Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики

кафедра математической статистики

На правах рукописи

Кашаева Светлана Юрьевна

Представление субмартингалов в виде функций монотонных случайных процессов

Специальность 01.01.05 - теория вероятностей
и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Круглов

Москва, 2015

Содержание

Обозначения

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство;
$\mathbb{P}\{A\}$	вероятность события A;
$\mathbb{1}_A$	индикаторная функция множества A;
A^c	дополнение событию A, т. е. $A^c = \Omega \setminus A$;
$\mathbb{E}X$	математическое ожидание случайной величины X;
$\mathbb{E}(X\|\mathcal{G})$	условное математическое ожидание случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$;
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел;
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел;
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных чисел.

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности. Теория мартингалов составляет важное современное направление в теории вероятностей. Несмотря на то, что теория мартингалов является одним из наиболее изученных разделов теории вероятностей или, точнее сказать, теории случайных процессов, интенсивные исследования продолжаются по сей день. В частности, за последнее десятилетие были опубликованы новые более простые доказательства ([3], [4], [7], [9], [22], [24], [26], [29], [32], [44]) ряда глубоких утверждений, в том числе, классической теоремы Дуба-Мейера ([15], [37], [38]) о разложении субмартингала. Такое внимание к теореме Дуба-Мейера не является случайным, так как она является необходимым звеном при построении стохастического интеграла и играет важную роль в других разделах стохастического анализа.

Иной подход к исследованию субмартингалов содержится в статье [49] М. Ю. Сверчкова и С. Н. Смирнова. При весьма ограничительных условиях они доказали, что субмартингал можно представить в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Н. В. Крылов [29] распространил доказательство Сверчкова-Смирновна на неотрицательные субмартингалы. Следует сказать, что указанные представления можно построить с помощью теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартинглов в виде суммы мартингала и возрастающего случайного процесса. Однако такое доказательство нельзя признать рациональным, так как доказательство теоремы Дуба-Мейера значительно сложнее доказательства упомянутого представления субмартингала. Предпочтительней поступать прямо наоборот, как показано в упомянутой статье [29] Н. В. Крылова.

Представление субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса помогает решать также и другие задачи. Некоторые такие задачи о случайных процессах обсуждаются в вышеупомянутой статье [49] М. Ю. Сверчкова и С. Н. Смирнова.

В диссертации построено представление произвольного субмартингала из класса DL в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Затем оно привлекается для упрощенного доказательства теоремы Дуба-Мейера. Идея указанного представления субмартингалов может быть использована для построения представлений более сложных случайных процессов, скажем, квазимартингалов, в виде функций от случайных процессов с ограниченным изменением.

Теория мартингалов выступает в качестве основного математического аппарата при решении большого числа задач из актуарной математики, финансовой математики ([53],[54]), теории управления и ряда смежных научных областей. Типичная задача из перечисленных областей часто ставится в виде поиска решения стохастического дифференциального уравнения, в частности, обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теория последних уравнений - сравнительно молодая. Подавляющее большинство известных теорем ([2], [6], [28], [34], [35], [43], [45], [46]) о существовании решений обратных стохастических дифференциальных уравнений доказаны при предположении, что случайные процессы квадратично интегрируемы, и сформулированы в терминах стохастических интегралов Ито. Предположение о квадратической интегрируемости продиктовано тем, что в этом случае применимы известные методы, которые условно можно охарактеризовать как методы гильбертова пространства.

Создание общей теории обратных стохастических дифференциальных уравнений, по всей видимости, является делом будущих исследований. Стоит отметить, что доказаны отдельные теоремы, например, в статье [1] о существовании решений обратных стохастических дифференциальных уравнений при весьма слабых предположениях. В диссертации доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения при предположении, что случайные процессы интегрируемы в некоторой степени $p > 1$ в терминах произвольной фильтрации, не обязательно в терминах броуновской фильтрации. Доказан ряд важных других утверждений, о которых будет сказано ниже при кратком перечне результатов диссертации. Из сказанного следует, что диссертационная работа посвящена актуальной теме, которая находится в центре внимания большого числа специалистов. Тема привлекательна в прикладном и теоретическом отношениях.

Цели и задачи работы. Исследовать свойства субмартингалов путем представления их в виде функций от монотонных случайных процессов, а также с помощью обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказано представление субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса.
2. Доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p-интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов в терминах общей фильтрации.
3. Доказана теорема о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.
4. Даны новые упрощенные доказательства классической теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Основная значимость работы состоит в более глубоком исследовании свойств субмартингалов и родственных математических объектов в теории случайных процессов.

Методология и методы диссертационного исследования. При доказательстве основных результатов диссертации использовались комбинированные методы теории меры, теории мартингалов, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитические методы теории вероятностей.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести разделов и списка цитируемой литературы, насчитывающего 56 наименований. Общий объем диссертации составляет 97 страниц.

Положения, выносимые на защиту.

1) Доказательство о представлении (теорема 3.2) субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса.

2) Доказательство существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p-интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов (теорема 5.3)

3) Доказательство теоремы о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса (теорема 5.2).

4) Доказательства теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса (теоремы 2.1, 4.4, 6.3).

Степень достоверности и апробация результатов. По теме диссертации опубликовано 3 статьи([24], [26], [25]). Две статьи, принадлежащие единолично автору диссертации, опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК. В этих статьях опубликованы основные результаты диссертации. Одна статья опубликована в соавторстве с научным руководителем.

Основные результаты диссертации докладывались на заседании кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, на семинаре «Теория риска и смежные вопросы» на факультете вычислительной математики и кибернетики (руководители: профессор В.Е. Бенинг, профессор В.Ю. Королев).

Краткое содержание диссертации.

Введение. В этом разделе изложена краткая история исследований, предшествующих результатам диссертации. Указано на широкий интерес к теме большого числа известных специалистов, на важность темы для теории случайных процессов и, в частности, для теории мартингалов.

Раздел 1 (*Представление положительного субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса*) содержит описание конструкции указанного представления. Первоначальная идея такого представления принадлежит М.Ю. Сверчкову и С.Н. Смирнову[49]. Затем эта идея была развита Н.В. Крыловым [29]. В диссертации эта идея получила дальнейшее развитие, и распространена на общий случай. Новый подход, в частности, состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такой подход значительно упрощает доказательство и, что не менее важно, допускает естественное обобщение идеи на более общие случаи. Например, идея будет работать при представлении квазимартингалов в виде условного математического ожидания случайного процесса с ограниченной вариацией. Следующая теорема представляет основной результат этого раздела.

Теорема 1.2. *Для любого неотрицательного $\mathbb{F}$-субмартингала $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ существует неотрицательный случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}, \mathbb{E}\xi_t < \infty$, с неубывающими траекториями такой, что для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполняется равенство*

$$X_t = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{0.1}$$

Если субмартингал X непрерывен справа, то случайный процесс ξ можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega) \tag{0.2}$$

для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Раздел 2 (*Теорема Дуба-Мейера для положительных субмартингалов*) содержит упрощенное доказательство упомянутой теоремы. Основную роль в доказательстве играет представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Идея и некоторые детали доказательства принадлежат Н.В. Крылову [29]. Основное упрощение доказательства состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такая замена видов сходимостей позволяет доказать теорему Дуба-Мейера с помощью стандартных теорем о сходимости интегралов и известных свойств последовательностей равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Сама формулировка совпадает с классической формулировкой теоремы Дуба-Мейера.

Теорема 2.1. *Любой неотрицательный непрерывный справа $\mathbb{F}$- субмартингал $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ из класса Дуба можно представить в виде* *суммы*

$$X = X_0 + M + A \text{ п.в.} \tag{0.3}$$

начального значения, равномерно интегрируемого непрерывного справа мартингала и интегрируемого возрастающего натурального процесса.

Раздел 3 (*Представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса*) содержит конструкцию упомянутого представления. Основное отличие от случая, исследованного в первом разделе, состоит в том, что представление строится для произвольного субмартингала с ограниченным параметрическим множеством. Доказательство из первого раздела не годится и, следовательно, требует привлечения нового подхода. Важное отличие состоит в том, что предлагаемая конструкция применима к произвольным субмартингалам, а не только к ограниченным или положительным субмартингалам.

