МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Жуковская Зухра Тагировна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ДИНАМИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
НА СОИСКАНИЕ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Научный руководитель – доктор
физико-математических наук, профессор,
А. В. Арутюнов

Москва
2015

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена исследованию различных классов задач оптимального управления и управляемых систем. Средствами теории накрывающих отображений, теорем о неявной функции в анормальной точке, а также на основе метода конечномерных аппроксимаций исследованы следующие задачи.

- Дискретная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \varphi(x(N+1)) \to \min, \\ x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, N], \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \in U(t),\ t \in [0, N]. \end{cases} \tag{1}$$

  Здесь N – заданное натуральное число или нуль, $t \in [0, N+1] := \{0, 1, ..., N, N+1\}$ – дискретное время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление, $f : [0, N] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданные функции, $U : [0, N] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ – заданное многозначное отображение. Здесь и далее под многозначным отображением будем понимать отображение, которое каждой точке области определения ставит в соответствие непустое замкнутое множество.

- Задача оптимального управления с непрерывным временем

$$\begin{cases} \varphi(x(t_1)) \to \min, \\ \dot{x} = f(t, x, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in U(t) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{2}$$

  Здесь $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ – заданные числа, $t \in [t_0, t_1]$ – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – управление, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – заданные функции, $U : [t_0, t_1] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ – заданное многозначное отображение.

- Задача оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями

$$
\begin{cases}
q_0(x(1)) \to \min, \\
\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ t \in [0,1], \\
x(0) = 0, \\
Q(x(1)) = y.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Здесь $t \in [0,1]$ – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр, $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданная квадратичная форма, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – заданное квадратичное отбражение, $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей, y – заданный вектор из $\mathbb{R}^k$.

- Управляемая система дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями и геометрическим ограничением на управление

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = f(t,x,u)\ \ \dot{\forall}\, t, \\
x(t_0) = x_0, \\
g(t,x,u) = 0\ \ \dot{\forall}\, t, \\
u(t) \in U\ \ \forall\, t.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ – время; $t_0 \in \mathbb{R}$ – заданный начальный момент времени; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданная начальная точка; $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная; $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – заданные функции, причем функция g непрерывна; $U \subset \mathbb{R}^m$ – заданное замкнутое выпуклое множество.

- Управляемая система дифференциальных включений со смешанными ограничениями, геометрическим ограничением на управление и дифференциальным включением, не разрешенным относительно старшей производной

$$\begin{cases} 0 \in F(t, x, \dot{x}, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \\ 0 \in G(t, x, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ u(t) \in U \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, $G : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ – заданные многозначные отображения, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ – заданное непустое замкнутое множество, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ – заданные числа.

Прежде чем перейти к описанию полученных результатов, кратко изложим некоторые этапы развития вариационного исчисления и оптимального управления.

Одна из первых задач вариационного исчисления была сформулирована и опубликована И. Ньютоном (1687). Позже появилась задача о брахистохроне, изначальная постановка которой принадлежит И. Бернулли (1696). Средствами теории вариационного исчисления были сформулированы и решены многие задачи прикладного характера. В развитие этого направления науки внесли большой вклад К. Вейерштрасс, У. Гамильтон, Ж.-Л. Лагранж, А. Лежандр, Л. Эйлер, К. Якоби и многие другие (см., например, [42]).

Позже, в середине двадцатого века, за недостаточностью математического инструментария теория вариационного исчисления была расширена до теории оптимального управления. Первой фундаментальной работой в этой области была монография [58] Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. В ней для нелинейной задачи оптимального управления впервые были получены необходимые условия минимума, которые в дальнейшем получили название "принцип максимума Л.С. Понтрягина".

Впоследствии были изучены другие задачи оптимального управления. Так, например, задача оптимального управления рассматривалась при дополнительном ограничении

$$x(t) \in X \quad \forall t,$$

где X – некоторое непустое подмножество $\mathbb{R}^n$. Эту задачу принято называть задачей оптимального управления с фазовыми ограничениями. Впервые принцип максимума для задачи с фазовыми ограничениями был получен в работах Р.В. Гамкрелидзе (см., например, [35, 36]). Соответствующий результат – необходимые условия для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме Принципа максимума Понтрягина – был опубликован в вышеупомянутой монографии [58]. Позже подобная задача была исследована в [44]. В указанной работе при более общих предположениях на оптимальную тректорию (а именно, при отсутствии условия регулярности оптимальной тректории) были получены необходимые условия для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Если оптимальная траектория целиком лежит внутри области, задаваемой фазовыми ограничениями, то принцип максимума для задачи с фазовыми ограничениями превращается в классический прицип максимума из [58]. Позже было показано (см., например, [13, 25]), что принцип максимума из [44] во многих случаях вырождается. В связи с этим появились другие формы принципа максимума, при дополнительных ограничениях обеспечивающих невырождаемость принципа максимума (см., например, [5, 13, 25, 43, 53]).

Достаточно много внимания в работах различных авторов уделяется дискретным задачам оптимального управления. Такие задачи часто возникают, например, при приближенном решении задач оптимального управления в непрерывном времени. Необходимые условия оптимальности первого порядка в задачах с непрерывным временем (принцип максимума Понтрягина) были получены, как было упомянуто ранее, в конце 50-х годов XX-го века (см. [58]). Некоторое время считалось, что аналогичный результат верен и для дискретной задачи, и даже были опубликованы несколько его неверных доказательств (например, [72]). Результат в форме принципа максимума был получен Халкиным в [75] в предположении выпуклости множества допустимых скоростей.

Впоследствии требование выпуклости было заменено на более слабое условие выпуклости по направлению (см. [78]) или на локальную выпуклость (см. [85]). Задачам оптимального управления с дискретным временем посвящена монография [28].

Теория условий второго порядка для задач оптимального управления с дискретным временем стала развиваться сравнительно недавно, см., например, работы [24, 76, 77, 79]. В цитируемых исследованиях предполагается, что фунция f, определяющая динамику системы, дифференцируема по управлению, ограничения на управление либо отсутствуют (как в [24, 76, 79]), либо задаются равенствами (см., например, [77]). В диссертации мы априори не предполагаем гладкости f по u и рассматриваем общие ограничения на управление.

В диссертации для исследования задач оптимального управления с непрерывным временем используется метод конечномерной аппроксимации, предложенный и разработанный в [2, 3, 13, 15, 22, 23]. С помощью этого метода был получен принцип максимума для задачи оптимального уравнения с запаздывающим аргументом в управлении (см., например, [23]), а также для задач с фазовыми ограничениями (см., например, [13]).

Одним из главных инструментов исследования в диссертации является теория накрывающих отображений. Напомним определение накрывающего отображения из [7]. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y, соответственно, и задано число $\alpha > 0$. Обозначим через

$$B_X(x_0, r) = \{x \in X \,:\, \rho_X(x, x_0) \leq r\}$$

замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x_0 радиуса r. Отображение $\Psi \,:\, X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$\forall x_0 \in X,\, \forall r \geq 0 \quad \Psi(B_X(x_0, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x_0), \alpha r).$$

Число $\alpha > 0$ называется константой накрывания отображения Ψ.

Одним из первых результатов в теории накрывающих отображений является теорема Л.М. Грейвса (см. [74]). Сформулируем ее. Пусть X, Y – банаховы пространства, $F : X \to Y$ – сильно дифференцируемый в точке $x_0 \in X$ оператор. Тогда, если производная по Фреше оператора F в точке x_0 сюръективна, то существуют $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ такие, что

$$F(B_X(x_0, r)) \supseteq B_Y(F(x_0), \alpha r) \quad \forall r < \varepsilon.$$

А.А. Милютиным было показано (см. [40]), что в этом результате можно отказаться от линейности пространства X за счет использования накрывающих отображений. А именно, им была доказана следующая теорема. Пусть X – полное метрическое пространство, Y – линейное пространство с метрикой, инвариантной относительно сдвига, заданы числа $\beta < \alpha$, отображение $\Psi : X \to Y$ является непрерывным и α-накрывающим, отображение $\Phi : X \to Y$ – β-липшицевым. Тогда отображение $\Psi + \Phi$ является $(\alpha - \beta)$-накрывающим.

Теория накрывающих отображений широко используется для исследования абстрактных уравнений. Так, например, в терминах накрывающих отображений известны условия существования точек совпадения отображений метрических пространств. Напомним, что точкой совпадения двух отображений $\Psi, \Phi : X \to Y$ называется решение $x \in X$ уравнения $\Psi(x) = \Phi(x)$. Впервые условия существования точек совпадения в терминах накрывающих отображений были получены А.В. Арутюновым в 2007 году (см. [7]). Сформулируем эти условия. Пусть X, Y – метрические пространства, причем X полно, заданы числа $\beta < \alpha$, отображение $\Psi : X \to Y$ является α-накрывающим и непрерывно, отображение $\Phi : X \to Y$ является β-липшицевым. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует $x \in X$ такой, что

$$\Psi(x) = \Phi(x), \quad \rho_X(x_0, x) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

В дальнейшем теория накрывающих отображений получила разитие в работах Е.Р. Авакова, Б.Д. Гельмана, В.В. Обуховского, А.Д. Иоффе, А. Удерзо, А.Л. Дончева, Б.Ш. Мордуховича, Х. Франковской (см., например, [1, 37, 52, 57, 65, 69, 70, 71, 80, 81, 83, 84]) и других.

Теория накрывающих отображений имеет многочисленные приложения в различных областях математики. Так, например, с ее помощью были получены достаточные условия разрешимости дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции (см., например, [1]), достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем со смешанными ограничениями (см., например, [18, 68]), достаточные условия разрешимости дифференциального включения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции (см., например, [65]), достаточные условия разрешимости абстрактных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра неявного вида (см., например, [67]), условия существования равновесных цен в нелинейной модели рынка (см., например, [19, 27]).

Итак, **объектом исследования** в диссертации являются задачи оптимального управления с непрерывным и дискретным временем (случай особых управлений), задача оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, управляемые системы дифференциальных уравнений и системы дифференциальных включений.

Предметом исследования являются необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления для особых управлений и при ослабленных условиях на правую часть явной дифференциальной связи; дифференциальные и топологические свойства функции минимума в задаче оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений.

Основной целью диссертационного исследования является получение достаточных условий локальной разрешимости управляемых систем, получение необходимых условий оптимальности второго порядка для задач оптимального управления с дискретным и непрерывным временем, исследование свойств функции минимума в задаче оптимального управления с линейной дифференциальной связью и квадратичными концевыми ограничениями, а также разработка соответствующего математического аппарата.

Актуальность диссертационного исследования обусловлена прежде всего тем, что оптимальное управление является современным и широко исследуемым разделом математики. Важными задачами теории оптимального управления являются получение необходимых условий оптимальности первого и второго порядка, исследование различных свойств функции минимума в задаче оптимального управления, качественное изучение управляемых систем. Теория оптимального управления имеет широкий спектр приложений к задачам математической экономики, инженерным задачам, задачам математического моделирования проблем медицины и биологии и т.д. При этом важную роль играет исследование нелинейных анормальных задач и динамических управляемых систем. Диссертационная работа посвящена исследованию этих и перечисленных выше задач, а также разработке соответствующего математического аппарата. Многие прикладные задачи приводят к дискретным задачам оптимального управления, исследование которых также проведено в диссертации в рамках обозначенной темы.

Методика исследования включает в себя средства нелинейного анализа, линейной алгебры, теории накрывающих отображений, теории оптимизации, теоремы о неявной функции в анормальной точке, а также метод конечномерных аппроксимаций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы из 86 источников. Общий объем диссертации 109 страниц.

Опишем кратко основные результаты работы. Диссертация состоит из трех глав, каждая из которых разбита на параграфы. В **первой главе** формулируются и доказываются теоретические результаты, используемые при исследовании управляемых систем и задач оптимального управления во второй и третьей главах работы.

В **параграфе 1.1** получена теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки. Рассмотрена следующая задача. Пусть X, Y, Σ – банаховы пространства, $U \subset X$ – выпуклое замкнутое множество. Пусть даны отображение $F : X \times \Sigma \to Y$ и точки $x_* \in U$, $\sigma_* \in \Sigma$, для которых $F(x_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \ \ x \in U, \tag{6}$$

в котором x – неизвестное, а σ – параметр. Говорят, что для уравнения (6) существует непрерывное решение в окрестности (x_*, σ_*), если существуют окрестность O точки σ_* и непрерывная функция $x : \ O \to U$, такая, что $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, $x(\sigma_*) = x_*$.

Для произвольного множества $A \subset X$ через cone$A$ будем обозначать коническую оболочку множества A, то есть $\mathrm{cone}A = \{\lambda x \ : \ x \in A, \lambda > 0\}$. Известно (см. [4]), что решение в задаче (6) существует, если F строго дифференцируема по x равномерно по σ в точке (x_*, σ_*), множество U является замкнутым выпуклым конусом и выполнено условие регулярности Робинсона

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\, \mathrm{cone}(U - \{x_*\}) = Y. \tag{7}$$

Очевидно, условие (7) существенно. Так, например, если $X = U = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} = \Sigma$, $x_* = (0, 0)$, $\sigma_* = 0$, $F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 - \sigma$, где $x = (x_1, x_2)$, то (7) нарушается, и, как несложно видеть, решение в окрестности (x_*, σ_*) не существует. Если же в этом примере положить $F(x, \sigma) = x_1^2 - x_2^2 - \sigma$, то условие (7) также не выполняется, однако решение в этой задаче существует, непрерывно, но не удовлетворяет условию Липшица.

Вопрос о существовании решения в задаче (6) в случае, когда условие Робинсона не выполняется, был изучен А.В. Арутюновым в предположении, что множество U является замкнутым выпуклым конусом (см. [4, 6, 11, 12]). В диссертации этот результат распространен на случай, когда U – замкнутое выпуклое множество. Приведем соответствующий результат.

Введем следующее определение. Пусть $G : X \to Y$ – заданное отображение, $G(x_*) = 0$. Относительно G будем предполагать, что оно дважды дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_*. Обозначим

$$\mathcal{U} = \operatorname{cone}(U - \{x_*\}).$$

Определение 0.1. Пусть существует

$$h \in \mathcal{U}: \quad h \in \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*), \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, h] \in \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U}.$$

Отображение G называется 2-регулярным в точке x_* относительно множества U по направлению h, если имеет место

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, \mathcal{U} \cap \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)] = Y.$$

Будем предполагать, что F удовлетворяет следующим предположениям.

(F1) F дважды непрерывно дифференцируемо по x в некоторой окрестности точки (x_*, σ_*). При каждом σ из некоторой окрестности σ_* отображение $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от σ. Отображения $F(x_*, \cdot)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_*, \cdot)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \cdot)$ непрерывны в точке σ_*. Отображение $F(\cdot)$ непрерывно в окрестности точки (x_*, σ_*).

Положим

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathcal{U}.$$

(F2) Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ конуса V замкнута, и это подпространство топологически дополняемо.

Через π будем обозначать некоторый линейный непрерывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\operatorname{span} V$.

Теорема 0.1. *Пусть относительная внутренность* $\operatorname{ri} V$ *непуста, и отображение* $F(\cdot, \sigma_*)$ 2-*регулярно в точке* x_* *относительно* U *по некоторому направлению* $h \in X$. *Тогда существуют такие окрестность* O *точки* σ_*, *число* $c \geq 0$ *и непрерывное отображение* $x(\cdot) : O \to U$, *что* $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, *и*

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq c \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma) \right\| + \sqrt{\|F(x_*, \sigma)\|} \right) \quad \forall \sigma \in O. \tag{8}$$

В **параграфе 1.2** исследуется задача вычисления константы накрывания линейного оператора на выпуклом конусе. А именно, рассмотрена следующая задача. Пусть задан линейный оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ и векторы $b_1,...,b_s\in\mathbb{R}^n$. Положим

$$K=\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,\langle x,b_j\rangle\le 0, j=\overline{1,s}\}.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение. Известно, что отображение $\Psi:K\to AK$, $\Psi(x)\equiv Ax$ является α-накрывающим для некоторого $\alpha>0$, т.е.

$$\forall\, x_0\in K,\quad \forall\, y\in AK\quad \exists\, x\in K:\quad y=\Psi(x)\quad \text{и}\quad |x-x_0|\le\frac{|y-\Psi(x_0)|}{\alpha}.$$

В **параграфе 1.2** предложен алгоритм, позволяющий за конечное число шагов выразить наибольшую константу накрывания α отображения Ψ через собственные значения некоторых линейных операторов, порождаемых оператором A и векторами b_j, $j=\overline{1,s}$.

Основные результаты первой главы опубликованы в [48].

Вторая глава посвящена достаточным условиям локальной разрешимости управляемых систем и состоит из двух параграфов. В **параграфе 2.1** получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений при наличии смешанных ограничений. Рассмотрена управляемая система дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями и геометрическим ограничением на управление (4).

В качестве допустимых управлений в задаче (4) рассматриваются всевозможные функции $u(\cdot)\in C([t_0,t_0+\tau],\mathbb{R}^m)$, $\tau>0$, для которых выполняется условие $u(t)\in U$ для всех t.

Система (4) называется локально разрешимой в точке (t_0,x_0), если существуют число $\tau>0$ и допустимое управление $u(\cdot)$ такие, что задача Коши

$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\ \ x(t_0)=x_0,$$

на отрезке $[t_0,t_0+\tau]$ имеет решение $x(\cdot)$, для которого выполняется условие

$$g(t,x(t),u(t))=0\ \ \forall t\in[t_0,t_0+\tau].$$

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 2.1**. Пусть задана точка $u_0 \in U$, для которой $g(t_0, x_0, u_0) = 0$, и некоторое $\gamma > 0$. Положим $D = [t_0, t_0 + \gamma] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Будем предполагать, что функция $f : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори: при п.в. t функция $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна; при любых (x, u) функция $f(\cdot, x, u)$ измерима; существуют такая суммируемая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и число $\tau > 0$, что $|f(t, x, u)| \leq \psi(t)$ для п.в. $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, для любых $u \in B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Предположим, что для любых $(t, x) \in D$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по u на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, причем соответствующие производные непрерывны по совокупности переменных в окрестности точки (t_0, x_0, u_0), а отображение $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, x, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$ для любых $(t, x) \in D$ с константой Липшица, не зависящей от (t, x).

Теорема 0.2. *Пусть существует такой вектор $h \in \mathbb{R}^m$, что функция $g(t_0, x_0, \cdot)$ 2-регулярна по переменной u в точке u_0 относительно U по направлению h. Тогда система (4) локально разрешима в точке (t_0, x_0).*

В **параграфе 2.2** приведены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями. Рассмотрена управляемая система дифференциальных включений со смешанными ограничениями, геометрическим ограничением на управление и дифференциальным включением, не разрешенным относительно старшей производной (5).

Для этой системы допустимые управления рассматриваются в классе $L_\infty([t_0, t_1], U)$.

Управляемую систему (5) будем называть локально разрешимой, если существуют число $\tau > 0$, допустимое управление $u(\cdot)$, абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ такие, что функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$0 \in F(t, x, \dot{x}, u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$, и для почти всех $t \in [t_0, t_0+\tau]$ выполнено включение

$$0 \in G(t, x(t), u(t)).$$

Пару (x, u) в этом случае принято называть решением системы (5) на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 2.2**. Будем предполагать, что отображения F и G удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть:

1) отображения $F(\cdot, x, z, u)$ и $G(\cdot, x, u)$ измеримы для всех $x, z \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

2) отображения $F(t, \cdot)$ и $G(t, \cdot)$ непрерывны для п.в. $t \in [t_0, t_1]$;

3) для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что если $|x| + |z| + |u| \le R$, то $|y| \le M$ для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, для всех $y \in F(t, x, z, u)$.

Прежде чем сформулировать основной результат **параграфа 2.2**, напомним необходимые определения. Пусть X, Y – метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно, и задано число $\alpha > 0$.

Определение 0.2. (см. [7]) Многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ называется α-накрывающим, если

$$F(B_X(x_0, r)) \supseteq B_Y(F(x_0), \alpha r) \quad \forall r \ge 0, \quad \forall x_0 \in X.$$

Определение 0.3. (см. [7]) Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица в константой $L \ge 0$, если

$$h(F(x_1), F(x_2)) \le L\rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

В этом определении h – это обобщенное расстояние по Хаусдорфу.

Пусть заданы функции $x_0 \in AC_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in L_\infty([t_0, t_1], U)$, $f_0 \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^k)$, $g_0 \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^s)$ такие, что

$$f_0(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), \quad g_0(t) \in G(t, x(t), u(t)) \ \ \dot{\forall} t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 0.3. *Предположим, что*

a) отображения $F(t,\cdot,v,u)$, $F(t,x,v,\cdot)$, $G(t,\cdot,u)$ *удовлетворяют условию Липшица с константами* $L_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$ *и* $L_3 \geq 0$, *соответственно, для п.в.* $t \in [t_0,t_1]$, *для всех* $x,v \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

b) отображения $F(t,x,\cdot,u)$, $G(t,x,\cdot)$ *являются накрывающими с константами* $\alpha_F > 0$ *и* $\alpha_G > 0$, *соответственно, для п.в.* $t \in [t_0,t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$.

Тогда управляемая система (5) локально разрешима. Причем для всех $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in (0,\tau_0)$, *где* $\tau_0 = \dfrac{\alpha_F\alpha_G}{L_2L_3 + L_1\alpha_G}$, *существует решение* (x,u) *системы (5) на отрезке* $[t_0,t_0+\tau]$ *такое, что выполнены оценки*

$$|x_0(t) - x(t)| \leq \tau\left[\frac{L_2\|g_0\|_\infty + \alpha_G\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\alpha_G - \tau L_2L_3} + \varepsilon\right] \quad \dot{\forall} t \in [t_0,t_0+\tau],$$

$$|u_0(t) - u(t)| \leq \frac{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\|g_0\|_\infty + \tau L_3\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_1\Big)\alpha_G - \tau L_2L_3} + \varepsilon \quad \dot{\forall} t \in [t_0,t_0+\tau].$$

Основные результаты второй главы опубликованы в [46], [47].

Третья глава посвящена проблемам оптимального управления и состоит из четырех параграфов. В **параграфе 3.1** приведены постановки задач оптимального управления в дискретном и непрерывном времени. В **параграфе 3.2** получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной задачи оптимального управления (1).

Допустимым процессом в задаче (1) будем называть пару (x,u), $u = \big(u(0),...,u(N)\big)$, $u(i) \in \mathbb{R}^m$, $i = \overline{0,N}$, $x = \big(x(0),...,x(N+1)\big)$, $x(i) \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,N+1}$, такую что u удовлетворяет условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [0,N]$, а x является решением разностного уравнения $x(t+1) = f(t,x(t),u(t))$, $t \in [0,N]$, с начальным условием $x(0) = x_0$.

Допустимый процесс $(\bar{x},\bar{u})$ назовем локально оптимальным процессом в задаче (1), если $\varphi(\bar{x}(N+1)) \leq \varphi(x(N+1))$ для всех допустимых процессов (x,u) из некоторой окрестности оптимального процесса $(\bar{x},\bar{u})$.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.2**. Для $p \in \mathbb{R}^n$ положим

$$H(t,x,u,p) := p^T f(t,x,u).$$

Теорема 0.4. *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u})$ *– локально оптимальный процесс в задаче* (1). *Пусть также функция* φ *удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки* $\bar{x}(N+1)$, *дифференцируема в этой точке и для всех* $t \in [0,N]$ *выполняются следующие предположения: функция* $f(t,\cdot,\cdot)$ *непрерывна, функция* $f(t,\cdot,\bar{u}(t))$ *дифференцируема в точке* $x = \bar{x}(t)$, *множества* $U(t)$ *замкнуты, множества* $f(t,\bar{x}(t),U(t))$ *выпуклы.*

Тогда существует решение $p : [0,N] \to \mathbb{R}^n$ *сопряженной системы*

$$\begin{aligned} &p(t) = H_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t+1)), \quad t \in [0,N], \\ &p(N+1) = -\varphi_x(\overline{x}(N+1)), \end{aligned} \tag{9}$$

для которого выполняется условие максимума

$$H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t+1)) = \max_{u \in U(t)} H(t,\overline{x}(t),u,p(t+1)), \quad t \in [0,N]. \tag{10}$$

Отметим, что приведенная теорема усиливает известные условия оптимальности первого порядка (см. [53]), поскольку в ней предполагается, что функция f дифференцируема по x *лишь в точке* $\bar{x}(t)$, а не в целой окрестности точки $\bar{x}(t)$, и лишь при $u = \bar{u}(t)$. Множества $f(t,\bar{x}(t),U(t))$ предполагаются выпуклыми также только при $x = \bar{x}(t)$, а не в окрестности точки $\bar{x}(t)$.

В **параграфе 3.3** получены необходимые условия оптимальности второго порядка для особых управлений для задачи оптимального управления с непрерывным временем (2).

Допустимым управлением в задаче (2) является такая измеримая функция $u : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$, что $u(t) \in U(t)$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]$. Пару (x,u) будем называть допустимым процессом, если u – это допустимое управление, а x – решение задачи Коши $\dot{x} = f(t,x,u(t))$, $x(t_0) = x_0$.

Определение 0.4. (см. [22]) Допустимый процесс $(\bar{x},\bar{u})$ называется понтрягинским локальным минимумом, если для каждого $c > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(c) > 0$

такое, что для всех допустимых процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условиям

$$|x(t_1) - \bar{x}(t_1)| + \mu\{t \in [t_0, t_1] | \, u(t) \neq \bar{u}(t)\} \leq \varepsilon, \quad |u(t)| \leq C \;\; \forall t \in [t_0, t_1],$$

выполняется неравенство $\varphi(x(t_1)) \geq \varphi(\bar{x}(t_1))$. Здесь μ обозначает меру Лебега.

Допустимое управление $u(\cdot)$ называется особым на отрезке $[t_2, t_3] \subset [t_0, t_1]$, если для почти всех $t \in [t_2, t_3]$ существует точка $w \in U(t)$ такая, что $u(t) \neq w$ и

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = H(t, x(t), w, p(t)).$$

Здесь $x(\cdot)$ – траектория, соответствующая управлению $u(\cdot)$, $H : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H(t, x, u, p) \equiv p^T f(t, x, u)$ – функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (2), $p(\cdot)$ – решение сопряженной системы $\dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t))$ с концевым условием $p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))$.

