

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

На правах рукописи

**Головина Светлана Георгиевна**

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В  
ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦ  
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД**

05.13.18 - математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Автореферат**  
**диссертации на соискание учёной степени кандидата**  
**физико-математических наук**

Москва, 2014

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| <b>Научный руководитель</b> | <b>Захаров Евгений Владимирович</b> , доктор физико-математических наук   |
| <b>Место работы</b>         | Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  |
| <b>Должность</b>            | профессор кафедры математической физики факультета ВМК  |
| <b>Официальный оппонент</b> | <b>Самохин Александр Борисович</b> , доктор физико-математических наук  |
| <b>Место работы</b>         | ФГБОУ высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» |
| <b>Должность</b>            | профессор, заведующий кафедры прикладной математики факультета Информационных технологий  |
| <b>Официальный оппонент</b> | <b>Чечкин Александр Витальевич</b> , доктор физико-математических наук  |
| <b>Место работы</b>         | ФГБОУ высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве РФ»   |
| <b>Должность</b>            | профессор кафедры математики-1 Финансового факультета   |
| <b>Ведущая организация</b>  | Институт вычислительной математики РАН  |

Защита диссертации состоится 17 сентября 2014 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желаящие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел.+7(495)939-50-71 (для оформления заявки на пропуск). С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ломоносовский проспект 27, а также на официальном сайте ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе "Диссертации".

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.43,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Е.В.Захаров

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы.**

В настоящее время быстро развивается большая область теоретических и прикладных исследований, связанная с определением неизвестных границ физических и искусственных неоднородных сред, наличия рассеивателя (неоднородности) в среде, его формы и структуры по наблюдениям за распространением в таких средах зондирующих естественных или специально организованных полей (акустических, тепловых, электромагнитных и других).

Физический смысл определяемых характеристик рассеивателя может быть различным. В одном случае регистрируемые параметры несут информацию о границе рассеивающей неоднородности и её структуре, в другом о местоположении или размерах рассеивателя, форма которого известна априорно. Основную роль в получении информации о структуре среды играет сложная обработка поступающих входных данных (измерение сигналов, полей и т.п.), а также расположение источников и приемников.

Рассмотренные в диссертационной работе постановки обратных задач получили широкое распространение в сейсморазведке, инженерной геофизике, акустике океана, дефектоскопии, геоакустике, физике атмосферы, медицине и многих других областях.

### **Цель работы.**

Целью диссертации является построение математических моделей определения неизвестных границ в неоднородных средах, основанных на применении интегральных уравнений в численных методах. Программная реализация предложенных численных методов и проведение вычислительных экспериментов с целью определения их эффективности.

### **Методы исследования.**

В работе исследуются методы применения интегральных уравнений в задачах математической физики наряду с методами решения обратных некорректно поставленных задач, функционального анализа и численного моделирования.

### **Научная новизна работы.**

В работе предложены методы применения интегральных уравнений для численного решения обратных задач определения неизвестных границ в неоднородных средах. Для трехмерной задачи предложен метод определения структурных неоднородностей по измерениям акустического поля в ограниченной области. Для двумерной задачи разработан метод определения контура зоны малой проницаемости в плоском слое по измерениям давления в скважинах, как в стационарном, так и в нестационарном случае. Создано программное обеспечение, реализующее предложенные методы. Проведены вычислительные эксперименты, показавшие достаточно высокую эффективность предложенных методов.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Работа носит теоретический характер, но может найти практическое применение после соответствующей экспериментальной проверки и использования реальных данных.

### **Апробация работы.**

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция «Обратные и некорректно поставленные задачи». Тема доклада: «Численное решение обратной задачи волновой томографии в нелинейной постановке». Москва. МГУ. 1998 г.

2. Международная конференция «Тихонов и современная математика». Тема доклада: «Определения границ зон малой проницаемости». Москва. МГУ. 2006г.

3. Конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Тема доклада: « Об определении границы области по решению внешней начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности». Москва. МГУ. 2009г.

4. Конференция «Экономический рост: модели и прогнозирование». Тема доклада: «Об определении зон малой проницаемости в нефтяном пласте по давлению в скважинах». Москва. МГУ. ВМК. 2010г.

5. Конференция «Ломоносовские чтения-2013».Тема доклада: «Определение границы локальной неоднородности по измерениям акустического поля». Москва. МГУ. ВМК. 2013г.

6. Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им.М.В. Ломоносова.

### **Публикации.**

Результаты диссертации представлены в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата [1-10], из них 6 работ опубликованы в журналах из перечня ВАК.

### **Структура и объём работы.**

Диссертация содержит введение, три главы и список литературы. Главы разделены на параграфы: первая глава состоит из четырех параграфов, вторая - из пяти параграфов, третья - из четырех параграфов. Список литературы содержит 70 наименований. Объем диссертации - 93 страницы.

## **Содержание диссертации**

Диссертация посвящена разработке методов определения неизвестных границ в неоднородных средах. Рассматриваются как стационарные, так и нестационарные математические модели для определения границ неоднородностей. Методы решения каждой из этих обратных задач можно разбить на два направления: решение обратных задач в нелинейной постановке, когда учитывается сложная структура рассеянного поля и многократное переотражение волн и построение линеаризованных моделей (приближение однократного рассеяния (борновское приближение), рентгеновская томография и т.п.

Для всех предложенных методов в качестве тестов использовались решения прямых задач для простых неоднородностей (сфера, круг) выписанных аналитически.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, ставятся цели диссертационного исследования, приводится обзор работ, посвященных решению обратных задач определения неизвестных границ в неоднородных средах, методам их линеаризации, регуляризирующим алгоритмам.

В главе 1 рассматривается обратная задача определения неизвестных характеристик рассеивающей неоднородности по наблюдениям скалярного волнового поля, возбуждаемого некоторым источником. Конечные области  $S$  и

$P$ , где расположены источники и происходит измерение полей рассеянных неоднородностью, не пересекаются с областью  $H$ , содержащей рассеиватель, и зависят от постановки эксперимента. Задача рассматривается в волновом приближении и решение ищется в трехмерном пространстве  $R^3$ . Рассмотрена граничная задача для уравнения Гельмгольца с условиями сопряжения на границе неоднородности  $\partial H$  для функции  $u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$  и ее нормальных производных, где  $n$  - внешняя нормаль к границе:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) + k_0^2 u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = f(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}), & \mathbf{r} \text{ вне } H, \\ \Delta u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) + k^2(\mathbf{r}, \omega) u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = 0, & \mathbf{r} \text{ в } H, \\ [u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial n} \right] = 0, & \mathbf{r} \in \partial H, \\ u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), \quad \frac{\partial u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_0 u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), & |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $\omega$  - частота, функция  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})f(\omega)$  описывает возмущение среды точечным источником, расположенным в точке  $\mathbf{s} \in S \subset R^3$ ,  $[\cdot]$  - обозначает разрыв значений функций на границе раздела сред. Коэффициент  $k(\mathbf{r}, \omega)$  содержит всю информацию о неоднородности:

$$k^2(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \right)^2 + \frac{\Delta \rho(\mathbf{r})}{2\rho(\mathbf{r})} - 3 \left( \frac{\text{grad } \rho(\mathbf{r})}{2\rho(\mathbf{r})} \right)^2.$$

Предполагаем, что среда однородна вне сферы достаточно большого радиуса:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} k(\mathbf{r}, \omega) = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} = -\frac{\omega}{c_0} = k_0, \quad c_0 = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} c(\mathbf{r}).$$

Обратная задача сводится к нахождению коэффициента  $k(\mathbf{r}, \omega)$  во втором уравнении системы (1). Подобная постановка задачи распространена в задачах зондирования. Обратная задача решалась в предположении, что плотность постоянна ( $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$ ) и известна везде в  $R^3$ . Обозначим вторичное (отраженное неоднородностью) поле, измеряемое в области расположения приемников