Теорема 3.2. *Если $\mathbb{F}_{[0,a]}$- субмартингал $X = \{X_t, t \in [0, a]\}, a > 0$, принадлежит классу $\mathcal{D}_a$, то существует неположительный случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in [0, a]\}$ с неубывающими траекториями такой, что $\xi_a = 0$ и для любого $t \in [0, a]$ выполняется равенство $X_t = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Если случайный процесс X непрерывен справа, то случайный процесс ξ можно выбрать непрерывным справа. Более того, условные математические ожидания $\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]$, можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство*

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega) \tag{0.4}$$

для всех $t \in [0, a]$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Раздел 4 (*Общая теорема Дуба-Мейера*) содержит упрощенное доказательство упомянутой теоремы. Доказательство построено на использовании представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Другое упрощение состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем последовательностей равномерно интегрируемых случайных величин. Формулировка теоремы совпадает с классической формулировкой теоремы Дуба-Мейера. Она напоминает формулировку теоремы 2.1. По этой причине мы не будем повторять формулировку. Возможно, стоит отметить, что теперь мартингал не обладает свойством равномерной интегрируемости, и натуральный процесс не является интегрируемым, другими словами, математическое ожидание случайной величины A_∞ может быть бесконечным.

Раздел 5 (*Обратные стохастические дифференциальные уравнения*) содержит доказательство нескольких теорем. Сначала мы сформулируем теорему, содержащую описание класса случайных процессов, в котором будут потенциально содержаться решения обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 5.1. *Пусть даны регулярные справа случайные процессы* $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}, n \in \mathbb{N}$. *Если* $\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)}|^p) < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и для некоторого числа* $p \geqslant 1$ *и*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^p) = 0, \tag{0.5}$$

то существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *и последовательность* $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ *такие, что* $\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t|^p) < \infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0, \lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в.} \tag{0.6}$$

Следующая теорема описывает правило перестановки операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.

Теорема 5.2. *Пусть счетно-конечная мера* ν *определена на сигма-алгебре* $\mathcal{B}_a$ *борелевских подмножеств сегмента* $[0,a]$. *Если измеримый случайный процесс* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{E}\int_0^a |X_t|\nu\{dt\} < \infty, \tag{0.7}$$

то для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *существует* $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$*- измеримая версия* $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ *случайного процесса* $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$ *такая, что*

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \mathbb{E}\Big(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G}\Big) \text{ для любых } 0 \leqslant u < v \leqslant a. \tag{0.8}$$

По всей видимости, это наиболее общая теорема такого сорта. Теперь мы сформулирует теорему о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5.3. *Пусть даны* $\mathcal{F}_a$*- измеримая случайная величина* ξ *и* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*- измеримая функция* $\mu : \Omega \times [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| \leqslant c|x-y| \tag{0.9}$$

для некоторого $c > 0$ *и для любых* $x, y \in \mathbb{R}$. *Если* $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$ *и* $\mathbb{E}\int_0^a |\mu(t,0)|^p dt < \infty$ *для некоторого числа* $p > 1$, *тогда существует единственное с точностью до неразличимости регулярное справа решение* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s) ds|\mathcal{F}_t\Big), t \in [0,a], X_a = \xi.$$

такое, что $\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t|^p) < \infty$.

Главным отличием, помимо многочисленных новых деталей, этой теоремы от существующих аналогов является предположение об интегрируемости случайных процессов в степени $p > 1$ и общей фильтрации $\mathbb{F}$. Подавляющее большинство известных аналогов сформулированной теоремы доказаны в предположении об интегрируемости случайных процессов в степени 2 в терминах интеграла Ито. Выше уже отмечалось, что квадратичная интегрируемость случайных процессов позволяет использовать хорошо разработанные методы исследований стохастических дифференциальных уравнений.

В следующих двух теоремах указаны точные решения линейного обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5.5. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и непрерывные справа случайные процессы $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ и $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ такие, что*

$$\mathbb{E}\xi^p < \infty, \mathbb{E}\exp\left\{q\int_0^a |\eta_t|dt\right\} < \infty, \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t|^p ds < \infty \tag{0.10}$$

для некоторого $p > 1$, где $q = p/(p-1)$. Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{0.11}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds, \tag{0.12}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ являются регулярными справа версиями $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и *$u_t = \int_0^t \eta_s ds$. Случайный процесс X удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\mathbb{E}|X_t|) \leqslant (\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big((\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} + a^{1/q}(\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big). \tag{0.13}$$

Теорема 5.6. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и непрерывные справа случайные процессы $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ и $\zeta = \{\zeta_t, t \in$*

$[0, a]\}$ *такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi| < \infty, \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\eta_t| \leqslant c - \text{ постоянная}, \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t| ds < \infty. \tag{0.14}$$

Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{0.15}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \tag{0.16}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0, a]\}$ *и* $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0, a]\}$ *являются регулярными справа версиями* $\mathbb{F}$*-мартингалов* $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a} | \mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ *и* $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds | \mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. *Случайный процесс* X *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \mathbb{E}|X_t| \leqslant e^{2c}\Big(\mathbb{E}|\xi| + \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s| ds\Big). \tag{0.17}$$

Решение обоих теорем были получены с помощью теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [50].

Раздел 6 (*Один класс обратных стохастических дифференциальных уравнений*) содержит исследование последовательности связанных между собой обратных стохастических дифференциальных уравнений. В формулировке каждого уравнения участвует наперед заданный супермартингал. Решения этих уравнений образуют возрастающую последовательность случайных процессов. Эта последовательность сходится почти всюду и в среднем к упомянутому супермартингалу. Решение каждого уравнения можно записать в виде разности мартингала и непрерывного возрастающего случайного процесса. Отсюда следует разложение данного супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и предсказуемого возрастающего случайного процесса. Известная трудная теорема Долеан-Дэд [12] утверждает, что классы возрастающих натуральных процессов и возрастающих предсказуемых процессов совпадают. В качестве побочного результата нашей теоремы получается часть теоремы Долеан-Дэд, а именно каждый возрастающий предсказуемый случайный процесс является натуральным процессом. В следующих трех теоремах перечислены основные результаты, доказанные в этом разделе.

Теорема 6.1. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0, a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$Y_t = \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s)^+ ds | \mathcal{F}_t), t \in [0, a]. \tag{0.18}$$

Последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. и в среднем к супермартингалу X.

Теорема 6.2 *Пусть дан любой регулярный справа $\mathbb{F}$-супермартингал $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ из класса DL. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0, a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения* (0.18) *и последовательность $\{n \int_0^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds\}_{n \geqslant 1}$ равномерно интегрируема.*

Теорема 6.3. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ из класса DL существуют регулярный справа $\mathbb{F}$-мартингал и предсказуемый возрастающий процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ такие, что*

$$X = M - A \text{ п.в.} \tag{0.19}$$

Если имеется другое такое разложение $X = M' - A'$ п.в., то случайные процессы M и M' а также A и A' неразличимы.

Благодарности. Автор диссертации глубоко признателен своему научному руководителю профессору В.М. Круглову за постановку задачи, постоянное внимание и критические замечания. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры математической статистики за моральную поддержку и техническую помощь по оформлению диссертации.

1 Представление неотрицательного субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса

Представление субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса было предложено М.Ю. Сверчковым и С.Н. Смирновым [49]. Они доказали существование подобного представления для ограниченных субмартингалов. Н.В. Крылов [29] обобщил результат Сверчкова-Смирнова на случай неотрицательного субмартингала. Трудный и неудобный момент обоих доказательств состоит в применении теоремы Данфорда-Петтиса о слабой компактности равномерно интегрируемой последовательности случайных величин. В данном разделе предложено новое доказательство теоремы Крылова для неотрицательного субмартингала без обращения к упомянутой теореме Данфорда-Петтиса. Вместо этого привлекается теорема Комлоша [27] о сходимости почти всюду чезаровских средних подпоследовательностей ограниченной в среднем последовательности случайных величин. Подобный подход значительно упрощает доказательство теоремы Крылова, и сводит его к применению стандартных теорем о сходимости случайных величин почти всюду и в среднем.

