МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

ЖУКОВСКАЯ ЗУХРА ТАГИРОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ДИНАМИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2015

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Арутюнов Арам Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов (РУДН).
Официальные оппоненты:	**Карамзин Дмитрий Юрьевич** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук.
	Обуховский Валерий Владимирович доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Федерального бюджетного государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный педагогический университет».
Ведущая организация:	**Центральный экономико-математический институт Российской академии наук**.

Защита диссертации состоится 17 июня 2015 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «   »   201   г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43,
доктор физико-математических наук,
профессор   Е. В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации рассматриваются различные классы задач оптимального управления и динамических управляемых систем. Работа посвящена получению достаточных условий локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных включений и разработке соответствующего математического аппарата, а также получению необходимых условий оптимальности второго порядка для задач оптимального управления с дискретным и непрерывным временем.

Актуальность темы. Оптимальное управление является современным и широко исследуемым разделом математики. Важными задачами теории оптимального управления являются получение необходимых условий оптимальности первого и второго порядка, исследование различных свойств функции минимума в задаче оптимального управления, качественное изучение управляемых систем. Теория оптимального управления имеет широкий спектр приложений к задачам математической экономики, инженерным задачам, задачам математического моделирования проблем медицины и биологии и т.д. При этом важную роль играет исследование нелинейных анормальных задач и динамических управляемых систем. Диссертационная работа посвящена исследованию этих и перечисленных выше задач, а также разработке соответствующего математического аппарата. Многие прикладные задачи приводят к дискретным задачам оптимального управления, исследование которых также проведено в диссертации в рамках обозначенной темы.

Целью диссертационного исследования является получение достаточных условий локальной разрешимости управляемых систем, получение необходимых условий оптимальности второго порядка для задач оптимального управления с дискретным и непрерывным временем, исследование свойств функции минимума в задаче оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, а также разработка соответствующего математического аппарата.

Предмет и объект исследования. Объектом исследования в диссертации являются задачи оптимального управления с непрерывным и дискретным временем (случай особых управлений), задача оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, управляемые системы дифференциальных уравнений и системы дифференциальных включений. Предметом исследования являются необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления для особых управлений и при ослабленных условиях на правую часть явной дифференциальной связи; дифференциальные и топологические свойства функции минимума в задаче оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования использовались средства нелинейного анализа, линейной алгебры, теории накрывающих отображений, теории оптимизации, теоремы о неявной функции в анормальной точке, а также метод конечномерных аппроксимаций.

Научная новизна. В диссертационной работе получены принципиально новые результаты, касающиеся достаточных условий локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями. Они основаны на полученной автором теореме о неявной функции в окрестности анормальной точки. Также в работе доказаны новые результаты относительно необходимых условий оптимальности второго порядка для дискретной и непрерывной задач оптимального управления. Кроме того, разработан принципиально новый алгоритм вычисления константы накрывания линейного оператора на конусе. Наконец, получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для одного класса задач оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.

Достоверность научных положений обусловлена строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании задач оптимального управления с дискретным и непрерывным временем, при исследовании корректности задач оптимизации, разрешимости управляемых нелинейных динамических систем.

В диссертации доказана теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки (т.е. точки, в которой нарушается условие регулярности Робинсона) при дополнительном ограничении на значения неявной функции.

Кроме того, в работе получен алгоритм вычисления константы накрывания линейного оператора на конусе.

Также в диссертации получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями.

Кроме этого, получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной и непрерывной задач оптимального управления.

Наконец, в диссертационной работе получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для задачи оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование сложных задач оптимального управления, динамических управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений. Это соответствует паспорту специальности 01.01.02.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- научный семинар "Прикладные задачи системного анализа" под руководством академика А. Б. Куржанского на кафедре системного анализа ВМК МГУ,
- научный семинар "Экстремальные задачи и нелинейный анализ" под руководством профессора А. В. Арутюнова на кафедре нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук РУДН,
- конференция "Тихоновские чтения - 2013" (г. Москва, 2013),
- всероссийская научно-практическая конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация" (г. Москва, 2013 г.),
- международная научная конференция "Колмогоровские чтения - VI. Общие проблемы управления и их приложения" (г. Тамбов, 2013).