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) - u_0(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)|_{r \in P} = U(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega).$$

От дифференциальной задачи (1) перейдем к интегральным уравнениям для неизвестных функций  $\xi(\mathbf{r})$  и  $u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$ ,  $\mathbf{r} \in H$ , запишем их отдельно для  $\mathbf{r} \in H$

и  $\mathbf{r} \in P$ :

$$\begin{cases} u(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) - u_0(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = \omega^2 \int_H G(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \omega) \xi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x}, & \mathbf{r} \in H \\ U(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = \omega^2 \int_H G(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \omega) \xi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x}, & \mathbf{r} \in P, \end{cases} \quad (2)$$

где функция  $\xi(\mathbf{r}) = c_0^{-2} - c^{-2}(\mathbf{r})$ ,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \exp(i\frac{\omega}{c_0}|\mathbf{r} - \mathbf{s}|)$$

- функция Грина для уравнения Гельмгольца. Тогда поле первичных источников примет вид:

$$u_0(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) f(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{x}.$$

Запишем систему (2) в операторном виде:

$$\begin{cases} F_1(u(\xi), \xi) = u - \bar{H}\xi u - u_0 = 0, \\ F_2(u(\xi), \xi) = \bar{P}\xi u - U = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где интегральные операторы  $\bar{H}$  и  $\bar{P}$  определены следующим образом:

$$\bar{H}v(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = \omega^2 \int_H G(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{x} \in H,$$

$$\bar{P}v(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) = \omega^2 \int_H G(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{r} \in H, \mathbf{p} \in P.$$

Рассмотрим абстрактный аналог системы (3) в виде операторного уравнения

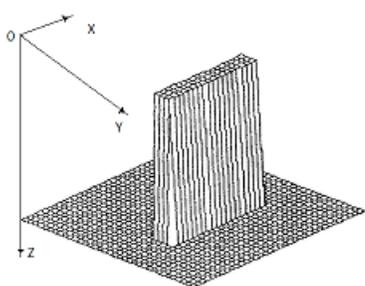
$F(\mathbf{x}) = 0$ , где  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ \xi \end{bmatrix}$  - вектор неизвестных. Для его решения использован итеративно регуляризованный метод Ньютона-Гаусса, на каждом шаге которого минимизируется по  $\mathbf{x}$  функционал:

$$\phi(\alpha_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \|F(\mathbf{x}_n) + F'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\|^2 + \alpha_n \|\mathbf{x}\|^2,$$

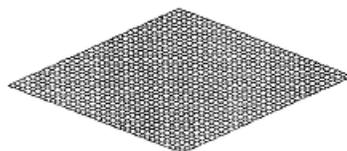
где  $\alpha_n$ -параметр регуляризации. Выпишем итерационный процесс для неизвестной функции  $\xi(r)$ :

$$\xi_{n+1} = \xi_n - ((F'_{2n})^* \cdot F'_{2n} + \alpha_n I)^{-1}((F'_{2n})^* \cdot F_{2n}(u(\xi_n), \xi_n) + \alpha_n(\xi_n)), \quad (4)$$

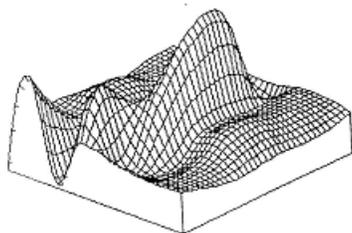
здесь  $F'_{2n} = F'_2(\mathbf{x}_n)$ . При начальном приближении  $\xi_0 = 0$  из уравнения  $F_1(u(\xi), \xi) = 0$  находим  $u(\xi_0) = u_0$ , тогда из (3) следует, что  $F_2(u_0, 0) = -U$ , подставляем в (4) и вычисляем  $\xi_1$  и т.д. Следует заметить, что первый шаг итерационного метода совпадает с решением обратной задачи в борновском приближении  $\bar{P}u_0\xi = U$ . На рисунке 1 приведены результаты расчетов, ко-