Одной из первых работ, посвященных исследованию особых управлений, является работа [59]. Особые управления изучались многими авторами (см., например, [34, 73]). Условия глобального минимума для кусочно-непрерывных управлений были вначале получены в предположении непрерывности функции f по t и при условии $U(t) \equiv \mathrm{const}$. Затем этот результат был распространен в [57] на случай измеримой по t функции f.

В **параграфе 3.3** получены необходимые условия локального (а не глобального) понтрягинского минимума для задачи (2). Соответствующие результаты получены методом конечномерных аппроксимаций. Метод заключается в сведении бесконечномерной задачи (2) к последовательности конечномерных задач и получению условий оптимальности в исходной задаче с помощью предельного перехода. Этот подход применялся ранее для получения условий оптимальности в задачах с концевыми ограничениями (см. [22, 62, 66]), в задачах с фазовыми ограничениями при более слабых предположениях дифференцируемости (см. [82]).

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.3**. Для симметричной матрицы A и векторов y, y_1, y_2 соответствующей одинаковой размерности положим

$$A[y]^2 := y^T Ay, \;\; A[y_1, y_2] := y_1^T Ay_2.$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned}
&f_x(t) := f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\\
&\Delta_v f(\theta) := f(\theta, \bar{x}(\theta), v(\theta)) - f(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}(\theta)).
\end{aligned}$$

Фундаментальную матрицу решений линейного дифференциального уравнения

$$\dot{r}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))r, \; t \in [t_0, t_1],$$

обозначим через $\Phi(\cdot, \cdot)$.

Положим

$$p^T(t) := -\varphi_x^T(\bar{x}(t_1))\Phi(t_1, t), \;\; t \in [t_0, t_1]. \tag{11}$$

В силу свойств фундаментальной матрицы функция p удовлетворяет сопряженной системе:

$$\dot{p}^T(t) = -p^T(t) f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \;\; p(t_1) = -\varphi_x(\bar{x}(t_1)). \tag{12}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&H(t, x, u, p) = p^T f(t, x, u),\\
&H_x(t) := H_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)), \;\; H_{xx}(t) := H_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)),\\
&\Delta_v H_x(t) := H_x(t, \bar{x}(t), v(t), p(t)) - H_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)).
\end{aligned}$$

Определим матричную функцию $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, как решение уравнения

$$\dot{\Psi}(t) = H_{xx}(t) - f_x^T(t)\Psi(t) - \Psi(t) f_x(t) \tag{13}$$

с концевым условием

$$\Psi(t_1) = \varphi_{xx}(\bar{x}(t_1)). \tag{14}$$

Теорема 0.5. *Пусть функция* $f(\cdot, x, u)$ *непрерывна справа для всех* (x, u). *Предположим, что пара* $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ *является понтрягинским локальным минимумом в задаче (2), функция* $\bar{u}(\cdot)$ *непрерывна справа,* $v(\cdot)$ *– такая непрерывная функция, что* $v(t) \in U(t)$ *для почти всех* $t \in [t_0, t_1]$ *и существует отрезок* $[t_2, t_3] \subset [t_0, t_1]$ *такой, что* $v(t) \neq \bar{u}(t)$ *для почти всех* $t \in [t_2, t_3]$ *и выполнено*

$$H(t, \bar{x}(t), v(t), p(t)) \equiv H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) \quad \forall t \in [t_2, t_3], \tag{15}$$

где $p(\cdot)$ *– решение сопряженной системы* (12).

Тогда

$$\Psi(t)[\Delta_v f(t)]^2 - \Delta_v H_x^T(t) \Delta_v f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_2, t_3]. \tag{16}$$

В **параграфе 3.4** третьей главы исследованы свойства функции минимума для линейной задачи оптимального управления. Пусть заданы симметричные матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k размерности $n \times n$ с действительными элементами, причем эти матрицы попарно коммутируют. Определим квадратичную форму $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ по формулам

$$q_0(x) = \langle Q_0 x, x \rangle, \;\; Q(x) = \begin{pmatrix} \langle Q_1 x, x \rangle \\ \vdots \\ \langle Q_k x, x \rangle \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Иными словами, квадратичное отображение – это вектор-функция, каждая координата которой является квадратичной формой.

Рассмотрим задачу оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями (3). Будем предполагать, что квадратичное отображение Q сюръективно, то есть $Q(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$.

Допустимым процессом в задаче (3) назовем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ такую, что абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(0) = 0$, и удовлетворяет условию $Q(x(1)) = y$, а управление $u(\cdot)$ является измеримым существенно ограниченным. Под решением задачи

(3) будем понимать допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, на котором достигается условный минимум функционала $(x(\cdot), u(\cdot)) \mapsto q_0(x(1))$.

Для каждого $y \in \mathbb{R}^k$ через $\omega(y)$ обозначим оптимальное значение в задаче (3), то есть

$$\omega(y) = \inf\Big\{q_0(x(1)) :\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ t \in [0,1], x(0) = 0, Q(x(1)) = y\Big\}.$$

Таким образом определим в задаче (3) функцию минимума $\omega : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$.

Целью **параграфа 3.4** является исследование дифференциальных и топологических свойств функции ω. Свойства функции минимума в различных задачах оптимизации и оптимального управления изучаются во многих работах. Так, например, Ф. Кларком в [54] исследована функция минимума для задачи минимизации функционала $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при ограничениях типа равенств и неравенств и геометрических ограничениях $x \in C \subset \mathbb{R}^n$. В предположении, что значение функции минимума конечно в нуле и множества $\{x \in C\ :\ f(x) \leq r\}$ компактны для всех $r \in \mathbb{R}$, получена формула для обощенного градиента функции минимума, а также условия строгой дифференцируемости функции минимума. А. Дончевым в [41] используется несколько другой подход к изучению поведения функции минимума – теория чувствительности. Рассматривается задача условной минимизации в функциональных пространствах. Приводятся оценки функции минимума, зависящие от параметра. А.В. Арутюновым в [10] исследованы свойства функции минимума для квадратичной задачи минимизации.

Приведем основной результат, полученный в **параграфе 3.4**. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi, \\ \Psi(0) = E, \end{cases} \tag{17}$$

где E – единичная матрица. Таким образом, Ψ – фундаментальная матрица системы $\dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi$. Обозначим через $\xi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, столбцы матрицы $B^*(t)\Psi(t)$, $t \in [0,1]$.

Теорема 0.6. *Предположим, что выполняются следующие условия:*
а) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i(t) \not\equiv 0$ *для всех* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$;
б) $q_0(x) \geq 0$ *для всех* x, *таких что* $Q(x) = 0$.

Тогда

1) функция ω *выпукла;*

2) функция ω *удовлетворяет условию Липшица;*

3) функция ω *дифференцируема во всех точках* $\mathbb{R}^k$, *кроме, быть может, точек, принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.*

Основные результаты третьей главы опубликованы в [17, 45, 49, 50, 86].

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

Научная новизна. В диссертационной работе получены принципиально новые результаты, касающиеся достаточных условий локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений и систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями. Они основаны на полученной автором теореме о неявной функции в окрестности анормальной точки. Также в работе доказаны новые результаты относительно необходимых условий оптимальности второго порядка для дискретной и непрерывной задач оптимального управления. Кроме того, разработан принципиально новый алгоритм вычисления константы накрывания линейного оператора на конусе. Наконец, получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для одного класса задач оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.

Перечислим **научные положения, выносимые на защиту**.

- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями.

- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями.

- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной задачи оптимального управления.

- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для особых управлений для задачи оптимального управления с непрерывным временем.

- Получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для задачи оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.

- Доказана теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки (т.е. точки, в которой нарушается условие регулярности Робинсона).

Достоверность научных положений обусловлена строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 8 работах, список которых приведен в конце диссертации (см. [17, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 86]). Все 8 указанных работ опубликованы в журналах из списка ВАК РФ. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- научный семинар "Прикладные задачи системного анализа"под руководством академика А. Б. Куржанского на кафедре системного анализа ВМК МГУ,

- научный семинар "Экстремальные задачи и нелинейный анализ"под руководством профессора А. В. Арутюнова на кафедре нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук РУДН,

- конференция "Тихоновские чтения - 2013"(г. Москва, 2013),
- всероссийская научно-практическая конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация"(г. Москва, 2013 г.),
- международная научная конференция "Колмогоровские чтения - VI. Общие проблемы управления и их приложения"(г. Тамбов, 2013).

Автор диссертации выражает огромную благодарность научному руководителю Араму Владимировичу Арутюнову за постановку задач, постоянное внимание к работе, ценные замечания и поддержку.

Глава 1

Теоретический аппарат

1.1 Теорема о неявной функции

Пусть заданы банаховы пространства X, Y, топологическое пространство Σ, выпуклое замкнутое множество $U \subset X$. Пусть даны отображение $F : X \times \Sigma \to Y$ и точки $x_* \in U$, $\sigma_* \in \Sigma$, для которых $F(x_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \ \ x \in U, \tag{1.1}$$

в котором x – неизвестное, а σ – параметр. Будем говорить, что для уравнения (1.1) существует непрерывное решение в окрестности (x_*, σ_*), если существуют окрестность O точки σ_* и непрерывная функция $x : O \to U$, такая, что $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, $x(\sigma_*) = x_*$.

Известно (см., например, [4]), что решение уравнения в задаче (1.1) существует, если F строго дифференцируема по x равномерно по σ в точке (x_*, σ_*), множество U является замкнутым выпуклым конусом и выполнено условие регулярности Робинсона

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathrm{cone}(U - \{x_*\}) = Y. \tag{1.2}$$

Очевидно, условие (1.2) существенно. Так, например, если $X = U = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} = \Sigma$, $x_* = (0, 0)$, $\sigma_* = 0$, $F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 - \sigma$, где $x = (x_1, x_2)$, то (1.2) нарушается, и, как несложно видеть, решение уравнения в окрестности (x_*, σ_*) не существует. Если же в этом примере положить $F(x, \sigma) = x_1^2 - x_2^2 - \sigma$, то условие (1.2) также не выполняется, однако решение уравнения в этой задаче существует, непрерывно, но не удовлетворяет условию Липшица.

Вопрос о существовании решения в задаче (1.1) в случае, когда условие Робинсона не выполняется, был подробно изучен А.В. Арутюновым в работах [4, 6, 11, 12] в предположении, что множество U является замкнутым выпуклым конусом. В настоящем параграфе этот результат обобщен на случай, когда U – замкнутое выпуклое множество.

Введем следующее определение. Пусть $G : X \to Y$ – заданное отображение, $G(x_*) = 0$. Относительно G будем предполагать, что оно дважды дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_*. Обозначим

$$\mathcal{U} = \operatorname{cone}(U - \{x_*\}).$$

Определение 1.1. Пусть существует

$$h \in \mathcal{U}: \quad h \in \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*), \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h,h] \in \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U}.$$

Отображение G назовем 2-регулярным в точке x_* относительно множества U по направлению h, если имеет место

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, \mathcal{U} \cap \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)] = Y.$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования решения в задаче (1.1). Всюду далее будем предполагать, что F удовлетворяет следующим предположениям.

(F1) F дважды непрерывно дифференцируемо по x в некоторой окрестности точки (x_*, σ_*). При каждом σ из некоторой окрестности σ_* отображение $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от σ. Отображения $F(x_*, \cdot)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_*, \cdot)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \cdot)$ непрерывны в точке σ_*. Отображение $F(\cdot)$ непрерывно в окрестности точки (x_*, σ_*).

Положим

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathcal{U}.$$

(F2) Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ конуса V замкнута, и это подпространство топологически дополняемо.

Через π будем обозначать некоторый линейный непрерывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\operatorname{span} V$.

Теорема 1.1. *Пусть относительная внутренность* $\mathrm{ri}V$ *непуста, и отображение* $F(\cdot, \sigma_*)$ *2-регулярно в точке* x_* *относительно* U *по некоторому направлению* $h \in X$. *Тогда существуют такие окрестность* O *точки* σ_*, *число* $c \geq 0$ *и непрерывное отображение* $x(\cdot) : O \to U$, *что* $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$, *и*

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq c\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)\right\| + \sqrt{\|F(x_*, \sigma)\|}\right) \quad \forall \sigma \in O. \tag{1.3}$$

Доказательство теоремы 1.1 основано на редукции задачи (1.1) с выпуклым множеством U к задаче, в которой U уже является выпуклым конусом, с последующим применением результата из [4]. Введем необходимые обозначения. Пусть $\widetilde{X}$ – банахово пространство, $\widetilde{K} \subset \widetilde{X}$ – замкнутый выпуклый конус. Заданы отображение $\widetilde{F} : \widetilde{X} \times \Sigma \to Y$ и точка $\widetilde{x}_* \in \widetilde{K}$, для которой $\widetilde{F}(\widetilde{x}_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}, \sigma) = 0, \ \ \widetilde{x} \in \widetilde{K}.$$

Приведем достаточные условия существования решения для этой задачи.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \widetilde{K} + \operatorname{span}\{\widetilde{x}_*\}, \ \ C = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma_*)\widetilde{\mathcal{K}}.$$

Всюду далее будем считать, что $\widetilde{F}$ удовлетворяет следующему предположению.

(F3) Линейная оболочка $\operatorname{span} C$ конуса C замкнута и это подпространство топологически дополняемо.

Через P будем обозначать линейный непрерывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\operatorname{span} C$.

В [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть $\widetilde{F}$ удовлетворяет предположению* **(F1)**, *относительная внутренность* $\mathrm{ri}C$ *непуста и*

$$\exists\, \widetilde{h} \in \widetilde{\mathcal{K}} \cap \ker \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma_*): \quad -\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}^2}(\widetilde{x}_*, \sigma_*)[\widetilde{h}, \widetilde{h}] \in C,$$

$$C + \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}^2}(\widetilde{x}_*, \sigma_*)[\widetilde{h}, \widetilde{\mathcal{K}} \cap \ker \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma_*)] = Y.$$

Тогда для произвольного $l \in \mathrm{ri}C$ существуют такие окрестность O точки σ_*, числа $c \geq 0$, $\delta > 0$ и непрерывное отображение $\widetilde{x}(\cdot) : O \to U$, что $\widetilde{F}(\widetilde{x}(\sigma), \sigma) \equiv 0$ и

$$\|\widetilde{x}(\sigma) - \widetilde{x}_*\| \leq c\big(\widetilde{\Delta}_1(\sigma) + \widetilde{\Delta}_2(\sigma) + \widetilde{\Delta}_3(\sigma) + \widetilde{\Delta}_4(\sigma)\big) \quad \forall \sigma \in O. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\widetilde{\Delta}_1(\sigma) = \sup\left\{\left\|P\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma)\widetilde{x}\right\| \,:\, \widetilde{x} \in \mathrm{span}\, \widetilde{K}, \quad \|\widetilde{x}\| \leq 1\right\},$$

$$\widetilde{\Delta}_2(\sigma) = \sup\left\{\left\|\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma)\widetilde{x}\right\| \,:\, \widetilde{x} \in \ker \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma_*) \cap \widetilde{\mathcal{K}}, \quad \|\widetilde{x}\| \leq 1\right\},$$

$$\widetilde{\Delta}_3(\sigma) = \left\|\widetilde{F}(\widetilde{x}_*, \sigma)\right\|,\ \widetilde{\Delta}_4(\sigma) = \rho(-\widetilde{F}(\widetilde{x}_*, \sigma), C_\delta)^{\frac{1}{2}},\ C_\delta = \mathrm{cone}(B_Y(l, \delta)) \cap \mathrm{span}\, C.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\widetilde{X} = \mathbb{R} \times X$ – линейное пространство векторов $\widetilde{x} = (\chi, x)$ с нормой $\|\widetilde{x}\| = \max\{|\chi|, \|x\|\}$. В силу предположений теоремы, $\widetilde{X}$ – банахово пространство.

Положим

$$\widetilde{x}_* = (1, x_*), \ \ \widetilde{K} = \left\{\widetilde{x} = \lambda(1, u) \in \widetilde{X} \,:\, \lambda \geq 0,\, u \in U\right\}.$$

Заметим, что $\widetilde{K} \subseteq \widetilde{X}$ является замкнутым выпуклым конусом.

Рассмотрим отображение $\widetilde{F} : B_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}_*, 1/2) \times \Sigma \to Y$, определенное равенством

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}, \sigma) = F\left(x/\chi, \sigma\right) \ \ \forall\, \widetilde{x} = (\chi, x).$$

Из предположений теоремы, очевидно, следует, что отображение $\widetilde{F}$ дважды непрерывно дифференцируемо по $\widetilde{x}$ равномерно по σ в некоторой окрестности точки $(\widetilde{x}_*, \sigma_*)$ при каждом σ из некоторой окрестности Ω точки σ_*. Для $\sigma \in \Omega$ введем обозначения:

$$A(\sigma) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma), \;\; Q(\sigma) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \sigma), \;\; \widetilde{A}(\sigma) = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}_*, \sigma), \;\; \widetilde{Q}(\sigma) = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}^2}(\widetilde{x}_*, \sigma).$$

Непосредственным вычислением проверяется, что эти отображения удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{A}(\sigma)\widetilde{x} = A(\sigma)(x - \chi x_*), \tag{1.5}$$

$$\widetilde{Q}(\sigma)[\widetilde{x}, \widetilde{x}] = Q(\sigma)[x, x] - 2(A(\sigma)x + Q(\sigma)[x_*, x])\chi + (2A(\sigma)x_* + Q(\sigma)[x_*, x_*])\chi^2 \tag{1.6}$$

для любого $\widetilde{x} = (\chi, x) \in \widetilde{X}$.

Из определения 1.1 и предположений теоремы следует, что существуют $\xi \in U$, $\tau > 0$, такие, что $h = \tau(\xi - x_*)$, $\tau A(\sigma_*)(\xi - x_*) = 0$, $-\tau^2 Q(\sigma_*)[\xi - x_*, \xi - x_*] \in A(\sigma_*)\mathcal{U}$ и

$$V + \tau Q(\sigma_*)[\xi - x_*, \mathcal{U} \cap \mathrm{ker} A(\sigma)] = Y.$$

Покажем, что отображение $\widetilde{F}$, конус $\widetilde{K}$ и вектор $\widetilde{h} = \tau(0, \xi - x_*)$ удовлетворяют предположениям теоремы 1.2. Отображение F удовлетворяет предположениям **(F1)**, **(F2)**, следовательно, $\widetilde{F}$ удовлетворяет предположениям **(F1)**, **(F3)**. Кроме того, из (1.5), (1.6) следует

$$\widetilde{A}(\sigma_*)\widetilde{h} = \tau A(\sigma_*)(\xi - x_*) = 0, \;\; C = V,$$

$$-\widetilde{Q}(\sigma_*)[\widetilde{h}, \widetilde{h}] = -\tau^2 Q(\sigma_*)\big[\xi - x_*, \xi - x_*\big] \in V = C,$$

$$C + \widetilde{Q}(\sigma_*)[\widetilde{h}, \widetilde{\mathcal{K}} \cap \mathrm{ker}\widetilde{A}(\sigma_*)] = V + \tau Q\big[\xi - x_*, \mathrm{cone}(U - x_*)\big] = Y.$$

Из равенства $C = V$ вытекает, что $\mathrm{ri} C \neq \emptyset$.

Согласно теореме 1.2 существуют такие окрестность O точки σ_*, числа $c \geq 0$, $\delta > 0$ и непрерывное отображение $\widetilde{x}(\cdot) : O \to \widetilde{K}$, $\widetilde{x}(\sigma) = (\chi(\sigma), x(\sigma))$, что $\widetilde{F}(\widetilde{x}(\sigma), \sigma) \equiv 0$, и выполнена оценка (1.4). Поскольку $\chi(\sigma_*) = 1$, не теряя общности можем считать, что $\chi(\sigma) > 2^{-1}$ для любого $\sigma \in O$. Очевидно, что функция $x : \sigma \mapsto \chi^{-1}(\sigma)x(\sigma)$, определенная на O, является искомой.

Неравенство (1.3) очевидно следует из предыдущих построений и неравенства (1.4). □

1.2 Накрывание линейных операторов на выпуклых конусах

Пусть X, Y – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть задано число $\alpha > 0$. Напомним определение накрывающего отображения из [7].

Определение 1.2. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\Psi(x_0), \alpha r) \subset \Psi\big(B_X(x_0, r)\big) \quad \forall x_0 \in X, \forall r \geq 0.$$

Число $\alpha > 0$ называется константой накрывания отображения Ψ.

В [7] понятие накрывающего отображения было использовано для получения достаточных условий существования точки совпадения двух отображений метрических пространств. В [14] была доказана устойчивость точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений. Накрывающие отображения используются при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [11]), при исследовании абстрактных и интегральных уравнений Вольтерра (см. [67]).

Легко видеть, что если $\Psi(X) \neq Y$, то отображение Ψ не будет накрывающим ни с какой константой $\alpha > 0$. Тем не менее, и в этом случае на отображение Ψ можно распространить понятие условной α-накрываемости. Приведем соответствующее определение из [1].

Определение 1.3. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется условно α-накрывающим, если имеет место включение

$$B_Y(\Psi(x_0), \alpha r) \cap \Psi(X) \subset \Psi(B_X(x_0, r)) \quad \forall x_0 \in X, \forall r \geq 0.$$

Число $\alpha > 0$ называется константой условного накрывания отображения Ψ. Точную верхнюю границу всех констант условного накрывания отображения Ψ будем обозначать через $\mathrm{cov}(\Psi)$.

Заметим, что условная α-накрываемость отображения Ψ равносильна тому, что

$$\forall x_0 \in X, \forall y \in \Psi(X) \quad \exists x \in X \, : \, \Psi(x) = y, \;\; \rho_X(x_0, x) \leq \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\Psi(x_0), y).$$

Пусть задан линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Для произвольного выпуклого замкнутого конуса $N \in \mathbb{R}^n$ через $A|_N$ обозначим сужение оператора A на конус N. Для произвольных векторов $x, u \in \mathbb{R}^n$ через $\langle x, u\rangle$ будем обозначать их скалярное произведение, а через $|x|$ – норму вектора x. Пусть определены векторы $b_1, ..., b_s \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle x, b_j\rangle \leq 0, j = \overline{1, s}\}.$$

Известно, что $\mathrm{cov}(A|_K) > 0$. Цель настоящего параграфа заключается в вычислении константы условного накрывания отображения $A|_K$, а также числа $\mathrm{cov}(A|_K)$.

Алгоритм

Введем нужные обозначения. Пусть, как обычно, $\mathrm{ker}A$ – ядро оператора A, $\mathrm{span}M$ – линейная оболочка множества M. Положим $\min\{\emptyset\} = +\infty$.

Пусть I_1, $I_2 \subset \{1, 2, ..., s\}$ – произвольные непересекающиеся множества индексов. Для конуса

$$C = C(I_1, I_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle x, b_i\rangle \leq 0, \, i \in I_1, \quad \langle x, b_i\rangle = 0, \, i \in I_2\}$$

через $M(I_1, I_2)$ обозначим $\mathrm{span}\, C$, а через $d(I_2)$ – количество элементов множества I_2 (т.е. количество равенств, определяющих конус C). Пусть также $L(I_1, I_2)$ – подпространство $M(I_1, I_2)$, которое ортогонально дополняет $\mathrm{ker}A|_{M(I_1,I_2)}$ до самого $M(I_1, I_2)$.

Приведем алгоритм решения поставленной задачи.

1 шаг. Введем вспомогательные параметры $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, Θ. Здесь $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ будут некоторыми множествами пар (I_1, I_2), таких что I_1, $I_2 \subset \{1, ..., s\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, а Θ – подмножеством вещественных чисел. Положим $\mathcal{I} := \Big\{ \big(\{1, ..., s\}, \emptyset \big) \Big\}$, $\mathcal{J} := \emptyset$, $\Theta := \emptyset$. То есть вначале множество $\mathcal{I}$ состоит из одного элемента, а множества $\mathcal{J}$ и Θ пусты.

2 шаг. Зафиксируем произвольный элемент $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}$. Возьмем произвольный номер $j \in I_1$ и рассмотрим следующие две системы. Первая система имеет вид

$$\langle b_j, x \rangle \leq 0, \quad \langle b_i, x \rangle = 0, \ i \in I_2,$$

а вторая система имеет вид

$$\langle b_i, x \rangle \leq 0, \ i \in I_1 \backslash \{j\}, \quad \langle b_k, x \rangle = 0, \ k \in I_2.$$

Если первая система является следствием второй системы, то удаляем индекс j из множества I_1. В противном случае I_1 оставляем без изменений. Переберем таким образом для пары (I_1, I_2) все индексы из множества I_1. Далее осуществим описанную процедуру для каждого из оставшихся элементов (I_1, I_2) множества $\mathcal{I}$.

3 шаг. Зафиксируем произвольный элемент $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}$. Если для (I_1, I_2) имеет место соотношение

$$\langle h, b_j \rangle = 0 \qquad \forall h \in \ker A|_{M(I_1, I_2)}, \ \ \forall j \in I_1 \cup I_2, \tag{1.7}$$

то добавим элемент (I_1, I_2) во множество $\mathcal{J}$, а из множества $\mathcal{I}$ его удалим. В противном случае оставим множества $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ без изменения. Ту же процедуру осуществим для всех оставшихся элементов (I_1, I_2) множества $\mathcal{I}$.

4 шаг. Если множество $\mathcal{I}$ пусто, то переходим к шагу 5.

Если $\mathcal{I}$ непусто, то каждый элемент $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}$ заменим в $\mathcal{I}$ набором пар $\Big(I_1 \backslash \{j\}, I_2 \cup \{j\} \Big)$, $j \in I_1$, и перейдем к шагу 2.

5 шаг. Для каждого элемента $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}$ положим

$$B := A|_{L(I_1, I_2)}, \quad \Theta := \Theta \cup \Big\{ \sqrt{\min \Lambda} \Big\}, \tag{1.8}$$

где Λ – множество собственных значений оператора B^*B.