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 8 работах, список которых приведен в конце автореферата. Все 8 указанных работ опубликованы в журналах из списка ВАК РФ. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Автор диссертации благодарит научного руководителя Арутюнова Арама Владимировича за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы из 86 источников. Общий объем диссертации 109 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описаны постановки задач, приведено краткое изложение некоторых этапов развития вариационного исчисления и оптимального управления, обоснована актуальность исследования, описана его методика, отражена научная новизна диссертации, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, а также приведена информация об апробации результатов.

В **первой главе** формулируются и доказываются теоретические результаты, используемые при исследовании управляемых систем и задач оптимального управления во второй и третьей главах работы.

В **параграфе 1.1** получена теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки. Рассмотрена следующая задача. Пусть X, Y, Σ – банаховы пространства, $U \subset X$ – выпуклое замкнутое множество. Пусть даны отображение $F : X \times \Sigma \to Y$ и точки $x_* \in U$, $\sigma_* \in \Sigma$, для которых $F(x_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \;\; x \in U, \tag{1}$$

в котором x – неизвестное, а σ – параметр. Говорят, что для уравнения (1) существует непрерывное решение в окрестности (x_*, σ_*), если существуют окрестность O точки σ_* и непрерывная функция $x : O \to U$, такая, что $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, $x(\sigma_*) = x_*$.

Известно (см. [1]), что решение в задаче (1) существует, если F строго дифференцируема по x равномерно по σ в точке (x_*, σ_*), множество U является замкнутым выпуклым конусом и выполнено условие регулярности Робинсона

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*) \, \mathrm{cone}(U - \{x_*\}) = Y. \tag{2}$$

Очевидно, условие (2) существенно. Так, например, если $X = U = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} = \Sigma$, $x_* = (0, 0)$, $\sigma_* = 0$, $F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 - \sigma$, где $x = (x_1, x_2)$, то (2) нарушается, и, как несложно видеть, решение в окрестности (x_*, σ_*)

[1] Арутюнов А. В. К теоремам о неявной функции в анормальных точках // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 30-39.

не существует. Если же в этом примере положить $F(x,\sigma) = x_1^2 - x_2^2 - \sigma$, то условие (2) также не выполняется, однако решение в этой задаче существует, непрерывно, но не удовлетворяет условию Липшица.

Вопрос о существовании решения в задаче (1) в случае, когда условие Робинсона не выполняется, был изучен А.В. Арутюновым в предположении, что множество U является замкнутым выпуклым конусом (см. [1, 2, 3, 4]). В диссертации этот результат распространен на случай, когда U – замкнутое выпуклое множество. Приведем соответствующий результат.

Введем следующее определение. Пусть $G : X \to Y$ – заданное отображение, $G(x_*) = 0$. Относительно G будем предполагать, что оно дважды дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_*. Обозначим

$$\mathcal{U} = \mathrm{cone}\,(U - \{x_*\}).$$

Определение 1 Пусть существует

$$h \in \mathcal{U}: \quad h \in \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*), \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h,h] \in \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U}.$$

Отображение G называется 2-регулярным в точке x_* относительно множества U по направлению h, если имеет место

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, \mathcal{U} \cap \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)] = Y.$$

Будем предполагать, что F удовлетворяет следующим предположениям.

(F1) F дважды непрерывно дифференцируемо по x в некоторой окрестности точки (x_*, σ_*). При каждом σ из некоторой окрестности σ_* отображение $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot,\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от σ. Отображения $F(x_*,\cdot)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_*,\cdot)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*,\cdot)$

[2]Арутюнов А. В. Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 4. – С. 483-497.

[3]Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46, № 2. – С. 205-215.

[4]Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 4. – С. 619-621.