Необходимые понятия. Пусть даны полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а также расширенная и непрерывная справа фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geqslant 0\}$. Напомним, что свойство расширенности фильтрации означает, что сигма-алгебра $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой вероятности. Свойство непрерывности справа фильтрации означает, что выполняется равенство $\cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ для любого $t \geqslant 0$. Мы будем иметь дело только с вещественными случайными процессами. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant t\}$ называется согласованным (согласованным с фильтрацией $\mathbb{F}$), если для любого $t \geqslant 0$ случайная величина X_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Случайные процессы $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ и $X' = \{X'_t, t \geqslant 0\}$ называются версиями друг друга, если для любого $t \geqslant 0$ случайные величины X_t и X'_t равны $\mathbb{P}$-почти всюду (п.в.). Случайные процессы X и X' называются неотличимыми, если существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектории $X_t(\omega), t \geqslant 0$, и $X'_t(\omega), t \geqslant 0$, совпадают. Случайный процесс X называется регулярным справа, если любая его траектория $X_t(\omega), t \geqslant 0$, непрерывна справа и имеет предел слева в каждой точке $t > 0$.

Обозначим $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевскую сигма-алгебру на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{B}_a$ борелевских подмножеств неотрицательной полупрямой $\mathbb{R}_+$ и сегмента $[0, a], a > 0$. Пусть дана произвольная сигма-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ можно трактовать как функцию $X_t(\omega)$ переменных $t \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \Omega$. Случайный процесс X называется $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримым, если прообраз $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$ сигма-алгебр $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{G}$. Аналогично, случайный процесс $\{X_t, t \in [0, a]\}$ называется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримым, если прообраз $\{(t, \omega) \in [0, a] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$ сигма-алгебр $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{G}$. Если $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ является версией случайного процесса $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$, то X называется $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса Y. Аналогично, если $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ является версией случайного процесса $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}$, то X называется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса Y. Обычно $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$-измеримые и $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$-измеримые случайные процессы X называют измеримыми, опуская упоминание о прямом произведении сигма-алгебр $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{F}$ и о прямом произведении сигма-алгебр $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{F}$, соответственно.

Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ называется субмартингалом (мартингалом) относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-субмартингалом (мартингалом), если он согласован с фильтрацией, для любого $t \geqslant 0$ математическое ожидание $\mathbb{E}|X_t|$ конечно, для любых чисел $0 \leqslant s < t$ выполняется субмартингальное (мартингальное) условие $X_s \leqslant \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ $(X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ п.в. Символ $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины X_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ называется супермартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-супермартингалом, если случайный процесс $\{-X_t, t \geqslant 0\}$ является $\mathbb{F}$-субмартингалом. Мы будем использовать приведенную терминологию и в том случае, когда вместо параметрического множества $\mathbb{R}_+$ используется любой сегмент $[0, a]$. Например, говорить о $\mathbb{F}$-мартингале $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$. Важную роль в этом и других разделах диссертации играет следующая теорема Комлоша [27].

Лемма 1.1. *Если последовательность $\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ случайных величин удовлетворяет условию $\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}|\eta_n| < \infty$, то существуют строго возрастающая последовательность индексов $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ и случайная величина η такие, что $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ и*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\eta_{n_{j_l}} = \eta \text{ п.в.}$$

для любой подпоследовательности $\{n_{j_l}\}_{l\geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$.

Теорема 1.2. *Для любого неотрицательного $\mathbb{F}$-субмартингала $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ существует неотрицательный случайный процесс $\xi =$*

$\{\xi_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}, \mathbb{E}\xi_t < \infty$, *с неубывающими траекториями такой, что для любого* $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *выполняется равенство*

$$X_t = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{1.1}$$

Если субмартингал X *непрерывен справа, то случайный процесс* ξ *можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство*

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega) \tag{1.2}$$

для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *и для всех* ω *из некоторого множества* $\Omega_X \in \mathcal{F}$ *единичной вероятности.*

Доказательство. По известной теореме ([33], теорема 3.2.4) субмартингальное условие эквивалентно интегральному неравенству

$$\int_B X_s d\mathbb{P} \leqslant \int_B \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P}$$

для любого $B \in \mathcal{F}_s$. Так как $\mathbb{E}X_t < \infty$ для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, то функции

$$\mu\{B\} = \int_B X_s d\mathbb{P}, \nu\{B\} = \int_B \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P} = \int_B X_t d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_s,$$

являются конечными мерами на сигма-алгебре $\mathcal{F}_s$. В силу неравенства $\mu\{B\} \leqslant \nu\{B\}$ для любого $B \in \mathcal{F}_s$ мера μ абсолютно непрерывна относительно меры ν. По теореме Радона-Никодима существует $\mathcal{F}_s$-измеримая функция $f_s : \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\mu\{B\} = \int_B f_s d\nu, B \in \mathcal{F}_s.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде

$$\int_A X_s d\mathbb{P} = \int_A f_s \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(f_s X_t|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P}, A \in \mathcal{F}_s.$$

По известной теореме ([33], теорема 1.5.13) равенство первого и последнего интегралов для любого $A \in \mathcal{F}_s$ эквивалентно равенству

$$X_s = \mathbb{E}(f_s X_t | \mathcal{F}_s) \text{ п.в.} \tag{1.3}$$

Так как $0 \leqslant X_s \leqslant \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ п.в., то можно считать, что $0 \leqslant f_s \leqslant 1$ п.в.

Применим равенство (1.3) для доказательства равенства (1.1). Так как $\mathbb{E}X_s \leqslant \mathbb{E}\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}X_t$ для любых $s, t, 0 \leqslant s < t \leqslant \infty$, то функция $\mathbb{E}X_t, 0 \leqslant t \leqslant \infty$, не убывает. Она может иметь не более счетного числа точек разрыва. Возьмем произвольное счетное множество $S \subset \mathbb{R}_+$, всюду плотное в $\mathbb{R}_+$ и содержащее все точки разрыва функции $\mathbb{E}X_t, 0 \leqslant t < \infty$. Занумеруем точки множества $S = \{t_1, t_2, \dots\}$ и представим его в виде объединения $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ конечных множеств $S_n = \{t_1, \dots, t_n\}$. Запишем числа из множества S_n в возрастающем порядке $S_n = \{t_{n,1}, \dots, t_{n,n}\}, t_{n,1} < \dots < t_{n,n}$. По равенству (1.3) для любых $k, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \}, n \geqslant 2, 1 \leqslant k < n$, существует $\mathcal{F}_{t_{n,k}}$-измеримая функция $f_{n,k} : \Omega \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ такая, что $0 \leqslant f_{n,k} \leqslant 1$ п.в. и $X_{t_{n,k}} = \mathbb{E}(f_{n,k} X_{t_{n,k+1}} | \mathcal{F}_{t_{n,k}})$ п.в. Последовательно применяя приведенные рассуждения, мы получим равенство

$$X_{t_{n,k}} = \mathbb{E}(f_{n,k} \cdots f_{n,n-1} \mathbb{E}(X_{t_{n,n}} | \mathcal{F}_{t_{n,k}})) \text{ п.в.}$$

Равенство (1.3), в частности, справедливо для любого $0 \leqslant s < \infty$ и $t = \infty$. Существует $\mathcal{F}_{t_{n,n}}$-измеримая функция $f_{n,n} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что $0 \leqslant f_{n,n} \leqslant 1$ п.в. и

$$X_{t_{n,n}} = \mathbb{E}(f_{n,n} X_\infty | \mathcal{F}_{t_{n,n}}) \text{ п.в.}$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$X_{t_{n,k}} = \mathbb{E}(f_{n,k} \cdots f_{n,n} X_\infty | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) \text{ п.в.} \tag{1.4}$$