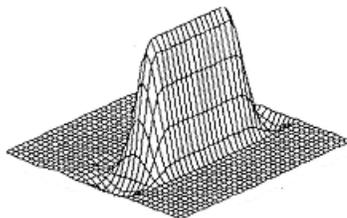
**а. точное решение**



**б. начальное приближение**



**в. восстановленная неоднородность  
результаты 1-ой итерации  
(борновское приближение)**



**г. восстановленная неоднородность  
результаты 10-ой итерации**

Рис. 1: Результаты вычислительного эксперимента определения неизвестных характеристик неоднородности по измерениям акустического поля.

торые проводились на основе модельных данных прямой задачи с внесенной погрешностью. Источники располагались в точках:  $(0,0,0)$ ,  $(200,200,0)$ , измерения проводились на сетке приемников  $25 \times 25$ , покрывающих область  $800 \times 800$  при  $z = 0$ . Лоцируемая область размером  $200 \times 200 \times 200$  находилась на глубине 70, в ней имелась неоднородность  $90 \times 20 \times 90$ ,  $\omega = 400$  Гц (что соответствует длине волны 4,5 метра).

В первой главе также рассмотрены методы линеаризации выше поставленной задачи: борновское приближение и низкочастотная асимптотика для уравнения Гельмгольца.

К борновскому приближению приводит замена во втором уравнении системы (2) неизвестных вторичных источников в области  $H$  на первичное поле, тогда для нахождения неизвестной функции  $\xi(\mathbf{r})$  получим уравнение:

$$U(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) = \omega^2 \int_H G(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \omega) \cdot \xi(\mathbf{x}) \cdot u_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x},$$

где  $u_0$  - поле первичных источников.

Рассматривая низкочастотную асимптотику ( $\omega \rightarrow 0$ ) для уравнение Гельмгольца приходим к интегральному уравнению для нахождения неизвестной функции  $\xi(\mathbf{r})$ :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_H \frac{\xi(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{s}|} d\mathbf{x}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{r} \in P$ ,  $\mathbf{s} \in S$ . Полученное уравнение (5) является линейным интегральным уравнением I рода относительно неизвестной функции  $\xi(\mathbf{x})$ .

При проведении численных расчетов использовался регуляризованный метод простой итерации:

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \mu A^*(A\xi_n - u), \quad 0 < \mu < \frac{2}{\|A^*A\|}, \quad (6)$$

где

$$A\xi = \int_H \frac{\xi(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{s}|} d\mathbf{x}.$$

Как видно, и борновское приближение, и низкочастотная асимптотика для уравнения Гельмгольца, приводят к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для нахождения неизвестной функции  $\xi(\mathbf{x})$ . Данная задача является некорректной, для ее решения используются методы регуляризации.

Применение борновского приближения для решения обратной задачи возможно только для "слабых" рассеивающих неоднородностей. Неоднородность рефракционного типа является слабой, если ее характеристики удовлетворяют неравенству:

$$a_{max} \frac{c(r) - c_0}{c(\mathbf{r})} \ll \lambda,$$

где  $a_{max}$  - максимальный размер неоднородности, а  $\lambda$  - длина волны лоцирующего поля. В работе приводятся результаты численных расчетов с использованием методов линеаризации.

Глава 2 посвящена построению численного метода решения обратной задачи определения границы зоны малой проницаемости в нефтяном пласте для установившегося давления в скважинах.