непрерывны в точке σ_*. Отображение $F(\cdot)$ непрерывно в окрестности точки (x_*, σ_*).

Положим

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathcal{U}.$$

(F2) Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ конуса V замкнута, и это подпространство топологически дополняемо.

Через π будем обозначать некоторый линейный непрерывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\operatorname{span} V$. Через $B_X(x, r)$ будем обозначать шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r.

Теорема 1 *Пусть относительная внутренность* $\mathrm{ri}V$ *непуста, и отображение* $F(\cdot, \sigma_*)$ *2-регулярно в точке* x_* *относительно* U *по некоторому направлению* $h \in X$. *Тогда существуют такие окрестность* O *точки* σ_*, *числа* $c \geq 0$ *и непрерывное отображение* $x(\cdot) : O \to U$, *что* $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, *и*

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq c \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma) \right\| + \sqrt{\|F(x_*, \sigma)\|} \right) \quad \forall \sigma \in O. \tag{3}$$

В **параграфе 1.2** исследуется задача вычисления константы накрывания линейного оператора на выпуклом конусе. А именно, рассмотрена следующая задача. Пусть задан линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и векторы $b_1, ..., b_s \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle x, b_j \rangle \leq 0, j = \overline{1, s}\}.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Известно, что отображение $\Psi : K \to AK$, $\Psi(x) \equiv Ax$ является α-накрывающим для некоторого $\alpha > 0$, т.е.

$$\forall\, x_0 \in K, \quad \forall\, y \in AK \quad \exists\, x \in K : \quad y = \Psi(x) \quad \text{и} \quad |x - x_0| \leq \frac{|y - \Psi(x_0)|}{\alpha}.$$

В **параграфе 1.2** предложен алгоритм, позволяющий за конечное число шагов выразить наибольшую константу накрывания α отображения Ψ

через собственные значения некоторых линейных операторов, порождаемых оператором A и векторами b_j, $j = \overline{1, s}$.

Основные результаты первой главы опубликованы в [5].

Вторая глава посвящена достаточным условиям локальной разрешимости управляемых систем и состоит из двух параграфов. В **параграфе 2.1** получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений при наличии смешанных ограничений. Рассмотрена управляемая система дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями и геометрическим ограничением на управление

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u) \ \ \dot{\forall}\, t, \\ x(t_0) = x_0, \\ g(t, x, u) = 0 \ \ \dot{\forall}\, t, \\ u(t) \in U \ \ \forall\, t. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ – время; $t_0 \in \mathbb{R}$ – заданный начальный момент времени; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданная начальная точка; $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная; $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – заданные функции, причем функция g непрерывна; $U \subset \mathbb{R}^m$ – заданное замкнутое выпуклое множество.

В качестве допустимых управлений в задаче (4) рассматриваются всевозможные функции $u(\cdot) \in C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^m)$, $\tau > 0$, для которых выполняется условие $u(t) \in U$ для всех t.

Система (4) называется локально разрешимой в точке (t_0, x_0), если существуют число $\tau > 0$ и допустимое управление $u(\cdot)$ такие, что задача Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \ \ x(t_0) = x_0,$$

на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ имеет решение $x(\cdot)$, для которого выполняется условие

$$g(t, x(t), u(t)) = 0 \ \ \dot{\forall} t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 2.1**. Пусть задана точка $u_0 \in U$, для которой $g(t_0, x_0, u_0) = 0$, и некоторое $\gamma > 0$. Положим $D = [t_0, t_0 + \gamma] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Будем предполагать, что функция $f : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори: при п.в. t функция $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна; при любых (x, u) функция $f(\cdot, x, u)$ измерима; существуют такая суммируемая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и число $\tau > 0$, что $|f(t, x, u)| \leq \psi(t)$ для п.в. $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, для любых $u \in B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Предположим, что для любых $(t, x) \in D$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по u на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, причем соответствующие производные непрерывны по совокупности переменных в окрестности точки (t_0, x_0, u_0), а отображение $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, x, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$ для любых $(t, x) \in D$ с константой Липшица, не зависящей от (t, x).

