Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Кашаева Светлана Юрьевна

Представление субмартингалов в виде функций монотонных случайных процессов

Специальность 01.01.05 - теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Круглов Виктор Макарович,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Официальные оппоненты:	**Павлов Игорь Викторович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет»
	Сидорова Оксана Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики и системного анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тверской государственный университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Защита диссертации состоится 11 сентября 2015 г. в 11.00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, стр. 52, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан ______ июля 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.44,
доктор физико-математических наук, доцент О.В. Шестаков

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория мартингалов составляет важное современное направление в теории вероятностей. Несмотря на то, что теория мартингалов является одним из наиболее изученных разделов теории вероятностей или, точнее сказать, теории случайных процессов, интенсивные исследования продолжаются по сей день. В частности, за последнее десятилетие были опубликованы новые более простые доказательства ряда глубоких утверждений, в том числе, классической теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала. Такое внимание к теореме Дуба-Мейера не является случайным, так как она является необходимым звеном при построении стохастического интеграла и играет важную роль в других разделах стохастического анализа.

Иной подход к исследованию субмартингалов содержится в статье М. Ю. Сверчкова и С. Н. Смирнова. При весьма ограничительных условиях они доказали, что субмартингал можно представить в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Н. В. Крылов распространил доказательство Сверчкова-Смирновна на неотрицательные субмартингалы. Следует сказать, что указанные представления можно построить с помощью теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартинглов в виде суммы мартингала и возрастающего случайного процесса. Однако такое доказательство нельзя признать рациональным, так как доказательство теоремы Дуба-Мейера значительно сложнее доказательства упомянутого представления субмартингала. Предпочтительней поступать прямо наоборот, как показано в упомянутой статье Н. В. Крылова.

Представление субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса помогает решать также и другие задачи. Некоторые такие задачи о случайных процессах обсуждаются в вышеупомянутой статье М. Ю. Сверчкова и С. Н. Смирнова.

В диссертации построено представление произвольного субмартингала из класса DL в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Затем оно привлекается для упрощенного доказательства теоремы Дуба-Мейера. Идея указанного представления субмартингалов может быть использована для построения представлений более сложных случайных процессов, скажем, квазимартингалов, в виде функций от случайных процессов с ограниченным изменением.

Теория мартингалов выступает в качестве основного математического аппарата при решении большого числа задач из актуарной математики, финансовой математики, теории управления и ряда смежных научных областей. Типичная задача из перечисленных областей часто ставится в виде поиска решения стохастического дифференциального уравнения, в частности, обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теория последних уравнений - сравнительно молодая. Подавляющее большинство известных теорем о существовании решений обратных стохастических дифференциальных уравнений доказаны при предположении, что случайные процессы квадратично интегрируемы, и сформулированы в терминах стохастических интегралов Ито. Предположение о квадратической интегрируемости продиктовано тем, что в этом случае применимы известные методы, которые условно можно охарактеризовать как методы гильбертова пространства.

Создание общей теории обратных стохастических дифференциальных уравнений, по всей видимости, является делом будущих исследований. Стоит отметить, что доказаны отдельные теоремы, например, в статье о существовании решений обратных стохастических дифференциальных уравнений при весьма слабых предположениях. В диссертации доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения при предположении, что случайные процессы интегрируемы в некоторой степени $p > 1$ в терминах произвольной фильтрации, не обязательно в терминах броуновской фильтрации. Доказан ряд важных других утверждений, о которых будет сказано ниже при кратком перечне результатов диссертации. Из сказанного следует, что диссертационная работа посвящена актуальной теме, которая находится в центре внимания большого числа специалистов. Тема привлекательна в прикладном и теоретическом отношениях.

Цель работы

Исследовать свойства субмартингалов путем представления их в виде функций от монотонных случайных процессов, а также с помощью обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказано представление субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса.
2. Доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p-интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов в терминах общей фильтрации.
3. Доказана теорема о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.
4. Даны новые упрощенные доказательства классической теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса.