6 шаг. Вычислим $\mathrm{cov}(A|_K)$ по формуле

$$\mathrm{cov}(A|_K) = \min \Theta. \tag{1.9}$$

Обоснование алгоритма

Покажем сначала, что для любых начальных данных (линейного оператора A и набора векторов b_j, $j = \overline{1,s}$) алгоритм заканчивается за конечное число шагов. Шаги 2-4 представляют собой цикл, условием выхода из которого является пустота множества $\mathcal{I}$. Поэтому достаточно показать, что множество $\mathcal{I}$ станет пустым за конечное число шагов.

Действительно, множество всех рассматриваемых пар (I_1, I_2) конечно. Обозначим количество элементов в нем через $\gamma(s)$. Каждый раз при выполнении третьего шага алгоритма из множества $\mathcal{I}$ во множество $\mathcal{J}$ перемещаются те элементы (I_1, I_2), для которых условие (1.7) выполняется. Оставшиеся в $\mathcal{I}$ после этой процедуры элементы (I_1, I_2) заменяются в $\mathcal{I}$ множеством элементов $\Big(I_1 \backslash \{j\}, I_2 \cup \{j\}\Big)$, $j \in I_1$, и выполняется второй шаг. По построению для каждой пары (I_1, I_2) число $d(I_2)$ не превышает количества элементов множества $I_1 \cup I_2$, которое, в свою очередь, не превосходит s. Причем при каждом следующем повторении цикла число $d(I_2)$ увеличивается на единицу. Следовательно, на некотором шаге, если только множество $\mathcal{I}$ не стало пустым ранее, для любой пары $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}$ число $d(I_2)$ совпадет с количеством элементов множества $I_1 \cup I_2$. В этом случае для всех $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}$ выполняется (1.7). Очевидно, что для произвольной пары (I_1, I_2), если только условие (1.7) не выполнится ранее, число $d(I_2)$ совпадет с количеством элементов в (I_1, I_2), не более чем за s повторений цикла. Поэтому число шагов, за которое множество $\mathcal{I}$ станет пустым, не превышает $\gamma(s)s$.

Покажем теперь, что для множества Θ, построенного на пятом шаге алгоритма, выполняется равенство (1.9). Для этого докажем сначала, что $\Theta = \{\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \ : \ (I_1, I_2) \in \mathcal{J}\}$ для множества $\mathcal{J}$, используемого на пятом шаге алгоритма. Сформулируем вспомогательные утверждения. Доказательства этих и последующих результатов будут приведены ниже. Пусть, как обычно, $^{\perp}$ – ортогональное дополнение подпространства в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{R}^n \to (\mathrm{ker} A)^{\perp}$ оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^n$ на $(\mathrm{ker} A)^{\perp}$.

Лемма 1.3. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\langle h, b_j \rangle = 0 \qquad \forall h \in \mathrm{ker} A,\, \forall j = \overline{1, s}. \tag{1.10}$$

Тогда

$$\mathrm{cov}(A|_K) = \mathrm{cov}(A|_{\mathrm{span}\Pi K}).$$

Отметим, что если $K = \mathbb{R}^n_+$, т.е. $s = n$, а $\{b_j\}$ - ортонормированный базис, то предположение (1.10) равносильно тому, что оператор A инъективен. При этом $\mathrm{span}\Pi K = \mathbb{R}^n$ и, значит, $\mathrm{cov}(A|_K)$ совпадает с константой условного накрывания оператора A.

Лемма 1.4. *Пусть линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ инъективен. Тогда*

$$\mathrm{cov}(A) = \sqrt{\min \Lambda},$$

где Λ – множество собственных чисел оператора A^*A.

Таким образом, в силу леммы 1.3 для любого конуса $C(I_1, I_2)$, $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}$, выполняется равенство $\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) = \mathrm{cov}(A|_{L(I_1,I_2)})$. Из леммы 1.4 следует, что $\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) = \sqrt{\min \Lambda}$, где Λ – множество собственных чисел оператора $A|^*_{L(I_1,I_2)} A|_{L(I_1,I_2)}$. Итак, доказано, что $\Theta = \{\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \; : \; (I_1, I_2) \in \mathcal{J}\}$ для множества $\mathcal{J}$, используемого на пятом шаге алгоритма.

Осталось показать, что $\mathrm{cov}(A|_K) = \min\{\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \; : \; (I_1, I_2) \in \mathcal{J}\}$ для множества $\mathcal{J}$, используемого на пятом шаге алгоритма. Для этого сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 1.5. *Пусть $I_1, I_2 \subset \{1, ..., s\}$ – произвольные непересекающиеся множества индексов, $I_1 \neq \emptyset$. Предположим, что для любого $i \in I_1$ система*

$$\langle b_i, x \rangle \le 0, \quad \langle b_j, x \rangle = 0, \quad j \in I_2,$$

не является следствием системы

$$\langle b_j, x\rangle \le 0, \quad j \in I_1, \quad j \ne i, \quad \langle b_k, x\rangle = 0, \quad k \in I_2,$$

и, кроме того,

$$\exists h \in \ker A, \quad \exists j \in I_1 : \quad \langle h, b_j\rangle > 0, \quad \langle h, b_k\rangle = 0, \quad k \in I_2. \tag{1.11}$$

Тогда

$$\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) = \min_{j\in I_1}\{\mathrm{cov}(A|_{C(I_1\setminus\{j\}, I_2\cup\{j\})})\}.$$

Замечание. Как известно, неравенство $\langle b_i, x\rangle \le 0$ является следствием системы неравенств $\langle b_j, x\rangle \le 0$, $j \ne i$, тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные числа η_j, $j \ne i$, такие, что $b_i = \sum\limits_{j\ne i,} \eta_j b_j$. Это утверждение представляет собой частный случай теоремы Фаркаша (см., например, [31], с.168, теор.7). С помощью указанного критерия можно реализовать второй шаг алгоритма.

Для того, чтобы проверить условие (1.10), можно воспользоваться следующим критерием: условие (1.10) выполняется тогда и только тогда, когда для любого номера $j \in \overline{1,s}$ существует вектор $\eta_j \in \mathbb{R}^k$ такой, что $A^*\eta_j = b_j$. Очевидно, условие (1.11) имеет место тогда и только тогда, когда условие (1.10) нарушено.

Обозначим множества $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$, полученные после выполнения третьего шага алгоритма на i-ом прохождении итерации цикла, через $\mathcal{I}^i$ и $\mathcal{J}^i$ соответственно. Докажем по индукции, что

$$\mathrm{cov}(A|_K) = \min\{\mathrm{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \,:\, (I_1, I_2) \in \mathcal{I}^i \cup \mathcal{J}^i\} \qquad \forall i. \tag{1.12}$$

Очевидно, что $\mathcal{I}^1 \cup \mathcal{J}^1 = \big\{\big(\{1, ..., s\}, \emptyset\big)\big\}$ и $C\big(\{1, ..., s\}, \emptyset\big) = K$. Следовательно, для $i = 1$ равенство (1.12) выполнено. Предположим, что (1.12) верно для $i = m$. Покажем теперь, что формула (1.12) выполняется и для $i = m + 1$. Обозначим через $\overline{\mathcal{I}^m}$ множество всех элементов $(I_1, I_2) \in \mathcal{I}^m$, для которых выполняется условие (1.7). Последовательно применяя определение конуса $C(I_1, I_2)$, предположение индукции, равенство $\mathcal{I}^m \cup \mathcal{J}^m = (\mathcal{I}^m \backslash \overline{\mathcal{I}^m}) \cup (\mathcal{J}^m \cup \overline{\mathcal{I}^m})$, лемму 1.5 и определение множеств $\mathcal{I}^{m+1}$ и $\mathcal{J}^{m+1}$, получим

$$\operatorname{cov}(A|_K) = \operatorname{cov}(A|_{C(\{1,\dots,s\},\emptyset)}) = \min\Big\{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{I}^m \cup \mathcal{J}^m\Big\} =$$

$$= \min\Big\{\{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{I}^m \backslash \overline{\mathcal{I}^m}\} \cup \{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{J}^m \cup \overline{\mathcal{I}^m}\}\Big\} =$$

$$\min\Big\{\{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1 \backslash \{j\}, I_2 \cup \{j\})}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{I}^m \backslash \overline{\mathcal{I}^m}, \, j \in I_1\} \cup \{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{J}^{m+1}\}\Big\} =$$

$$= \min\{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{I}^{m+1} \cup \mathcal{J}^{m+1}\}.$$

Итак, мы доказали, что равенство (1.12) выполняется для всех значений параметра i.

Из равенства (1.12) следует, что для множества $\mathcal{J}$, используемого на пятом шаге алгоритма, имеет место равенство

$$\operatorname{cov}(A|_K) = \min\{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{J}\},$$

так как $\mathcal{I} = \emptyset$. Поскольку $\Theta = \{\operatorname{cov}(A|_{C(I_1,I_2)}) \, : \, (I_1, I_2) \in \mathcal{J}\}$ для множества $\mathcal{J}$, используемого на пятом шаге алгоритма, то равенство (1.9) верно. Обоснование алгоритма завершено.

Доказательства.

Прежде чем доказать леммы 1.3–1.5, приведем вспомогательные утверждения.

Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{int} M$ его топологическую внутренность. Кроме того, будем полагать $B_M(x, r) = B(x, r) \cap M$.

Лемма 1.6. *Пусть линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ инъективен. Тогда для любого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ такого, что* $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, *выполняется равенство*

$$\operatorname{cov}(A|_M) = \operatorname{cov}(A).$$

Доказательство леммы 1.6. Покажем сначала, что $\operatorname{cov}(A) \leq \operatorname{cov}(A|_M)$. Пусть $0 < \alpha < \operatorname{cov}(A)$. Выберем произвольные $x_0 \in M$, $r \geq 0$. Из условной α-накрываемости оператора A следует, что

$$A(B(x_0, r)) \supset B(Ax_0, \alpha r) \cap A\mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Покажем, что

$$A(B_M(x_0, r)) \supset B(Ax_0, \alpha r) \cap AM. \tag{1.14}$$

Из (1.13) следует, что

$$A(B(x_0, r)) \cap AM \supset B(Ax_0, \alpha r) \cap AM.$$

Очевидно, в силу инъективности оператора A, выполнено равенство $A(B(x_0, r)) \cap AM = A(B(x_0, r) \cap M)$. А значит, верно включение (1.14). В силу произвольности выбора x_0 и r, оператор $A|_M$ является условно α-накрывающим. Из приведенных рассуждений следует, что $\mathrm{cov}(A) \le \mathrm{cov}(A|_M)$.

Покажем теперь, что $\mathrm{cov}(A) \ge \mathrm{cov}(A|_M)$. Выберем произвольные $x_0 \in M$, $r > 0$ такие, что $B(x_0, r) \subset M$. Выберем положительное число $\alpha < \mathrm{cov}(A|_M)$. В силу условной α-накрываемости оператора $A|_M$, выполняется (1.14). Поскольку $B(x_0, r) \subset M$, то из (1.14) следует (1.13) в силу линейности оператора A. Отсюда вытекает, что оператор A является условно α-накрывающим. Приведенные рассуждения показывают, что $\mathrm{cov}(A) \ge \mathrm{cov}(A|_M)$. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть $\mathbb{E}$ – евклидово пространство, $a, b, c \in \mathbb{E}$. Если $|a - b| \ge |a - c|$, то $\langle b - a, c - b\rangle \le 0$. Если $|a - b| \le |a - c|$, то $\langle b - a, c - b\rangle \ge 0$.*

Доказательство леммы 1.7. Пусть $|a - b| \ge |a - c|$. Зададим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(t) = |b - c|^2 t^2 + 2t\langle a - b, b - c\rangle + |a - b|^2.$$

Обозначим через $t_{\min}$ точку минимума функции f. Очевидно, $f(0) = |a - b|^2$, $f(1) = |a - c|^2$. Значит, $f(0) \ge f(1)$. Следовательно, $t_{\min} > 0$. Поскольку $t_{\min} = -\dfrac{\langle b - a, c - b\rangle}{|b - c|^2}$, получаем $\langle b-a, c-b\rangle \le 0$. В случае, когда $|a-b| \le |a-c|$, доказательство аналогично. $\square$

Лемма 1.8. *Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ – аффинное подпространство, $V \subset W$ – выпуклое замкнутое множество, $u \in \mathbb{R}^n$, u_0 – ортогональная проекция u на W. Тогда* *точка v является решением задачи*

$$|x - u_0| \to \min, \quad x \in V,$$

тогда и только тогда, когда точка v является решением задачи

$$|x - u| \to \min, \quad x \in V.$$

Доказательство леммы 1.8. Для произвольной точки $v \in V$ имеем

$$|u - v|^2 = |u - u_0 + u_0 - v|^2 = |u - u_0|^2 + |u_0 - v|^2,$$

поскольку $\langle u - u_0, u_0 - v\rangle = 0$. Полученное соотношение доказывает лемму. □

Доказательство леммы 1.3. Покажем сначала, что

$$K = \Pi K \oplus \mathrm{ker} A. \tag{1.15}$$

Включение $K \subset \Pi K + \mathrm{ker} A$ очевидно. Докажем теперь, что $K \supset \Pi K + \mathrm{ker} A$. Для $u \in \Pi K$, $h \in \mathrm{ker} A$ в силу (1.10) имеем

$$\langle b_j, u + h\rangle = \langle b_j, u\rangle + \langle b_j, h\rangle \le 0 \quad \forall j = \overline{1, s}.$$

Значит, вектор $u + h \in K$. Таким образом, (1.15) верно.

Докажем теперь, что $\mathrm{cov}(A|_K) = \mathrm{cov}(A|_{\Pi K})$. Пусть $0 < \alpha < \mathrm{cov}(A|_K)$. Тогда

$$\forall x_0 \in K, \quad \forall y \in AK \quad \exists x \in K : \quad Ax = y, \quad |x - x_0| \le \frac{1}{\alpha}|Ax_0 - y|. \tag{1.16}$$

В силу (1.15) это равносильно тому, что

$$\begin{gathered} \forall h_0 \in \mathrm{ker} A, \quad \forall u_0 \in \Pi K, \quad \forall y \in A\Pi K \quad \exists u \in \Pi K, \quad \exists h \in \mathrm{ker} A : \\ Au = y, \quad |h_0 + u_0 - u - h| \le \frac{1}{\alpha}|Au_0 - y|. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Поскольку векторы $u_0 - u$ и h ортогональны, имеем $|u_0 - u - h| \le |u_0 - u|$. Поэтому полагая $h_0 = 0$ получаем, что

$$\forall u_0 \in \Pi K, \ \forall y \in A\Pi K \ \exists u \in \Pi K : \quad Au = y, \ |u - u_0| \le \frac{1}{\alpha}|Au_0 - y|. \tag{1.18}$$

Следовательно, α является константой условного накрывания оператора $A|_{\Pi K}$, и, значит, $\operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) \geq \operatorname{cov}(A|_K)$.

Пусть теперь $0 < \alpha < \operatorname{cov}(A|_{\Pi K})$. Тогда имеет место (1.18). Отсюда следует, что (1.18) выполняется для $h = h_0$. Последнее, в свою очередь, равносильно (1.16). Следовательно, отображение $A|_K$ также является условно α-накрывающим и верно неравенство $\operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) \leq \operatorname{cov}(A|_K)$.

Итак, мы показали, что $\operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) = \operatorname{cov}(A|_K)$. Докажем теперь равенство $\operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) = \operatorname{cov}(A|_{\mathrm{span}\Pi K})$. Для этого воспользуемся утверждением леммы 1.6, положив $A = A|_{\mathrm{span}\Pi K}$ и $M = \Pi K$. Очевидно, что оператор $A|_{\mathrm{span}\Pi K}$ инъективный, а внутренность множества ΠK в $\mathrm{span}\Pi K$ не пуста. Следовательно, $\operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) = \operatorname{cov}(A|_{\mathrm{span}\Pi K})$.

Таким образом, мы получили, что $\operatorname{cov}(A|_K) = \operatorname{cov}(A|_{\Pi K}) = \operatorname{cov}(A|_{\mathrm{span}\Pi K})$. $\square$

Доказательство леммы 1.4. Так как оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ инъективен, то A сюръективен. Поэтому для него понятия α-накрываемости и условной α-накрываемости совпадают. Следовательно, оператор A является условно α-накрывающим тогда и только тогда, когда $A(B(0,1)) \supset B(0,\alpha)$. Поэтому $\operatorname{cov}(A) = \min\{|Ax| : |x| = 1\}$.

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу:

$$|Ax|^2 \to \min, \quad |x|^2 = 1. \tag{1.19}$$

Функция Лагранжа для задачи (1.19) имеет вид

$$L(x, \mu_0, \mu) = \mu_0 |Ax|^2 + \mu(|x|^2 + 1).$$

Из правила множителей Лагранжа следует, что минимум в задаче (1.19) достигается на одном из единичных векторов x, удовлетворяющих равенствам $A^*Ax = \lambda_i x$, где λ_i – собственные числа матрицы A^*A, $i = \overline{1,n}$. По теореме Вейерштрасса минимум в задаче (1.19) достигается. Следовательно, значение минимума в задаче (1.19) равно наименьшему собственному числу матрицы

A^*A. Таким образом, $\mathrm{cov}(A) = \sqrt{\min\limits_{j=\overline{1,n}} \lambda_j}$. $\square$

Доказательство леммы 1.5. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству леммы, сделаем важное замечание. Обозначим через $\widetilde{b}_i$ ортогональную проекцию вектора b_i на подпространство $M(I_1, I_2)$, $i \in I_1$. Очевидно, что

$$C(I_1, I_2) = \{x \in M(I_1, I_2) : \langle x, \widetilde{b}_i \rangle \leq 0 \quad \forall\, i \in I_1\}.$$

Кроме того, в силу предположений леммы, для любого $i \in I_1$ неравенство $\langle \widetilde{b}_i, x\rangle \leq 0$, $x \in M(I_1, I_2)$, не является следствием системы $\langle \widetilde{b}_j, x \rangle \leq 0$ $\forall j \in I_1$, $j \neq i$, $x \in M(I_1, I_2)$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что она верна в случае, когда ограничения в виде равенств отсутствуют. Поэтому далее, не теряя общности, будем полагать, что $I_1 = \{1, ..., s\}$, $I_2 = \emptyset$, $K = C(I_1, I_2)$ и внутренность конуса K не пуста.

Положим

$$\Gamma_j = C\Big(I_1 \backslash \{j\}, I_2 \cup \{j\}\Big), \quad j = \overline{1,s}.$$

Для произвольного множества $U \subset b_j^{\perp}$ обозначим через $\mathrm{int}_j U$ внутренность множества U относительно подпространства $b_j^{\perp}$. Покажем, что

$$\mathrm{int}\Gamma_j \neq \emptyset \quad \forall j = \overline{1,s}. \tag{1.20}$$

Предположим противное, т.е. существует номер j такой, что $\mathrm{int}\Gamma_j = \emptyset$. Обозначим

$$K_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b_i \rangle \leq 0 \quad \forall\, i \neq j\}.$$

Имеем $\mathrm{intK_j} \neq \emptyset$, поскольку $\mathrm{intK} \neq \emptyset$ и $K \subset K_j$. Очевидно, что $b_j^{\perp} \cap \mathrm{int}K_j = \emptyset$, поскольку если $x \in b_j^{\perp} \cap \mathrm{int}K_j$, то $x \in \mathrm{int}\Gamma_j$, а по предположению множество $\mathrm{int}\Gamma_j$ пусто. Следовательно, в силу теоремы об отделимости выпуклых множеств (см., например, [31], стр. 222, теорема 2) существует ненулевой вектор $\varphi \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\sup\{\langle \varphi, x \rangle : \langle x, b_j \rangle = 0\} \leq \inf\{\langle \varphi, x\rangle : x \in K_j\}. \tag{1.21}$$

Очевидно, что существует число $\tau \neq 0$ такое, что $\varphi = \tau b_j$, иначе левая часть неравенства принимает значение $+\infty$. Следовательно, левая часть неравенства равна нулю, а правая неотрицательна. Поскольку $\mathrm{int} K \neq \emptyset$, существует точка $x \in K$ такая, что $\langle b_i, x \rangle < 0$ для любого $i = \overline{1, s}$. Тогда $x \in K_j$ и, значит, $\tau < 0$ в силу неравенства (1.21). Поэтому из неравенства (1.21) следует, что $\langle x, b_j \rangle \leq 0$ для любого $x \in K_j$, и, значит, неравенство $\langle x, b_j \rangle \leq 0$ является следствием системы $\langle x, b_i \rangle \leq 0$, $i = \overline{1, s}$, $i \neq j$. Полученное противоречие доказывает (1.20).

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in A\mathbb{R}^n$ обозначим через $x(x_0, y)$ решение задачи минимизации

$$|x - x_0| \to \min, \quad Ax = y,$$

а через $x_+(x_0, y)$ – решение задачи

$$|x - x_0| \to \min, \quad Ax = y, \quad x \in K$$

(решения обеих задач существуют и единственны, поскольку соответствующие множества допустимых точек x замкнуты и выпуклы).

Положим

$$\alpha(x_0, y) = \frac{|Ax_0 - y|}{|x_0 - x_+(x_0, y)|}$$

для x_0, y таких, что $y \neq Ax_0$. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\forall (x_0, y) \in K \times AK \ \exists j, \ \exists (\overline{x_0}, \overline{y}) \in \Gamma_j \times A\Gamma_j : \ \alpha(\overline{x_0}, \overline{y}) \leq \alpha(x_0, y), \quad x_+(\overline{x_0}, \overline{y}) \in \Gamma_j. \tag{1.22}$$

Выберем произвольные точки $x_0 \in K$, $y \in AK$, $Ax_0 \neq y$. Рассмотрим два случая.

I случай: $x(x_0, y) \in K$. В этом случае, очевидно, $x(x_0, y) = x_+(x_0, y)$.

Покажем, что для любых точек $x_0', x' \in K$, $x_0' \neq x'$, таких, что $x_+(x_0, y) - x_0 = \tau(x' - x_0')$ для некоторого $\tau \neq 0$, выполняются равенства $x_+(x_0', Ax') = x(x_0', Ax') = x'$ и $\alpha(x_0, y) = \alpha(x_0', Ax')$. Действительно, поскольку $x_+(x_0, y)$ – ближайшее к x_0 решение уравнения $Ax = y$, то вектор $x_0 - x_+(x_0, y)$ ортогонален

$\ker A$. Следовательно, вектор $x_0' - x'$ ортогонален $\ker A$ и, значит, x' является ближайшим к x_0' решением уравнения $Ax = Ax'$. Поэтому $x_+(x_0', Ax') = x'$. Кроме того,

$$\alpha(x_0, y) = \frac{|A(x_0 - x_+(x_0, y))|}{|x_0 - x_+(x_0, y)|} = \frac{|A(x_0' - x')|}{|x_0' - x'|} = \frac{|Ax_0' - Ax'|}{|x_0' - x_+(x_0', Ax')|} = \alpha(x_0', Ax').$$

Таким образом, $x_+(x_0', Ax') = x_+(x_0', Ax') = x'$ и $\alpha(x_0, y) = \alpha(x_0', Ax')$ для любых $x_0', x' \in K$, $x_0' \neq x'$ таких, что $x_+(x_0, y) - x_0 = \tau(x' - x_0')$ для некоторого $\tau \neq 0$. Кроме того, в силу предположений леммы существует номер j и вектор $h \in \ker A$ такие, что $\langle h, b_j \rangle < 0$. Поэтому, а также в силу (1.20), без ограничения общности будем полагать, что точки x_0 и y выбраны так, что $x_+(x_0, y) \in \mathrm{int}\Gamma_j$.

Построим точки $\overline{x}_0$, $\overline{y}$, удовлетворяющие (1.22). Для этого параметризуем отрезок $[x_+(x_0, y), x_0]$, полагая $\xi(t) = x_+(x_0, y) - t(x_+(x_0, y) - x_0)$, $t \in [0, 1]$, и обозначим

$$L(t) = (\xi(t) + \ker A) \cap b_j^\perp, \quad t \in [0, 1].$$

Отметим, что $L(t) \neq \emptyset$ при любом $t \in [0, 1]$, так как $\left(\xi(t) - \dfrac{\langle \xi(t), b_j \rangle}{\langle h, b_j \rangle} h\right) \in L(t)$. Обозначим через $\widetilde{x}_0(t)$ решение задачи

$$|x - x_+(x_0, y)| \to \min, \quad x \in L(t)$$

(решение существует и единственно, поскольку множество $L(t)$ замкнуто и выпукло). Покажем, что существует $\mu \in (0, 1]$, при котором $\widetilde{x}_0(\mu) \in \Gamma_j$.

Многозначное отображение $L : [0, 1] \rightrightarrows b_j^\perp$ непрерывно, поскольку $L(t)$ совпадает с множеством решений системы линейных уравнений $Ax = \xi(t)$, $\langle x, b_j \rangle = 0$. Следовательно, функция $\widetilde{x}_0(\cdot)$ непрерывна. Кроме того, $\widetilde{x}_0(0) = x_+(x_0, y)$ и $x_+(x_0, y) \in \mathrm{int}\Gamma_j$. Поэтому существует $\mu \in (0, 1]$, при котором $\widetilde{x}_0(\mu) \in \Gamma_j$.

Положим $\overline{x}_0 = \widetilde{x}_0(\mu)$, $\overline{y} = y$. Покажем, что $x_+(\overline{x}_0, \overline{y}) = x_+(x_0, y)$. Если $x_0 \in \Gamma_j$, то $x_0 = \xi(\mu) = \widetilde{x}_0(\mu)$, и равенство выполняется. Предположим, что $x_0 \notin \Gamma_j$. Тогда $\xi(\mu) \notin \Gamma_j$ и, значит, $\langle \xi(\mu), b_j \rangle < 0$. Поскольку $\overline{x}_0 \in \Gamma_j$, имеем $\langle \overline{x}_0, b_j \rangle = 0$. Следовательно, $\langle \xi(\mu) - \overline{x}_0, b_j \rangle < 0$ и, в частности, $\xi(\mu) - \overline{x}_0 \notin b_j^\perp$.