Теорема 2 *Пусть существует такой вектор* $h \in \mathbb{R}^m$, *что функция* $g(t_0, x_0, \cdot)$ 2*-регулярна по переменной* u *в точке* u_0 *относительно* U *по направлению* h. *Тогда система (4) локально разрешима в точке* (t_0, x_0).

В **параграфе 2.2** приведены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями. Рассмотрена управляемая система дифференциальных включений со смешанными ограничениями, геометрическим ограничением на управление и дифференциальным включением, не разрешенным относительно старшей производной

$$\begin{cases} 0 \in F(t, x, \dot{x}, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \\ 0 \in G(t, x, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ u(t) \in U \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, $G : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ – заданные многозначные отображения, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ – заданное непустое замкнутое множество, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ – заданные числа. Здесь и далее под многозначным отображением будем понимать отображение, которое каждой точке области определения ставит в соответствие непустое замкнутое множество.

Для этой системы допустимые управления рассматриваются в классе $L_\infty([t_0, t_1], U)$.

Управляемую систему (5) будем называть локально разрешимой, если существуют число $\tau > 0$, допустимое управление $u(\cdot)$, абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ такие, что функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$0 \in F(t, x, \dot{x}, u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$, и для почти всех $t \in [t_0, t_0+\tau]$ выполнено включение

$$0 \in G(t, x(t), u(t)).$$

Пару (x, u) в этом случае принято называть решением системы (5) на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 2.2**. Будем предполагать, что отображения F и G удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть:

1) отображения $F(\cdot, x, z, u)$ и $G(\cdot, x, u)$ измеримы для всех $x, z \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

2) отображения $F(t, \cdot)$ и $G(t, \cdot)$ непрерывны для п.в. $t \in [t_0, t_1]$;

3) для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что если $|x| + |z| + |u| \leq R$, то $|y| \leq M$ для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, для всех $y \in F(t, x, z, u)$.

Прежде чем сформулировать основной результат **параграфа 2.2**, напомним необходимые определения. Пусть X, Y – метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно, и задано число $\alpha > 0$.

Определение 2 (см. [5]) *Многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ назы-*

[5] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 2 – С. 151-155.

вается α-накрывающим, если

$$F(B_X(x_0,r)) \supseteq B_Y(F(x_0),\alpha r) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x_0 \in X.$$

Число $\alpha > 0$ называется константой накрывания отображения F.

Определение 3 (см. [5]) *Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица в константой $L \geq 0$, если*

$$h(F(x_1),F(x_2)) \leq L\rho_X(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X.$$

В этом определении h – это обобщенное расстояние по Хаусдорфу.

Пусть заданы функции $x_0 \in AC_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, $u_0 \in L_\infty([t_0,t_1],U)$, $f_0 \in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^k)$, $g_0 \in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^s)$ такие, что

$$f_0(t) \in F(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)), \quad g_0(t) \in G(t,x(t),u(t)) \ \ \dot{\forall} t \in [t_0,t_1].$$

Теорема 3 *Предположим, что*

a) отображения $F(t,\cdot,v,u)$, $F(t,x,v,\cdot)$, $G(t,\cdot,u)$ удовлетворяют условию Липшица с константами $L_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$ и $L_3 \geq 0$, соответственно, для п.в. $t \in [t_0,t_1]$, для всех $x,v \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

b) отображения $F(t,x,\cdot,u)$, $G(t,x,\cdot)$ являются накрывающими с константами $\alpha_F > 0$ и $\alpha_G > 0$, соответственно, для п.в. $t \in [t_0,t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$.