Методы исследования

При доказательстве основных результатов диссертации использовались комбинированные методы теории меры, теории мартингалов, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитические методы теории вероятностей.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Основная значимость работы состоит в более глубоком исследовании свойств субмартингалов и родственных математических объектов в теории случайных процессов.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести разделов и списка цитируемой литературы, насчитывающего 56 наименований. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

Апробация работы и публикации

По теме диссертации опубликовано 3 статьи ([1], [2], [3]). Две статьи, принадлежащие единолично автору диссертации, опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК. В этих статьях опубликованы основные результаты диссертации. Одна статья опубликована в соавторстве с научным руководителем.

2 Краткое содержание диссертации

В этом разделе изложена краткая история исследований, предшествующих результатам диссертации. Указано на широкий интерес к теме большого числа известных специалистов, на важность темы для теории случайных процессов и, в частности, для теории мартингалов.

Раздел 1 (*Представление положительного субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса*) содержит описание конструкции указанного представления. Первоначальная идея такого представления принадлежит М.Ю. Сверчкову и С.Н. Смирнову. Затем эта идея была развита Н.В. Крыловым. В диссертации эта идея получила дальнейшее развитие, и распространена на общий случай. Новый подход, в частности, состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такой подход значительно упрощает доказательство и, что не менее важно, допускает естественное обобщение идеи на более общие случаи. Например, идея будет работать при представлении квазимартингалов в виде условного математического ожидания случайного процесса с ограниченной вариацией. Следующая теорема представляет основной результат этого раздела.

Теорема 1.2. *Для любого неотрицательного $\mathbb{F}$-субмартингала $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ существует неотрицательный случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}, \mathbb{E}\xi_t < \infty$, с неубывающими траекториями такой, что* *для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполняется равенство*

$$X_t = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{2.1}$$

Если субмартингал X непрерывен справа, то случайный процесс ξ, можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{F}_t)(\omega) \tag{2.2}$$

для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Раздел 2 (*Теорема Дуба-Мейера для положительных субмартингалов*) содержит упрощенное доказательство упомянутой теоремы. Основную роль в доказательстве играет представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Идея и некоторые детали доказательства принадлежат Н.В. Крылову. Основное упрощение доказательства состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такая замена видов сходимостей позволяет доказать теорему Дуба-Мейера с помощью стандартных теорем о сходимости интегралов и известных свойств последовательностей равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Сама формулировка совпадает с классической формулировкой теоремы Дуба-Мейера.

Теорема 2.1. *Любой неотрицательный непрерывный справа $\mathbb{F}$-субмартингал $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ из класса Дуба можно представить в виде суммы*

$$X = X_0 + M + A \text{ п.в.} \tag{2.3}$$

начального значения, равномерно интегрируемого непрерывного справа мартингала и интегрируемого возрастающего натурального процесса.

Раздел 3 (*Представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса*) содержит конструкцию упомянутого представления. Основное отличие от случая, исследованного в первом разделе, состоит в том, что представление строится для произвольного субмартингала с ограниченным параметрическим множеством. Важное отличие доказательства состоит в том, что предлагаемая конструкция применима к произвольным субмартингалам, а не только к ограниченным или положительным субмартингалам.