Фиксируем любую точку $s \in S$. Так как $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ и $S_n \subseteq S_{n+1}$, то найдется индекс $n(s)$ такой, что $s \in S_n$ для всех $n \geqslant n(s)$. Для любого $n \geqslant n(s)$ найдется $k_n \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $s = t_{n,k_n}$. Обозначим $\zeta_{n,k} = f_{n,k} \cdots f_{n,n} X_\infty, k = 1, \ldots, n$. Из равенства (1.4) следует, что $\mathbb{E}X_s = \mathbb{E}X_{t_{n,k_n}} = \mathbb{E}\zeta_{n,k_n}$ и, следовательно, $\sup_{n \geqslant n(s)} \mathbb{E}\zeta_{n,k_n} = \mathbb{E}X_s < \infty$. По теореме Комлоша [27] (лемма 1.1) существует строго возрастающая последовательность $\{n_j\}_{j\geqslant 1}, n_1 \geqslant n(s)$, натуральных чисел и неотрицательная случайная величина $\zeta_s, \mathbb{E}\zeta_s < \infty$, такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \zeta_{n_j, k_{n_j}} = \zeta_s \text{ п.в.} \tag{1.5}$$

Последовательность $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ зависит от s. Упомянутая теорема Комлоша утверждает, что последовательность $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ можно выбрать таким образом, что (1.5) выполняется для любой подпоследовательности последовательности $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$. Другими словами, для любой подпоследовательности $\{j_l\}_{l\geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ выполняется утверждение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \zeta_{n_{j_l}, k_{n_{j_l}}} = \zeta_s \text{ п.в.} \tag{1.6}$$

Все случайные величины $\zeta_{n,k}, k = 1, \ldots n, n \in \mathbb{N}$, ограничены интегрируемой случайной величиной X_∞. Поэтому суммы $m^{-1} \sum_{l=1}^{m} \zeta_{n_{j_l}, k_{j_l}}, m \in \mathbb{N}$, также ограничены случайной величиной X_∞. Мы видим, что применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \zeta_{n_{j_l}, k_{n_{j_l}}} - \zeta_s\Big| = 0. \tag{1.7}$$

С помощью равенства (1.4) и неравенства Иенсена для условных математических ожиданий мы получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_s - \mathbb{E}(\zeta_s|\mathcal{F}_s)| &= \mathbb{E}|\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbb{E}(\zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}}|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(\zeta_s|\mathcal{F}_s)| = \\ &= \mathbb{E}|\mathbb{E}(\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}} - \zeta_s|\mathcal{F}_s)| \leqslant \\ &\leqslant \mathbb{E}\mathbb{E}(|\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}} - \zeta_s||\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}|\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}} - \zeta_s|.\end{aligned}$$

В силу (1.7) величина справа бежит к нулю при $m \to \infty$. Поэтому выполняется равенство

$$X_s = \mathbb{E}(\zeta_s|\mathcal{F}_s) \text{ п.в.} \tag{1.8}$$

Возьмем любые два числа $s, t \in S, s < t$. Так как $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, то найдется индекс $n(s,t)$ такой, что $s, t \in S_n$ для всех $n \geqslant n(s,t)$. Для любого $n \geqslant n(s,t)$ найдутся числа $k_n, r_n \in \{1, \ldots, n\}, k_n < r_n$, такие, что $s = t_{n,k_n}$ и $t = t_{n,r_n}$. Наряду с равенством (1.4) имеет место аналогичное равенство $X_{t_{n,r_n}} = \mathbb{E}(f_{n,r_n} \cdots f_{n,n} X_\infty | \mathcal{F}_{t_{n,r_n}})$ п.в. Так как все функции $f_{n,k}$ ограничены единицей п.в., то

$$\zeta_{n,k_n} = f_{n,k_n} \cdots f_{n,n} X_\infty \leqslant f_{n,r_n} \cdots f_{n,n} X_\infty = \zeta_{n,r_n} \text{ п.в.} \tag{1.9}$$

и, следовательно, множество $\Omega_{s,t} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\zeta_{n,k_n} \leqslant \zeta_{n,r_n}\} \in \mathcal{F}$ имеет единичную вероятность.

По доказанному выше существуют последовательность $\{n_j\}_{j\geqslant 1}, n_j = n_j(s)$, и случайная величина ζ_s, для которых выполняются утверждения (1.5)–(1.8). Теорему Комлоша можно применить к случайным величинам $\zeta_{n_j,r_{n_j}}, j \in \mathbb{N}$. Найдутся последовательность $\{j_l\}_{l\geqslant 1}$ и неотрицательная случайная величина ζ_t такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}|\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\zeta_{n_{j_l},r_{n_{j_l}}} - \zeta_t| = 0 \tag{1.10}$$

и выполняется равенство $X_t = \mathbb{E}(\zeta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Так как $\{n_{j_l}\}_{l\geqslant 1} \subseteq \{n_j\}$, то выполняются (1.7) и (1.8). Сходимость в среднем в (1.7) и (1.10) влечет сходимость по вероятности. По теореме Рисса найдется последовательность индексов $\{m_v\}_{v\geqslant 1}$ такая, что случайные величины $m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}}$ и $m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n_{j_l},r_{n_{j_l}}}$ при $m = m_v$ сходятся п.в. при $v \to \infty$ к ζ_s и ζ_t. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что сами последовательности $\{m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n_{j_l},k_{n_{j_l}}}\}_{m\geqslant 1}$ и $\{m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n_{j_l},r_{n_{j_l}}}\}_{m\geqslant 1}$ сходятся п.в. к ζ_s и ζ_t. Обозначим Ω_s и Ω_t множества, на которых сходятся указанные последовательности. Множества Ω_s и Ω_t являются событиями единичной вероятности. Отсюда и из (1.9) следует, что на множестве $\Omega'_{s,t} = \Omega_s \cap \Omega_t \cap \Omega_{s,t}$ выполняется неравенство $\zeta_s \leqslant \zeta_t \leqslant X_\infty$. Так как $s, t \in S = \{t_1, t_2, \dots\}$, то s и t являются членами последовательности $\{t_1, t_2, \dots\}$. Пусть, например, $s = t_1 < t_2 = t$. Имеется три возможных расположения числа $u = t_3$ по отношению к числам s и t. Предположим, например, что $s < t < u$. Так как $s, t, u \in S = \cup_{n=1}^\infty S_n$, то найдется $n(s,t,u)$ такое, что $s, t, u \in S_n$ для всех $n \geqslant n(s,t,u)$ и $s = t_{n,k_n}, t = t_{n,r_n}, u = t_{n,p_n}$ для некоторых $1 \leqslant k_n < r_n < p_n \leqslant n$. Будет выполняться аналог неравенства (1.9), а именно, $\zeta_{n,k_n} \leqslant \zeta_{n,r_n} \leqslant \zeta_{n,p_n} \leqslant X_\infty$ п.в. Рассуждая, как выше, можно доказать, что существует подпоследовательность $\{n'_{j_l}\}_{l\geqslant 1}$ последовательности $\{n_{j_l}\}_{l\geqslant 1}$ и неотрицательные случайные величины $\zeta_s, \zeta_t, \zeta_u$ такие, что последовательности $\{m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n'_{j_l},k_{n'_{j_l}}}\}_{m\geqslant 1}$ и $\{m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n'_{j_l},r_{n'_{j_l}}}\}_{m\geqslant 1}$ и $\{m^{-1}\sum_{l=1}^m \zeta_{n'_{j_l},p_{n'_{j_l}}}\}_{m\geqslant 1}$ сходятся к ζ_s и ζ_t и ζ_u на некотором множестве $\Omega'_{s,t,u} \subseteq \Omega'_{s,t}, \Omega'_{s,t,u} \in \mathcal{F}$, единичной вероятности и на этом множестве выполняются неравенства $\zeta_s \leqslant \zeta_t \leqslant \zeta_u \leqslant X_\infty$. Подобные рассуждения применимы к любому конечному числу точек из $S = \{t_1, t_2, \dots\}$, и последовательности индексов вида $\{n_{j_l}\}_{\leqslant 1}$, построенные для последовательных наборов $\{t_1\}, \{t_1, t_2\}, \{t_1, t_2, t_3\}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \dots$ будут упорядочены по вложению:

последовательность для большего набора точек из S является подпоследовательностью последовательности для меньшего набора точек из S. Поэтому можно применить диагональный метод Кантора и построить последовательность индексов, которую мы обозначим $\{n_{j_l}\}_{l\geqslant 1}$, и множество $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такие, что для любых $s, t \in S, s < t$, случайные величины $m^{-1}\sum_{l=1}^{m} \zeta_{n_{j_l}, k_{n_{j_l}}}$ и $m^{-1}\sum_{l=1}^{m} \zeta_{n_{j_l}, r_{n_{j_l}}}$ при $m = m_v$ сходятся п.в. при $v \to \infty$ к ζ_s и ζ_t на множестве Ω_X, и на этом множестве выполняются неравенства $\zeta_s \leqslant \zeta_t \leqslant X_\infty$ и равенство (1.8).