Тогда управляемая система (5) локально разрешима. Причем для всех $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (0,\tau_0)$, где $\tau_0 = \dfrac{\alpha_F\alpha_G}{L_2L_3 + L_1\alpha_G}$, существует решение (x,u) системы (5) на отрезке $[t_0,t_0+\tau]$ такое, что выполнены оценки

$$|x_0(t) - x(t)| \leq \tau\left[\frac{L_2\|g_0\|_\infty + \alpha_G\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\alpha_G - \tau L_2L_3} + \varepsilon\right] \quad \dot{\forall} t \in [t_0,t_0+\tau],$$

$$|u_0(t) - u(t)| \leq \frac{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\|g_0\|_\infty + \tau L_3\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\alpha_G - \tau L_2L_3} + \varepsilon \quad \dot{\forall} t \in [t_0,t_0+\tau].$$

Основные результаты второй главы опубликованы в [3], [4].

Третья глава посвящена проблемам оптимального управления и состоит из четырех параграфов. В **параграфе 3.1** приведены постановки задач оптимального управления в дискретном и непрерывном времени. В **параграфе 3.2** получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \varphi(x(N+1)) \to \min, \\ x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, N], \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \in U(t),\ t \in [0, N]. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь N – заданное натуральное число или нуль, $t \in [0, N+1] := \{0, 1, ..., N, N+1\}$ – дискретное время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление, $f : [0, N] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданные функции, $U : [0, N] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ – заданное многозначное отображение.

Допустимым процессом в задаче (6) будем называть пару (x, u), $u = \big(u(0), ..., u(N)\big)$, $u(i) \in \mathbb{R}^m$, $x = \big(x(0), ..., x(N+1)\big)$, $x(i) \in \mathbb{R}^n$, такую, что u удовлетворяет условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [0, N]$, а x является решением разностного уравнения $x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$, $t \in [0, N]$, с начальным условием $x(0) = x_0$.

Допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ назовем локально оптимальным процессом в задаче (6), если $\varphi(\bar{x}(N+1)) \leqslant \varphi(x(N+1))$ для всех допустимых процессов (x, u) из некоторой окрестности оптимального процесса $(\bar{x}, \bar{u})$.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.2**. Для $p \in \mathbb{R}^n$ положим

$$H(t, x, u, p) := p^T f(t, x, u).$$

Теорема 4 *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u})$ *– локально оптимальный процесс в задаче* (6). *Пусть также функция* φ *удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки* $\bar{x}(N+1)$, *дифференцируема в этой точке и для всех* $t \in [0, N]$ *выполняются следующие предположения: функция* $f(t, \cdot, \cdot)$ *непрерывна,* *функция $f(t,\cdot,\bar{u}(t))$ дифференцируема в точке $x=\bar{x}(t)$, множества $U(t)$ замкнуты, множества $f(t,\bar{x}(t),U(t))$ выпуклы.*

Тогда существует решение $p:[0,N]\to\mathbb{R}^n$ сопряженной системы

$$\begin{aligned} &p(t)=H_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t+1)), \quad t\in[0,N],\\ &p(N+1)=-\varphi_x(\overline{x}(N+1)), \end{aligned} \tag{7}$$

для которого выполняется условие максимума

$$H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t+1))=\max_{u\in U(t)} H(t,\overline{x}(t),u,p(t+1)), \quad t\in[0,N]. \tag{8}$$

Отметим, что приведенная теорема усиливает известные условия оптимальности первого порядка (см. [6]), поскольку в ней предполагается, что функция f дифференцируема по x *лишь в точке* $\bar{x}(t)$, а не в целой окрестности точки $\bar{x}(t)$, и лишь при $u=\bar{u}(t)$. Множества допустимых скоростей $f(t,\bar{x}(t),U(t))$ предполагаются выпуклыми также только при $x=\bar{x}(t)$, а не в окрестности точки $\bar{x}(t)$.