Поскольку $\xi(\mu) - \overline{x}_0 \in \ker A$, имеем

$$\ker A = (\ker A \cap b_j^{\perp}) \oplus \mathrm{span}(\xi(\mu) - \overline{x}_0). \tag{1.23}$$

Покажем, что вектор $(\xi(\mu) - \overline{x}_0)$ ортогонален $\ker A \cap b_j^{\perp}$. Для любого $H \in \ker A \cap b_j^{\perp}$, поскольку $x_+(x_0, y)$ – ближайшая к x_0 точка во множестве решений уравнения $Ax = y$, то $\langle H, x_+(x_0, y) - x_0\rangle = 0$. Поэтому $\langle H, x_+(x_0, y) - \xi(\mu)\rangle = \langle H, x_+(x_0, y) - x_0\rangle = 0$. Кроме того, $\langle H, x_+(x_0, y) - \overline{x}_0\rangle = 0$, так как $\overline{x}_0$ – ближайшая к $x_+(x_0, y)$ точка в $L(\mu)$. Следовательно,

$$\langle H, \xi(\mu) - \overline{x}_0\rangle = \langle H, \xi(\mu) - x_+(x_0, y) + x_+(x_0, y) - \overline{x}_0\rangle = 0.$$

Выберем произвольную точку $\chi \in K$ такую, что $A\chi = y$ и покажем, что $|\overline{x}_0 - \overline{x}_+(x_0, y)| \le |\overline{x}_0 - \chi|$. Из (1.23) следует, что существуют $H \in \ker A \cap b_j^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\chi - x_+(x_0, y) = H + \lambda(\xi(\mu) - \overline{x}_0),$$

причем $\lambda > 0$, поскольку $0 \ge \langle b_j, \chi\rangle = \langle b_j, \chi - x_+(x_0, y)\rangle = \langle b_j, H + \lambda(\xi(\mu) - \overline{x}_0)\rangle = \lambda\langle b_j, \xi(\mu)\rangle$, а $\langle b_j, \xi(\mu)\rangle < 0$. Имеем

$$|\chi - \overline{x}_0|^2 = |x_+(x_0, y) + H + \lambda(\xi(\mu) - \overline{x}_0) - \overline{x}_0|^2 =$$

$$= |x_+(x_0, y) - \overline{x}_0|^2 + |H|^2 + \lambda^2|\xi(\mu) - \overline{x}_0|^2 - 2\lambda\langle \overline{x}_0 - x_+(x_0, y), \xi(\mu) - \overline{x}_0\rangle, \tag{1.24}$$

так как $\langle H, x_+(x_0, y) - x_0\rangle = 0$ и $\langle H, \xi(\mu) - \overline{x}_0\rangle = 0$. Кроме того, поскольку $x_+(x_0, y)$ – ближайшее к x_0 решение уравнения $Ax = y$, а $x_+(x_0, y) - \xi(\mu) = \mu t(x_+(x_0, y) - x_0)$, $t \in [0, 1]$, то, как было показано выше, $x_+(x_0, y)$ – ближайшее к $\xi(\mu)$ решение уравнения $Ax = y$. Следовательно, $\xi(\mu)$ – ближайшее к $x_+(x_0, y)$ решение уравнения $Ax = A\xi(\mu)$, и, значит, $|x_+ - \overline{x}_0| \ge |x_+ - \xi(\mu)|$. В силу леммы 1.7 имеем $\langle \overline{x}_0 - x_+(x_0, y), \xi(\mu) - \overline{x}_0\rangle \le 0$. Поэтому из неравенства (1.24) следует, что $|\overline{x}_0 - \overline{x}_+(x_0, y)| \le |\overline{x}_0 - \chi|$. Таким образом, $x_+(x_0, y)$ – ближайшее к $\overline{x}_0$ решение уравнения $Ax = y$, и, значит, $x_+(\overline{x}_0, \overline{y}) = x_+(x_0, y)$.

Покажем теперь, что $\alpha(x_0, y) \ge \alpha(\overline{x}_0, \overline{y})$. Действительно,

$$\alpha(x_0, y) = \frac{|Ax_0 - y|}{|x_0 - x_+(x_0, y)|} = \frac{|A\xi(\mu) - y|}{|\xi(\mu) - x_+(x_0, y)|} \ge \frac{|A\overline{x}_0 - y|}{|\overline{x}_0 - x_+(x_0, y)|} = \alpha(\overline{x}_0, \overline{y}),$$

поскольку по построению $A\overline{x}_0 = A\xi(\mu)$ и $\xi(\mu)$ – ближайшее к $x_+(x_0, y)$ решение уравнения $Ax = A\xi(\mu)$. Итак, свойство (1.22) в первом случае доказано.

II случай: $x(x_0, y) \notin K$. В этом случае, очевидно, $x(x_0, y) \neq x_+(x_0, y)$.

Построим точки $\overline{x}_0$, $\overline{y}$, удовлетворяющие (1.22). Положим

$$\xi_+(t) = (1-t)x_+(x_0, y) + tx_0, \quad \xi(t) = (1-t)x(x_0, y) + tx_0 \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Рассмотрим отрезок $[\xi_+(t), \xi(t)]$. Множество K выпукло, $\xi_+(0) = x_+(x_0, y) \in K$, $\xi_+(1) = x_0$. Поэтому $\xi_+(t) \in K$ для любого $t \in [0, 1]$. Далее, множество K замкнуто, $\xi(0) = x(x_0, y) \notin K$, а функция $\xi(\cdot)$ непрерывна. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\xi(t) \notin K$ для любого $t \in [0, \varepsilon)$. Поскольку множество K выпукло, $\xi_+(t) \in K$ и $\xi(t) \notin K$, то существует точка $\widetilde{x}_0(t) \in [\xi_+(t), \xi(t)]$, лежащая на границе множества K.

Покажем, что

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{x}_0(t) = x_+(x_0, y). \tag{1.25}$$

Предположим противное, т.е. существует последовательность $\{t_n\}$, сходящаяся к 0, такая, что $\{x_0(t_n)\}$ сходится к некоторой точке $u \in (x_+(x_0, y), x(x_0, y)]$. Поскольку $x_0(t_n)$ принадлежит границе K, то $u \in K$. Так как $u \in (x_+(x_0, y), x(x_0, y]$, то $Au = y$ и $|u - x(x_0, y)| < |x_+(x_0, y) - x(x_0, y)|$. Кроме того, поскольку $x(x_0, y)$ – ближайшее к x_0 решение уравнения $Ax = y$, то $\langle x_+(x_0, y) - x(x_0, y), x_0 - x(x_0, y)\rangle = 0$ и $\langle a - x(x_0, y), x_0 - x(x_0, y)\rangle = 0$. Поэтому

$$|x_0 - x_+(x_0, y)|^2 = |x_0 - x(x_0, y)|^2 + |x(x_0, y) - x_+(x_0, y)|^2 >$$

$$|x_0 - x(x_0, y)|^2 + |x(x_0, y) - u|^2 = |x_0 - u|^2,$$

что противоречит определению $x_+(x_0, y)$. Полученное противоречие доказывает (1.25).

Покажем теперь, что существует j и $\mu \in (0, 1]$ такие, что $\widetilde{x}_0(\mu) \in \Gamma_j$ и $x_+(x_0, y) \in \Gamma_j$. При любом $t \in [0, 1]$ точка $\widetilde{x}_0(t)$ лежит на границе конуса K, и, значит, для любого натурального m существует i_m такое, что $\widetilde{x}_0(m^{-1}) \in$

Γ_{i_m}. Поскольку граней Γ_i конечное количество, существует последовательность $\{m_N\}$ и грань Γ_j такая, что каждая точка $\widetilde{x}_0(m_N^{-1}) \in \Gamma_j$. Из равенства (1.25) и замкнутости грани Γ_j следует, что $x_+(x_0, y) \in \Gamma_j$. Искомые μ и j построены.

Положим $\overline{x}_0 = \widetilde{x}_0(\mu)$, $\overline{y} = y$.

Сначала докажем, что $x(\overline{x}_0, y) = \overline{x}_0 + \mu x(x_0, y) - \mu x_0$. Действительно,

$$A(\overline{x}_0 + \mu x(x_0, y) - \mu x_0) = A\overline{x}_0 + \mu y - \mu A x_0 = ((1-\mu)y + \mu A x_0) + \mu y - \mu A x_0 = y.$$

Кроме того, вектор $\mu x(x_0, y) - \mu x_0$ ортогонален kerA, поскольку $x(x_0, y)$ – ближайшее к x_0 решение уравнения $Ax = y$. Следовательно, $\overline{x}_0 + \mu x(x_0, y) - \mu x_0$ – ближайшее к $\overline{x}_0$ решение уравнения $Ax = y$, и, значит, $x(\overline{x}_0, y) = \overline{x}_0 + \mu x(x_0, y) - \mu x_0$.

Теперь покажем, что

$$x_+(\overline{x}_0, y) = x_+(x_0, y). \tag{1.26}$$

Предположим противное, т.е. существует точка $v \in K$, $v \neq x_+(\overline{x}_0, y)$, такая, что $Av = y$ и $|v - \overline{x}_0| < |x_+(\overline{x}_0, y) - \overline{x}_0|$. Обозначим через W аффинную оболочку множества $\{v, x_+(x_0, y), x(x_0, y),\}$ положим $V = K \cap W$. Очевидно, $W - x(x_0, y) \subset \ker A$, а $V \neq \emptyset$, так как $\{v, x_+(x_0, y)\} \subset V$. Поскольку $x_+(x_0, y)$ – ближайшее к x_0 в K решение уравнения $Ax = y$, а $x(x_0, y)$ – ортогональная проекция точки x_0 на W, то по лемме 1.8 точка $x_+(x_0, y)$ является ближайшей в V точкой к $x(x_0, y)$. Поскольку $\overline{x}_0 = \tau\xi_+(\mu) + (1-\tau)\xi(\mu)$ для некоторого $\tau \in [0, 1]$ а $x(\overline{x}_0, y) = \overline{x}_0 + \mu x(x_0, y) - \mu x_0$, имеем

$$x(\overline{x}_0, y) = \tau\xi_+(\mu) + (1-\tau)\xi(\mu) + \mu x(x_0, y) - \mu x_0 = \tau(1-\mu)x_+(x_0, y) + (1 - \tau(1-\mu))x(x_0, y).$$

Следовательно, $x(\overline{x}_0, y) \in [x_+(x_0, y), x(x_0, y)]$. Поскольку точка $x_+(x_0, y)$ является ближайшей в V точкой к $x(x_0, y)$, то $x_+(x_0, y)$ также является и ближайшей в V точкой к $x(\overline{x}_0, y)$. Поскольку $x(\overline{x}_0, y)$ является ближайшей в W точкой к $\overline{x}_0$, то $x(\overline{x}_0, y)$ – ортогональная проекция точки $\overline{x}_0$ на W. Следовательно, согласно лемме 1.8 точка $x_+(x_0, y)$ является ближайшей в V точкой к $\overline{x}_0$, что противоречит неравенству $|v - \overline{x}_0| < |x_+(\overline{x}_0, y) - \overline{x}_0|$. Равенство (1.26) доказано.

Докажем, что

$$|x_+(x_0, y) - \xi_+(\mu)| \leq |x_+(x_0, y) - \overline{x}_0|. \tag{1.27}$$

Действительно, для $\gamma = (1-\tau)(1-\lambda)$ имеем

$$|\overline{x}_0 - x_+(x_0,y)|^2 = |\tau\xi_+(x_0,y) + (1-\tau)\xi(x_0,y) - x_+(x_0,y)|^2 =$$

$$= |\xi_+(x_0,y) - x_+(x_0,y) + (1-\tau)(\xi(x_0,y) - \xi_+(x_0,y)| = |\mu(x_0 - x_+(x_0,y)) + \gamma(x(x_0,y) - x_+(x_0,y))|^2 =$$

$$= \mu^2|x_0 - x_+(x_0,y)|^2 + 2\lambda\mu\langle x_0 - x_+(x_0,y), x(x_0,y) - x_+(x_0,y)\rangle + \gamma^2|x(x_0,y) - x_+(x_0,y)|^2 \geq$$

$$\geq \mu^2|x_0 - x_+(x_0,y)|^2 + \gamma^2|x(x_0,y) - x_+(x_0,y)|^2 \geq \mu^2|x_0 - x_+(x_0,y)|^2 = |x_+(x_0,y) - \xi_+(\mu)|^2.$$

Здесь неравенство $\langle x_0 - x_+(x_0,y), x(x_0,y) - x_+(x_0,y)\rangle \geq 0$ следует из леммы 1.7, поскольку $|x_0 - x(x_0,y)| \leq |x_0 - x_+(x_0,y)|$ по построению.

Осталось показать, что

$$\alpha(\overline{x}_0, y) = \alpha(x_0, y). \tag{1.28}$$

Действительно, в силу (1.27) имеем

$$\alpha(\overline{x}_0, y) = \frac{|A\overline{x}_0 - y|}{|x_+(\overline{x}_0,y) - \overline{x}_0|} = \frac{|A(\tau\xi_+(\mu) + (1-\tau)\xi(\mu)) - y|}{|x_+(x_0,y) - \overline{x}_0|} \leq$$

$$\leq \frac{|(1-\mu)y + \mu A x_0 - y|}{|x_+(x_0,y) - \xi_+(\mu)|} = \frac{|Ax_0 - y|}{|x_+(x_0,y) - x_0|} = \alpha(x_0, y).$$

Из неравенств (1.26) и (1.28) следует, что для точек $\overline{x}_0$ и $\overline{y} = y$, построенных по заданным x_0 и y, выполняется (1.22). $\square$

Глава 2

Локальная разрешимость управляемых систем

2.1 Достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений при наличии смешанных ограничений

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) \ \dot{\forall}\, t \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

смешанным ограничением

$$g(t, x, u) = 0 \ \dot{\forall}\, t \tag{2.3}$$

и ограничением на управление

$$u(t) \in U \ \ \forall\, t. \tag{2.4}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ – время; t_0 – заданный начальный момент времени; x_0 – заданная начальная точка; $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная; $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – заданные функции, причем функция g непрерывна; $U \subset \mathbb{R}^m$ – заданное замкнутое выпуклое множество. В качестве допустимых управлений рассматриваются всевозможные функции $u(\cdot) \in C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^m)$, $\tau > 0$, для которых выполняется условие (2.4). Здесь $C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных функций, действующих из $[t_0, t_0 + \tau]$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение 2.1. Будем говорить, что система (2.1)–(2.4) локально разрешима в точке (t_0, x_0), если существуют число $\tau > 0$ и допустимое управление $u(\cdot) \in C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^m)$, такие что задача Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \;\; x(t_0) = x_0,$$

на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ имеет решение $x(\cdot)$, для которого выполняется условие (2.3), т.е.

$$g(t, x(t), u(t)) = 0 \;\; \forall t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

В работе [18] была исследована локальная разрешимость системы (2.1)–(2.4) в предположении, что U – замкнутый выпуклый конус. В этом параграфе результаты из [18] распространены на случай, когда U является замкнутым выпуклым множеством.

Пусть задана точка $u_0 \in U$, для которой $g(t_0, x_0, u_0) = 0$, и некоторое $\gamma > 0$. Положим $D = [t_0, t_0 + \gamma] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что функция $f : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори : при п.в. t функция $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна; при любых (x, u) функция $f(\cdot, x, u)$ измерима; существует такая суммируемая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $|f(t, x, u)| \leq \psi(t)$ для п.в. $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, для любых $u \in B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$.

Предположим, что для любых $(t, x) \in D$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по u на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$, причем эти производные непрерывны по совокупности переменных в окрестности точки (t_0, x_0, u_0), а отображение $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, x, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на $B_{\mathbb{R}^m}(u_0, \gamma)$ для любых $(t, x) \in D$ с константой Липшица, не зависящей от (t, x).

Теорема 2.1. *Пусть существует такой вектор* $h \in \mathbb{R}^m$, *что функция* $g(t_0, x_0, \cdot)$ 2-*регулярна по переменной и в точке* u_0 *относительно* U *по направлению* h. *Тогда система* (2.1)–(2.4) *локально разрешима в точке* (t_0, x_0).

Доказательство. Согласно теореме 1.1 существуют такие окрестность O точки (t_0, x_0) и непрерывное отображение $\varphi(\cdot) : O \to U$, что

$$g(t, x, \varphi(t, x)) = 0 \quad \forall (t, x) \in O.$$

Подставив $\varphi(t, x)$ в (2.1), получим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi(t, x)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{f}(t, x) \equiv f(t, x, \varphi(t, x))$. Перепишем задачу (2.5) в виде

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Из теоремы I.4.22[30] и условий Каратеодори следует, что функция $t \mapsto \widetilde{f}(t, x)$ суммируема при любых $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \gamma)$. Функция $x \mapsto \widetilde{f}(t, x)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций при п.в. $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Кроме того, существует такое $\widetilde{\gamma}$, что если $(t, x) \in [t_0, t_0 + \widetilde{\gamma}] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \widetilde{\gamma})$, то $|\widetilde{u}(t, x) - u_0| \leq \gamma$ и $\left|\widetilde{f}(t, x)\right| \leq \psi(t) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_0 + \widetilde{\gamma}], \quad x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \widetilde{\gamma})$. Следовательно, согласно теореме о локальной разрешимости задачи Коши (см. теорему II.4.1 из [30]), существует такое $\tau > 0$, что на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ задача (2.5) имеет решение $\widetilde{x}(\cdot)$. Тогда непрерывная функция $\widetilde{u}(\cdot)$, заданная равенством $\widetilde{u} = \varphi(t, \widetilde{x}(t))$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, является допустимым управлением. $\square$

2.2 Достаточные условия локальной разрешимости для дифференциальных включений со смешанными ограничениями

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} 0 \in F(t, x, \dot{x}, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = a, \\ 0 \in G(t, x, u) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1], \\ u(t) \in U \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, $G : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ – заданные многозначные отображения, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ – заданное непустое замкнутое множество, $a \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор, t_0, t_1 – заданные числа.

Обозначим через $L_\infty([t_0, t_1], U)$ метрическое пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u : [t_0, t_1] \to U$ с метрикой

$$\rho_\infty(u, v) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t) - v(t)| \quad \forall\, u, v \in L_\infty([t_0, t_1], U).$$

При $U = \mathbb{R}^m$ в пространстве $L_\infty([t_0, t_1], U)$ введем норму по формуле

$$\|u\| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)| \quad \forall\, u \in L_\infty([t_0, t_1], U).$$

Через $AC_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство абсолютно непрерывных функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, имеющих производную в $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Будем называть управляемую систему (2.6) *локально разрешимой*, если существуют число $\tau > 0$ и функции $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_0 + \tau], U)$, $x \in AC_\infty([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^n)$ такие, что $0 \in G(t, x(t), u(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши $0 \in F(t, x, \dot{x}, u)$ $\dot{\forall} t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $x(t_0) = a$. Пару (x, u) в этом случае будем называть решением системы (2.6) на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$.

Всюду далее будем предполагать, что отображения F и G удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть:

1) отображения $F(\cdot, x, z, u)$ и $G(\cdot, x, u)$ измеримы для всех $x, z \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

2) отображения $F(t, \cdot)$ и $G(t, \cdot)$ непрерывны для п.в. $t \in [t_0, t_1]$;

3) для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что если $|x|+|z|+|u| \leq R$, то $|y| \leq M$ для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, для всех $y \in F(t, x, z, u)$.

Определения непрерывности и измеримости многозначного отображения можно найти, например, в [29].

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий локальной разрешимости системы (2.6).

Приведем определения, необходимые для формулировки основного результата. Пусть X, Y – метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно, задано число $\alpha > 0$.

Определение 2.2. Многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ называется α-накрывающим, если

$$F(B_X(x_0, r)) \supseteq B_Y(F(x_0), \alpha r) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x_0 \in X.$$

Определение 2.3. Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица в константой $L \geq 0$, если

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L\rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

В этом определении h – расстояние по Хаусдорфу, определяемое соотношением

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : \, B \subset O(A, \varepsilon), \quad A \subset O(B, \varepsilon)\} \quad \forall\, A \subset Y, \quad \forall\, B \subset Y.$$

Сформулируем основной результат настоящего параграфа. Пусть заданы функции $x_0 \in AC_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in L_\infty([t_0, t_1], U)$, $f_0 \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^k)$, $g_0 \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^s)$ такие, что

$$f_0(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), \quad g_0(t) \in G(t, x(t), u(t)) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 2.2. *Предположим, что*

a) отображения $F(t, \cdot, v, u)$, $F(t, x, v, \cdot)$, $G(t, \cdot, u)$ удовлетворяют условию Липшица с константами $L_{F,x} \geq 0$, $L_{F,u} \geq 0$ и $L_{G,x} \geq 0$, соответственно, для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, для всех $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$;

b) отображения $F(t, x, \cdot, u)$, $G(t, x, \cdot)$ являются накрывающими с константами $\alpha_F > 0$ и $\alpha_G > 0$, соответственно, для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$.

Тогда управляемая система (2.6) локально разрешима. Причем для всех $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \Big(0; \dfrac{\alpha_F\alpha_G}{L_{F,u}L_{G,x} + L_{F,x}\alpha_G}\Big)$ *существует решение* (x,u) *системы (2.6) на отрезке* $[t_0, t_0+\tau]$ *такое, что выполнены оценки*

$$|x_0(t) - x(t)| \le \tau \left[\frac{L_{F,u}\|g_0\|_\infty + \alpha_G\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_{F,x}\Big)\alpha_G - \tau L_{F,u}L_{G,x}} + \varepsilon \right] \quad \dot\forall t \in [t_0, t_0+\tau],$$

$$|u_0(t) - u(t)| \le \frac{\Big(\alpha_F - \tau L_{F,x}\Big)\|g_0\|_\infty + \tau L_{G,x}\|f_0\|_\infty}{\Big(\alpha_F - \tau L_{F,x}\Big)\alpha_G - \tau L_{F,u}L_{G,x}} + \varepsilon \quad \dot\forall t \in [t_0, t_0+\tau].$$

Приведем некоторые утверждения о свойствах многозначных отображений, действующих в метрических пространствах. Пусть X, Y – метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно. Графиком многозначного отображения Ψ будем называть множество

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(x,y) : \, x \in X, \quad y \in \Psi(x)\}.$$

Зададим на множестве $X \times Y$ метрику по формуле

$$\rho((x,y),(u,v)) = \rho_X(x,u) + \rho_Y(y,v) \quad \forall\,(x,y) \in X \times Y, \quad \forall\,(u,v) \in X \times Y.$$

Будем говорить, что многозначное отображение Ψ замкнуто, если его график является замкнутым подмножеством пространства $X \times Y$.

Следующее утверждение было доказано А.В. Арутюновым и Б.Д. Гельманом в [16]. Пусть заданы многозначные отображения $\Gamma_1 : X \rightrightarrows Y$, $\Gamma_2 : Y \rightrightarrows X$.

Лемма 2.3. *Пусть хотя бы один из графиков* $\mathrm{gph}(\Gamma_1)$ *или* $\mathrm{gph}(\Gamma_2)$ *является полным подмножеством в* $X \times Y$. *Предположим, что отображения* Γ_j *являются* β_j *-липшицевыми,* $j \in \{1,2\}$, *причем* $\beta_1\beta_2 < 1$.

Тогда множество

$$D(\Gamma_1,\Gamma_2) := \{(x,y) \in X \times Y \, : \, y \in \Gamma_1(x), x \in \Gamma_2(y)\}$$

непусто. Более того, для произвольных $x \in X$, $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ *существует точка* $(\xi_1, \xi_2) \in D(\Gamma_1, \Gamma_2)$ *такая, что*

$$\rho_X(x, \xi_1) \leq \frac{\beta_2 \mathrm{dist}(y, \Gamma_1(x)) + \mathrm{dist}(x, \Gamma_2(y))}{1 - \beta_1\beta_2} + \varepsilon, \tag{2.7}$$

$$\rho_Y(y, \xi_2) \leq \frac{\mathrm{dist}(y, \Gamma_1(x)) + \beta_1 \mathrm{dist}(x, \Gamma_2(y))}{1 - \beta_1\beta_2} + \varepsilon. \tag{2.8}$$

Пусть Z – метрическое пространство с метрикой ρ_Z, задано многозначное отображение $\varphi : X \times Y \rightrightarrows Z$, точка $\theta \in Z$ и числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Определим многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ формулой

$$\Phi(x) = \{y : \theta \in \varphi(x, y)\} \quad \forall x \in X.$$

Следующие две леммы были получены С.Е. Жуковским в [46].

Лемма 2.4. *Пусть*

a) многозначное отображение $\varphi(x, \cdot)$ *является* α*-накрывающим и замкнутым для любого* $x \in X$;

b) многозначное отображение $\varphi(\cdot, y)$ *является* β*-липшицевым для любого* $y \in Y$;.

Тогда

1) многозначное отображение Φ *корректно определено, т.е. множество* $\Phi(x)$ *непусто и замкнуто при любом* $x \in X$;

2) многозначное отображение Φ *является* $(\beta\alpha^{-1})$*-липшицевым.*

Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 – метрические пространства, метрики в которых мы будем обозначать символом ρ, заданы многозначные отображения $F_j : X_1 \times X_2 \rightrightarrows Y_j$ и точки $y_j \in Y_j$, $j \in \{1, 2\}$. Рассмотрим систему включений

$$\begin{cases} y_1 \in F_1(x_1, x_2), \\ y_2 \in F_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.9}$$

с неизвестным $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Приведем достаточные условия разрешимости этой системы.

Лемма 2.5. *Пусть пространства X_j, Y_j полны, $j \in \{1,2\}$. Предположим, что*

a) $F_1(\cdot, x_2)$ и $F_2(x_1, \cdot)$ являются замкнутыми и накрывающими с константами $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, соответственно, для любых $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$;

b) отображения $F_1(x_1, \cdot)$ и $F_2(\cdot, x_2)$ являются липшицевыми с константами $\beta_1 \geq 0$ и $\beta_2 \geq 0$, соответственно, для любых $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$;

c) $\beta_1\beta_2 < \alpha_1\alpha_2$.