Определим неубывающий случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in [0,\infty]\}$, положив $\xi_\infty = X_\infty, \xi_s = \zeta_s$ для всех $s \in S$ и $\xi_t(\omega) = \inf_{S\ni s\geqslant t} \zeta_s(\omega)$ для $t \notin S, \omega \in \Omega'$ и $\xi_t(\omega) = 0$ для $t \notin S, \omega \notin \Omega'$. Докажем равенство (1). Оно справедливо для всех $s \in S$ и $s = \infty$. Для любого $t \geqslant 0, t \notin S$, найдется последовательность $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ чисел из S, которая убывает и сходится к t. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_{s_n} = \xi_t$ и $\zeta_{s_n} \leqslant X_\infty$ п.в. и $\mathbb{E}X_\infty < \infty$, то применима теорема об ограниченной сходимости, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|\zeta_{s_n} - \xi_t| = 0$. По неравенству Иенсена для условных математических ожиданий мы получим

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_t)| \leqslant \mathbb{E}|\xi_t - \zeta_{s_n}| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.11}$$

Отсюда и из неравенства Чебышева

$$\varepsilon\mathbb{P}\{|\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_t)| > \varepsilon\} \leqslant \mathbb{E}|\xi_t - \zeta_{s_n}| \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

следует, что последовательность $\{\mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$ сходится по вероятности к $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$. По теореме Рисса ([33], теорема 1.4.14) найдется некоторая подпоследовательность, которая сходится п.в. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что сама последовательность $\{\mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. к $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$. В силу субмартингального свойства и свойств условных математических ожиданий выполняются следующие соотношения

$$X_t \leqslant \mathbb{E}(X_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим неравенство $X_t \leqslant \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. В силу (1.8) выполняется равенство $\mathbb{E}X_{s_n} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})$. Напомним, что S содержит все скачки функции $\mathbb{E}X_t, t \geqslant 0$, и, следовательно,

$$\mathbb{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{s_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t).$$

Так как $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) - X_t) = 0$ и $X_t \leqslant \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в., то $X_t = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Равенство (1.1) доказано.

Предположим, что субмартингал X непрерывен справа. Пусть ξ обозначает неубывающий случайный процесс, о котором идет речь в равенстве (1.1). Определим случайный процесс $\eta = \{\eta_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, положив $\eta_t = \inf_{s>t} \xi_s$ для $t \in \mathbb{R}_+$ и $\eta_\infty = X_\infty$. Случайный процесс η не убывает, так как этим свойством обладает случайный процесс ξ. По известной теореме ([33], теорема 2.4.4) случайный процесс η непрерывен справа. Нам осталось доказать равенство (1.2). Для любого числа $t \geqslant 0$ мы имеем, что $t_n = t + 1/n \downarrow t$ и $\xi_{t_n} \downarrow \eta_t, 0 \leqslant \xi_{t_n} \leqslant \xi_{t_1}, \mathbb{E}\xi_{t_1} < \infty$. Поэтому применима теорема о мотонотонной сходимости для условных математических ожиданий ([33], теорема 3.1.10, (i)), по которой $\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_{t_n}|\mathcal{F}_t)$ п.в. В силу (1) выполняется равенство $X_{t_n} = \mathbb{E}(\xi_{t_n}|\mathcal{F}_{t_n})$ п.в. Так как $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t_n}$, то $\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{t_n}|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_{t_n}|\mathcal{F}_t)$ п.в. и, следовательно,

$$\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{1.12}$$

Так как $0 \leqslant X_{t_n} \leqslant \mathbb{E}(X_{t_1}|\mathcal{F}_{t_n})$ п.в., то ([33], замечание 3.3.3 и теорема 3.3.8) последовательность $\{X_{t_n}\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема. По предположению субмартингал X непрерывен справа. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} X_{t_n} = X_t$. Мы видим, что выполнены условия известной теоремы ([33], теорема 3.3.10), по которой $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t| = 0$. Отсюда, в силу известной теоремы ([33], теорема 3.1.10, (iv)), следует, что предел в (1.12) равен п.в. $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t)$. Так как случайная величина X_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$,то $X_t = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. С учетом (1.12) мы получим равенство $X_t = \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. и, следовательно, множество $\Omega'' = \cap_{t\in S}\{X_s = \mathbb{E}(\eta_s|\mathcal{F}_s)\} \cap \{X_\infty = \mathbb{E}(\eta_\infty|\mathcal{F}_\infty)\}$ является событием единичной вероятности. Для любого $\omega \in \Omega''$ и для всех $s \in S$ и $s = \infty$ выполняется равенство $X_s(\omega) = \mathbb{E}(\eta_s|\mathcal{F}_s)(\omega)$. Для любого числа $t \geqslant 0$ найдется последовательность $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ чисел из S, которая убывает и сходится к t. Для любого $\omega \in \Omega'$, в силу непрерывности справа субмартингала X, мы имеем, что $X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})(\omega)$.

Обозначим $Z_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})(\omega)$, если $\omega \in \Omega''$, и $Z_t(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega''$. Докажем, что функция $Z_t(\omega), \omega \in \Omega$, является некоторым вариантом условного математического ожидания $\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)(\omega), \omega \in \Omega$. Сначала мы убедимся, что Z_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Для любого $u \in (t, \infty)$ условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n}), s_n < u$, измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_u$. Так как функция Z_t является поточечным пределом $\mathcal{F}_u$-измеримых функций $\mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})$ при $n \to \infty$, то она измерима относительно $\mathcal{F}_u$ в силу известной теоремы ([33], теорема 1.4.7). Это верно для любого $u \in (t, \infty)$. Поэтому функция Z_t измерима относительно пересечения $\cap_{u>t}\mathcal{F}_u$. В силу непрерывности справа фильтрации $\mathbb{F}$ выполняется равенство $\cap_{u>t}\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$. Далее, так как $0 \leqslant \eta_{s_n} \leqslant \eta_\infty = X_\infty$ п.в., $\mathbb{E}X_\infty < \infty$ и $\eta_{s_n} \downarrow \eta_t$, то по неравенству Иенсена для условных математических ожиданий и по теореме об ограниченной сходимости мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_{s_n}) - \mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})| \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(|\eta_t - \eta_{s_n}||\mathcal{F}_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\eta_t - \eta_{s_n}| = 0.$$

Отсюда следует, что, для любого $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\int_A Z_t d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A \mathbb{E}(\eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n}) d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A \eta_{s_n} \mathbb{P} = \int_A \eta_t d\mathbb{P}.$$

По определению условного математического ожидания равенство первого и последнего интеграла для любого $A \in \mathcal{F}_t$ означает, что Z_t можно взять в качестве условного математического ожидания случайной величины η_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Теорема доказана.

2 Теорема Дуба-Мейера для неотрицательных субмартингалов

С помощью теоремы 1.2 можно доказать теорему Дуба-Мейера о разложении неотрицательного субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. Идея и некоторые детали приводимого ниже доказательства принадлежат Н.В. Крылову [29]. Упрощение достигается благодаря замене теоремы Данфорда–Петтиса о слабой компактности равномерно интегрируемой последовательности случайных величин теоремой Комлоша [27] о сходимости почти всюду чезаровских средних подпоследовательностей равномерно ограниченной последовательности случайных величин. Такой подход позволяет обойтись стандартной техникой из теории интегрирования по конечным мерам.

