Доказательство: Из условий леммы $\frac{1}{1+\gamma} < \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$. А значит, можно выбрать такое p'' , что $\frac{1}{1+\gamma} < p'' < \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$ и $p''J$ – целое число. Из неравенства (82) $\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rightarrow 0$ для всех j : $p''J \leq j < J$ при $J \rightarrow \infty$. Разобьем выражение для риска (91) на две

СУММЫ:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_J(f) = & \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] + \\ & + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}].\end{aligned}$$

Из (91) и вида порога $T_{\lambda,j}$ следует $|F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}]| \leq C_F j 2^{(1-\alpha)J} 2^{j\alpha}$ почти всюду, где константа $C_F > 0$. Тогда для первой суммы справедливо ограничение, для некоторой $C'_F > 0$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] \right| & \leq C_F \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 j 2^{(1-\alpha)J} 2^{j\alpha} \leq \\ & \leq C_F 2^{(1-\alpha)J} \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{\lambda=1}^3 j 2^{j(2+\alpha)} \leq C'_F J 2^{J(1-\alpha+(\alpha+2)p'')} \quad (\text{почти всюду}). \quad (92)\end{aligned}$$

Структура дисперсии оценки риска имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbb{D} \widehat{R}_J(f) = & \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] + \\ & + \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda_2=1}^3 \mathbf{cov}(F[(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda_1]})^2, T_{\lambda_1,i}, \sigma_{\lambda_1,i}], F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda_2]})^2, T_{\lambda_2,j}, \sigma_{\lambda_2,j}]),\end{aligned} \quad (93)$$

где $(\lambda_1, i, l_1, l_2) \neq (\lambda_2, j, k_1, k_2)$ во второй сумме. Рассмотрим сумму дисперсий:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] = \\ = \sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] + \\ + \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}].\end{aligned}$$

Из (92) следует, что найдется константа $C_F'' > 0$ такая, что первая сумма не превосходит $C_F'' J^2 2^{2J(1-\alpha+(\alpha+2)p'')}$. Однако p'' был выбран таким, что $p'' < \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$, поэтому $2J(1-\alpha+(\alpha+2)p'') < 4J$. Для второй в силу выбора порога и (89) справедливо:

$$\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_j, \sigma_j] \simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} (X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2 =$$

для некоторой константы $C_1 > 0$,

$$= \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} C_1 2\sigma_j^2 (\sigma_j^2 + \mu_{j,k_1,k_2}^2) \simeq \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} 2C_1 \sigma_j^4 \simeq C_\alpha' 2^{4J}, \quad (94)$$

где C_α' – положительная константа.

Аналогично сумме дисперсий, рассмотрим к сумму ковариаций в (93)

$$\begin{aligned} S_{\text{cov}} &= \\ &= \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda_2=1}^3 \mathbf{cov}(F[(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda_1]})^2, T_{\lambda_1,i}, \sigma_{\lambda_1,i}], F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda_2]})^2, T_{\lambda_2,j}, \sigma_{\lambda_2,j}]) \simeq \\ &\simeq \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda_2=1}^3 \mathbf{cov}((X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda_1]})^2, (X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda_2]})^2). \end{aligned}$$

Из утверждения 1 первой главы известно, если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение, то

$$\mathbf{cov}(X^2, Y^2) = 4\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\mathbf{cov}(X, Y) + 2\mathbf{cov}^2(X, Y)$$