Тогда система (2.9) имеет решение. Более того, для всех $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in X_1 \times X_2$, $\overline{y}_1 \in F_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $\overline{y}_2 \in F_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$, $\varepsilon > 0$ существует решение $(\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$ системы (2.9) такое, что

$$\rho(\overline{x}_1, \xi_1) \leq \frac{\beta_1\rho(y_2, \overline{y}_2) + \alpha_2\rho(y_1, \overline{y}_1)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2} + \varepsilon; \tag{2.10}$$

$$\rho(\overline{x}_2, \xi_2) \leq \frac{\alpha_1\rho(y_2, \overline{y}_2) + \beta_2\rho(y_1, \overline{y}_1)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2} + \varepsilon. \tag{2.11}$$

Пусть задано непустое замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, число $T \in [t_0, t_1]$ и многозначное отображение $P : [t_0, T] \times \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^k$. Зададим многозначный оператор Немыцкого $\mathcal{N}_P : L_\infty([t_0, T], \Omega) \rightrightarrows L_\infty([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ формулой

$$\mathcal{N}_P(\omega) = \{y \in L_\infty([t_0, T], \mathbb{R}^k) : y(t) \in P(t, \omega(t)) \ \dot{\forall}\, t \in [t_0, T]\}, \ \omega \in L_\infty([t_0, T], \Omega).$$

Приведем критерии липшицевости и накрываемости оператора $\mathcal{N}_P$.

Лемма 2.6. *Предположим, что многозначное отображение $P(\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: для почти всех $t \in [t_0, T]$ многозначное отображение $P(t, \cdot)$ непрерывно; для всех $x \in \Omega$ многозначное отображение $P(\cdot, x)$ измеримо; для каждого $R > 0$ существует $M > 0$ такое, что если $|x| \leq R$, то $|y| \leq M$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, для всех $y \in P(t, x)$.*

Тогда

1) многозначное отображение $\mathcal{N}_P$ определено корректно и является замкнутым;

2) если для почти всех $t \in [t_0, T]$ многозначное отображение $P(t, \cdot)$ является α-накрывающим, то $\mathcal{N}_P$ также является α-накрывающим;

3) если для почти всех $t \in [t_0, T]$ многозначное отображение $P(t, \cdot)$ является β-липшицевым, то $\mathcal{N}_P$ также является β-липшицевым.

Доказательство. 1) Из теорем 1.5.6, 1.5.18 из [29] следует, что $\mathcal{N}_P(\omega) \neq \emptyset$ для любого $\omega \in L_\infty([t_0, T], \Omega)$. Замкнутость множества $\mathcal{N}_P(\omega)$ очевидна. Таким образом доказано, что многозначное отображение $\mathcal{N}_P(\cdot)$ определено корректно.

Докажем, что многозначное отображение $\mathcal{N}_P(\cdot)$ замкнуто. Пусть заданы последовательности $\{\omega_n\} \subset L_\infty([t_0, T], \Omega)$, $\{y_n\} \subset L_\infty([t_0, T], \mathbb{R}^k)$, сходящиеся к $\omega \in L_\infty([t_0, T], \Omega)$ и $y \in L_\infty([t_0, T], \mathbb{R}^k)$, соответственно, и такие, что $y_n \in \mathcal{N}_P(\omega_n)$ для любого n. Тогда

$$y_n(t) \in P(t, \omega_n(t)), \quad \omega_n(t) \to \omega(t), \quad y_n(t) \to y(t) \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, T].$$

Из непрерывности многозначного отображения $P(t, \cdot)$ следует, что $y(t) \in P(t, \omega(t))$ для п.в. t.

2) Из леммы 4.1 из [65] следует α-накрываемость отображения $\mathcal{N}_P(\cdot)$.

3) Возьмем произвольные функции $\omega_1, \omega_2 \in L_\infty([t_0, T], \Omega)$, $y_1 \in \mathcal{N}_P(\omega_1)$. Поскольку многозначное отображение $P(t, \cdot)$ является β-липшицевым для почти всех $t \in [t_0, T]$, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$B_{\mathbb{R}^k}\big(y_1(t), \beta|\omega_1(t) - \omega_2(t)| + \varepsilon\big) \cap P\big(t, \omega_2(t)\big) \neq \emptyset \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, T].$$

Из [29], 1.5.8 (a), следует, что многозначное отображение

$$t \mapsto B_{\mathbb{R}^k}\big(y_1(t), \beta|\omega_1(t) - \omega_2(t)| + \varepsilon\big) \cap P\big(t, \omega_2(t)\big), \quad t \in [t_0, T],$$

измеримо. Согласно теореме 1.5.6 из [29], существует измеримая функция $y_2 : [t_0, T] \to \mathbb{R}^k$ такая, что

$$y_2(t) \in B_{\mathbb{R}^k}\big(y_1(t), \beta|\omega_1(t) - \omega_2(t)| + \varepsilon\big) \cap P\big(t, \omega_2(t)\big) \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, T].$$

Из условий Каратеодори следует, что функция y_2 существенно ограничена. Итак, доказано, что $y_2 \in \mathcal{N}_P(\omega_2)$ и $\rho_\infty(y_1, y_2) \leq \beta\rho_\infty(\omega_1, \omega_2) + \varepsilon$.

Аналогично можно показать, что для любых функций $\omega_1, \omega_2 \in L_\infty([t_0,T],\Omega)$, $y_2 \in \mathcal{N}_P(\omega_2)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $y_1 \in \mathcal{N}_P(\omega_2)$ такая, что $\rho_\infty(y_2, y_1) \le \beta\rho_\infty(\omega_1,\omega_2) + \varepsilon$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$h(\mathcal{N}_P(\omega_1), \mathcal{N}_P(\omega_2)) \le \beta\rho_\infty(\omega_1,\omega_2) + \varepsilon \quad \forall\, \omega_1,\omega_2 \in L_\infty([t_0,T],\Omega),$$

и, значит, многозначное отображение $\mathcal{N}_P(\cdot)$ является β-липшицевым. $\Box$

Зададим многозначный интегральный оператор $\mathcal{I}_P : L_\infty([t_0,T],\Omega) \rightrightarrows L_\infty([t_0,T],\mathbb{R}^k)$ формулой

$$\mathcal{I}_P(\omega) = \left\{ y \in L_\infty([t_0,T],\mathbb{R}^k) : \, y(t) \in P\left(t, a + \int\limits_{t_0}^{t} \omega(s)ds\right) \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0,T] \right\}$$

для любого $\omega \in L_\infty([t_0,T],\Omega)$. Приведем критерии липшицевости оператора $\mathcal{I}_P$ из [65].

Лемма 2.7. *Предположим, что многозначное отображение $P(\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: для почти всех $t \in [t_0,T]$ многозначное отображение $P(t,\cdot)$ непрерывно; для всех $x \in \Omega$ многозначное отображение $P(\cdot,x)$ измеримо; для каждого $R > 0$ существует $M > 0$ такое, что если $|x| \le R$, то $|y| \le M$ для п.в. $t \in [t_0,T]$, для всех $y \in P(t,x)$.*

Тогда если для почти всех $t \in [t_0,T]$ многозначное отображение $P(t,\cdot)$ является β-липшицевым, то $\mathcal{I}_P(\cdot)$ является $(\beta(T-t_0))$-липшицевым.

Доказательство теоремы 2.2. Выберем произвольное число

$$T \in \left(t_0,\, t_0 + \frac{\alpha_F \alpha_G}{L_{F,u}L_{G,x} + L_{F,x}\alpha_G}\right]. \tag{2.12}$$

Положим $X_1 = L_\infty([t_0,T],\mathbb{R}^n),\ X_2 = L_\infty([t_0,T],U),\ Y_1 = L_\infty([t_0,T],\mathbb{R}^k),\ Y_2 = L_\infty([t_0,T],\mathbb{R}^s)$.

Зададим многозначные операторы $\mathcal{F} : X_1 \times X_2 \rightrightarrows Y_1$, $\mathcal{G} : X_1 \times X_2 \rightrightarrows Y_2$ формулами

$$\mathcal{F}(v,u) = \left\{ y \in Y_1 \, : \, y(t) \in F\big(t, a + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, v(t), u(t)\big) \quad \dot{\forall} t \in [t_0,T] \right\},$$

$$\mathcal{G}(v,u) = \left\{ y \in Y_2 \,:\, y(t) \in G\big(t, a + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, u(t)\big) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, T] \right\}$$

для любых $v \in X_1$, $u \in X_2$. В силу леммы 2.6 (пункт 1) и леммы 2.7 многозначные отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определены корректно.

Рассмотрим систему включений

$$\begin{cases} 0 \in \mathcal{F}(v,u), \\ 0 \in \mathcal{G}(v,u). \end{cases} \tag{2.13}$$

Покажем, что если пара $(v,u) \in X_1 \times X_2$ является решением системы (2.13), то пара (x,u), где

$$x(t) = a + \int_{t_0}^{t} v(s)ds \quad \forall\, t \in [t_0, T],$$

есть локальное решение системы (2.6). Действительно, пусть $(v,u) \in X_1 \times X_2$ – решение системы (2.13). Тогда $x(0) = a$. Кроме того, поскольку $\dot{x}(t) = v(t)$ $\dot{\forall} t \in [t_0, T]$, из определения операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ следует, что $0 \in F(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))$, $0 \in G(t, x(t), u(t))$ $\dot{\forall} t \in [t_0, T]$. Таким образом, пара (x,u) является локальным решением системы (2.6).

Покажем, что система (2.13) совместна. Для этого достаточно доказать, что для нее выполнены предположения леммы 2.5 для $F_1 = \mathcal{F}$, $F_2 = \mathcal{G}$.

Очевидно, что пространства X_j, Y_j полны, $j \in \{1,2\}$. Из леммы 2.6 (пункт 3) следует, что многозначный оператор $\mathcal{F}(v,\cdot)$ является $L_{F,u}$-липшицевым для всех $v \in X_1$. Из леммы 2.7 вытекает, что многозначный оператор $\mathcal{G}(\cdot,u)$ является $(T-t_0)L_{G,x}$-липшицевым для всех $u \in X_2$. Из леммы 2.6 (пункт 2) следует, что многозначный оператор $\mathcal{G}(v,\cdot)$ является замкнутым и α_G-накрывающим для всех $v \in X_1$.

Осталось доказать, что отображение $\mathcal{F}(\cdot,u)$ является $(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})$-накрывающим для всех $u \in X_2$. Определим многозначный оператор $\mathfrak{F} : X_1 \times X_1 \times X_2 \rightrightarrows Y_1$ по формуле

$$\mathfrak{F}(v_1, v_2, u) \equiv \left\{ y \in Y_1 \,:\, y(t) \in F\left(t, a + \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds, v_2(t), u(t)\right) \quad \dot{\forall} t \in [t_0, T] \right\}$$

для любых $v_1, v_2 \in X_1$, $u_1 \in X_2$. В силу лемм 2.6 и 2.7 этот оператор корректно определен, является замкнутым, $((T - t_0)L_{F,x})$-липшицевым по переменной v_1 и α_F-накрывающим по переменной v_2. Из (2.12) вытекает, что

$$(T - t_0)L_{F,x} < \alpha_F.$$

В силу следствия 3.2 из [65] оператор $v \mapsto \mathfrak{F}(v, v, u)$ является $(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})$-накрывающим для всех $u \in X_2$. А так как $\mathfrak{F}(v, v, u) \equiv \mathfrak{F}(v, u)$, оператор $\mathcal{F}(\cdot, u)$ является $(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})$-накрывающим для всех $u \in X_2$.

Итак, доказано, что для системы (2.13) все предположения леммы 2.5 для $F_1 = \mathcal{F}$ и $F_2 = \mathcal{G}$ выполнены. Следовательно, в силу леммы 2.5 для любого $\varepsilon > 0$ существует решение (ξ, η) системы (2.13) такое, что выполняются оценки

$$\rho_\infty(\dot{x}_0, \xi) \leq \frac{L_{F,u}\|g_0\| + \alpha_G\|f_0\|}{(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})\alpha_G - L_{F,u}L_{G,x}(T - t_0)} + \varepsilon, \tag{2.14}$$

$$\rho_\infty(u_0, \eta) \leq \frac{(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})\|g_0\| + (T - t_0)L_{G,x}\|f_0\|}{(\alpha_F - (T - t_0)L_{F,x})\alpha_G - L_{F,u}L_{G,x}(T - t_0)} + \varepsilon. \tag{2.15}$$

Как было показано выше, пара (x, η), где $x(t) = a + \int_{t_0}^{t} \xi(s)ds$, $t \in [t_0, T]$, есть локальное решение системы (2.6). Искомые оценки этого решения вытекают из неравенств (2.14) и (2.15) при $\tau = T - t_0$. $\square$

Замечание. В связи с приведенными достаточными условиями разрешимости управляемых систем возникает естественный вопрос о нахождении констант накрывания отображения F по переменной $\dot{x}$ и отображения G по переменной u. При этом вполне естественной является ситуация, когда дифференциальная связь имеет явный вид $\dot{x} \in \widetilde{F}(t, x, u)$. В этом случае отображение F имеет вид $F(t, x, \dot{x}, u) \equiv \dot{x} - \widetilde{F}(t, x, u)$ и, очевидно, является 1-накрывающим по переменной $\dot{x}$. В то же время, смешанное ограничение может не быть разрешенным относительно u, и, значит, для применения приведенных выше достаточных условий разрешимости управляемых систем необходимы методы нахождения константы накрывания и условного накрывания отображений.

Отметим, что вопрос об оценке константы накрывания отображений поднимался ранее. Вообще говоря, не существует универсального метода нахождения константы накрывания, а известные методы их нахождения применимы к специальным классам отображений. Так например, в [19] был получен метод оценки константы накрывания гладких отображений специального вида, возникающих в задаче математической экономики о существовании равновесных цен в нелинейных моделях рынка. Мы предложим метод, позволяющий вычислить константу условного накрывания отображения, определяющего смешанное ограничение в задаче (2.6), когда это отображение линейно по u.

Пусть заданы линейный оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, отображение $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, векторы $b_j \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{1,N}$. Предположим, что в задаче (2.6)

$$G(t,x,u) \equiv g(t,x) + Au, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m : \langle u, b_j \rangle \le 0, \quad j = \overline{1,N}\},$$

т.е. смешанное ограничение имеет вид

$$g(t,x) + Au = 0 \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, t_1],$$

а ограничение на управление –

$$\langle u(t), b_j \rangle \le 0 \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, t_1], \quad j = \overline{1,N}.$$

Очевидно, что в этом случае константа условного накрывания отображения $G(t,x,\cdot) : U \to \mathbb{R}^s$ при любых (t,x) совпадает с константой условного накрывания сужения линейного оператора A на конус U. Для нахождения константы условного накрывания сужения линейного оператора A на конус U можно воспользоваться алгоритмом, предложенном в параграфе 1.2. При дополнительном предположении

$$AU = \mathbb{R}^s$$

константа условного накрывания сужения линейного оператора A на конус U, очевидно, совпадает с константой накрывания отображения $G(t,x,\cdot)$ при любых (t,x). Поэтому предложенный в параграфе 1.2 алгоритм в этом случае позволит вычислить константу накрывания отображения $G(t,x,\cdot)$.

Глава 3

Оптимальное управление

3.1 Постановки задач оптимального управления в дискретном и непрерывном времени

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \varphi(x(N+1)) \to \min, \\ x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, N], \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \in U(t),\ t \in [0, N]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь N – натуральное число либо нуль, $[0, N] := \{0, 1, \ldots, N\}$, $f : [0, N] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданные функции и $U(\cdot)$ – заданное отображение из $[0, N]$ в $\mathbb{R}^m$.

Допустимым процессом в задаче (3.1) будем называть пару (x, u), $u = \big(u(0), ..., u(N)\big)$, $u(i) \in \mathbb{R}^m$, $x = \big(x(0), ..., x(N+1)\big)$, $x(i) \in \mathbb{R}^n$, такую, что u удовлетворяет условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [0, N]$, а x является решением разностного уравнения $x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$, $t \in [0, N]$, с начальным условием $x(0) = x_0$. Компоненту u допустимого процесса (x, u) будем называть допустимым управлением, а компоненту x – соответствующей траекторией. Минимум в задаче (3.1) будем искать по множеству допустимых процессов (x, u).

Допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ назовем оптимальным процессом в задаче (3.1), если он доставляет локальный минимум функционалу φ, то есть $\varphi(\bar{x}(N+1)) \leq$

$\varphi(x(N+1))$ для всех допустимых процессов (x, u) из некоторой окрестности оптимального процесса $(\bar{x}, \bar{u})$. Окрестность здесь понимается в смысле топологии линейного конечномерного пространства. Компоненту $\bar{u}$ оптимального процесса $(\bar{x}, \bar{u})$ будем называть оптимальным управлением, а компоненту $\bar{x}$ – соответствующей траекторией.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \varphi(x(T)) \to \min \\ \dot{x} = f(t, x, u) \quad \dot{\forall} t \in [S, T], \\ x(S) = x_0, \\ u(t) \in U(t) \quad \dot{\forall} t \in [S, T]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь S, T – заданные числа, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – заданные функции, $U : [S, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ – заданное многозначное отображение.

Допустимым управлением в задаче (3.2) будем называть такую измеримую функцию $u : [S, T] \to \mathbb{R}^m$, что $u(t) \in U(t)$ $\dot{\forall} t \in [S, T]$. Пару (x, u) будем называть допустимым процессом, если u – это допустимое управление, а x – решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u(t))$, $x(S) = x_0$. Всюду далее будем полагать, что выполнены следующие условия:

(H1) функции $\varphi(\cdot)$, $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\varphi_x(\cdot)$, $\varphi_{xx}(\cdot)$, $f_x(t, \cdot, \cdot)$ и $f_{xx}(t, \cdot, \cdot)$ для всех $t \in [S, T]$;

(H2) функции $f(\cdot, x, u)$, $f_x(\cdot, x, u)$ и $f_{xx}(\cdot, x, u)$ измеримы для всех (x, u);

(H3) $U(\cdot)$ – многозначное отображение с замкнутыми ограниченными значениями, непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа.

Определение 3.1. Допустимое управление $u(\cdot)$ называется особым на отрезке $[t_1, t_2] \subset [S, T]$, если для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ существует точка $w \in U(t)$ такая, что $u(t) \neq w$ и

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = H(t, x(t), w, p(t)).$$

Здесь $x(\cdot)$ – траектория, соответствующая управлению $u(\cdot)$, $H : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times$

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H(t,x,u,p) \equiv p^T f(t,x,u)$ – функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (3.2), $p(\cdot)$ – решение сопряженной системы $\dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t))$ с концевым условием $p(T) = -\varphi_x(x(T))$.

Впервые особые управления, по-видимому, были исследованы в работе Розоноера [59] в 1959 году. Особые управления также были изучены в [34, 73] Р. Габасовым и Ф.М. Кирилловой. Условия глобального минимума для кусочно-непрерывных управлений были получены в [34] и [73] в предположении непрерывности функции f по t и при условии $U(t) \equiv \mathrm{const}$. Этот результат был усилен в статье [57] (см. теорему 21.1), в предположении измеримости функции f и отображения Ω по t.

В этой главе будут получены необходимые условия локального (а не глобального) понтрягинского минимума для задачи (1). Необходимые условия оптимальности будут доказаны для интегрируемых по Риману управлений. Соответствующие результаты будут получены методом конечномерных аппроксимаций. Метод заключается в сведении бесконечномерной задачи (3.2) к последовательности конечномерных задач и получению условий оптимальности в исходной задаче с помощью предельного перехода. Этот подход применялся ранее для получения условий оптимальности первого порядка в задачах с концевыми ограничениями (см. [22, 62, 66]), в задачах с фазовыми ограничениями при более слабых предположениях дифференцируемости (см. [82]).

Определение 3.2. Процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ называется понтрягинским локальным минимумом, если для каждого $c > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(c) > 0$ такое, что для всех допустимых процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих условиям

$$|x(T) - \bar{x}(T)| + \mu\{t \in [S,T] | \, u(t) \neq \bar{u}(t)\} \leq \varepsilon, \quad |u(t)| < C \;\; \dot{\forall} t \in [S,T],$$

выполняется неравенство $\varphi(x(T)) \geq \varphi(\bar{x}(T))$. Здесь μ обозначает меру Лебега.

Очевидно, что понтрягинский минимум слабее, чем сильный локальный минимум. Можно показать, что понтрягинский минимум не обязан быть даже слабым минимумом. Подробнее см. [22].

Понтрягинский минимум был рассмотрен А.В. Арутюновым в [9] и [63]. В этих работах рассматривалась задача оптимального управления со следующими ограничениями на управление: множества $U(t)$ равномерно ограничены и имеют вид

$$U(t) = \{u \in \mathbb{R}^m |\, R_1(u,t) \le 0,\, R_2(u,t) = 0\} \quad \dot{\forall} t \in [S,T],$$

где $R_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_i}$, $i = \{1,2\}$, – заданные отображения. Кроме того, в [9] и [63] предполагалось, что функции R_1 и R_2 непрерывны по совокупности переменных, дважды непрерывно дифференцируемы по u, удовлетворяют условиям регулярности

$$\operatorname{rank} \frac{\partial R_2}{\partial u}(u,t) = r_2,$$

существует $d(u,t) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $d(u,t)\dfrac{\partial R_2}{\partial u}(u,t) = 0$ и $\langle d(u,t), \dfrac{\partial R_1^j}{\partial u}(u,t)\rangle < 0$ для тех j, для которых $R_1^j(u,t) = 0$, где R_1^j – j-ая координата R_1.

В [9] и [63] было показано, что в этих условиях выполнение неравенства

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) \ge H(t, \bar{x}(t), u, p(t)) + \varepsilon |u - \bar{u}(t)|^2$$

для всех $\varepsilon > 0$, $u \in U(t)$ и для почти всех $t \in [S,T]$ является достаточным условием для того, чтобы процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ был понтрягинским локальным минимумом в задаче (3.2).

3.2 Необходимые условия второго порядка для дискретной задачи оптимального управления

Приведем необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи (3.1).

Для вектора $p \in \mathbb{R}^n$ положим

$$H(t,x,u,p) := p^T f(t,x,u).$$

Теорема 3.1. *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u})$ *– оптимальный процесс в задаче* (3.1)*. Пусть также функция* φ *удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки* $\bar{x}(N+1)$*, дифференцируема в этой точке и для всех* $t \in [0, N]$ *выполняются следующие предположения: функция* $f(t, \cdot, \cdot)$ *непрерывна, функция* $f(t, \cdot, \bar{u}(t))$ *дифференцируема в точке* $x = \bar{x}(t)$*, множества* $U(t)$ *замкнуты, множества* $f(t, \bar{x}(t), U(t))$ *выпуклы.*

Тогда существует решение $p : [0, N] \to \mathbb{R}^n$ *сопряженной системы*

$$\begin{aligned} &p(t) = H_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t+1)), \quad t \in [0, N], \\ &p(N+1) = -\varphi_x(\overline{x}(N+1)), \end{aligned} \tag{3.3}$$

для которого выполняется условие максимума

$$H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t+1)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \overline{x}(t), u, p(t+1)), \quad t \in [0, N]. \tag{3.4}$$

Отметим, что приведенная теорема усиливает известные условия оптимальности первого порядка (см. [53]), предполагая, что функция f дифференцируема по x *в точке* $\bar{x}(t)$, а не в целой окрестности точки $\bar{x}(t)$, и лишь при $u = \bar{u}(t)$. Множества $f(t, \bar{x}(t), U(t))$ предполагаются выпуклыми также только при $x = \bar{x}(t)$, а не в окрестности точки $\bar{x}(t)$.

Теорема 3.1 может оказаться не информативной. То есть существует задача, в которой допустимая пара (x, u) оптимальной не является, однако необходимые условия первого порядка (теорема 3.1) для нее выполняются. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую одношаговую задачу:

$$\begin{cases} -x^2(1) \to \min \\ x(1) = |u|, \\ u \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь $N = 0$, $\varphi(x) = -x^2$, $f(t, x, u) = |u|$, $U = \mathbb{R}$. Очевидно, что $\overline{u} = 0$ не является решением. Однако $\overline{u} = 0$ удовлетворяет условию максимума (3.4). Действительно, если $\overline{x}(1) = 0$, то $p(1) = 0$. Следовательно, $H(0, \overline{x}(0), \overline{u}, p(1)) = p(1)|\overline{u}| = 0 = \max_{u \in \mathbb{R}} p(1)|u|$.

Пусть $\Psi(t)$, $t \in [1, N+1]$, – матричная функция, определяемая из системы

$$\begin{aligned}
&\Psi(t) = f_x^T(t)\Psi(t+1)f_x(t) + H_{xx}(t),\ t \in [0, N],\\
&\Psi(N+1) = \varphi_{xx}(\overline{x}(N+1)),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $f_x(t) = f_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))$, $H_x(t) = H_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t+1))$.

Следующая теорема является основным результатом параграфа. Она усиливает теорему 3.1 и позволяет отсеивать некоторые неоптимальные процессы, которые удовлетворяют теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u})$ *– оптимальный процесс в задаче* (3.1). *Пусть также функция* φ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $\bar{x}(N+1)$ *и дважды дифференцируема в этой точке. Кроме того, для всех* $t \in [0, N]$ *выполняются следующие предположения: функция* $f(t, \cdot, \cdot)$ *непрерывна, функция* $f(t, \cdot, \bar{u}(t))$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $x = \bar{x}(t)$ *и дважды дифференцируема в этой точке, множества* $U(t)$ *замкнуты, множества* $f(t, \bar{u}(t), U(t))$ *выпуклы.*

Пусть для $\theta \in [0, N]$ *и* $v \in U(\theta)$ *имеет место*

$$H(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta), p(\theta+1)) = H(\theta, \overline{x}(\theta), v, p(\theta+1)), \tag{3.7}$$

где $p(\cdot)$ *– решение сопряженной системы* (3.3), *удовлетворяющее условию максимума* (3.4).

Тогда имеет место неравенство

$$\Psi(\theta+1)[f(\theta, \overline{x}(\theta), v) - f(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta))]^2 \geq 0. \tag{3.8}$$

Здесь $\Psi[w]^2 = w^T \Psi w$ – квадратичная форма, или, в более общем случае, $\Psi[w_1, w_2] = w_1^T \Psi w_2$.