При эксплуатации нефтяного месторождения важно знать расположение зон малой проницаемости, где бурение новых скважин нецелесообразно. Измерение давления в ранее пробуренных скважинах дает возможность определить границы зон малой проницаемости в нефтяном пласте, что помогает избежать ошибочного бурения скважин. Рассматривается математическая модель распределения давления  $P^k(x, y)$  внутри слоя, не меняющегося поперек, при одной  $k$ -ой работающей скважине.

$$\Delta P^k(x, y) = -P_k \cdot \delta(x - x_k) \cdot \delta(y - y_k), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial P^k(x, y)}{\partial n} \right|_{(x, y) \in C} = 0, \quad (8)$$

$$P^k(x, y) - u_0(x, y) \rightarrow P_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где  $C$  - контур зоны полной непроницаемости  $S$ , фиксированная точка  $M_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in [1, K]$  - координаты устья скважин,  $P_k$  - давление в устье  $k$ -ой скважины,  $n$ - единичный вектор внешней нормали к границе  $C$ ,  $P_0$  - фиксированное число.

$$u_0(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{\rho(M, M_k)}$$

- первичное поле, т.е. фоновое давление в точке  $M$  с координатами  $(x, y)$  создаваемое точечным источником  $M_k$  с координатами  $(x_k, y_k)$  в отсутствии зоны непроницаемости. На большом расстоянии от исследуемой области, давление равно постоянному пластовому давлению  $P_0$ .

Обратная задача: определить контур  $C$  по измеренным давлениям в закрытых скважинах:  $P^k(x_m, y_m), m \in [1, K]$ .

Решение задачи (7)-(9) ищем в виде:  $P^k(M) = P_0 + u_0(M) + u(M)$ , где  $u(M)$  - давление, возникающее в результате наличия зоны непроницаемости  $S$ , а  $P_0$  - пластовое давление, тогда задачу (7)-(9) можно сформулировать, как внешнюю задачу Неймана для функции  $u(M)$  :

$$\Delta u(M) = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right|_C = - \left. \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} \right|_C, \quad (11)$$

$u(M) \rightarrow 0$  на бесконечности.

Для того чтобы удовлетворить условию  $u(M; C) \rightarrow 0$  на бесконечности, решение задачи (10)-(11) представляется в виде:

$$u(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{\rho(M, O)}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0}, \quad (12)$$

где  $\rho(M, O)$  - расстояние между точками  $M$  и  $O$ ,  $\mu(M_0)$  - плотность потенциала, действительная функция, определенная на контуре  $C$ , точка  $O$  - произвольная фиксированная точка в области неоднородности  $S$ , не принадлежащая контуру  $C$ , расстояние  $\rho(M, O) \neq 1$ . Таким образом, выбор точки  $O$  зависит лишь от области  $S$ . Выражение (12) является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности, так как  $\frac{\rho(M, O)}{\rho(M, M_0)} \rightarrow 1$  при  $M \rightarrow \infty$ . Полученная задача сводится к интегральному уравнению для  $\mu(M)$ :

$$\frac{1}{2} \mu(M) - \oint_C \mu(M_0) H(M, M_0) dl_{M_0} = f(M, M_k), \quad \text{где} \quad (13)$$

$$H(M, M_0) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{\rho(M, O)}{\rho(M, M_0)},$$

$$f(M, M_k) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{\rho(M, M_k)}.$$

Таким образом, при заданном контуре  $C$  решение задачи (7)-(9), а следовательно и задачи (10)-(11), сводится к решению интегрального уравнения.

На основании алгоритма расчета  $u(M)$ , строится численный метод определения контура  $C$ . Ряд модельных расчетов показал, что параметры контура  $C$ , описываемого кривой с небольшим числом параметров, определяются достаточно устойчиво.

