

ОТЗЫВ

оппонента на диссертационную работу

Калининой Инны Сергеевны

«Системы функциональных уравнений счетнозначной логики»,

представленную к защите на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 —

дискретная математика и математическая кибернетика

в Диссертационный совет Д 501.001.44

при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова

Диссертация И.С. Калининой посвящена исследованию проблем характеристики классов функций счётнозначной логики посредством функциональных уравнений. Функциональное уравнение — один из самых распространенных способов задания функций в математике, оно выражает связь между значением функции в одной или нескольких точках с ее значениями в других точках. Примерами функциональных уравнений могут служить дифференциальные и интегральные уравнения, функциональные уравнения универсальной алгебры, определяющие разнообразные классы алгебр, уравнения периодичности, симметричности и сопряженности (двойственности), рекуррентные соотношения комбинаторного анализа и другие. В дискретной математике также много примеров использования функциональных уравнений. В середине 1930-х годов на основе функциональных уравнений Ж. Эрбраном и К. Гёделем было предложено замечательное определение вычислимой (рекурсивной) функции. Впоследствии функциональные уравнения появились в теории булевых функций, теории функций многозначной логики, теории автоматов и других разделах дискретной математики.

Несмотря на довольно широкое распространение функциональных уравнений в математике, систематическое исследование функциональных уравнений до последнего времени по существу не проводилось. Отчасти это можно объяснить тем, что функциональные уравнения использовались лишь как инструмент для формального задания тех или иных классов функций, которые либо уже были определены другими способами, либо существовали в виде совокупности разрозненных представителей, не подчиненных общим определениям. Исследование произвольных систем функциональных булевых уравнений и функциональных уравнений многозначной логики начато в работах С.С. Марченкова и В.С. Федоровой 2008 -2012 гг. В этих работах, в частности, были с алгебраических позиций охарактеризованы произвольные классы функций, определяемые с помощью систем функциональных уравнений, а также доказана невозможность решить проблему выполнимости для систем функциональных булевых уравнений за полиномиальное время. В диссертации И.С. Калининой системы функциональных уравнений рассматриваются для функций счетнозначной логики — функций, заданных на множестве натуральных чисел. В данном случае, разумеется, следовало ожидать, что результаты будут кардинальным образом отличаться от результатов, полученных для булевых функций и функций многозначной логики. Совершенно понятно, что здесь на первый план выдвигаются задачи, связанные с эффективностью (не только алгоритмической, но и в более широком смысле этого слова), и с теоретико-множественными конструкциями на множествах несчетной

мощности. В частности, в исследованиях по этому направлению должно, очевидно, проводиться сравнение с наиболее важным и изученным классом эффективно вычислимых функций — классом рекурсивных функций.

Диссертация состоит из трех глав. В главе 1 с различных позиций исследуется оператор FE-замыкания, основанный на системах функциональных уравнений. Сначала устанавливается, что оператор FE-замыкания (с функциональными константами 0 и $x + 1$) не «слабее» оператора HG-замыкания: любой общерекурсивный оператор можно задать подходящей системой функциональных уравнений над множеством функций $\{0, x + 1\}$. Этот результат позволяет далее получить центральный результат главы 1 — доказать, что класс отношений, определяемых с помощью систем функциональных уравнений с функциональными константами 0 и $x + 1$, совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини. Установленная теорема, по существу, определяет границу эффективности, характерной для систем функциональных уравнений счетнозначной логики.

Полученный основной результат обобщается и распространяется на системы функциональных уравнений с другими наборами функциональных констант. Кроме того, доказывается, что в случаях «слабых» функциональных констант получить весь класс Σ_1^1 невозможно, и дается алгебраическое описание классов функций, определяемых системами функциональных уравнений подобного типа.

Глава 2 содержит два основных результата: мощность множества FE-замкнутых классов в P_ω гиперконтинуальна, а мощность множества FE-предполных классов не менее чем континуальна. Следует отметить, что в этой главе содержатся наиболее серьезные построения и доказательства теоретико-множественного характера.

Глава 3 посвящена рассмотрению проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений, которые в качестве функциональной константы содержат только тернарный дискриминатор p . Доказывается, что данная проблема алгоритмически неразрешима. Более того, она является m -полной в классе Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского. В заключение главы 3 в терминах специальных бесконечных двоичных последовательностей очерчивается множество всех решений системы функциональных уравнений с тернарным дискриминатором p .

Диссертация И.С. Калининой ориентирована на решение ряда открытых проблем, ответы на которые характеризуют область исследований в данном направлении и показывают возможности выхода на другие задачи и темы. Хотелось бы отметить элегантность постановки задач и их глубокий математический смысл. И.С. Калинина с этими поставленными задачами успешно справилась. Получены фундаментальные результаты, из которых видно, насколько далеко могут быть продолжены исследования по функциональным уравнениям счетнозначной логики и какие трудности принципиального характера на этом пути могут возникнуть. В частности, было показано, что класс Σ_1^1 аналитической иерархии Клини возникает при исследовании функциональных уравнений с простейшими функциональными константами 0 и $x + 1$; класс Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского оказывается границей сложности проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений с функциональной константой p , а мощность классов FE-замкнутых и FE-предполных множеств гиперконтинуальна. При получении результатов диссертации И.С. Калинина

использовала весьма разнообразные методы и технику: здесь и алгоритмические построения («моделирование» общерекурсивных операторов и отношений из класса Σ_1^1 иерархии Клини, а также доказательство теоремы о неразрешимости проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений), и логические конструкции (введение в язык FE-замыкания логических связок и кванторов, использование исчисления предикатов в доказательстве упомянутой теоремы о неразрешимости проблемы выполнимости), и построения функционального характера (получение различных функций с помощью систем функциональных уравнений), и, наконец, построения теоретико-множественного характера (оценки мощностей классов FE-замкнутых и FE-предполных множеств).

В своей работе И.С. Калинина продемонстрировала глубокие теоретические знания и свободное владение математическим аппаратом. Диссертация написана в хорошем стиле, на высоком математическом уровне, все сформулированные в ней утверждения строго доказаны. В тексте диссертации имеется небольшое количество опечаток (например, на стр. 12: второй абзац, 6-ая и 8-ая строки сверху – несогласование по числу), что, однако, не влияет на понимание содержания работы и корректность утверждений. Полученные результаты являются новыми и оригинальными в рассматриваемой области. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях свойств функциональных систем, в том числе, класса функций счетнозначной логики. Все основные результаты диссертационной работы опубликованы, автореферат соответствует содержанию диссертации.

Считаю, что представленная диссертационная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.09, а ее автор, Калинина Инна Сергеевна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Оппонент, доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой теоретической информатики
факультета информатики и вычислительной техники
Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова

Соколов Валерий Анатольевич



8.09.2015 г.

Адрес: 150000, Ярославль, ул. Советская, 14,
ЯрГУ имени П.Г. Демидова, тел. +7 910 977 94 41,
e-mail: valery-sokolov@yandex.ru