Вернемся к примеру 1. В нем к управлению $\bar{u} = 0$, удовлетворяющему теореме 3.1, применим теорему 3.2. Условие (3.7), очевидно, выполняется в точке

$\theta = 0$ для всех $v \in \mathbb{R}$. Из (3.6) мы имеем $\Psi(1) = -2$, значит, (3.8) имеет вид $-2v^2 \geq 0$ для всех v, что не верно. Поэтому управление $\overline{u} = 0$ не является оптимальным. Таким образом, теорема 3.2 позволяет отсеивать некоторые неоптимальные процессы, которые удовлетворяют теореме 3.1. Отметим, что к этому примеру другие известные результаты (см. [24, 76, 77, 79]) не применимы, так как функция f не является дифференцируемой по переменной u в точке $\bar{u} = 0$.

Доказательство теоремы 3.1.

Зафиксируем произвольные число $\theta \in [0, N]$, вектор $y \in f(\theta, \overline{x}(\theta), U(\theta)) =: A$ и возьмем вектор $v \in U(\theta)$ такой, что выполняется равенство

$$y = f(\theta, \overline{x}(\theta), v).$$

Положим

$$\overline{y} = f(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta)),$$

и пусть $x(t, y)$, $t \in [0, N]$, – траектория задачи (3.1), соответствующая параметру y, или, что то же самое, управлению

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & t \neq \theta, \\ v, & t = \theta. \end{cases}$$

Заметим, что $x(t, \overline{y}) = \overline{x}(t)$ для всех t из $[0, N]$.

Для произвольных номеров $t, s \in [1, N+1]$ определим матрицу $\Phi(t, s)$ размерности $n \times n$:

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ I, & t = s, \\ f_x(t-1) f_x(t-2) \dots f_x(s), & t > s. \end{cases} \tag{3.9}$$

Покажем вначале, что функция $y \mapsto x(t, y)$ дифференцируема в точке $\overline{y}$ относительно множества A для всех $t \in [1, N+1]$. Напомним это определение из

[22]. Функция $y \mapsto x(t,y)$ дифференцируема в точке $\overline{y}$ относительно множества A, если существует матрица $D_y x(t,\bar{y})$ такая, что

$$x(t,y) - x(t,\bar{y}) = D_y x(t,\bar{y})(y-\bar{y}) + o(|y-\bar{y}|), \quad y \in A.$$

Докажем, кроме того, что такая производная функции $y \mapsto x(t,y)$ вычисляется по формуле:

$$D_y x(t,\overline{y}) = \Phi(t,\theta+1), \quad t \in [1, N+1]. \tag{3.10}$$

Действительно, это утверждение верно для всех $t \leq \theta$, так как в этом случае и правая, и левая части равенства (3.10) обращаются в нуль. Для значений $t \geq \theta + 1$ мы докажем это утверждение по индукции.

Если $t = \theta + 1$, то $x(\theta+1, y) = f(\theta, \overline{x}(\theta), v) = y$ и, следовательно, $D_y x(\theta + 1, \overline{y}) = I = \Phi(\theta+1, \theta+1)$. Значит, формула (3.10) верна при $t = \theta + 1$.

Предположим теперь, что равенство (3.10) верно для всех $\tau \in [1,t]$ для некоторого $t > \theta + 1$. Нам осталось показать, что

$$D_y x(t+1,\overline{y}) = \Phi(t+1,\theta+1). \tag{3.11}$$

Дифференцируя по y обе части уравнения

$$x(t+1,y) = f(t, x(t,y), \overline{u}(t)), \quad t \geq \theta+1,$$

получаем, что

$$D_y x(t+1,\bar{y}) = f_x(t, x(t,\bar{y}), \overline{u}(t)) D_y x(t,\bar{y}), \quad t \geq \theta+1. \tag{3.12}$$

По предположению индукции и определению (3.9) матрицы Φ мы также получаем

$$D_y x(t+1,\overline{y}) = f_x(t)\Phi(t,\theta+1) = \Phi(t+1,\theta+1).$$

Таким образом, формула (3.10) доказана.

По построению $y = \overline{y}$ является решением задачи

$$\begin{cases} \varphi(x(N+1,y)) \to \min, \\ y \in A. \end{cases} \tag{3.13}$$

Выпишем необходимые условия первого порядка для этой задачи:

$$0 \in D_y\varphi(x(N+1,\overline{y})) + N(\overline{y},A) = \varphi_x^T(\overline{x}(N+1))D_y x(N+1,\overline{y}) + N(\overline{y},A), \tag{3.14}$$

где $N(\cdot,\cdot)$ – нормальный конус выпуклого анализа и $D_y\varphi$ понимается как вектор-строка. Применяя (3.14) к $(y-\overline{y})$, в силу (3.10) получаем, что

$$\varphi_x^T(\overline{x}(N+1))\Phi(N+1,\theta+1)(y-\overline{y}) \geq 0. \tag{3.15}$$

Положим

$$p^T(t) = -\varphi_x^T(\overline{x}(N+1))\Phi(N+1,t), \quad t \in [0,N].$$

В связи с тем, что $\Phi(N+1,t) = \Phi(N+1,t+1)f_x(t)$, p удовлетворяет уравнению

$$p^T(t) = p^T(t+1)f_x(t) = H_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t+1)), \quad t \in [0,N], \tag{3.16}$$

с условием

$$p(N+1) = -\varphi_x(\overline{x}(N+1)).$$

Неравенство (3.46) может быть записано следующим образом:

$$p^T(\theta+1)(y - f(\theta,\overline{x}(\theta),\overline{u}(\theta))) \leq 0$$

или

$$H(\theta,\overline{x}(\theta),\overline{u}(\theta),p(\theta+1)) \geq H(\theta,\overline{x}(\theta),v,p(\theta+1)).$$

В силу произвольности выбора θ и v, условие максимума (3.4) выполняется, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.

Зафиксируем параметры θ, y и v, как в начале доказательства теоремы 3.1, и рассмотрим задачу (3.13). Предположим, что производная функции φ по направлению $\sigma = f(\theta,\overline{x}(\theta),v) - \overline{y}$ в точке $\overline{y}$ равна нулю, то есть,

$$D_y\varphi(x(N+1,\overline{y}))\sigma = 0. \tag{3.17}$$

Тогда необходимое условие второго порядка есть неотрицательность соответствующей квадратичной формы:

$$D_{yy}\varphi(x(N+1,\overline{y}))[\sigma,\sigma] \geq 0. \tag{3.18}$$

Из равенства (3.17) мы получаем (см. (3.46))

$$\varphi_x^T(\overline{x}(N+1))\Phi(N+1,\theta+1)(f(\theta,\overline{x}(\theta),v)-\overline{y}) = 0,$$

что равносильно условию (3.7). Условие (3.18) для векторов $y = f(\theta,\overline{x}(\theta),v)$, $\sigma = y-\overline{y}$ означает, что

$$\begin{gathered}D_{yy}\varphi(x(N+1,\overline{y}))[y-\overline{y},y-\overline{y}] \geq 0 \quad \text{или} \\ \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}(x(N+1,\overline{y}))(y_i-\overline{y}_i)(y_j-\overline{y}_j) \geq 0.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Наша цель – вычислить производные $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}(x(N+1,\overline{y})), \quad i,j\in\{1,\ldots,n\}$.

Фиксируем произвольные номера i и j. Дифференцируя обе части равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(x(N+1,y)) = \varphi_x^T(x(N+1,y))\frac{\partial x}{\partial y_i}(N+1,y)$$

по переменной y_j в точке $y=\overline{y}$, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}(x(N+1,\overline{y})) = \\ \varphi_{xx}(\overline{x}(N+1))[\frac{\partial x}{\partial y_i}(N+1,\overline{y}),\frac{\partial x}{\partial y_j}(N+1,\overline{y})] + \varphi_x^T(\overline{x}(N+1))\frac{\partial^2 x}{\partial y_i\partial y_j}(N+1,\overline{y}).\end{gathered} \tag{3.20}$$

Покажем, что выполнено равенство

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i\partial y_j}(t,\bar{y}) = \sum_{\tau=\theta+1}^{t-1}\Phi(t,\tau+1)\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(\tau)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(\tau,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\tau,\bar{y}), \tag{3.21}$$

где $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(t) := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$.

Действительно, дифференцируя по переменной y_i обе части равенства

$$x(t+1,y) = f(t,x(t,y),\bar{u}(t)), \quad t \geq \theta+1,$$

получаем:

$$\frac{\partial x}{\partial y_i}(t+1,y) = f_x(t,x(t,y),\bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial y_i}(t,y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(t,x(t,y),\bar{u}(t))\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(t,y), \quad t \geq \theta+1.$$

Снова дифференцируя обе части получившегося соотношения по y_j в точке $y=\bar{y}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(t+1,\bar{y}) = f_x(t)\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(t,\bar{y}) + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(t)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(t,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(t,\bar{y}), \quad t \geq \theta+1. \tag{3.22}$$

В силу равенства $x(\theta+1,y) = f(\theta,\bar{x}(\theta),v) = y$, верно следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(\theta+1,\bar{y}) = 0. \tag{3.23}$$

Итак, мы получили, что для всех $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ функция $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(\cdot,\bar{y})$ удовлетворяет линейному уравнению (3.22) с начальным условием (3.23).

Напомним, что решением уравнения $z(t+1) = f_x(t)z(t)+h(t)$, $t \geq 0$, является функция $z(t) = \Phi(t,0)z(0)+\sum\limits_{\tau=0}^{t-1}\Phi(t,\tau+1)h(\tau)$. Следовательно, для решения (3.22)-(3.23) верно следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(t,\bar{y}) = \Phi(t,\theta+1)\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(\theta+1,\bar{y}) +$$

$$+ \sum_{\tau=\theta+1}^{t-1} \Phi(t,\tau+1) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(\tau)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(\tau,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\tau,\bar{y}) =$$

$$= \sum_{\tau=\theta+1}^{t-1} \Phi(t,\tau+1) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(\tau)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(\tau,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\tau,\bar{y}).$$

Таким образом, формула (3.21) доказана.

В силу равенства (3.21) последнее слагаемое в (3.20) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&\varphi_x^T(\bar{x}(N+1))\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_j}(N+1,\bar{y})\\
&=\varphi_x^T(\bar{x}(N+1))\sum_{\tau=\theta+1}^{N}\Phi(N+1,\tau+1)\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(\tau)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(\tau,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\tau,\bar{y})\\
&=\sum_{\tau=\theta+1}^{N}p^T(\tau+1)\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(\tau)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(\tau,\bar{y})\frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\tau,\bar{y})\\
&=\sum_{\tau=\theta+1}^{N}H_{xx}(\tau)[\frac{\partial x}{\partial y_i}(\tau,\bar{y}),\frac{\partial x}{\partial y_j}(\tau,\bar{y})].
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

В силу соотношений (3.20), (3.10) и (3.24), условие (3.19) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&0\le\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}(x(N+1,\bar{y}))(y_i-\bar{y}_i)(y_j-\bar{y}_j)=\\
&\varphi_{xx}(\bar{x}(N+1))[\Phi(N+1,\theta+1)(y-\bar{y})]^2+\sum_{\tau=\theta+1}^{N}H_{xx}(\tau)[\Phi(\tau,\theta+1)(y-\bar{y})]^2=\\
&\Phi^T(N+1,\theta+1)\varphi_{xx}(\bar{x}(N+1))\Phi(N+1,\theta+1)[y-\bar{y}]^2\\
&+\sum_{\tau=\theta+1}^{N}\Phi^T(\tau,\theta+1)H_{xx}(\tau)\Phi(\tau,\theta+1)[y-\bar{y}]^2.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Пусть $\Psi(t), \quad t\in[0,N+1]$, – симметричная матричная функция, заданная системой

$$
\Psi(t)=\Phi^T(N+1,t)\varphi_{xx}(\bar{x}(N+1))\Phi(N+1,t)+\sum_{\tau=t}^{N}\Phi^T(\tau,t)H_{xx}(\tau)\Phi(\tau,t),
$$

$$
\Psi(N+1)=\varphi_{xx}(\bar{x}(N+1)),\quad t\in[0,N].
$$

В силу определения (3.9) матрицы Φ, получаем

$$
\begin{aligned}
\Psi(t)&=f_x^T(t)\Phi^T(N+1,t+1)\varphi_{xx}(\bar{x}(N+1))\Phi(N+1,t+1)f_x(t)\\
&+f_x^T(t)\left\{\sum_{\tau=t+1}^{N}\Phi^T(\tau,t+1)H_{xx}(\tau)\Phi(\tau,t+1)\right\}f_x(t)+H_{xx}(t)\\
&=f_x^T(t)\Psi(t+1)f_x(t)+H_{xx}(t),\ t\in[0,N],
\end{aligned}
$$

то есть функция Ψ удовлетворяет (3.6). Условие (3.25) может быть записано с помощью функции Ψ следующим образом:

$$\Psi(\theta+1)[y - f(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}(\theta))]^2 \geq 0,$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

3.3 Необходимые условия второго порядка для задачи оптимального управления с непрерывным временем

Прежде чем сформулировать основной результат этого параграфа, приведем вспомогательное утверждение. Зафиксируем произвольные числа $\theta \in [S, T)$, $\varepsilon \in (0, T-\theta]$, непрерывную функцию $v(t) \in U(t)$, $t \in [\theta, \theta+\varepsilon]$ и рассмотрим возмущение оптимального управления

$$u(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [\theta, \theta+\varepsilon], \\ \bar{u}(t), & t \notin [\theta, \theta+\varepsilon]. \end{cases} \tag{3.26}$$

Обозначим траекторию задачи (3.2), отвечающую управлению (3.26), через $x(\varepsilon, t)$. Заметим, что $x(\varepsilon, t) = \bar{x}(t)$ для всех $t \leq \theta$ и $x(0, \cdot) = \bar{x}(\cdot)$.

Для симметричной матрицы A и векторов y, y_1, y_2 соответствующей одинаковой размерности положим

$$A[y]^2 := y^T A y, \;\; A[y_1, y_2] := y_1^T A y_2.$$

Кроме того, положим

$$f_x(t) := f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \; f_{xx}(t) := f_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

$$\Delta_v f(\theta) := f(\theta, \bar{x}(\theta), v(\theta)) - f(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}(\theta)),$$

$$\Delta_v f_x(\theta) := f_x(\theta, \bar{x}(\theta), v(\theta)) - f_x(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}(\theta)).$$

Фундаментальную матрицу решений линейного дифференциального уравнения

$$\dot{r}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))r, \; t \in [S, T]$$

обозначим через $\Phi(\cdot, \cdot)$.

Выведем формулу для вычисления производной функции $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon, T)$.

Лемма 3.3. *Функция $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon, T)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, T-\theta]$.*

Лемма 3.4. *Если $f(\cdot, x, u)$ и $\bar{u}$ непрерывны справа в точке $t = \theta$, то производная $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, T)$ непрерывна справа в точке $\varepsilon = 0$ и удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, T) &= \Phi(T, \theta+\varepsilon)\left[f(\theta+\varepsilon, \bar{x}(\theta+\varepsilon), v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon, \bar{x}(\theta+\varepsilon), \bar{u}(\theta+\varepsilon))\right] \\ &+\varepsilon\left\{\Phi(T,\theta)\Delta_v f_x(\theta)\Delta_v f(\theta) + \int\limits_\theta^T \Phi(T,\tau) f_{xx}(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\left[\Phi(\tau,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2 d\tau\right\} + o(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.27}$$

для почти всех ε. В частности,

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0, T) = \Phi(T, \theta)\Delta_v f(\theta). \tag{3.28}$$

Доказательство леммы 3.3. Получено И.А. Шварцманом в [86].

Доказательство леммы 3.4. Чтобы доказать непрерывность справа отображения $\varepsilon \mapsto \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, T)$ в точке $\varepsilon = 0$, рассмотрим равенство

$$x(\varepsilon, t) = \bar{x}(\theta) + \int_\theta^{\theta+\varepsilon} f(\tau, x(\varepsilon, \tau), v(\tau))\, d\tau + \int_{\theta+\varepsilon}^t f(\tau, x(\varepsilon,\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau.$$

Дифференцируя обе части равенства по ε и учитывая, что x не зависит от ε на интервале $[\theta, \theta+\varepsilon]$, мы получаем, что почти для всех ε верно равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, t) =& f(\theta+\varepsilon, x(\varepsilon, \theta+\varepsilon), v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon, x(\varepsilon,\theta+\varepsilon), \bar{u}(\theta+\varepsilon)) \\ &+ \int_{\theta+\varepsilon}^t f_x(\tau, x(\varepsilon,\tau), \bar{u}(\tau))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau)\, d\tau\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Итак, мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)-\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,t)=[f(\theta+\varepsilon,x(\varepsilon,\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon))-f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))]\\
&-[f(\theta+\varepsilon,x(\varepsilon,\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))-f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta))]\\
&-\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} f_x(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau)\,d\tau\\
&+\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\left(f_x(\tau,x(\varepsilon,\tau),\bar{u}(\tau))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\tau)-f_x(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau)\right)\,d\tau\,.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Последний интеграл может быть представлен в виде

$$
\begin{aligned}
&\int_{\theta+\varepsilon}^{t} f_x(\tau,x(\varepsilon,\tau),\bar{u}(\tau))(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\tau)-\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau))\,d\tau\\
&+\int_{\theta+\varepsilon}^{t}(f_x(\tau,x(\varepsilon,\tau),\bar{u}(\tau))-f_x(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Очевидно, что первая разность и первый интеграл в (3.30) стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, также как второй интеграл в (3.31). Поскольку по предположению $\bar{u}$ непрерывна справа в точке $\varepsilon=0$, то вторая разность в (3.30) также стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Обозначив эти слагаемые через $\psi(\varepsilon,t)$, из (3.30) и (3.31) получим, что

$$
\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)-\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,t)=\psi(\varepsilon,t)+\int_{\theta+\varepsilon}^{t} f_x(\tau,x(\varepsilon,\tau),\bar{u}(\tau))(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\tau)-\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau))\,d\tau,
$$

где $\psi(\varepsilon,t)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t.

Применяя снова лемму Гронуолла, получаем, что $\left|\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)-\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,t)\right|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t.

Докажем теперь соотношение (3.27). Дифференцируя обе части равенства (3.29) по t, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)=f_x(t,x(\varepsilon,t),\bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)\\
&=f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)+(f_x(t,x(\varepsilon,t),\bar{u}(t))-f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)\\
&=f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)+\varepsilon f_{xx}(t)\left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,t),\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t)\right]+o(\varepsilon),\ t>\theta+\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Так как производная $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot,t)$ непрерывна справа в точке $\varepsilon=0$, то из равенства

(3.32) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t) = f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t) + \varepsilon f_{xx}(t)\left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,t)\right]^2 + o(\varepsilon),\ t > \theta+\varepsilon.$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,t) = \Phi(t,\theta+\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon) + \varepsilon\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\Phi(t,\tau)f_{xx}(\tau)\left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau)\right]^2 d\tau + o(\varepsilon)$$
$$= \Phi(t,\theta+\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon) + \varepsilon\int_{\theta}^{t}\Phi(t,\tau)f_{xx}(\tau)\left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,\tau)\right]^2 d\tau + o(\varepsilon),\ t \geq \theta+\varepsilon. \tag{3.33}$$

Вычислим производную $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon)$. Далее для удобства будем писать $x(\theta+\varepsilon)$ вместо $x(\varepsilon,\theta+\varepsilon)$. Из (3.29) следует, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon) = f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))\\
&= \ (f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon)))\\
&+ (f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)))\\
&+ (f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon)))\\
&+ (f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Первая и вторая разности в правой части могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon)) =\\
&f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon))(x(\theta+\varepsilon)-\bar{x}(\theta)) + o(\varepsilon) =\\
&\varepsilon f_x(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta)) + o(\varepsilon),\\
&f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon)) - f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon)) =\\
&- f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta),v(\theta+\varepsilon))(\bar{x}(\theta+\varepsilon)-\bar{x}(\theta)) + o(\varepsilon) =\\
&- \varepsilon f_x(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta)) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Оставим третью разность в (3.34) без изменения, а для четвертой разности имеем

$$
\begin{aligned}
&f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))-f(\theta+\varepsilon,x(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))\\
&=-f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))(x(\theta+\varepsilon)-\bar{x}(\theta+\varepsilon))+o(\varepsilon)\\
&=-f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))(x(\theta+\varepsilon)-\bar{x}(\theta))\\
&+f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))(\bar{x}(\theta+\varepsilon)-\bar{x}(\theta))+o(\varepsilon)\\
&=-\varepsilon f_x(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))(f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))-f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta)))+o(\varepsilon)\\
&=-\varepsilon f_x(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta))(f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))-f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta)))+o(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Следовательно, из (3.34) вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon)=\varepsilon\Big[f_x(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))-f_x(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta))\\
&-f_x(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta))(f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta))-f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta)))\Big]\\
&+[f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon))-f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))]+o(\varepsilon)=o(\varepsilon)+\\
&+\varepsilon\Delta_v f_x(\theta)\Delta_v f(\theta)+[f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon))-f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))]\,.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Подставляя полученное выражение в (3.33) вместо $\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\theta+\varepsilon)$ и учитывая (3.28), получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,T)=\ \Phi(T,\theta+\varepsilon)\,[f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon))-f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))]\\
&+\varepsilon\left\{\Phi(T,\theta+\varepsilon)\Delta_v f_x(\theta)\Delta_v f(\theta)+\int_\theta^T\Phi(T,\tau)f_{xx}(\tau)\left[\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(0,\tau)\right]^2d\tau\right\}+o(\varepsilon)\\
&=\ \Phi(T,\theta+\varepsilon)\,[f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),v(\theta+\varepsilon))-f(\theta+\varepsilon,\bar{x}(\theta+\varepsilon),\bar{u}(\theta+\varepsilon))]+o(\varepsilon)+\\
&+\varepsilon\left\{\Phi(T,\theta)\Delta_v f_x(\theta)\Delta_v f(\theta)+\int\limits_\theta^T\Phi(T,\tau)f_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))\,[\Phi(\tau,\theta)\Delta_v f(\theta)]^2\,d\tau\right\},
\end{aligned}
$$

что совпадает с (3.27) и завершает доказательство утверждения. □

Из представления (3.26) следует, что $\varepsilon=0$ соответствует понтрягинскому локальному минимуму $\bar{u}$. Поэтому $\varepsilon=0$ – точка минимума в одномерной оптимизационной задаче

$$
\begin{cases}
\varphi(x(\varepsilon,T))\to\min\\
\varepsilon\geq 0.
\end{cases}
\tag{3.36}
$$

Из условий оптимальности первого порядка для (3.36) и из (3.28) следует, что

$$0 \le \varphi_x^T(\bar{x}(T))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,T) = \varphi_x^T(\bar{x}(T))\Phi(T,\theta)\Delta_v f(\theta). \tag{3.37}$$

Положим

$$p^T(t) := -\varphi_x^T(\bar{x}(T))\Phi(T,t),\ t \in [S,T]. \tag{3.38}$$

В силу свойств фундаментальной матрицы функция p удовлетворяет сопряженной системе:

$$\dot{p}^T(t) = -p^T(t)f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ p(T) = -\varphi_x(\bar{x}(T)). \tag{3.39}$$

Соотношение (3.37) может быть переписано следующим образом:

$$p^T(\theta)(f(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta)) - f(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta))) \le 0,$$

или в терминах Гамильтониана $H(t,x,u,p) = p^T f(t,x,u)$:

$$H(\theta,\bar{x}(\theta),\bar{u}(\theta),p(\theta)) \ge H(\theta,\bar{x}(\theta),v(\theta),p(\theta)).$$

Положим

$$H_x(t) := H_x(\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t)),\ H_{xx}(t) := H_{xx}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t)),$$
$$\Delta_v H_x(t) := H_x(t,\bar{x}(t),v(t),p(t)) - H_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t)).$$

Определим матричную функцию $\Psi(t)$, $t \in [S,T]$, как решение уравнения

$$\dot{\Psi}(t) = H_{xx}(t) - f_x^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)f_x(t) \tag{3.40}$$

с концевым условием

$$\Psi(T) = \varphi_{xx}(\bar{x}(T)). \tag{3.41}$$

Теорема 3.5. *Пусть функция $f(\cdot,x,u)$ непрерывна справа для всех (x,u). Предположим, что пара $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ является понтрягинским локальным минимумом в задаче (2), функция $\bar{u}(\cdot)$ непрерывна справа, $v(\cdot)$ – такая непрерывная функция, что $v(t) \in U(t)$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]$ и существует отрезок $[t_2,t_3] \subset [t_0,t_1]$ такой, что $v(t) \ne \bar{u}(t)$ для почти всех $t \in [t_2,t_3]$ и выполнено*

$$H(t,\bar{x}(t),v(t),p(t)) \equiv H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t)) \quad \forall t \in [t_2,t_3], \tag{3.42}$$

где $p(\cdot)$ *– решение сопряженной системы* (3.39).

Тогда

$$\Psi(t)[\Delta_v f(t)]^2 - \Delta_v H_x^T(t)\Delta_v f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_2, t_3]. \tag{3.43}$$

Замечание 3.1. Утверждение теоремы верно и в точках непрерывности слева функции $\bar{u}$. Для доказательства этого факта в (3.26) следует взять возмущение оптимального управления слева.

Так как функция интегрируема по Риману на ограниченном интервале тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна на нем, получаем следствие.

Следствие 1. Предположим, что функция $f(\cdot, x, u)$ и оптимальное управление $\bar{u}$ интегрируемы по Риману. Тогда утверждение (3.43) теоремы 3.5 имеет место для почти всех $t \in [t_1, t_2]$.

Заметим, что известны примеры задач, в которых оптимальное управление не является интегрируемым по Риману ([61]).

Следующий простой пример иллюстрирует применение теоремы 3.5.

$$\begin{cases} -x^2(1) \to \min \\ \dot{x}(t) = u^2, \ t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, \\ |u(t)| \leq 1, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Легко проверить, что для управления $\bar{u} \equiv 0$ равенство (3.42) выполняется для всех $v \in [-1, 1]$. Решение системы (3.40)-(3.41) – это функция $\Psi(t) \equiv -2$ и (3.43) принимает вид $-4v^4 \geq 0$ для всех $v \in [-1, 1]$, что не верно. Следовательно, управление $\bar{u} \equiv 0$ не является оптимальным.