В **параграфе 3.3** получены необходимые условия оптимальности второго порядка для особых управлений для задачи оптимального управления с непрерывным временем

$$\begin{cases} \varphi(x(t_1))\to\min,\\ \dot{x}=f(t,x,u) \quad \dot{\forall} t\in[t_0,t_1],\\ x(t_0)=x_0,\\ u(t)\in U(t) \quad \dot{\forall} t\in[t_0,t_1]. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $t_0,t_1\in\mathbb{R}$ – заданные числа, $t\in[t_0,t_1]$ – время, $x\in\mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u\in\mathbb{R}^m$ – управление, $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f:[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ – заданные функции, $U:[t_0,t_1]\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ – заданное многозначное отображение.

Допустимым управлением в задаче (9) является такая измеримая функция $u:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^m$, что $u(t)\in U(t)$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$. Пару (x,u) будем называть допустимым процессом, если u – это допустимое управление, а x – решение задачи Коши $\dot{x}=f(t,x,u(t))$, $x(t_0)=x_0$.

[6] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М. : Наука, 1974.

Всюду далее будем полагать, что выполнены следующие условия:
(H1) функции $\varphi(\cdot)$, $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\varphi_x(\cdot)$, $\varphi_{xx}(\cdot)$, $f_x(t,\cdot,\cdot)$ и $f_{xx}(t,\cdot,\cdot)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$;
(H2) функции $f(\cdot, x, u), f_x(\cdot, x, u)$ и $f_{xx}(\cdot, x, u)$ измеримы для всех (x, u);
(H3) $U(\cdot)$ – многозначное отображение с замкнутыми ограниченными значениями, непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа.

Определение 4 *(см. [7]) Допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ называется понтрягинским локальным минимумом, если для каждого $c > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(c) > 0$ такое, что для всех допустимых процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условиям*

$$|x(t_1) - \bar{x}(t_1)| + \mu \{t \in [t_0, t_1] |\, u(t) \neq \bar{u}(t)\} \leqslant \varepsilon, \quad |u(t)| \leq C \ \dot{\forall} t \in [t_0, t_1],$$

выполняется неравенство $\varphi(x(t_1)) \geq \varphi(\bar{x}(t_1))$. Здесь μ обозначает меру Лебега.

Допустимое управление $u(\cdot)$ называется особым на отрезке $[t_2, t_3] \subset [t_0, t_1]$, если для почти всех $t \in [t_2, t_3]$ существует точка $w \in U(t)$ такая, что $u(t) \neq w$ и

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = H(t, x(t), w, p(t)).$$

Здесь $x(\cdot)$ – траектория, соответствующая управлению $u(\cdot)$, $H : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H(t, x, u, p) \equiv p^T f(t, x, u)$ – функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (9), $p(\cdot)$ – решение сопряженной системы $\dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t))$ с концевым условием $p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))$.

Одной из первых работ, посвященных исследованию особых управлений, является работа [8]. Особые управления изучались многими авторами (см., например, [9, 10]). Условия глобального минимума для кусочно-

[7] Арутюнов А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принцип максимума Понтрягина. – М. : Факториал Пресс, 2006.

[8] Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, III // Автоматика и телемеханика. – 1959. – Т. 20, Вып. 12. – С. 1561–1578.

[9] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. – М. : Либроком, 2013.

[10] Gabasov R., Kirillova F. M. High-Order Necesssary Conditions for Optimality // SIAM J. Control and Optimization. – 1972. – Vol. 10, no. 1. – P. 127-169.

непрерывных управлений были вначале получены в предположении непрерывности функции f по t и при условии $U(t) \equiv \mathrm{const}$. Затем этот результат был распространен в [11] на случай измеримой по t функции f.

В **параграфе 3.3** получены необходимые условия локального (а не глобального) понтрягинского минимума для задачи (9). Соответствующие результаты получены методом конечномерных аппроксимаций. Метод заключается в сведении бесконечномерной задачи (9) к последовательности конечномерных задач и получению условий оптимальности в исходной задаче с помощью предельного перехода. Этот подход применялся ранее для получения условий оптимальности в задачах с концевыми ограничениями (см. [12, 13]), в задачах с фазовыми ограничениями при более слабых предположениях дифференцируемости (см. [14]).