По аналогии с доказательством леммы 1 третьей главы, можно показать, что асимптотика первого слагаемого меньше второго, а для второго в силу (88) справедливо:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda_2=1}^3 \mathbf{cov}^2(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda_1]}, X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda_2]}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda_1=1}^3 \sum_{\lambda_2=1}^3 \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \sum_{\Delta=0}^{J-1-i} \sum_{k_1=\begin{cases} l_1+1, & \Delta=0; \\ 0, & \Delta>0. \end{cases}}^{2^{i+\Delta}-1} \sum_{k_2=\begin{cases} l_2+1, & \Delta=0; \\ 0, & \Delta>0. \end{cases}}^{2^{i+\Delta}-1} \mathbf{cov}^2(X_{i,l_1,l_2}^{[\lambda_1]}, X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda_2]}) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=p''J+1}^{J-1} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \left(\sum_{\delta_1=1}^{2^i-l_1} \sum_{\delta_2=1}^{2^i-l_2} \frac{C'^2 2^{2J(1-\alpha)} 2^{2i\alpha}}{\delta_1^{2M_1} \delta_2^{2M_1}} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k_1=0}^{2^{i+\Delta}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{i+\Delta}-1} 2^{2J(1-\alpha)} 2^{2i\alpha} 2^{-2M'\Delta} \frac{C'^2 \mathbf{1}(k_1 \neq 2^\Delta l_1, k_2 \neq 2^\Delta l_2)}{|k_1 - 2^\Delta l_1|^{2M_1} |k_2 - 2^\Delta l_2|^{2M_1}} \right) = \\
&= C'^2 2^{2J(1-\alpha)} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2i\alpha} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} \left(\sum_{\delta_1=1}^{2^i-l_1} \frac{1}{\delta_1^{2M_1}} \sum_{\delta_2=1}^{2^i-l_2} \frac{1}{\delta_2^{2M_1}} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} \sum_{k_1=0}^{2^{i+\Delta}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{i+\Delta}-1} 2^{-2M'\Delta} \frac{\mathbf{1}(k_1 \neq 2^\Delta l_1, k_2 \neq 2^\Delta l_2)}{|k_1 - 2^\Delta l_1|^{2M_1} |k_2 - 2^\Delta l_2|^{2M_1}} \right) \simeq \\
&\simeq C'^2 2^{2J(1-\alpha)} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2i\alpha} \sum_{l_1=0}^{2^i-1} \sum_{l_2=0}^{2^i-1} (H_0^2 + \\
&\quad + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} 2^{-2M'\Delta} \sum_{k_1=0}^{2^{i+\Delta}-1} \frac{\mathbf{1}(k_1 \neq 2^\Delta l_1)}{|k_1 - 2^\Delta l_1|^{2M_1}} \sum_{k_2=0}^{2^{i+\Delta}-1} \frac{\mathbf{1}(k_2 \neq 2^\Delta l_2)}{|k_2 - 2^\Delta l_2|^{2M_1}}) \simeq \\
&\simeq C'^2 2^{2J(1-\alpha)} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2i(\alpha+1)} \left(H_0 + \sum_{\Delta=1}^{J-i-1} 2^{-2M'\Delta} H_1 \right) \simeq \\
&\simeq C'^2 2^{2J(1-\alpha)} \sum_{i=p''J+1}^{J-1} 2^{2i(\alpha+1)} H_2 \simeq C''_\alpha 2^{4J}, \tag{95}
\end{aligned}$$

где H_0, H_1, H_2 и C''_α – некоторые положительные константы. Заметим, что в случае $k_1 2^{-\Delta} = l_1$ или $k_2 2^{-\Delta} = l_2$ в приведенных выкладках вместо соответствующих слагаемых используется первая, вторая или третья оценки из (88).

Объединяя оценки для суммы дисперсий и ковариаций, получаем утверждение $D \hat{R}_J(f) \simeq \tilde{C} 2^{4J}$. Лемма доказана.

3.5 Основная теорема

Далее приводится доказательство асимптотической нормальности оценки риска (91) в задаче томографии, с использованием разложения на основе вейвлетов Мейера [8].

Теорема 3.1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция f равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > (1 + \alpha)^{-1}$. Тогда при пороговой обработке с «универсальным» порогом $T_{\lambda,j}$ имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} \Rightarrow N(0, 1), \quad J \rightarrow \infty, \quad D_J^2 = \tilde{C} 2^{4J} \quad (96)$$

где константа $\tilde{C}$ зависит от α и выбранного вейвлет-базиса.