Доказательство теоремы 3.5. Зафиксируем произвольные числа $\theta \in [t_1, t_2)$, $\varepsilon \in (0, t_2 - \theta)$ и рассмотрим возмущение оптимального управления, описанное в (3.26). Согласно лемме 3.3, фунция $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon, T)$ абсолютно непрерывна, откуда следует, что функция $\varepsilon \mapsto \varphi(x(\varepsilon,T))$ также абсолютно непрерывна. Так как функция $\varphi(x(\varepsilon,T))$ достигает локального минимума в точке $\varepsilon = 0$, то

$$0 \le \varphi(x(\varepsilon,T)) - \varphi(x(0,T)) = \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(x(\varepsilon,T))\, d\varepsilon \quad \text{для достаточно малого } \varepsilon > 0,$$

поэтому существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$ такая, что $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(x(\varepsilon_k,T)) \ge 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 \ \le\ & \varphi_x^T(x(\varepsilon_k,T))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_k,T) = \\ & = (\varphi_x^T(x(\varepsilon_k,T)) - \varphi_x^T(\bar{x}(T)))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_k,T) + \varphi_x^T(\bar{x}(T))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_k,T). \end{aligned}$$

Так как функция $x(\cdot,T)$ дифференцируема в точке $\varepsilon = 0$, то

$$\varphi_x(x(\varepsilon_k,T)) - \varphi_x(\bar{x}(T)) = \varepsilon_k \varphi_{xx}(\bar{x}(T))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,T) + o(\varepsilon_k),$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_k \varphi_{xx}(\bar{x}(T))\left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0,T), \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_k,T)\right] + \varphi_x^T(\bar{x}(T))\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_k,T) + o(\varepsilon_k) \ge 0. \tag{3.44}$$

В силу леммы 3.3 отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \varepsilon_k \varphi_{xx}(\bar{x}(T))\left[\Phi(T,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2 + \varepsilon_k \varphi_x^T(\bar{x}(T))\Phi(T,\theta)\Delta_v f_x(\theta)\Delta_v f(\theta) \\ & + \varphi_x^T(\bar{x}(T))\bigg(\varepsilon_k \int_\theta^T \Phi(T,\tau) f_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))\left[\Phi(\tau,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2\, d\tau + o(\varepsilon_k) + \\ & \Phi(T,\theta+\varepsilon_k)[f(\theta+\varepsilon_k,\bar{x}(\theta+\varepsilon_k),v(\theta+\varepsilon_k)) - f(\theta+\varepsilon_k,\bar{x}(\theta+\varepsilon_k),\bar{u}(\theta+\varepsilon_k))]\bigg) \ge 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Вспоминая, что $\dot{p}^T(t) = -\varphi_x^T(\bar{x}(T))\Phi(T,t)$, мы можем переписать (3.45) в терминах $H = p^T f$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_k \varphi_{xx}(\bar{x}(T))\left[\Phi(T,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2 - \varepsilon_k \Delta_v H_x^T(\theta)\Delta_v f(\theta) - \\ & - [H(\theta+\varepsilon_k,\bar{x}(\theta+\varepsilon_k),v(\theta+\varepsilon_k),p(\theta+\varepsilon_k)) - \\ & - H(\theta+\varepsilon_k,\bar{x}(\theta+\varepsilon_k),\bar{u}(\theta+\varepsilon_k),p(\theta+\varepsilon_k))] - \\ & - \varepsilon_k \int_\theta^T H_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),p(\tau))\left[\Phi(\tau,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2\, d\tau + o(\varepsilon_k) \ge 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Разность Гамильтонианов в (3.46) равна нулю в силу (3.42). Следовательно,

$$\varphi_{xx}(\bar{x}(T))\left[\Phi(T,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2 - \Delta_v H_x^T(\theta)\Delta_v f(\theta) - \int\limits_{\theta}^{T} H_{xx}(\tau)\left[\Phi(\tau,\theta)\Delta_v f(\theta)\right]^2\, d\tau \geq 0. \tag{3.47}$$

Определим симметричную матричную функцию $\Psi(t)$ следующим образом:

$$\Psi(t) = \Phi^T(T,t)\varphi_{xx}(\bar{x}(T))\Phi(T,t) - \int_t^T \Phi^T(\tau,t)H_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),p(\tau))\Phi(\tau,t)\,d\tau.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по t, и учитывая, что $\dfrac{d}{dt}\Phi^T(T,t) = -f_x^T(t)\Phi^T(T,t)$, $\dfrac{d}{dt}\Phi(T,t) = -\Phi(T,t)f_x(t)$ и $\Phi(T,T) = I$, получаем, что

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(t) =& - f_x^T(t)\Phi^T(T,t)\varphi_{xx}(\bar{x}(T))\Phi(T,t) - \Phi^T(T,t)\varphi_{xx}(\bar{x}(T))\Phi(T,t)f_x(t) + H_{xx}(t)\\ &+ \int_t^T f_x^T(t)\Phi^T(\tau,t)H_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),p(\tau))\Phi(\tau,t)\,d\tau\\ &+ \int_t^T \Phi^T(\tau,t)H_{xx}(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),p(\tau))\Phi(\tau,t)f_x(t)\,d\tau\\ =& H_{xx}(t) - f_x^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)f_x(t)\end{aligned}$$

с концевыми условиями

$$\Psi(T) = \varphi_{xx}(\bar{x}(T)),$$

что совпадает с (3.40) и (3.41). Из условия (3.47) следует, что

$$\Psi(\theta)[\Delta_v f(\theta)]^2 - \Delta_v H_x(\theta)\Delta_v f(\theta) \geq 0,$$

что соответствует (3.43). Теорема доказана. □

3.4 Свойства функции минимума в задаче оптимального управления

Прежде чем сформулировать основные результаты параграфа, приведем вспомогальные теоретические сведения. Пусть заданы симметричные матрицы Q_0,

Q_1, ..., Q_k размерности $n \times n$ с действительными элементами. Определим квадратичную форму $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ по формулам

$$q_0(x) = \langle Q_0 x, x\rangle, \;\; Q(x) = \begin{pmatrix} \langle Q_1 x, x\rangle \\ \vdots \\ \langle Q_k x, x\rangle \end{pmatrix}, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Будем предполагать, что квадратичное отображение Q сюръективно, то есть $Q(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k$.

Пусть имеет место

$$q_0(x) \geq 0 \quad \forall\, x : \;\; Q(x) = 0. \tag{3.48}$$

Это условие подробно изучено в [8]. Оно, очевидно, равносильно тому, что в квадратичной задаче минимизации

$$q_0(x) \to \inf, \;\; Q(x) = 0 \tag{3.49}$$

точка $x_0 = 0$ является решением.

Рассмотрим возмущение задачи (3.49):

$$q_0(x) \to \inf, \;\; Q(x) = y, \tag{3.50}$$

где $y \in \mathbb{R}^k$ играет роль параметра возмущения. Здесь и ниже инфимум может принимать значение $-\infty$, а супремум — значение $+\infty$. Инфимум в задаче (3.50) обозначим через $\omega(y)$, т.е.

$$\omega(y) = \inf\{q_0(x) : \, Q(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

Поскольку в силу (3.48) $\omega(0) = 0$, то из определения функции ω непосредственно вытекает, что она положительно однородна, т.е.

$$\omega(\lambda y) = \lambda \omega(y) \;\; \forall \lambda \geq 0, \; \forall y \in \mathbb{R}^k. \tag{3.51}$$

Исследуем топологические и дифференциальные свойства функции ω в предположении, что матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k одновременно диагонализируемы.

Аналогичная задача без априорного предположения сюръективности квадратичного отображения Q была исследована А.В. Арутюновым и С.Е. Жуковским в [17].

Задачи, подобные рассматриваемой, возникают, например, в связи с проблемой оптимального восстановления линейных операторов по неточно заданной информации. Подробно это изложено в [33, 56], где при $k = 2$ функция ω была вычислена для случая, когда все матрицы Q_0, Q_1, Q_2 являются диагональными.

Свойства функции минимума ω важны для теории экстремальных задач в целом и, в частности, для численных методов их решения, составляя основу теории чувствительности (см., например, [51]). К примеру, непрерывность функции минимума означает корректность экстремальной задачи. Исследование функции ω существенно осложняется тем, что в задаче (3.49) точка минимума $x_0 = 0$ всегда анормальна [1] относительно ограничения $Q(x) = 0$. А исследование анормальных экстремальных задач требует специальных подходов (см. [13]).

В [20, 64] построены основы теории чувствительности анормальных экстремальных задач с ограничениями, а задача (3.49) дает классический пример анормальной задачи. Однако при исследовании общей анормальной экстремальной задачи в [20, 64] естественно изучался локальный минимум, что заложено в определении рассматриваемой в [20, 64] функции минимума. А для квадратичной задачи естественно рассматривать лишь глобальный минимум, что и отражено в определении функции ω. Таким образом, результаты общей теории (см. [20, 64]) к квадратичной задаче (3.50) напрямую не применимы.

Всюду далее будем предполагать, что все матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k попарно коммутируют. Тогда, как известно, они одновременно диагонализируемы, т. е. существует ортогональное преобразование, которое одновременно приводит все матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k к диагональному виду.

[1] Напомним, что для гладкого отображения $F : X \to Y$ точка x_0 называется анормальной, если его производная $F'(x_0)$ не является сюръективным оператором (см. [13]).

Если все матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k являются диагональными, то, как будет показано ниже, задача (3.50) сводится к эквивалентной задаче линейного программирования. Применив к полученной задаче линейного программирования общую теорию (см. [32]), в рассматриваемом случае можно исчерпывающим образом описать свойства функции ω. Сформулируем основные утверждения этого параграфа, доказательства которых приводятся ниже.

Через c обозначим вектор, составленный из элементов диагонали матрицы Q_0, а через A – матрицу, j-я строка которой является диагональю матрицы Q_j, $j = \overline{1, k}$. Матрица A имеет размерность $k \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Положим

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \ c + A^T\lambda \geq 0\}, \quad \Lambda_*(y) = \{\lambda \in \Lambda : \ \langle -y, \lambda \rangle = \omega(y)\} \qquad (3.52)$$

для любого $y \in \mathbb{R}^k$.

Лемма 3.6. *Пусть имеет место (3.48). Тогда множество Λ непусто. Кроме того, для любого $y \in \mathbb{R}^k$ множество $\Lambda_*(y)$ непусто и $\omega(y) > -\infty$.*

Следствие 2. Пусть имеет место (3.48). Тогда функция ω выпукла.

Теорема 3.7. *Пусть имеет место (3.48). Тогда функция ω удовлетворяет условию Липшица.*

Отметим, что из следствия 2 вытекает, что функция ω, как и всякая выпуклая функция, локально липшицева. В отличие от этого теорема 3.7 гарантирует глобальную липшицевость функции ω.

Теорема 3.8. *Пусть имеет место (3.48) и для некоторого $y \in \mathbb{R}^k$ множество $\Lambda_*(y)$ состоит из единственной точки λ_*. Тогда функция ω дифференцируема в точке y.*

Следствие 3. Пусть имеет место (3.48) и множество Λ состоит из единственной точки. Тогда функция ω дифференцируема.

Это утверждение вытекает из теоремы 3.8 и очевидного включения $\Lambda_*(y) \subseteq \Lambda\ \forall\, y$.

Пусть имеет место (3.48). Возьмем какой-нибудь вектор $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через J множество тех индексов j, для которых j-я компонента вектора $c + A^T\lambda$ равна нулю, а через $\bar{A}$ – матрицу размерности $k \times n$ с компонентами

$$\bar{a}_{i,\,j} = \begin{cases} a_{i,\,j}, & \text{если } \ j \in J; \\ 0, & \text{если } \ j \notin J, \end{cases} \qquad i = \overline{1, k}, \ \ j = \overline{1, n},$$

где $a_{i,\,j}$ – компоненты матрицы A.

Лемма 3.9. *Для того, чтобы множество Λ состояло из единственной точки, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \neq 0$ выполнялось $\bar{A}^T\nu \notin \mathbb{R}^k_+$, где $\mathbb{R}^k_+ = \{x = (x_1, ..., x_k) : x_i \geq 0\, \forall\, i\}$ – неотрицательный ортант в $\mathbb{R}^k$, т.е. чтобы хотя бы одна из компонент вектора $\bar{A}^T\nu$ была отрицательна.*

Если положительно однородная функция $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ дифференцируема в нуле, то она является линейной функцией. Действительно, пусть $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(0) = \lambda$. Определим функцию $\tilde{\phi}$ по формуле $\tilde{\phi}(y) = \phi(y) - \langle\lambda, y\rangle$. Функция $\tilde{\phi}$ также положительно однородна и $\tilde{\phi}(0) = 0$, $\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}(0) = 0$. Поэтому для произвольного y имеем $0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \tilde{\phi}(\varepsilon y)/\varepsilon = \tilde{\phi}(y)$, откуда $\tilde{\phi} = 0$.

Таким образом, если функция ω дифференцируема в нуле, то она дифференцируема на всем $\mathbb{R}^k$. В то же время, приведенный ниже пример 1 демонстрирует, что даже в предположении (3.48) функция ω не обязана быть дифференцируемой в нуле. Тем не менее, она дифференцируема на "богатом"множестве точек. А именно верно следующее утверждение.

Теорема 3.10. *Пусть имеет место (3.48). Тогда функция ω дифференцируема во всех точках $\mathbb{R}^k$ кроме, быть может, точек, принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.*

Приведем необходимое и достаточное условие сюръективности диагонального квадратичного отображения Q.

Определение 3.3. Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ называется регулярным нулем квадратичного отображения Q, если $Q(h) = 0$ и векторы $Q_1 h, Q_2 h, ..., Q_k h$ линейно независимы.

Лемма 3.11. *Квадратичное отображение Q сюрьективно тогда и только тогда, когда у него существует регулярный нуль.*

Замечание. Простой пример квадратичного отображения $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \;\; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

показывает, что если оно не диагонализируемо, то из его сюрьективности не вытекает существование регулярных нулей. Достаточные условия существования регулярного нуля для общего случая недиагонализируемых квадратичного отображений получены в работе [21].

В предположении, что все матрицы Q_j, $j = \overline{0, k}$, диагональные, сведем задачу минимизации (3.50) к задаче линейного программирования.

Положим

$$z = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2) \in \mathbb{R}^n.$$

Задача (3.50), очевидно, равносильна задаче линейного программирования

$$\langle c, z \rangle \to \inf, \;\; Az = y, \;\; z \geq 0, \tag{3.53}$$

где минимизация осуществляется по переменной z. Здесь c — вектор, составленный из элементов диагонали матрицы Q_0, а строками матрицы A размеров $k \times n$ являются диагонали матриц Q_j, $j = \overline{1, k}$. В этих обозначениях условие (3.48) равносильно следующему условию

$$\langle c, z \rangle \geq 0 \;\; \forall \, z : \;\; Az = 0, \;\; z \geq 0. \tag{3.54}$$

Всюду далее в этом параграфе будем считать, что выполняется (3.54).

Приведем необходимые сведения из линейного программирования (см. [32], гл. 2, п. 2.7). Предположим, что $A\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^k$. Определим функцию $\omega_* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega_*(y) = \inf\{\langle c, z\rangle \, : \, Az = y, \;\; z \geq 0\}.$$

В силу сказанного, очевидно, $\omega_*(y) \equiv \omega(y)$. Отметим, что функция ω_* выпукла, т.к. является инфимумом в задаче линейного программирования.

Утверждение 3.12. *Множество Λ непусто. Для любого $y \in \mathbb{R}^k$ множество $\Lambda_*(y)$ непусто, и $\omega_*(y) > -\infty$. Здесь множества Λ и $\Lambda_*(y)$ определены по формуле (3.52).*

Доказательство. Из (3.54) в силу теоремы Фаркаша (см. [32], теорема 2.4.1) множество Λ непусто. Поскольку $y \in \mathbb{R}^k$, то существует $z \in \mathbb{R}^n$ такое, что $z \geq 0$, $Az = y$. Взяв $\lambda \in \Lambda$ и умножив векторное неравенство $c + A^T\lambda \geq 0$ скалярно на z, получим $\langle c, z\rangle \geq -\langle \lambda, y\rangle$. Следовательно, $\omega_*(y) > -\infty$ для любого $y \in \mathbb{R}^k$. Кроме того, в силу теоремы существования решения для задачи линейного программирования (см., например, теорему 2.1.1 из [32]) для любого $y \in \mathbb{R}^k$ существует решение задачи (3.53).

Для каждого $y \in \mathbb{R}^k$ рассмотрим двойственную к (3.53) задачу

$$\langle -y, \lambda\rangle \to \sup, \;\; \lambda \in \Lambda.$$

В силу теоремы двойственности для задачи линейного программирования (см. [32], теорема 2.2.1) двойственная задача имеет решение, и, кроме того, выполнено равенство

$$\sup\{\langle -y, \lambda\rangle \, : \, \lambda \in \Lambda\} = \omega_*(y).$$

Следовательно, $\Lambda_*(y) \neq \emptyset$. $\square$

Следующее утверждение является следствием леммы 2.7.1 из [32].

Утверждение 3.13. *Функция ω_* удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Определим многозначное отображение $Z : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $Z(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : z \geq 0, Az = y\}$. Очевидно, множество $Z(y)$ непусто, выпукло и замкнуто для любого $y \in \mathbb{R}^k$. Кроме того, в силу леммы 2.7.1 из [32], существует $L > 0$ такое, что

$$h\big(Z(y), Z(\bar{y})\big) \leq L|y - \bar{y}| \;\; \forall\, y,\, \bar{y} \in \mathbb{R}^k. \tag{3.55}$$

Здесь h – расстояние между множествами по Хаусдорфу.

Выберем произвольные y, $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$. Из утверждения 3.12 следует $\omega(y) > -\infty$, $\omega(\bar{y}) > -\infty$. Поэтому, в силу теоремы существования решения для задачи линейного программирования, существует точка $z \in Z(y)$, на которой достигается инфимум в задаче (3.53), и точка $\bar{z} \in Z(\bar{y})$, на которой достигается инфимум в задаче $\langle c, z\rangle \to \inf$, $Az = \bar{y}$, $z \geq 0$. В силу (3.55) найдется такое $\bar{v} \in Z(\bar{y})$, что $|z - \bar{v}| \leq L|y - \bar{y}|$.

Учитывая приведенные рассуждения, имеем

$$\omega(\bar{y}) - \omega(y) = \langle c, \bar{z}\rangle - \langle c, z\rangle \leq \langle c, \bar{v}\rangle - \langle c, z\rangle \leq |c||\bar{v} - z| \leq L|c||y - \bar{y}|.$$

Аналогично доказывается оценка $\omega(y) - \omega(\bar{y}) \leq L|c||y - \bar{y}|$. Таким образом окончательно получаем $|\omega(y) - \omega(\bar{y})| \leq L|c||y - \bar{y}|$. $\square$

В следующем утверждении (его доказательство вытекает из теоремы 2.7.3 из [32]) приводятся дифференциальные свойства функции $\omega_*(\cdot)$. Возьмем точки $y \in \mathbb{R}^k$, $\Delta y \in \mathbb{R}^k$ такие, что $y + \Delta y \in \mathbb{R}^k$.

Утверждение 3.14. *Для любых точек $y \in \mathbb{R}^k, \Delta y \in \mathbb{R}^k$ существует производная функции ω_* в точке y по направлению Δy, равная*

$$\omega_*'(y; \Delta y) = -\min_{\lambda \in \Lambda_*(y)} \langle \Delta y, \lambda\rangle\,.$$

Утверждение 3.15. *Пусть $y \in \mathbb{R}^k$. Если множество $\Lambda_*(y)$ состоит из единственной точки λ_*, то функция $\omega_*(y)$ дифференцируема в точке y.*

Доказательство. В силу утверждения 3.14, при каждом фиксированном y функция $\omega_*'(y; \cdot)$ линейна. Кроме того, в силу сказанного выше, функция ω_*

выпукла. Но если в заданной точке у выпуклой функции производная по направлениям линейна, то в этой точке функция дифференцируема (см. теорему 25.2 из [60]). Утверждение доказано. □

Из утверждения 3.15 непосредственно вытекает, что для того чтобы функция ω_* была дифференцируема, достаточно, чтобы множество Λ состояло из единственной точки.

Согласно утверждению 3.12, множество Λ непусто. Приведем необходимые и достаточные условия того, что заданный вектор $\lambda \in \Lambda$ является единственной точкой этого множества. Обозначим через J множество индексов j, для которых j-я компонента вектора $c + A^T\lambda$ равна нулю, а через $\bar{A}$ – матрицу размерности $k \times n$ с компонентами

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}, & \text{если } j \in J; \\ 0, & \text{если } j \notin J, \end{cases} \qquad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n},$$

где $a_{i\,j}$ – компоненты матрицы A.

Утверждение 3.16. *Вектор $\lambda \in \Lambda$ является единственным элементом множества Λ тогда и только тогда, когда $\bar{A}^T\nu \notin \mathbb{R}^k_+$ для любого $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \neq 0$, т.е. когда для любого $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \neq 0$ хотя бы одна из компонент вектора $\bar{A}^T\nu$ отрицательна.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$ является единственным элементом множества Λ. Предположим, что существует такой вектор $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \neq 0$, что $\bar{A}^T\nu \geq 0$. Для $\varepsilon \geq 0$ положим

$$v(\varepsilon) = c + A^T(\lambda + \varepsilon\nu) = (c + A^T\lambda) + \varepsilon A^T\nu.$$

Тогда для j-ой координаты $v_j(\varepsilon)$ вектора $v(\varepsilon)$ справедливы соотношения

$$v_j(\varepsilon) = \begin{cases} 0 + \varepsilon(A^T\nu)_j, & \text{если } j \in J; \\ (c + A^T\lambda)_j + \varepsilon(A^T\nu)_j, & \text{если } j \notin J \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \varepsilon(\bar{A}^T\nu)_j, & \text{если } j \in J; \\ (c + A^T\lambda)_j + \varepsilon(A^T\nu)_j, & \text{если } j \notin J. \end{cases} \qquad (3.56)$$

Здесь $(A^T\nu)_j$, $(c + A^T\lambda)_j$, $(\bar{A}^T\nu)_j$ – j-е координаты векторов $A^T\nu$, $c + A^T\lambda$, $\bar{A}^T\nu$ соответственно. Следовательно, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем: $v_j(\varepsilon) > 0$ при любом $j \notin J$, и $v_j(\varepsilon) \geq 0$ для любого $j \in J$. Следовательно, $v(\varepsilon) \geq 0$. Таким образом, $\lambda + \varepsilon\nu \in \Lambda$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, что в свою очередь противоречит тому, что по условию $\lambda \in \Lambda$ является единственным элементом множества Λ.

Пусть теперь $\bar{A}^T\nu \notin \mathbb{R}^k_+$ для любого $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \neq 0$. Из известных результатов выткает, что $v(1) = c + A^T(\lambda + \nu) \notin \mathbb{R}^k_+$ для любого $\nu \neq 0$. Следовательно, λ является единственной точкой множества Λ. $\square$

Утверждение 3.17. *Функция ω_* дифференцируема во всех точках пространства $\mathbb{R}^k$, за исключением, быть может, точек принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.*

Доказательство. В силу теоремы Моцкина (см. [39], стр. 165 или теорему 2.25 из [26]), множество Λ является выпуклым многогранным множеством, т.е. оно представимо в виде

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \lambda = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j b_j, \;\; \alpha_i \geq 0 \;\; \forall\, i, \;\; \beta_j \geq 0 \;\; \forall\, j, \;\; \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1 \right\}. \quad (3.57)$$

Здесь l, s – заданные натуральные числа, а a_i, b_j – заданные векторы из $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим вектор $y \in \mathbb{R}^k$ такой, что

$$\langle a_{i_1} - a_{i_2}, y \rangle \neq 0 \;\; \forall\, i_1, i_2 = \overline{1, l}, \;\; i_1 \neq i_2, \qquad \langle b_j, y \rangle \neq 0 \;\; \forall\, j = \overline{1, s}. \quad (3.58)$$

В силу утверждения 3.14 достаточно доказать, что если вектор y удовлетворяет условиям (3.58), то множество $\Lambda_*(y)$ состоит из единственной точки. Сделаем это.

Действительно, пусть имеет место (3.58). Докажем, что тогда функция $\lambda \mapsto -\langle y, \lambda \rangle$ достигает максимум на множестве Λ в единственной точке. В силу представления (3.57), для любого $\lambda \in \Lambda$ имеет место

$$-\langle y, \lambda \rangle = -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \langle a_i, y \rangle - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle b_j, y \rangle,$$

где $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$.

В силу утверждения 3.12 функция

$$(\alpha_1, ..., \alpha_l, \beta_1, ..., \beta_s) \mapsto -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \langle a_i, y\rangle - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle b_j, y\rangle$$

достигает максимума на множестве $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$. Поэтому, $\langle b_j, y\rangle \geq 0$ для любого j, откуда в силу предположения (3.58) вытекает, что $\langle b_j, y\rangle > 0$ для любого j. Следовательно, функция $(\beta_1, ..., \beta_s) \mapsto -\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \langle b_j, y\rangle$ достигает максимума на множестве $\beta_j \geq 0$ в единственной точке $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$. Далее, из предположения (3.58) вытекает, что все числа $\langle a_i, y\rangle$, $i = \overline{1, l}$ попарно различны. Выберем из этих чисел минимальное. Для определенности пусть это будет число $\langle a_{i_0}, y\rangle$. Тогда, очевидно, функция $(\alpha_1, ..., \alpha_l) \mapsto -\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \langle a_i, y\rangle$ достигает максимума на множестве $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$ в единственной точке, для которой $\alpha_i = 0 \ \forall\ i \neq i_0$, $\alpha_{i_0} = 1$.

Таким образом, доказано, что функция $\lambda \mapsto \langle -\lambda, y\rangle$ достигает максимума на множестве Λ в единственной точке, и, следовательно, множество $\Lambda_*(y)$ состоит из единственной точки. Утверждение доказано. $\square$

Выведем леммы 3.6, 3.9 и теоремы 3.7 – 3.10 из приведенных выше утверждений. Рассмотрим задачу линейного программирования (3.53).