Теорема 2.1. *Любой неотрицательный непрерывный справа $\mathbb{F}$-субмартингал $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ можно представить в виде суммы*

$$X = X_0 + M + A \text{ п.в.} \tag{2.1}$$

непрерывного справа равномерно интегрируемого $\mathbb{F}$-мартингала $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ и возрастающего интегрируемого процесса $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$.

Доказательство. Равенство (2.1) означает, что существует множество $\Omega' = \Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любых $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\omega \in \Omega'$ выполняется равенство $X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega)$.

Предположим, что разложение (2.1) доказано. Из равенства $\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}M_0 + \mathbb{E}A_\infty$ следует, что $\mathbb{E}A_\infty < \infty$. Другими словами, возрастающий случайный процесс A интегрируем. Так как субмартингал X равномерно интегрируем и для любого $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $|M_t| \leqslant |X_t| + A_\infty$, то мартингал M равномерно интегрируем.

Докажем существование разложения (2.1). По теореме 1.1 существует возрастающий непрерывный справа случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, для которого выполняется равенство $X_t(\omega) = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega)$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и для всех ω из некоторого события $\Omega' = \Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что равенство выполняется для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\omega \in \Omega$. Можно предположить, что $X_0 = 0$. В противном случае вместо $X = \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ можно взять $\{X_t - X_0, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$. Возьмем произвольное счетное множество $S \subset \mathbb{R}_+$, всюду плотное в $\mathbb{R}_+$.

Обозначим $\mathbb{1}_B$ индикаторную функцию события $B \in \mathcal{F}$. Случайный процесс $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_t), t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является $\mathbb{F}$-мартингалом. По известной теореме ([33], теорема 3.7.3) существует множество $\Omega_B \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любых $\omega \in \Omega_B$ и $t > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\uparrow t} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-})$. Положим $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{0-}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_0)$ и $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-})(\omega) = \lim\limits_{s\uparrow t} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_s)(\omega)$, если $\omega \in \Omega_B, t > 0$, и $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathcal{F}_{t-})(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega_B, t > 0$. По известной теореме ([33], теорема 2.4.4) все траектории случайного процесса $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-}), t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ непрерывны слева. Нетрудно видеть, что случайный процесс $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-}), t \in \mathbb{R}_+\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$ и измерим. Для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ определим функцию

$$\mu_t\{B\} = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u, B \in \mathcal{F}_t.$$

Так как $\mathbb{1}_\Omega = 1$, то $\mu_t\{\Omega\} = \mathbb{E}\xi_t < \infty$. Функция μ_t конечно-аддитивна, так как для любых попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}_t$ выполняются равенства

$$\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{B_k}, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k}|\mathcal{F}_{u-}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k}|\mathcal{F}_{u-}) \text{ п.в.}$$

и, следовательно, в силу линейного свойства интеграла и математического ожидания

$$\mu_t\{\cup_{k=1}^n B_k\} = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k}|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k}|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u = \sum_{k=1}^n \mu_t\{B_k\}.$$

Убедимся, что функция μ_t является конечной мерой. Достаточно доказать, что она непрерывна сверху на пустом множестве. Пусть $B_n \in \mathcal{F}, B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Так как $\mathbb{1}_{B_{n+1}} \leqslant \mathbb{1}_{B_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{B_n} = 0$, то $1 \geqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}|\mathcal{F}_{u-}) \downarrow 0$ п.в. при $n \uparrow \infty$ для любого $u \geqslant 0$ в силу известных свойств условных математических ожиданий. По теореме об ограниченной сходимости, примененной последовательно к внутреннему интегралу и к математическому ожиданию, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu_t\{B_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}|\mathcal{F}_{u-})d\xi_n = 0.$$

Нетрудно видеть, что мера μ_t абсолютно непрерывна относительно вероятности $\mathbb{P}$. По теореме Радона-Никодима существует $\mathcal{F}_t$-измеримая, интегрируемая по мере $\mathbb{P}$ конечная функция $A'_t : \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\mu_t\{B\} = \int_B A'_t d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_t.$$

Докажем, что для любых $s, t, 0 \leqslant s < t \leqslant \infty$, выполняется неравенство $A'_s \leqslant A'_t$ п.в. Действительно, для любого $B \in \mathcal{F}_t$ мы имеем, что

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathbb{E}\int_s^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u &= \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u - \mathbb{E}\int_0^s \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-})d\xi_u \\ &= \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\} = \int_B A'_t d\mathbb{P} - \int_B A'_s d\mathbb{P} = \int_B (A'_t - A'_s) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Последний интеграл принимает неотрицательные значения для любого $B \in \mathcal{F}_t$. По известной теореме ([33], теорема 1.5.16) выполняется неравенство $0 \leqslant A'_t - A'_s$ п.в. Множество $\Omega_{s,t} = \{A'_s \leqslant A'_t\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ является событием единичной вероятности. Поэтому пересечение $\Omega' =$

$\cap_{s,t\in S,s<t}\Omega_{s,t} \cap \{A'_t \leqslant A_\infty\}$ счетного числа таких множеств также является событием единичной вероятности. Для любого $\omega \in \Omega'$ функция $A'_t(\omega), t \in S$, не убывает. Определим случайный процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$, положив $A_t(\omega) = \inf_{S\ni s\geqslant t} A'_s(\omega)$, если $\omega \in \Omega'$, $A_t(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega'$, $A_\infty = A'_\infty$ По известной теореме ([33], теорема 2.4.4) случайный процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ непрерывен справа. Так как мера μ_0 тождественно равна нулю, то $A'_0 = 0$ и, следовательно, $A_0 = A'_0\mathbb{1}_{\Omega'} = 0$ п.в. Можно считать, что $A_0 = 0$. В противном случае вместо Ω' можно взять множество $\Omega' \cup \{A_0 = 0\} \in \mathcal{F}$.

Докажем, что случайный процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Так как фильтрация $\mathbb{F}$ расширена, то множество Ω' принадлежит всем сигма-алгебрам $\mathcal{F}_t, t \geqslant 0$ и, следовательно, произведение $A'_t\mathbb{1}_{\Omega'}$ измеримо относительно $\mathcal{F}_t$. Фиксируем $t \geqslant 0$. Если $t \in S$, то случайная величина $A_t = A'_t\mathbb{1}_{\Omega'}$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$. Пусть $t \notin S$. Для любого $v > t$ случайные величины $A'_s\mathbb{1}_{\Omega'}, s \in (t, v]$, измеримы относительно $\mathcal{F}_v$ и, следовательно, относительно пересечения сигма-алгебр $\cap_{v>t}\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_t$. Последнее равенство выполняется в силу непрерывности справа фильтрации $\mathbb{F}$. Тогда по известному свойству ([33], теорема 1.4.5) функция $A_t = \inf_{S\ni s\geqslant t} A'_s\mathbb{1}_{\Omega'}$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$.