Доказательство: Из условия $\gamma > (1 + \alpha)^{-1}$ следует $\frac{1}{1+\gamma} < \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$. Тогда, можно выбрать p'' такое, что $\frac{1}{1+\gamma} < p'' < \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$. Далее, выражение в (96) можно представить в виде двух сумм:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{R}_J(f) - R_J(f)}{D_J} = & \frac{\sum_{j=0}^{p''J} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 (F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] - \mathbb{E}F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}])}{D_J} + \\ & + \frac{\sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 (F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] - \mathbb{E}F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}])}{D_J} \end{aligned}$$

Из леммы 3.1 имеем $D \hat{R}_J(f) \simeq D_J^2 = \tilde{C} 2^{4J}$. Учитывая (72), первая сумма стремится к нулю почти всюду

Повторяя рассуждения леммы 3.1, можно показать, что

$$\begin{aligned} \sup_{J>0} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{E} \left(F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] - \mathbb{E} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] \right)^2 = \\ = \sup_{J>0} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{D} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] \leq \sup_{J>0} \frac{\tilde{C}'_\alpha 2^{4J}}{\hat{C} 2^{4J}} < \infty. \end{aligned}$$

Далее покажем, что выполнено условие Линдеберга, при $J \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_J^2} \sum_{j=p''J+1}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbb{E} \left(F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] - \mathbb{E} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] \right)^2 \times \\ \times \mathbf{1}(|F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}] - \mathbb{E} F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}]| > \epsilon D_J) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (97)$$

для любого $\epsilon > 0$.

Действительно, поскольку $D_J^2 \simeq \hat{C} 2^{4J}$, а $|F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}]| \leq T_{\lambda,j}^2 + \sigma_{\lambda,j}^2 = \tilde{C}_{\lambda,\alpha} j 2^{J(1-\alpha)} 2^{j\alpha}$ почти всюду с некоторой положительной константой $\tilde{C}_{\lambda,\alpha}$, то начиная с некоторого J , все индикаторы в (97) обращаются в ноль.

Наконец, последовательность $\{F[(X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]})^2, T_{\lambda,j}, \sigma_{\lambda,j}]\}$, $\lambda = 1, 2, 3, j = p''J + 1 \dots J-1, k_1 = 1 \dots 2^j, k_2 = 1 \dots 2^j$ обладает свойством ρ -перемешивания.

Таким образом, выполнены все условия утверждений из работ [57] и [44], и справедлива сходимость по распределению (96). Теорема доказана.

Замечание 3.1 Дисперсия оценки риска в случае использования метода вейвлет-вейвлет-разложения в задаче томографии зависит от выбранного вейвлет-базиса через константу $\tilde{C}$, которая также зависит от α . Константу $\tilde{C}$ можно вычислить весьма точно, а именно, из (93) следует, что $\tilde{C} = C'_\alpha + C''_\alpha$. Из доказательства леммы 3.1 следует, что

$$C''_\alpha = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{cov}}}{2^{4J}},$$

а в силу (95) предел существует. Слагаемые S_{cov} вычисляются по формулам (86).

А константу $\tilde{C}'$ можно вычислить, исходя из (94).

Замечание 3.2 Важно заметить, что константа $\tilde{C}$, используемая в дисперсии оценки риска, вычисление которой описано в замечании 3.2, не зависит от функции изображения. Это означает, что можно строить асимптотические доверительные интервалы для теоретического риска.

Заключение

В диссертационной работе установлен ряд асимптотических свойств оценок риска при подавлении коррелированного шума с помощью пороговой обработки вейвлет- и вейглет-коэффициентов.

На защиту выносятся следующие результаты.

- Обоснование свойств состоятельности и асимптотической нормальности оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов в моделях с коррелированным шумом, в которых данные наблюдаются напрямую.
- Обоснование асимптотических свойств оценок риска в моделях с коррелированным шумом, где данные наблюдаются после линейного преобразования.
- Обоснование асимптотической нормальности оценки риска пороговой обработки в задаче томографии при наличии коррелированного шума.

Результаты данной работы составляют основу для дальнейших разработок в этой области. Перспективы дальнейших исследований свойств оценки риска пороговой обработки при удалении коррелированного шума связаны с поиском других моделей шума и использованием других вейвлет-базисов. Кроме того, в моделях с коррелированным шумом могут быть исследованы асимптотические свойства оценки риска пороговой обработки с использованием оценки дисперсии шума. Практический интерес представляют и задачи обращения линейных операторов, не обладающих непрерывными обратными. Следующим шагом может стать исследование скорости сходимости к предельному закону в моделях с коррелированным шумом.

Обозначенные задачи являются важными и требуют дальнейшего изучения.