Доказательство леммы 3.6. Справедливость этой леммы непосредственно вытекает из утверждения 3.12. Следствие к ней вытекает из того, что $\omega = \omega_*$, $\mathrm{im} Q = \mathbb{R}^k$. $\square$

Доказательство теоремы 3.7. Липшицевость ω непосредственно следует из утверждения 3.12. $\square$

Доказательство теоремы 3.8. Из предположений теоремы следует, что $\Lambda_*(y) = \{\lambda_*\}$. Из утверждения 3.15 следует, что функция ω_* дифференцируема в точке y, а значит в этой точке дифференцируема и функция ω.

Доказательство теоремы 3.10. Из предположений теоремы и утверждения 3.17 следует, что функция ω дифференцируема во всех точках $y \in \mathbb{R}^k$, кроме, быть может, точек y множества $\bigcup\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j$. $\square$

Доказательство леммы 3.9. Если квадратичное отображение имеет регулярный нуль, то оно сюръективно (см., например, [11], теорема 3).

Пусть теперь диагональное квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ сюръективно. Тогда существует линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что $Q(x) = AP(x)$, здесь $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – квадратичное отображение, определенное по формуле

$$P(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Заметим, что из сюръективности Q следует $A\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^k$. Из последнего равенства вытекает сюръективность A.

Возьмем произвольный вектор $\nu \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ и рассмотрим два случая.

1 случай: $A\nu = 0$. Тогда вектор $h \in \mathbb{R}^n : P(h) = \nu$ является регулярным нулем квадратичного отображения Q. Действительно, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x) = A\dfrac{\partial P}{\partial x}(x) = 2AE(x)$, где $E(x)$ – диагональная матрица с элементами $x_1, ..., x_n$ на главной диагонали. Так как $\nu \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, то $\mathrm{rank}E(h) = n$, поэтому, в силу сюръективности оператора A, $\mathrm{rank}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(h) = k$. Очевидно, $Q(h) = 0$. Таким образом, h – регулярный нуль квадратичного отображения Q.

2 случай: $A\nu = y \neq 0$. В силу сказанного выше, существует $\mu \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что $A\mu = -y$. Очевидно, $A(\nu + \mu) = 0$, $(\nu + \mu) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$. Таким образом, этот случай легко сводится к первому, где в качестве вектора ν следует рассмотреть вектор $\nu + \mu$. $\square$

Пример 1. Рассмотрим семейство задач линейного программирования

$$2z_1 + z_2 \to \min,\;\; 2z_1 - z_2 = y,\;\; z \geq 0,\;\; z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Непосредственно вычисляется, что $\omega_*(y) \equiv |y|$. Поэтому для квадратичных форм $q_0(x) = 2x_1^2 + x_2^2$, $Q(x) = 2x_1^2 - x_2^2$ при $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, имеет место

$\omega(y) \equiv |y|$, т.е. функция ω не дифференцируема в нуле. В этом примере, очевидно, множество $\Lambda = [-1, 1]$ состоит более чем из одной точки.

До этого момента мы рассматривали простой случай, когда все матрицы Q_j одновременно диагонализируемы. Общий случай существенно сложнее. Приведем примеры, показывающие, что если матрицы Q_j одновременно не диагонализируемы, то для функции ω могут нарушаться многие свойства, которые выполняются в случае диагонализируемых матриц.

Во всех приводимых ниже примерах $\mathrm{im}Q = \mathbb{R}^k$ и выполняется (3.48). Через $q_j(x)$ будем обозначать j-ю компоненту вектора $Q(x)$, $j = \overline{1, k}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем пример, в котором функция ω удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица, равной единице, но не является дифференцируемой в нуле.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $k = 2$,

$$q_0(x) = x_1^2 + 9x_2^2,$$
$$q_1(x) = x_1 x_2,$$
$$q_2(x) = x_1^2 - 9x_2^2.$$

Для произвольных $y = (y_1, y_2)$ имеем $\omega(y) = \sqrt{y_1^2/36 + y_2^2}$. Следовательно, функция ω удовлетворяет условию Липшица, однако она не дифференцируема в нуле.

Модифицируем пример 2 так, чтобы функция ω удовлетворяла условию Липшица, но не была дифференцируема в некоторой точке $\overline{y} \neq 0$.

Пример 2′. Пусть $n = 4$, $k = 3$,

$$q_0(x) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$q_1(x) = 4x_3^2 - x_4^2,$$
$$q_2(x) = 2x_1 x_2,$$
$$q_3(x) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2.$$

Тогда

$$\omega(y) = \begin{cases} \sqrt{(y_1+y_3)^2+y_2^2}, & \text{при } y_1 \geq 0, \ \ y_1+y_3 \geq 0; \\ \sqrt{y_3^2+y_2^2}, & \text{при } y_3 \geq 0, \ \ y_1 \leq 0; \\ |y_2|, & \text{при } y_1+y_3 \leq 0, \ \ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, что ω непрерывна и не дифференцируема на всей прямой, которая задается равенствами $y_2 = 0$, $y_1 = -y_3$.

Приведем теперь пример задачи (3.50), в которой функция ω не является полунепрерывной снизу в некоторой точке $\overline{y} \in \mathbb{R}^k$.

Пример 3. Пусть $n = 3$, $k = 2$, $\overline{y} = (0,0)$,

$$q_0(x) = x_1x_3,$$
$$q_1(x) = x_3^2 - x_2^2,$$
$$q_2(x) = x_3x_2.$$

Положим $y(\varepsilon) = (\varepsilon, 0)$ для любого $\varepsilon > 0$. Очевидно, $\omega(\overline{y}) = 0$, $y(\varepsilon) \to \overline{y}$, при $\varepsilon \to 0+$, но $\omega(y(\varepsilon)) = -\infty \ \forall\, \varepsilon > 0$.

В следующем примере функция $\omega(y)$ не является полунепрерывной снизу в некоторой точке $\overline{y}$, однако при этом она неотрицательна и, значит, ограничена снизу на единичном шаре.

Пример 4. Пусть $n = 5$, $k = 3$, $\overline{y} = (1,0,1)$,

$$q_0(x) = x_3^2 + 4x_3x_4 + 4x_4^2,$$
$$q_1(x) = 4x_4^2 - x_5^2,$$
$$q_2(x) = x_2x_3,$$
$$q_3(x) = x_1x_2.$$

Положим $y(\varepsilon) = (1, \varepsilon, 1)$ для любого $\varepsilon \neq 0$. Очевидно, $\omega(\overline{y}) = 1$, $y(\varepsilon) \to \overline{y}$ при $\varepsilon \to 0$, однако $\omega(y(\varepsilon)) = 0 \,\forall\, \varepsilon \neq 0$.

Приведем пример, в котором функция ω непрерывна, однако, в некоторой точке $\overline{y} \neq 0$ для нее нарушается условие Липшица, т.е. существует последовательность $\{y_N\}$, сходящаяся к $\bar{y}$, такая, что $|\omega(y_N) - \omega(\bar{y})|/|y_N - \bar{y}| \to \infty$.

Пример 5. Пусть $n = 4$, $k = 4$,

$$q_0(x) = 2x_2x_4,$$
$$q_1(x) = x_2^2 - x_1^2,$$
$$q_2(x) = 2x_1x_2,$$
$$q_3(x) = x_4^2 - x_3^2,$$
$$q_4(x) = 2x_3x_4.$$

Непосредственно вычисляется, что для функции ω справедлива формула

$$\omega(y) = -\sqrt{\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)\left(y_3 + \sqrt{y_3^2 + y_4^2}\right)},$$

из которой вытекает непрерывность функции ω.

В тоже время рассмотрим точку $\bar{y} = (1, 0, 0, 0)$ и сходящуюся к ней последовательность $y_N = (1, 0, N^{-2}, 0)$. Очевидно, $\omega(\bar{y}) = 0$, $\omega(y_N) = -N^{-1}$ для любого N. Для функции ω условие Липшица в точке $\bar{y}$ нарушается, т.к. $|\omega(y_N) - \omega(\bar{y})|/|y_N - \bar{y}| = N \to \infty$.

Перейдем к основному результату этого параграфа. Пусть, как раньше, заданы симметричные матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k размерности $n \times n$ с действительными элементами. Определим квадратичную форму $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ по формулам

$$q_0(x) = \langle Q_0x, x\rangle, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} \langle Q_1x, x\rangle \\ \vdots \\ \langle Q_kx, x\rangle \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Всюду далее будем предполагать, что

- матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k попарно коммутируют;

- квадратичное отображение Q сюръективно.

Тогда, как известно, матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k одновременно диагонализируемы, т. е. существует ортогональное преобразование, которое одновременно приводит все матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k к диагональному виду. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

$$\begin{cases} q_0(x(1)) \to \inf, \\ \dot{x} = Ax + Bu, \ t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \\ Q(x(1)) = y. \end{cases} \tag{3.59}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр, $q_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданная квадратичная форма, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – заданное квадратичное отбражение, A и B – матрицы соответствующих размерностей, y – заданный вектор из $\mathbb{R}^k$.

Допустимым процессом в задаче (3.59) назовем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ такую, что абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = 0$, и удовлетворяет условию $Q(x(1)) = y$, а управление $u(\cdot)$ является измеримым существенно ограниченным. Под решением задачи (3.59) будем понимать допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, на котором достигается глобальный условный минимум функционала $(x(\cdot), u(\cdot)) \mapsto q_0(x(1))$.

Положим

$$\omega(y) = \inf\Big\{ q_0(x(1)) : \ \dot{x} = Ax + Bu, \ t \in [0,1], x(0) = 0, Q(x(1)) = y \Big\}, \ y \in \mathbb{R}^k,$$

то есть $\omega : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ – функция минимума в задаче (3.59).

Целью настоящего параграфа является исследование дифференциальных и топологических свойств функции ω.

Теорема 3.18. *Предположим, что выполняются следующие условия:*
а) $\operatorname{rank}\Big(B, AB, ..., A^{(n-1)}B\Big) = n$;
б) $q_0(x) \geq 0 \quad \forall \, x : \ \ Q(x) = 0.$
Тогда

1) функция ω выпукла;

2) функция ω удовлетворяет условию Липшица;

3) функция ω дифференцируема во всех точках $\mathbb{R}^k$, кроме, быть может, точек, принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.

Доказательство. В силу условия а) теоремы 1 система $\dot{x} = Ax + Bu$ управляема (см. [55], гл. 2, п. 2.3). Следовательно, для любого вектора $\chi \in \mathbb{R}^n$ существуют измеримое существенно ограниченное управление $u(\cdot)$ и абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ такие, что $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \in [0,1]$, $x(0) = 0$ и $x(1) = \chi$. Значит, функция минимума в задаче (3.59) совпадает с фукцией минимума в задаче

$$\begin{cases} q_0(\chi) \to \min, \\ Q(\chi) = y. \end{cases} \tag{3.60}$$

Как было отмечено выше, матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k одновременно диагонализируемы, т. е. существует ортогональное преобразование O, которое одновременно приводит все матрицы Q_0, Q_1, ..., Q_k к диагональному виду. Следовательно, матрицы $S_0 := O^T Q_0 O$, $S_1 := O^T Q_1 O$, ..., $S_k := O^T Q_k O$ являются диагональными. После замены переменных $\chi = O\mu$ задача (3.60) примет вид:

$$\begin{cases} p_0(\mu) \to \min, \\ P(\mu) = y, \end{cases} \tag{3.61}$$

где p_0 и P – соответствующие квадратичные форма и отображение. Очевидно, функция минимума в задаче (3.61) совпадает с фукцией минимума в задаче (3.60). Из условия б) теоремы 1 следует, что $p_0(\mu) \geq 0$ для всех μ таких, что $P(\mu) = 0$. Отсюда в силу следствия 2, теорем 3.7 и 3.10 получаем утверждения 1)-3) теоремы 1. $\square$

Исследуем теперь задачу (3.59) в случае, когда матрицы A и B зависят от времени, то есть

$$\begin{cases} q_0(x(1)) \to \inf, \\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \\ Q(x(1)) = y. \end{cases} \tag{3.62}$$

Здесь $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей.

Допустимым процессом в задаче (3) назовем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ такую, что абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(0) = 0$, и удовлетворяет условию $Q(x(1)) = y$, а управление $u(\cdot)$ является измеримым существенно ограниченным. Под решением задачи (3) будем понимать допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, на котором достигается условный минимум функционала $(x(\cdot), u(\cdot)) \mapsto q_0(x(1))$.

Для каждого $y \in \mathbb{R}^k$ определим функцию минимума $\omega : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ в задаче (3.62) следующим образом:

$$\omega(y) = \inf\Big\{q_0(x(1)) : \ \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ t \in [0,1], x(0) = 0, Q(x(1)) = y\Big\}.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -A^*(t)\Psi, \\ \Psi(0) = E, \end{cases} \tag{3.63}$$

где E – единичная матрица. Решение Ψ системы (3.63) является фундаментальной системой решений уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$. Обозначим через $\xi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, столбцы матрицы $B^*(t)\Psi(t)$, $t \in [0,1]$.

Теорема 3.19. *Предположим, что выполняются следующие условия:*
а) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i(t) \not\equiv 0$ *для* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$;
б) $q_0(x) \geq 0 \quad \forall\, x : \ \ Q(x) = 0.$

Тогда

1) функция ω *выпукла;*

2) функция ω удовлетворяет условию Липшица;

3) функция ω дифференцируема во всех точках $\mathbb{R}^k$, кроме, быть может, точек, принадлежащих объединению конечного числа собственных подпространств.

Доказательство. Из условия а) теоремы 2 следует, что система $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ управляема. Действительно, любое ненулевое решение $\psi(t)$ системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ имеет вид $\Psi(t)\lambda$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $B^*(t)\psi(t) = B^*(t)\Psi(t)\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i(t)$. Значит, выполнено условие управляемости из [38](см. лекция 9, условие невырожденности (9.2)).

В силу управляемости для любого вектора $\chi \in \mathbb{R}^n$ существуют измеримое существенно ограниченное управление $u(\cdot)$ и абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$ такие, что $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $t \in [0,1]$, $x(0) = x_0$ и $x(1) = \chi$. Значит, функция минимума в задаче (3.62) совпадает с фукцией минимума в задаче

$$\begin{cases} q_0(\chi) \to \min, \\ Q(\chi) = y. \end{cases}$$

Далее, совершая замену переменных аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 3.18, в силу следствия 2, теорем 3.7 и 3.10 получаем утверждения 1)-3) теоремы 3.19. □

Замечание 3.2. Теорема 1 является следствием теоремы 2. Действительно, если $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, то условие а) теоремы 2, означающее управляемость системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax + Bu$, эквивалентно условию а) теоремы 1 (см. [55], с.91, теорема 5).

Заключение

В диссертации исследованы различные задачи оптимального управления, а также вопрос о локальной разрешимости управляемых систем. Для этого были использованы теоремы о неявной функции в окрестности анормальной точки, теория накрывающих отображений и метод конечномерных аппроксимаций.

Перечислим содержание основных результатов работы:

- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями.

- Получены достаточные условия локальной разрешимости управляемых систем дифференциальных включений со смешанными ограничениями.

- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для дискретной задачи оптимального управления.

- Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для особых управлений в задачах оптимального управления с непрерывным временем.

- Получены условия выпуклости, липшицевости и дифференцируемости функции минимума для задачи оптимального управления с линейной дифференциальной связью, квадратичным функционалом и квадратичными концевыми ограничениями.

- Доказана теорема о неявной функции в окрестности анормальной точки (т.е. точки, в которой нарушается условие регулярности Робинсона).

Список обозначений

$\mathrm{span}A$ – линейная оболочка множества A;

$\mathrm{cone}A$ – коническая оболочка множества A;

$\mathrm{int}A$ – внутренность множества A;

$\ker A$ – ядро оператора A;

$\mathrm{rank}A$ – ранг матрицы A;

$\mathrm{gph}F$ – график отображения F;

$B_X(x_0, r)$ – замкнутый шар в метрическом пространстве X с центром в точке x_0 радиуса r;

$h(A, B)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B, то есть

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : \ B \subset O(A, \varepsilon), \quad A \subset O(B, \varepsilon)\} \quad \forall\, A, \forall\, B;$$

$\mathrm{dist}(A, B)$ – расстояние между множествами A и B, определяемое по формуле $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) \ : \ a \in A, b \in B\}$;

$A \times B$ – декартово произведение множеств A и B;

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное арифметическое пространство;

$C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций, действующих из отрезка $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$;

$L_\infty([t_0, t_1], U)$ – метрическое пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u \ : \ [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho_\infty(u, v) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t) - v(t)| \quad \forall\, u, v \in L_\infty([t_0, t_1], U),$$

где при $U = \mathbb{R}^n$ в пространстве $L_\infty([t_0, t_1], U)$ вводится норма по формуле

$$\|u\| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)| \quad \forall\, u \in L_\infty([t_0, t_1], U);$$

$AC_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, имеющих производную в $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Литература

1. Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Жуковский Е. С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 613–634.

2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М. : Физматлит, 2007.

3. Арутюнов А. В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – 1989. – Т. 27. – С. 147–235.

4. Арутюнов А. В. К теоремам о неявной функции в анормальных точках // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 30-39.

5. Арутюнов А. В. К теории принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304, N 1. – С. 11-14.

6. Арутюнов А. В. Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 4. – С. 483-497.

7. Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 2 – С. 151-155.

8. Арутюнов А. В. Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, Вып. 2. – С. 163-174.

9. Арутюнов А. В. Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия оптимальности в метрике L_0 // Доклады академии наук. – 2003. – Т. 389, №4. – С. 439–443.

10. Арутюнов А. В. Свойства функции минимума в квадратичной задаче // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, №1. – С. 36–45.

11. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46, № 2. – С. 205-215.

12. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 4. – С. 619-621.

13. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. – М. : Факториал, 1997.

14. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 163–169.

15. Арутюнов А. В., Винтер Р. Б. Метод конечномерной аппроксимации в теории оптимального управления // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1443-1451.

16. Арутюнов А. В., Гельман Б. Д. О структуре множества точек совпадения // Мат. сборник.–2015.–Т. 206, №3.–С.35-56.

17. Арутюнов А. В., Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Дифференциальные свойства функции минимума для диагонализируемых квадратичных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 10. – С. 1768-1777.

18. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1561–1570.

19. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г. Равновесные цены, как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т.53, № 2. – С. 55-67.

20. Арутюнов А. В., Измаилов А. Ф. Теория чувствительности для анормальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43, № 2. – С. 186-202.

21. Арутюнов А. В., Карамзин Д. Ю. Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение // Матем. сб. – 2001. – Т. 202, № 6. – С. 3-28.

22. Арутюнов А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принцип максимума Понтрягина. – М. : Факториал Пресс, 2006.

23. Арутюнов А. В., Марданов М. Дж. К теории принципа максимума в задачах с запаздываниями // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т.25, № 12. – С.2048–2058.

24. Арутюнов А. В., Маринкович Б. Необходимые условия оптимальности в дискретной задаче оптимального управления // Вестник МГУ. – 2005. – Сер. 15, №1. – С. 43-48.

25. Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. – 1984. – №4. – С. 60-68.

26. Ашманов С. А. Линейное программирование. М. : Наука, 1981.

27. Болотин А. Е., Павлова Н. Г. Достаточные условия существования положения равновесия в модели "Спрос-предложение"// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 349-356.

28. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М. : Наука, 1973.

29. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М. : Физматлит, 2007.

30. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М. : 1977.

31. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Часть I. – М. : МЦНМО, 2011.

32. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М. : Факториал, 2003.

33. Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81, Вып. 6. – С. 803-815.

34. Габасов Р., Кириллова Ф. Особые оптимальные управления. – М. : Либроком, 2013.

35. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 125, №3. – С. 475-478.

36. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Изв. АН СССР. – 1960. – Т. 24, №3. – С. 315-356.

37. Гельман Б. Д., Жуковский С. Е. Накрывающие отображения пространств компактных подмножеств // Матем. заметки. – 2013. – Т. 93, №4. – С. 530–536.

38. Гирсанов И. В. Лекции по математической теории экстремальных задач. – М. : Издательство московского университета, 1970.

39. Голдман А. Дж. Теоремы разложения и отделимости для многогранных выпуклых множеств. Сборник статей под редакцией Куна Г. У. и Таккера А. У. – М. : Издательство иностранной литературы, 1959.

40. Дмитрук А. В., Милютин А. А, Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35, №6. – С. 11–46.

41. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. – М. : Мир, 1987.

42. Дорофеева А. В., Тихомиров В. М. От правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина. Историко-математические исследования. Выпуск 25. Из истории математического анализа. – М. : Наука, 1980.

43. Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением концевых и фазовых ограничений // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40, №2. – С. 175-176.

44. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965 – Т. 5, №3. – С. 395–453.

45. Жуковская (Мингалеева) З. Т. Свойства функции минимума в задаче оптимального управления // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 2. – С. 303-307.

46. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, Вып. 1. – С. 31-40.

47. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 380-382.

48. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Жуковский С. Е. Существование и непрерывность неявной функции в окрестности анормальной точки // Вестник МГУ. – 2012. – Сер. 15, №2. – С. 10-15.

49. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Шварцман И. А. Необходимые условия второго порядка для дискретной задачи оптимального управления // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1640-1646.

50. Жуковская (Мингалеева) З. Т., Шварцман И. А. Условия оптимальности для особых управлений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5. – С. 2609-2611.

51. Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации. – М. : Физматлит, 2006.

52. Иоффе А. Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. – 2000. – Т. 55, №3. – С. 103-162.

53. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М. : Наука, 1974.

54. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М. : Наука, 1988.

55. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М. : Наука, 1972.

56. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 3. – С. 79-100.

57. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. – М. : Наука, 1988.

58. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М. : Наука, 1983.

59. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, III // Автоматика и телемеханика. – 1959. – Т. 20, Вып. 12. – С. 1561–1578.

60. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М. : Мир, 1973.

61. Силин Д. Б. Линейные задачи оптимального быстродействия с разрывными на множестве положительной меры управлениями // Матем. сб. – 1986. – Т. 129(171), №2. – С. 264-278.

62. Arutyunov A. V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions // J. of Math. Sciences. – 1991. – Vol. 54, no. 6, P. 1342-1400.

63. Arutyunov A. V. The Pontryagin Maximum Principle and sufficient optimality conditions for nonlinear problems // Ordinary Differential Equations. – 2003. – Vol. 39, no. 12. – C. 1587-1595.

64. Arutyunov A. V., Izmailov A. F. Abnormal equality-constrained optimization problems: sensitivity theory // Math. Progam. Ser. A. – 2004. – V. 100, № 3. – P. 485-515.

65. Arutyunov A., V. A. de Oliveira, Pereira F. L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. – 2015. – Vol. 94, no. 1. – P. 129-143.

66. Arutyunov A. V., Vinter R. B. A Simple ‘Finite Approximations’ Proof of the Pontryagin Maximum Principle under Reduced Differentiability Hypotheses // Set-Valued Analysis. – 2004. – Vol. 12. – P. 5-24.

67. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2012. – V. 75. – P. 1026-1044.

68. Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. – 2011. – Vol. 90, no. 6. – P. 889-898.

69. Dontchev A. L. and Frankowska H. Lyusternik-Graves theorem and fixed points // Proc. Amer. Math. Soc. – 2011. – Vol. 139. – P. 521–534.

70. Dontchev A. L. and Frankowska H. Lyusternik-Graves theorem and fixed points II // J. Convex Anal. – 2012. – Vol. 19. – C. 955–973.

71. Dontchev A. L. and Rockafellar R. T. Implicit Function and Solution Mapping:A View from Variational Analysis. – Dordrecht: Springer, 2009.

72. Fan L.-T., Wang C.-S. The Discrete-Time Maximum Principle: A Study of Multistage Systems Optimization. – New York: Wiley, 1964.

73. Gabasov R., Kirillova F. M. High-Order Necesssary Conditions for Optimality // SIAM J. Control and Optimization. – 1972. – Vol. 10, no. 1. – P. 127-169.

74. Graves L. M. Some mapping theorems // Duke Math.J. – 1950. – Vol. 17. – P. 111-114.

75. Halkin H. On the necessary conditions for the optimal control of nonlinear systems // Journal of Mathematical Analysis. – 1964. – Vol. 12. – P. 1–82.

76. Hilscher R., Zeidan V. Discrete Optimal Control: Second Order Optimality Conditions // J. of Difference Equations and Applications. – 2002. – Vol. 8, no. 10. – P. 875-896.

77. Hilscher R., Zeidan V. Second order sufficiency criteria for a discrete optimal control problem // J. of Difference Equations and Applications. – 2002. – Vol. 8, no. 6. – P. 573-602.

78. Holtzman J. M. Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1966. – AC-11. – P. 30-35.

79. Marinkovic B. Optimality Conditions for Discrete Optimal Control Problems // Optimization Methods and Software. – 2007. – Vol. 22, no. 6. P. 959-969.

80. Mordukhovich B. S. Variational Anaysis and Generalized Differentiation. V. 1. – Dordrecht: Springer, 2005.

81. Mordukhovich B. S., Wang B. Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Sci. – 2004. – Vol. 50. – P. 2650—2683.

82. Shvartsman I. New approximation method in the proof of the maximum principle for nonsmooth optimal control problems with state constraints // J. Math. Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 326, no. 2, P. 974-1000.

83. Uderzo A. On a perturbation approach to open mapping theorems // Optim. Methods and Soft. – 2010. – Vol. 25, no. 1. – P. 143-167.

84. Uderzo A. On Some Regularity Properties in Variational Analysis // Set-valued and Var. Analysis. – 2009. – Vol. 17, no. 4. – P. 409-430.

85. Vinter R. B. Optimality and Sensitivity of Discrete Time Processes // Control and Cybernetics. – 1988. – Vol. 17, no. 2-3. – P. 191-211.

86. Zhukovskaya (Mingaleeva) Z. T., Shvartsman I. A. Second Order Optimality Conditions for Singular Controls // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2014. – Vol. 35. – P. 1245-1257.