Теорема 3.2. *Если* $\mathbb{F}_{[0,a]}$- *субмартингал* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}, a > 0,$ *принадлежит классу* $\mathcal{D}_a$, *то существует неположительный случайный процесс* $\xi = \{\xi_t, t \in [0,a]\}$ *с неубывающими траекториями такой, что* $\xi_a = 0$ *и для любого* $t \in [0,a]$ *выполняется равенство* $X_t = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)$ *п.в. Если случайный процесс* X *непрерывен справа, то случайный процесс* ξ *можно выбрать непрерывным справа. Более того, условные математические ожидания* $\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]$, *можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство*

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega) \tag{2.4}$$

для всех $t \in [0,a]$ *и для всех* ω *из некоторого множества* $\Omega_X \in \mathcal{F}$ *единичной вероятности.*

Раздел 4 (*Общая теорема Дуба-Мейера*) содержит упрощенное доказательство упомянутой теоремы. Доказательство построено на использовании представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Другое упрощение состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем последовательностей равномерно интегрируемых случайных величин. Формулировка теоремы совпадает с классической формулировкой теоремы Дуба-Мейера. Она напоминает формулировку теоремы 2.1. По этой причине мы не будем повторять формулировку. Возможно, стоит отметить, что теперь мартингал не обладает свойством равномерной интегрируемости, и натуральный процесс не является интегрируемым, другими словами, математическое ожидание случайной величины A_∞ может быть бесконечным.

Раздел 5 (*Обратные стохастические дифференциальные уравнения*) содержит доказательство нескольких теорем. Сначала мы сформулируем теорему, содержащую описание класса случайных процессов, в котором будут потенциально содержаться решения обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 5.1. *Пусть даны регулярные справа случайные процессы* $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}, n \in \mathbb{N}$. *Если* $\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)}|^p) < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и для некоторого числа* $p \geqslant 1$ *и*

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^p) = 0, \tag{2.5}$$

то существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *и последовательность* $\{m_n\}_{n \geqslant 1}$ *такие, что* $\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t|^p) < \infty$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0, \lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в.} \tag{2.6}$$

Следующая теорема описывает правило перестановки операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.

Теорема 5.2. *Пусть счетно-конечная мера* ν *определена на сигма-алгебре* $\mathcal{B}_a$ *борелевских подмножеств сегмента* $[0,a]$. *Если измеримый случайный процесс* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{E} \int_0^a |X_t| \nu\{dt\} < \infty, \tag{2.7}$$

то для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *существует* $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$*- измеримая версия* $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ *случайного процесса* $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$ *такая, что*

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \mathbb{E}\Big(\int_u^v X_t \nu\{dt\} |\mathcal{G}\Big) \text{ для любых } 0 \leqslant u < v \leqslant a. \tag{2.8}$$

По всей видимости, это наиболее общая теорема такого сорта. Теперь мы сформулирует теорему о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5.3. *Пусть даны* $\mathcal{F}_a$*- измеримая случайная величина* ξ *и* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*- измеримая функция* $\mu : \Omega \times [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| \leqslant c|x-y| \tag{2.9}$$

для некоторого $c > 0$ *и для любых* $x, y \in \mathbb{R}$. *Если* $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$ *и* $\mathbb{E}\int_0^a |\mu(t,0)|^p dt < \infty$ *для некоторого числа* $p > 1$, *тогда существует единственное с точностью до неразличимости регулярное справа решение* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t\Big), t \in [0,a], X_a = \xi.$$

такое, что $\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t|^p) < \infty$.

Главным отличием, помимо многочисленных новых деталей, этой теоремы от существующих аналогов является предположение об интегрируемости случайных процессов в степени $p > 1$ и общей фильтрации $\mathbb{F}$. Подавляющее большинство известных аналогов сформулированной теоремы доказаны в предположении об интегрируемости случайных процессов в степени 2 в терминах интеграла Ито. Выше уже отмечалось, что квадратичная интегрируемость случайных процессов позволяет использовать хорошо разработанные методы исследований стохастических дифференциальных уравнений.