Литература

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
2. *Ерошенко А. А.* Асимптотические свойства оценки риска в задачах фильтрации сигнала с зависимым шумом // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2014. Т. 21. № 4. С. 108.
3. *Ерошенко А. А.* Состоятельность оценок риска при вейвлет-вейглет и вейглет-вейвлет разложениях функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 103-114.
4. *Ерошенко А. А., Кудрявцев А. А., Шестаков О. В.* Предельное распределение оценки риска метода вейглет-вейвлет-разложения сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2015. № 1. С. 12–18.
5. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет и вейвлет-вейглет разложениях функции сигнала в моделях с коррелированным шумом // Тезисы научной конференции «Ломоносовские чтения». 2014. С. 77–78.
6. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет-вейглет разложении функции сигнала в модели с коррелированным шумом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2014. № 3. С. 110–117.
7. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска в задачах фильтрации сигнала в моделях с зависимым шумом // Тезисы научной конференции «Тихоновские чтения». 2014. С. 82–83.
8. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска

в задаче восстановления изображения с коррелированным шумом при обращении преобразования Радона // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. № 4. С. 32–40.

9. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в модели с коррелированным шумом // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. № 1. С. 36–44.

10. *Захарова Т.В., Шестаков О.В.* Вейвлет-анализ и его приложения. // Учебное пособие. М.: Мир. 2009.

11. *Кудрявцев А.А., Шестаков О.В.* Асимптотическое распределение оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при неизвестном уровне шума // Т-сomm – Телекоммуникации и Транспорт. 2011. № 5. С. 24–30

12. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. // М.: Мир. 2005.

13. *Маркин А. В.* Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. № 4. С. 57–63.

14. *Маркин А. В., Шестаков О. В.* Асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейвлет коэффициентов в задаче томографии // Информатика и ее применения, 2010. Т. 4. № 2. С. 36–45.

15. *Маркин А. В., Шестаков О. В.* О состоятельности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2010. № 1. С. 26–34.

16. *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. // М.: Радио и связь. 1989

17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. // М.: Мир. 1967. Т. 1.

18. *Шестаков О. В.* Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использовании выборочной дисперсии // Информатика и ее применения, 2010. Т. 4. № 4. С. 73–81.
19. *Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // Доклады РАН. 2012. Т. 445. № 5. С. 513-515.
20. *Шестаков О. В.* Зависимость предельного распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала от вида оценки дисперсии шума при выборе адаптивного порога // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. 2012. № 1. С. 46-51.
21. *Шестаков О. В.* О точности приближения распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала нормальным законом при неизвестном уровне шума // Системы и средства информатики. 2012. Т. 22. № 1. С. 142-152.
22. *Шестаков О. В.* Центральная предельная теорема для функции обобщенной кросс-валидации при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения. 2013. Т. 7. № 2. С. 40-49.
23. *Abramovich F., Silverman B. W.* Wavelet Decomposition Approaches to Statistical Inverse Problems // Biometrika, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129.
24. *Antoniadis A., Fan J.* Regularization of Wavelet Approximations // J. Amer. Statist. Assoc., 2001. Vol. 96. No. 455. P. 939–967.
25. *Averkamp R., Houdré C.* Wavelet thresholding for non-necessarily Gaussian noise: idealism // The Annals of Statistics. 2003. Vol. 31, N. 1. P. 110–151.
26. *Boggess A., Narkowich F.* A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. –

Prentice Hall, 2001.

27. *Bradley R. C.* Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions. // Probab. Surveys. 2005. Vol. 2. P. 107–144.

28. *Cai T. T., Brown L. D.* Wavelet shrinkage for nonequispaced samples // Statistics & Probability Letters. 1999. Vol. 42, N. 3. P. 313–321

29. *Cohen A., Daubechies I., Vial P.* Wavelets on the interval and fast wavelet transforms // Applied and computational harmonic analysis. 1993. Vol. 1. No. 1. P. 54–81.

30. *Coifman R. R., Donoho D. L.* Translation-invariant de-noising // Lecture notes in statistics. 1995. Vol. 103. P. 125–150.