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.3**. Для симметричной матрицы A и векторов y, y_1, y_2 соответствующей одинаковой размерности положим

$$A[y]^2 := y^T A y, \;\; A[y_1, y_2] := y_1^T A y_2.$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned} &f_x(t) := f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ &\Delta_v f(\theta) := f(\theta, \bar{x}(\theta), v(\theta)) - f(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}(\theta)). \end{aligned}$$

Фундаментальную матрицу решений линейного дифференциального уравнения

$$\dot{r}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) r, \; t \in [t_0, t_1],$$

обозначим через $\Phi(\cdot, \cdot)$.

[11] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. – М. : Наука, 1988.

[12] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М. : Физматлит, 2007.

[13] Arutyunov A. V., Vinter R. B. A Simple 'Finite Approximations' Proof of the Pontryagin Maximum Principle under Reduced Differentiability Hypotheses // Set-Valued Analysis. – 2004. – Vol. 12. – P. 5-24.

[14] Shvartsman I. New approximation method in the proof of the maximum principle for nonsmooth optimal control problems with state constraints // J. Math. Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 326, no. 2, P. 974-1000.

Положим

$$p^T(t) := -\varphi_x^T(\bar{x}(t_1))\Phi(t_1, t),\ t \in [t_0, t_1]. \tag{10}$$

В силу свойств фундаментальной матрицы функция p удовлетворяет сопряженной системе:

$$\dot{p}^T(t) = -p^T(t) f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ p(t_1) = -\varphi_x(\bar{x}(t_1)). \tag{11}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&H(t, x, u, p) = p^T f(t, x, u),\\
&H_x(t) := H_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)),\ H_{xx}(t) := H_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)),\\
&\Delta_v H_x(t) := H_x(t, \bar{x}(t), v(t), p(t)) - H_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)).
\end{aligned}$$

Определим матричную функцию $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, как решение уравнения

$$\dot{\Psi}(t) = H_{xx}(t) - f_x^T(t)\Psi(t) - \Psi(t) f_x(t) \tag{12}$$

с концевым условием

$$\Psi(t_1) = \varphi_{xx}(\bar{x}(t_1)). \tag{13}$$

Теорема 5 *Пусть функция $f(\cdot, x, u)$ непрерывна справа для всех (x, u). Предположим, что пара $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ является понтрягинским локальным минимумом в задаче (9), функция $\bar{u}(\cdot)$ непрерывна справа, $v(\cdot)$ – такая непрерывная функция, что $v(t) \in U(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и существует отрезок $[t_2, t_3] \subset [t_0, t_1]$ такой, что $v(t) \neq \bar{u}(t)$ для почти всех $t \in [t_2, t_3]$ и выполнено*

$$H(t, \bar{x}(t), v(t), p(t)) \equiv H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) \quad \forall t \in [t_2, t_3], \tag{14}$$

где $p(\cdot)$ – решение сопряженной системы (11).

Тогда

$$\Psi(t)[\Delta_v f(t)]^2 - \Delta_v H_x^T(t)\Delta_v f(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [t_2, t_3]. \tag{15}$$

В **параграфе 3.4** третьей главы исследованы свойства функции минимума для линейной задачи оптимального управления. Пусть заданы симметричные матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k размерности $n \times n$ с действительными элементами, причем эти матрицы попарно коммутируют. Определим квадратичную форму $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ по формулам

$$q_0(x) = \langle Q_0 x, x \rangle, \;\; Q(x) = \begin{pmatrix} \langle Q_1 x, x \rangle \\ \vdots \\ \langle Q_k x, x \rangle \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Иными словами, квадратичное отображение – это вектор-функция, каждая координата которой является квадратичной формой.

Рассмотрим задачу оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями

$$\begin{cases} q_0(x(1)) \to \min, \\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \; t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \\ Q(x(1)) = y. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $t \in [0,1]$ – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр, $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей, y – заданный вектор из $\mathbb{R}^k$.