Докажем, что случайный процесс $M = \{M_t, t \geqslant 0\}, M_t = X_t - A_t$, является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Выше было доказано равенство

$$\int_B (A'_t - A'_s)d\mathbb{P} = \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\}$$

для любых $s, t, 0 \leqslant s < t$ и $B \in \mathcal{F}_t$. В частности, оно справедливо для любого $B \in \mathcal{F}_s$. Так как $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) = \mathbb{1}_B$ п.в. для всех $u > s$, то

$$\int_B (A'_t - A'_s) d\mathbb{P} = \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\} = \mathbb{E}\int_s^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) d\xi_u = \\ = \mathbb{E}\int_s^t \mathbb{1}_B d\xi_u = \int_B (\xi_t - \xi_s) d\mathbb{P}.$$

Это равенство сохранится после замены A' на A, где на $A_t = A'_t \mathbb{1}_{\Omega'}, A_s = A'_s \mathbb{1}_{\Omega'}, s, t \in S$, так как $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$. Напомним, что множество S всюду плотно на $\mathbb{R}_+$. Поэтому для любых $s, t, 0 \leqslant s < t$, найдутся $s_n, t_n \in S, s \leqslant s_n < t \leqslant t_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $s_n \downarrow s$ и $t_n \downarrow t$ при $n \uparrow \infty$. В силу непрерывности справа случайных процессов A и ξ мы имеем, что $A_{t_n} \to A_t, A_{s_n} \to A_s, \xi_{t_n} \to \xi_t, \xi_{s_n} \to \xi_s$ при $n \uparrow \infty$. Мы видим, что применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\int_B (A_t - A_s) d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_B (A_{t_n} - A_{s_n}) d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_B (\xi_{t_n} - \xi_{s_n}) d\mathbb{P} = \int_B (\xi_t - \xi_s) d\mathbb{P}.$$

Отсюда и из определения условного математического ожидания следует, что

$$\int_B \mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P} = \int_B (A_t - A_s) d\mathbb{P} \\ = \int_B (\xi_t - \xi_s) d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_s.$$

По известной теореме ([33], теорема 1.5.16) равенство первого и последнего интегралов для любого $B \in \mathcal{F}_s$ равносильно равенству $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s)$ п.в. Привлекая теорему 1, мы получим $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)$ п.в. Равенство $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)$ п. в. можно переписать в следующем виде $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - A_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_s - A_s|\mathcal{F}_s) = X_s - A_s = M_s$ п.в. Тем самым доказано, что случайный процесс M удовлетворяет мартингальному условию и, следовательно, является $\mathbb{F}$-мартингалом.

Докажем, что случайный процесс $A = \{A_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является натуральным. Требуется доказать равенство

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_u dA_u = \mathbb{E}\int_0^t Z_{u-} dA_u, t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2.2}$$

для любого ограниченного непрерывного справа мартингала $Z = \{Z_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Напомним, что $Z_{0-} = Z_0$ и $Z_{u-} = \lim\limits_{s\uparrow u} Z_s$. Известно ([33], теорема 3.7.3), что существует множество $\Omega_Z \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что существует предел $\lim\limits_{s\uparrow u} Z_s(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega_Z$ и $u > 0$. В качестве Z_{u-} можно взять $\lim\limits_{s\uparrow u} Z_s \mathbb{1}_{\Omega_Z}$. Обратим внимание, что случайный процесс $\{Z_{u-}, u \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ непрерывен слева. Можно считать, что Z принимает неотрицательные значения. В противном случае вместо Z можно взять $c - Z = \{c - Z_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, где $c > 0$ – число со свойством $|Z_t| < c, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Интегралы под знаком математического ожидания следует понимать как интегралы Лебега по мере Лебега-Стилтьеса, порождаемой неубывающей функцией $A_u(\omega), u \geqslant 0$, для каждого $\omega \in \Omega$. Эта мера определена на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ на неотрицательной полупрямой $\mathbb{R}_+$ и каждому отрезку вида $(a, b]$ приписывает меру $A_b(\omega) - A_a(\omega)$. По традиции теории вероятностей мы не будем указывать аргумент ω.

Фиксируем число $t > 0$ и разобьем сегмент $[0, t]$ точками $t_{n,k} = k2^{-n}t, k = 0, \dots .2^n$. Так как мартингал Z непрерывен справа, то

$$\int_0^t Z_{u-} d\xi_u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}} - \xi_{t_{n,k-1}}).$$

По условию мартингал Z ограничен некоторым числом $c > 0$. Случайный процесс ξ интегрируем. Поэтому применима теорема об ограниченной сходимости, согласно которой

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_{u-}d\xi_u = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})).$$

По теореме 1.2 и по известным свойствам условных математических ожиданий мы получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{t_{n,k}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})) &= \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}\xi_{t_{n,k}}|\mathcal{F}_{t_{n,k}}) - \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}\xi_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ &= \mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}\mathbb{E}(\xi_{t_{n,k}}|\mathcal{F}_{t_{n,k}})) - \mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}\mathbb{E}(\xi_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ &= \mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}X_{t_{n,k}}) - \mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}X_{t_{n,k-1}})\\ &= \mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}(X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}})).\end{aligned}$$

Выше было доказано, что случайный процесс $M=\{M_u, u\geqslant 0\}$, $M_u = X_u - A_u$, является $\mathbb{F}$-мартингалом. Поэтому выполняется равенство $\mathbb{E}(X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) = \mathbb{E}(A_{t_{n,k}} - A_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}})$ п.в. и, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}(X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}})) &= \mathbb{E}((Z_{t_{t,k-1}-}\mathbb{E}(X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ &= \mathbb{E}((Z_{t_{t,k-1}-}\mathbb{E}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ &= \mathbb{E}(Z_{t_{t,k-1}-}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}})).\end{aligned}$$

В результате мы получим

$$\begin{aligned}\int_0^t Z_{u-}d\xi_u &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}}) = \mathbb{E}\int_0^t Z_{u-}dA_u.\end{aligned}$$

Чтобы доказать (2.2) достаточно убедиться, что

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_{u-}d\xi_u = \mathbb{E}\int_0^t Z_u dA_u. \tag{2.3}$$

Нетрудно доказать ([33], теорема 3.10.4) равенство

$$\mathbb{E}(Z_t A_t) = \mathbb{E}\int_0^t Z_u dA_u. \tag{2.4}$$

По доказанному выше выполняется равенство $\mu_t\{B\} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B A_t)$ для любого $B \in \mathcal{F}_t$. Так как $\mu_t(B) = \int_B A_t dP$, то по формуле замены меры интегрирования мы получим

$$\mathbb{E}(Z_t A_t) = \int_\Omega Z_t A_t d\mathbb{P} = \int_\Omega Z_t d\mu_t. \tag{2.5}$$

Напомним, что Z_t является неотрицательной случайной величиной, измеримой относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. По известной теореме из курса по теории меры ([33], теорема 1.4.9) найдется возрастающая последовательность простых функций $f_n, n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \sum_{k=1}^{m_n} c_{n,k} \mathbb{1}_{B_{n,k}}, c_{n,k} \geqslant 0, B_{n,k} \in \mathcal{F}_t,$$

такая, что $f_n \uparrow Z_t$ при $n \uparrow \infty$. По теореме о монотонной сходимости и по теореме о монотонной сходимости для условных математических ожиданий мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu_t = \int_\Omega Z_t d\mu_t, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{u-}) = \mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{u-}) \text{ п.в.}$$

для любого $u \in [0, t]$. Заметим, что

$$\int_\Omega f_n d\mu_t = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \mu_t\{B_{n,k}\} = \sum_{k=1}^{m_n} c_{n,k} \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n,k}}|\mathcal{F}_{u-}) d\xi_u = \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{u-}) d\xi_u.$$

Снова применяя теорему о монотонной сходимости, мы получим

$$\int_\Omega Z_t d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{u-}) d\xi_u = \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{u-}) d\xi_u.$$

Так как случайный процесс Z является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, то для любого $u \in [0, t]$ выполняется равенство $\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{u-}) = Z_{u-}$ п.в. В результате мы получим равенство

$$\int_\Omega Z_t d\mu_t = \mathbb{E} \int_0^t Z_{u-} d\zeta_u.$$

Отсюда и из (2.4) и (2.5) следует (2.3). Теорема доказана.

3 Представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса

В этом разделе доказано, что субмартингал с ограниченным параметрическим множеством из класса DL можно представить в виде условного математического ожидания возрастающего процесса. Доказательство напоминает доказательство теоремы 1.2, но в деталях сильно отличается. Отметим, что доказательство теоремы 1.2 не применимо в рассматриваемом случае.