31. *Donoho D. L.* De-noising by soft-thresholding // IEEE transactions on information theory. 1995. Vol. 41, N. 3. P. 613–627.

32. *Donoho D.* Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Applied and computational harmonic analysis, 1995. Vol. 2. P. 101–126.

33. *Donoho D. L., Johnstone I. M.* Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.

34. *Donoho D. L., Johnstone I. M.* Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455.

35. *Donoho D. L., Johnstone I. M.* Neo-classical minimax problems, thresholding and adaptive function estimation // Bernoulli. 1996. Vol. 2, N. 1. Pp. 39–62.

36. *Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., Picard D.* Wavelet Shrinkage: Asymptopia? // J. R. Statist. Soc. Ser. B., 1995. Vol. 57. No. 2. P. 301–369.

37. *Eldar Y. C.* Generalized SURE for exponential families: applications to regularization // IEEE transactions on signal processing. 2009. Vol. 57, N. 2. P. 471–481

38. *Eroshenko A. A., Shestakov O. V.* On asymptotic normality of risk estimate for Wavelet and Wavelet-Vaguelette decompositions of a signal with a correlated noise // XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2014. P. 27–29.
39. *Gao H.-Y.* Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote // Journal of computational and graphical statistics. 1998. Vol. 7, N. 4. P. 469–488.
40. *Gao H.-Y., Bruce A. G.* Waveshrink with firm shrinkage // Statistica Sinica. 1997. Vol. 7, N. 4. P. 855–874.
41. *Grossmann A., Morlet J.* Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1984. Vol. 15. No. 4. P. 723–736.
42. *Haar A.* On the theory of orthogonal function systems // Fundamental Papers in Wavelet Theory Princeton University Press, Princeton. 2006. P. 155–188.
43. *Hardle W., Kerkycharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, approximation and statistical applications // Lecture notes in statistics. 2000. Vol. 129.
44. *Jeon T. I.* On an Array of Weakly Dependent Random Vectors // C. Korean Math. Soc. 2001. Vol. 16. N. 1. P. 125–135
45. *Johnstone I. M.* Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results // Statistica Sinica. 1999. Vol. 9. N. 1. P. 51–83.
46. *Johnstone I. M., Silverman B. W.* Wavelet threshold estimates for data with correlated noise // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1997. Vol. 59. P. 319–351.
47. *Kalifa J., Laine A., Esser P. D.* Tomographic reconstruction with non-linear diagonal estimators // Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering. 2000. Vol. 4119. P. 576–586.
48. *Kalifa J., Mallat S.* Thresholding estimators for linear inverse problems and

deconvolutions // The Annals of Statistics. 2003. Vol. 31, N. 1. P. 58–109.

49. *Kolaczyk E. D.* A wavelet shrinkage approach to tomographic image reconstruction // Journal of the American Statistical Association. 1996. Vol. 91, N. 435. P. 1079–1090.

50. *Kolaczyk E.D.* Wavelet methods for the inversion of certain homogeneous linear operators in the presence of noisy data: PhD dissertation. Stanford University. 1994.

51. *Lee N.* Wavelet-vaguelette decompositions and homogenous equations: PhD dissertation. Purdue University. 1997.

52. *Lee N., Lucier B. J.* Wavelet methods for inverting the Radon transform with noisy data // IEEE transactions on image processing. 2000. Vol. 10. P. 79–94.

53. *Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P.* Exact Risk Analysis of Wavelet Regression // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. P. 278–309.

54. *Meyer Y.* Wavelets and operators // Cambridge University Press. 1992.

55. *Nason G. P.* Choice of the threshold parameter in wavelet function estimation // Lecture notes in statistics. 1998. Vol. 103. P. 261–280.

56. *Nason G. P.* Wavelet shrinkage using cross-validation // Journal of the Royal Statistical Society, series B. 1996. Vol. 58, N. 2. Pp. 463–479.

57. *Peligrad M.* On the Asymptotic Normality of Sequences of Weak Dependent Random Variables // J. Theoret. Prob. 1996. Vol. 9. No. 3. P. 703–715.

58. *Taqqu M. S.* Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process // Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 1975. Vol. 31. P. 287–302.

59. *Wang Y.* Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data // The Annals of Statistics. 1996. Vol. 24, N. 2. Pp. 466–484