Допустимым процессом в задаче (16) назовем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ такую, что абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(0) = 0$, и удовлетворяет условию $Q(x(1)) = y$, а управление $u(\cdot)$ является измеримым существенно ограниченным. Под решением задачи (16) будем понимать допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, на котором достигается условный минимум функционала $(x(\cdot), u(\cdot)) \mapsto q_0(x(1))$.

Будем предполагать, что квадратичное отображение Q сюръективно, то есть $Q(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$. Для каждого $y \in \mathbb{R}^k$, через $\omega(y)$ обозначим оптимальное значение в задаче (16), то есть

$$\omega(y) = \inf\Big\{ q_0(x(1)) : \; \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \; t \in [0,1], x(0) = 0, Q(x(1)) = y \Big\}.$$

Таким образом определим в задаче (16) функцию минимума $\omega : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$.

Целью **параграфа 3.4** является исследование дифференциальных и топологических свойств функции ω. Свойства функции минимума в различных задачах оптимизации и оптимального управления изучаются во многих работах. Так, например, Ф. Кларком в [15] исследована функция минимума для задачи минимизации функционала $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при ограничениях типа равенств и неравенств и геометрических ограничениях $x \in C \subset \mathbb{R}^n$. В предположении, что значение функции минимума конечно в нуле и множества $\{x \in C \ : \ f(x) \leq r\}$ компактны для всех $r \in \mathbb{R}$, получена формула для обощенного градиента функции минимума, а также условия строгой дифференцируемости функции минимума. А. Дончевым в [16] используется несколько другой подход к изучению поведения функции минимума – теория чувствительности. Рассматривается задача условной минимизации в функциональных пространствах. Приводятся оценки функции минимума, зависящие от параметра. А.В. Арутюновым в [17] исследованы свойства функции минимума для квадратичной задачи минимизации.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.4**. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi, \\ \Psi(0) = E, \end{cases} \tag{17}$$

где E – единичная матрица. Таким образом, Ψ – фундаментальная матрица системы $\dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi$. Обозначим через $\xi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, столбцы матрицы $B^*(t)\Psi(t)$, $t \in [0,1]$.

Теорема 6 *Предположим, что выполняются следующие условия:*

[15]Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М. : Наука, 1988.

[16]Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. – М. : Мир, 1987.

[17]Арутюнов А. В. Свойства функции минимума в квадратичной задаче // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, №1. – С. 36–45.

а) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i(t) \not\equiv 0$ *для всех* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$;

б) $q_0(x) \geq 0$ *для всех* x, *таких что* $Q(x) = 0$.

Тогда

1) функция ω *выпукла;*

2) функция ω *удовлетворяет условию Липшица;*

3) функция ω *дифференцируема во всех точках пространства* $\mathbb{R}^k$, *кроме, быть может, точек, принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.*

Основные результаты третьей главы опубликованы в [1], [2], [6]– [8].

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями.
- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями.
- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной задачи оптимального управления.
- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для особых управлений для задачи оптимального управления с непрерывным временем.
- Получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для задачи оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.
- Доказана теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки (т.е. точки, в которой нарушается условие регулярности Робинсона).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Арутюнов А. В., Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Дифференциальные свойства функции минимума для диагонализируемых квадратичных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 10. – С. 1768-1777.

2. Жуковская (Мингалеева) З. Т. Свойства функции минимума в задаче оптимального управления // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 2. – С. 303-307.

3. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 1. – С. 31-40.

4. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 380-382.

5. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Существование и непрерывность неявной функции в окрестности анормальной точки // Вестник МГУ. – 2012. – Сер. 15, №2. – С. 10-15.

6. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Шварцман И. А. Необходимые условия второго порядка для дискретной задачи оптимального управления // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1640-1646.

7. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Шварцман И. А. Условия оптимальности для особых управлений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5. – С. 2609-2611.

8. Zhukovskaya (Mingaleeva) Z. T., Shvartsman I. A. Second Order Optimality Conditions for Singular Controls // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2014. – Vol. 35. – P. 1245-1257.