В диссертации построен итерационный процесс для нахождения неизвестной границы, когда последовательно решаются уравнения (12) и (13). Модельные расчеты проводились для случая, когда контуром  $C$  является развернутый на угол  $\frac{\pi}{4}$  относительно центра координат, эллипс:

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad (14)$$

где  $a, b$  - полуоси эллипса, а  $\varepsilon = b/a$ -эксцентриситет эллипса. При решении

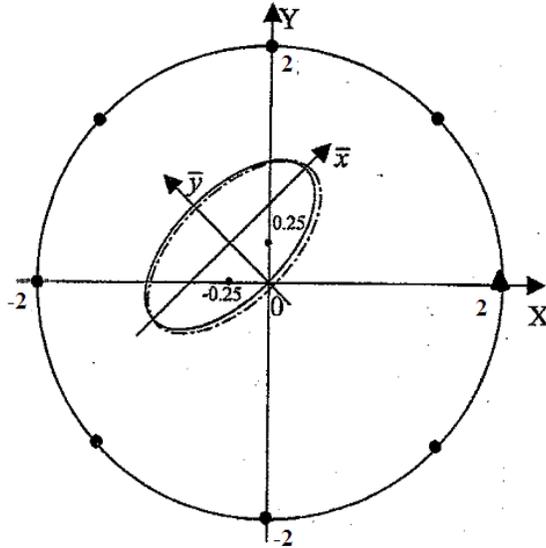


Рис. 2: Результаты вычислительного эксперимента определения контура зоны малой проницаемости (стационарный случай).

модельной задачи источник располагался в скважине с координатами  $(0.0, 2.0)$ . При этом считалось, что 7 точек измерения находятся на окружности радиуса  $R_u$ , т.е.  $R_m = R_u = 2$  для любого  $m \in [1, 7k]$  и шагом  $\pi/4$ . На рисунке 2 сплошной чертой изображен контур эллипса с полуосями  $a = 1.5$ ,  $b = 0.8$ ,

а пунктиром изображен восстановленный контур по 25 точкам. В качестве начального приближения бралась окружность с радиусом 1.

В главе 3 рассматривается итерационный метод численного решения задачи определения границы неоднородности в плоском слое, когда в качестве входной информации для восстановления границы используются нестационарные данные о давлении в скважинах, что позволяет уменьшить количество используемых измерений для решения обратной задачи.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = \Delta P + f_k(t)\delta(x - x_k)\delta(y - y_k), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, t > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} P(t, x, y) = P_0, \\ P(0, x, y) = P_0, \end{array} \right. \quad (15)$$

где  $D$  – односвязная область с ляпуновской границей  $\Gamma$ ,  $n$  – единичный вектор нормали к  $\Gamma$ , направленный внутрь  $D$ ,  $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  – фиксированная точка,  $P_0$  – фиксированное число.

Рассмотрим конечный набор точек  $(x_l, y_l) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ ,  $l = \overline{1, n}$  и обозначим через  $P(t, x_l, y_l, x_k, y_k)$  решение задачи (15) в этих точках.

Обратная задача заключается в определении контура  $\Gamma$  по известным при  $t > 0$  функциям  $f_k(t)$  и  $P(t, x_l, y_l, x_k, y_k)$ , где  $k \in K \subseteq \overline{1, 2, \dots, n}$ ,  $l = \overline{1, n}$ ,  $l \neq k$ .

Предположим, что давление в нефтяном пласте не изменяется поперек пласта, а проницаемость в нем постоянна, за исключением области  $D$  полной непроницаемости, размеры которой малы по сравнению с размерами пласта. В точках, имеющих координаты  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , расположены  $n$  скважин, при этом в скважине  $(x_k, y_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , создается давление, изменяющееся по закону  $f_k(t)$ . До начала работы скважины  $(x_k, y_k)$ , при всех  $t > 0$  на большом расстоянии от исследуемой области давление в пласте равно некоторому постоянному пластовому давлению  $P_0$ . В этом случае давление  $P(t, x, y, x_k, y_k)$  в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$  вне зоны непроницаемости является решением задачи (15).