В следующих двух теоремах указаны точные решения линейного обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5.5. *Пусть даны* $\mathcal{F}_a$*-измеримая случайная величина* ξ *и непрерывные справа случайные процессы* $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ *и* $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ *такие, что*

$$\mathbb{E}\xi^p < \infty, \mathbb{E}\exp\Big\{q\int_0^a |\eta_t|dt\Big\} < \infty, \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t|^p ds < \infty \tag{2.10}$$

для некоторого $p > 1$, *где* $q = p/(p-1)$. *Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение*

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{2.11}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds, \tag{2.12}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ *и* $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ *являются регулярными справа версиями* $\mathbb{F}$*-мартингалов* $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ *и* $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. *Случайный процесс* X *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} \mathbb{E}|X_t|) \leqslant (\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big((\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} + a^{1/q}(\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big). \tag{2.13}$$

Теорема 5.6. *Пусть даны* $\mathcal{F}_a$*-измеримая случайная величина* ξ *и непрерывные справа случайные процессы* $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ *и* $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ *такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi| < \infty, \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |\eta_t| \leqslant c - \text{ постоянная, } \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t| ds < \infty. \tag{2.14}$$

Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{2.15}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \tag{2.16}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ *и* $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ *являются регулярными справа версиями* $\mathbb{F}$*-мартингалов* $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ *и* $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. *Случайный процесс* X *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} \mathbb{E}|X_t| \leqslant e^{2c}\Big(\mathbb{E}|\xi| + \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s| ds\Big). \tag{2.17}$$

Решение обоих теорем были получены с помощью теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 6 (*Один класс обратных стохастических дифференциальных уравнений*) содержит исследование последовательности связанных между собой обратных стохастических дифференциальных уравнений. В формулировке каждого уравнения участвует наперед заданный супермартингал. Решения этих уравнений образуют возрастающую последовательность случайных процессов. Эта последовательность сходится почти всюду и в среднем к упомянутому супермартингалу. Решение каждого уравнения можно записать в виде разности мартингала и непрерывного возрастающего случайного процесса. Отсюда следует разложение данного супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и предсказуемого возрастающего случайного процесса. Известная трудная теорема Долеан-Дэд утверждает, что классы возрастающих натуральных процессов и возрастающих предсказуемых процессов совпадают. В качестве побочного результата нашей теоремы получается часть теоремы Долеан-Дэд, а именно каждый возрастающий предсказуемый случайный процесс является натуральным процессом. В следующих трех теоремах перечислены основные результаты, доказанные в этом разделе.

Теорема 6.1. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$Y_t = \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s)^+ ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]. \tag{2.18}$$

Последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. и в среднем к супермартингалу X.

Теорема 6.2 *Пусть дан любой регулярный справа $\mathbb{F}$-супермартингал $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ из класса DL. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения* (0.18) *и последовательность $\{n\int_0^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема.*

Теорема 6.3. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ из класса DL существуют регулярный справа $\mathbb{F}$-мартингал и предсказуемый возрастающий процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ такие, что*

$$X = M - A \text{ п.в.} \tag{2.19}$$

Если имеется другое такое разложение $X = M' - A'$ п.в., то случайные процессы M и M' а также A и A' неразличимы.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1) Доказательство о представлении (теорема 3.2) субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса.

2) Доказательство существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p-интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов (теорема 5.3)

3) Доказательство теоремы о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса (теорема 5.2).

4) Доказательства теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса (теоремы 2.1, 4.4, 6.3).

Благодарности. Автор диссертации глубоко признателен своему научному руководителю профессору В.М. Круглову за постановку задачи, постоянное внимание и критические замечания. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры математической статистики за моральную поддержку и техническую помощь по оформлению диссертации.

3 Публикации автора по теме диссертации

1. Кашаева С.Ю. Упрощенное доказательство теоремы Дуба-Мейера для неотрицательных субмартингалов// – Вестник Московского Унививерситета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. - 2013. - №3. - С. 49-60.
2. Кашаева С.Ю. К теории обратных стохастических уравнений и их применении// – Вестник Тверского университета. - 2015. - №1. - С. 15-46.
3. Kashayeva S.Yu., Kruglov V.M. On a representation of submartingales and its application// – Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2014. - Vol. 35, №2. - P. 74-84.