Рассмотрим задачу (15) при произвольном фиксированном  $k \in K$ . Пусть  $M$  и  $M_0$  – точки с координатами  $(x, y)$  и  $(x_k, y_k)$  соответственно. Введем функ-

цию  $\hat{P}(t, M, M_0) = P(t, M, M_0) - P_0$  и применяя преобразование Лапласа для  $u(p, M, M_0)$  получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u - pu = -F(p)\delta(x - x_k)\delta(y - y_k), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \operatorname{Re} p > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} u(p, M, M_0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Отметим, что при  $p > 0$  из принципа максимума следует единственность решения задачи (16). При  $p = s^2 > 0$  фундаментальным решением оператора  $\Delta - s^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , стремящимся к нулю на бесконечности, является функция  $-\frac{1}{2\pi}K_0(s\sqrt{x^2 + y^2})$ , где  $K_0(z)$  – функция Макдональда нулевого порядка. При  $p = s^2 > 0$  решение (16) представим в виде

$$u(p, x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}K_0(s \cdot \rho(M, M_0))F(s^2) + v(s, M, M_0),$$

где  $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , а функция  $v(s, M, M_0)$  является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v - s^2v = 0, M \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, s \neq 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{M \in \Gamma} = -\frac{F(s^2)}{2\pi} \frac{\partial K_0(s \cdot \rho(M, M_0))}{\partial n} \Big|_{M \in \Gamma}, \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} v(s, M, M_0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Решение задачи (17) представим в виде потенциала простого слоя

$$v(s, M, M_0) = \int_{\Gamma} K_0(s \cdot \rho(M, N))\mu(N, M_0) dl_N, \quad (18)$$

с непрерывной плотностью  $\mu(N, M_0)$ , удовлетворяющей уравнению :

$$\mu(N, M_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial K_0(s \cdot \rho(N, Q))}{\partial n_Q} \mu(Q, M_0) dl_Q = -\frac{F(s^2)}{2\pi} \frac{\partial K_0(s \cdot \rho(N, M_0))}{\partial n_N} \quad (19)$$

при  $(N \in \Gamma)$ . Вычисление неизвестной границы неоднородности состоит из двух этапов: определение начального приближения искомого контура; построение итерационной процедуры для отыскания неизвестного контура с заданной точностью. В диссертационной работе построен итерационный процесс с использованием уравнений (18) и (19).

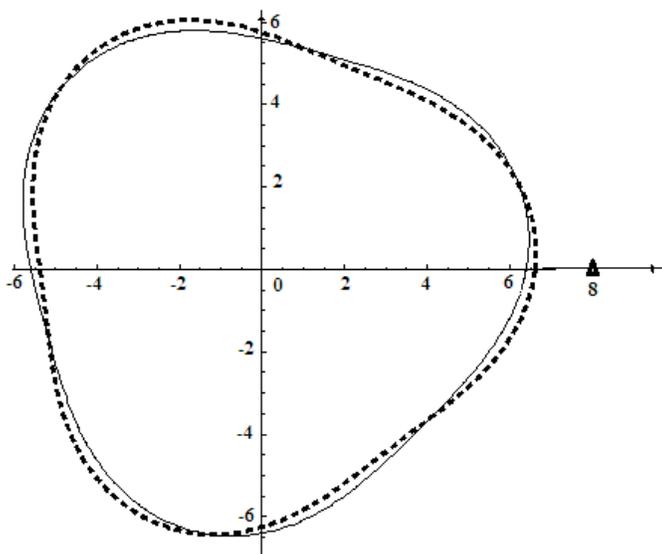


Рис. 3: Результаты вычислительного эксперимента определения неизвестных границ в неоднородном плоском слое (нестационарный случай).

На рисунке 3 приведен результат решения обратной задачи для случая, когда контур  $\Gamma$  задается функцией  $h(\psi) = 6 + 0,4 \cos 3\psi + 0,4 \sin 3\psi$  (изображен сплошной линией).

Пунктиром изображен восстановленный контур. Точки  $(x_l, y_l), l = \overline{1, 12}$  были расположены с шагом  $\pi/6$ , начиная с точки  $(8,0,0)$  на окружности 8 с центром в начале координат, множество  $K$  равнялось  $\{1, 8\}$ ,  $f_1(t) = f_8(t) = 1, p_1 = s_1^2 = 0,1, p_2 = s_2^2 = 0,2$  В качестве значений  $v(s, x_l, y_l, x_0, y_0)$  были взяты результаты численного решения соответствующей прямой задачи. Источник располагался в точке  $(8,0,0)$ . Начальным приближением  $h_0$  была выбрана окружность с центром в начале координат радиуса 4.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

## Основные результаты

1. Разработаны методы применения интегральных уравнений для численного решения обратных задач определения неизвестных границ в неоднородных средах.

2. Предложен и численно исследован метод определения структурных неоднородностей по измерениям акустического поля в ограниченной области в трехмерном пространстве.

3. Разработан и программно реализован метод определения контура зоны малой проницаемости в плоском слое по измерениям давления в скважинах, как в стационарном, так и в нестационарном случае.

## Работы автора по теме диссертации

1. Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В. Об одной обратной задаче сейсмологии // Вест.Моск.Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем.и киберн. 1994. № 4. С. 16-21.

2. Головина С.Г., Никитина Е.В. Численный анализ методов определения спектральной амплитуды акустического поля. Вест.Моск.Ун-та. Сер. 15. Вычисл.Матем.и киберн. 1997. № 3. С. 20-23.

3. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Об обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс. 2005. № 21. С. 5-14.

4. Головина С.Г. Метод линеаризации в обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте// Вестн. Моск. ун-та, сер.15, Вычислит.матем. и Киберн. 2008. №1, стр.5-9.

5. Головина С.Г., Разборов А.Г. О восстановлении неизвестной границы в смешанной задаче для уравнения теплопроводности. Прикладная математика и информатика. № 30. М.: МАКС Пресс, 2008. с.18-24.

6. Golovina S.G., Razborov A.G. Finding the unknown boundary in the initial boundary-value problem for the heat equation // Computational Mathematics and Modeling. 2009. 20. №3. P. 231-236.

7. Головина С.Г., Разборов А.Г. Об определении границы двумерной области по решению внешней начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Прикладная математика и информатика. № 33. М.: МАКС Пресс, 2009. с.69-74.

8. Golovina S.G., Razborov A.G. Determining the boundary of a two-dimensional region from the solution of the external initial boundary-value problem for the heat equation// Computational Mathematics and Modeling. 2010. 21. №2. P. 178-183.

9. Головина С.Г., Разборов А.Г. Об определении внутренней границы области в двумерной начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности. Прикладная математика и информатика. № 35. М.: МАКС Пресс, 2010. с.17-24.

10. Golovina S.G., Razborov A.G. Determining the internal boundary of a region in the two-dimensional initial boundary-value problem for the heat equation// Computational Mathematics and Modeling. 2011. 22. №3. P. 238-245.

## **Тезисы докладов автора по теме диссертации**

1. Головина С.Г. Численное решение обратной задачи волновой томографии в нелинейной постановке // Тезисы конференции «Обратные и некорректно поставленные задачи».

2. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Определение границ зон малой проницаемости// Материалы международной конференции Тихонов-100. Москва. Изд-во МГУ. № 4. 2006. С.31-31.

3. Golovina S.G., Denisov A.M., Dmitriev V.I. // Book of abstracts of international conference. Moscow State Lomonosov University Moscow. Russia. 2006. P.56-57.

4. Головина С.Г., Разборов А.Г. Об определении границы области по решению внешней начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности // Тезисы международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», М.: МАКС Пресс, 2009. С.315.

5. Головина С.Г. Определение границы локальной неоднородности по измерениям акустического поля//Ломоносовские чтения - 2013. Москва. МГУ. ВМК. URL:[http://www.cs.msu.su/sites/cmc/files/docs/programma\\_i\\_tezisy\\_2013\\_3.pdf](http://www.cs.msu.su/sites/cmc/files/docs/programma_i_tezisy_2013_3.pdf). 2013. С.32-34.