Нам понадобится известное утверждение, которое мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 3.1. *Пусть дан субмартингал* $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}, a > 0$, *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_{[0,a]}$ *такой, что* $Y_t \leqslant 0 = Y_a$ *п.в. для каждого* $t \in [0,a]$. *Обозначим* $S_n = \{0 = t_{n,0} < \dots < t_{n,n} = a\}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, *разбиение сегмента* $[0,a]$ *со свойствами*

$$S_n \subset S_{n+1} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0, \tag{3.1}$$

Определим случайный процесс $A^{(n)} = \{A_t^{(n)}, t \in S_n\}$, *положив*

$$A_0^{(0)} = 0, A_{t_{n,k}}^{(n)} = \sum_{m=1}^{k} (\mathbb{E}(Y_{t_{n,m}} | \mathcal{F}_{t_{n,m-1}}) - Y_{t_{n,m-1}}), k = 1, \dots, n.$$

Если $Y \in \mathcal{D}_a$, *то последовательность* $\{A_a^{(n)}\}_{n\geqslant 1}, A_a^{(n)} = A_{t_{n,n}}^{(n)}$, *равномерно интегрируема.*

Доказательство. См. ([33], стр. 167, или [56], стр. 177). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Если* $\mathbb{F}_{[0,a]}$*-субмартингал* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}, a > 0$, *принадлежит классу $\mathcal{D}_a$, то существует неположительный случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in [0,a]\}$ с неубывающими траекториями такой, что $\xi_a = 0$ и для любого $t \in [0,a]$ выполняется равенство $X_t = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Если случайный процесс X непрерывен справа, то случайный процесс ξ можно выбрать непрерывным справа. Более того, условные математические ожидания $\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]$, можно выбрать таким образом, что будет выполняться равенство*

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega) \tag{3.2}$$

для всех $t \in [0,a]$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Доказательство. Для любого $t \in [0,a]$ случайную величину X_t можно записать в виде суммы $X_t = \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t) + Y_t$, где $Y_t = X_t - \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t)$. Случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ является неположительным $\mathbb{F}_{[0,a]}$-субмартингалом. В точке $t = a$ он обращается в ноль п.в. По известной теореме ([33], стр. 147 или [56], стр.154) мартингал $\{\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F})_t, t \in [0,a]\}$ имеет непрерывную справа версию $Z = \{Z_t, t \in [0,a]\}$. Известно ([33], стр. 167 или [56], стр. 143), что мартингал Z принадлежит классу $\mathcal{D}_a$. Субмартингал Y, будучи разностью $Y = X - Z$ двух процессов из класса $\mathcal{D}_a$, принадлежит классу $\mathcal{D}_a$. Теорему достаточно доказать для субмартингала Y. Обозначим $S_n = \{0 = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = a\}, n \in \mathbb{N}$, разбиение сегмента $[0,a]$ со свойствами (3.1). Разбиения $S_n, n \in \mathbb{N}$, можно построить таким образом, что объединение $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ содержало в себе все точки разрыва функции $\mathbb{E}Y_t, t \in [0,a]$. Напомним, что неубывающая функция $\mathbb{E}Y_t, t \in [0,a]$, имеет конечное или счетное число точек разрыва. Счетное множество S всюду плотно в сегменте $[0,a]$. Субмартингал $Y^{(n)} = \{Y_t, t \in S_n\}$ можно записать в виде суммы

$$Y^{(n)} = M^{(n)} + A^{(n)} \tag{3.3}$$

мартингала $M^{(n)} = \{M_t^{(n)}, t \in S_n\}$, где $M_0^{(n)} = Y_0$,

$$M_{t_{n,k}}^{(n)} = M_0^{(n)} + \sum_{m=1}^{k} (Y_{t_{n,m}} - \mathbb{E}(Y_{t_{n,m}} | \mathcal{F}_{t_{n,m-1}})), k = 1, \ldots, n,$$

и п.в. неубывающей последовательности $A^{(n)} = \{A_t^{(n)}, t \in S_n\}$, где $A_0^{(n)} = 0$,

$$A_{t_{n,k}}^{(n)} = \sum_{m=1}^{k} (\mathbb{E}(Y_{t_{n,m}} | \mathcal{F}_{t_{n,m-1}}) - Y_{t_{n,m-1}}), k = 1, \ldots, n.$$

Так как $Y_a^{(n)} = Y_a = 0$ п.в., то $M_a^{(n)} = -A_a^{(n)}$ п.в. Заметим, что для любого $k = 1, \ldots, n$ случайная величина $A_{t_{n,k}}^{(n)}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}$. С учетом этого замечания и равенства (3.2) мы получим

$$X_{t_{n,k}} = M_{t_{n,k}}^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)} = \mathbb{E}(M_a^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) = \mathbb{E}(-A_a^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) \text{ п.в.} \tag{3.4}$$

По лемме 3.1 последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{n \geqslant 1}, A_a^{(n)} = A_{t_{n,n}}^{(n)}$, равномерно интегрируема и, следовательно, выполняется условие $\sup_{n \geqslant 1} \mathbb{E} A_a^{(n)} < \infty$. По лемме 1.1 найдутся последовательность $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$ и случайная величина ζ_a с конечным математическим ожиданием такие, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} A_a^{(n_{j_l})} = \zeta_a \text{ п.в.}$$

для любой подпоследовательности $\{n_{j_l}\}_{l \geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$. Равномерная интегрируемость последовательности $\{A_a^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ влечет равномерную интегрируемость последовательности $\{\sum_{l=1}^{m} A^{(n_{j_l})}/m\}_{m \geqslant 1}$. Отсюда, в силу известной теоремы ([33], стр. 117), следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{E} \Big| \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} A_a^{(n_{j_l})} - \zeta_a \Big| = 0$$

Возьмем произвольную точку $t \in S$. Так как $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ и $S_n \subseteq S_{n+1}$, то найдется индекс $n(t)$ такой, что $t \in S_n$ для всех $n \geqslant n(t)$. Найдется $k_n \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $t = t_{n,k_n}$ и $A_t^{)n)} = A_{t_{n,k_k}}^{(n)}$. В силу неравенства $A_t^{(n)} \leqslant A_a^{(n)}$ и равномерной интегрируемости последовательности $\{A_a^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ последовательность $\{A_t^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ равномерно интегрируема. Можно воспользоваться предыдущими рассуждениями и доказать, что найдутся подпоследовательность $\{n_{j_l}\}_{j \geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$ и случайная величина ζ_t с конечным математическим ожиданием такие, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} A_t^{(n_{j_l})} = \zeta_t \text{ п.в. и в среднем.} \tag{3.5}$$

Запишем числа из счетного множества S в виде последовательности $S = \{t_r\}_{r \geqslant 1}$. Утверждение (3.5) справедливо для любого $t = t_r, r = 1, 2, \ldots$, с последовательностью $\{n_{j_l}\}_{l \geqslant 1} = \{n_{j_l,r}\}_{l \geqslant 1}$. Последовательности индексов можно выбрать таким образом, что каждая следующая последовательность была подпоследовательностью предыдущей последовательности: $\{n_{j_l,r+1}\}_{l \geqslant 1} \subseteq \{n_{j_l,r}\}_{l \geqslant 1}$. Для диагональной последовательности, которую мы обозначим знакомым символом $\{n_{j_l}\}_{l \geqslant 1}$, справедливо утверждение (3.5) для каждого $t \in S$.

Докажем, что для любых $s, t \in S, s < t$, выполняется неравенство $\zeta_s \leqslant \zeta_t$ п.в. Так как $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n, S_n \subset S_{n+1}$, то найдется индекс $n(s,t)$ такой, что $s, t \in S_n$ для всех $n \geqslant n(s,t)$. Для любого $n \geqslant n(s,t)$ найдутся числа $k_n, r_n \in \{1, \ldots, n\}$, $k_n < r_n$, такие, что $s = t_{n,k_n}$ и $t = t_{n,r_n}$. Из неравенства $A_s^{(n)} = A_{t_{n,k_n}}^{)n)} \leqslant A_{t_{n,r_n}}^{(n)} = A_t^{(n)}$ п.в. и из утверждения (3.5) следует, что

$$\zeta_s = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} A_s^{(n_{j_l})} \leqslant \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} A_t^{(n_{j_l})} = \zeta_t \text{ п.в.}$$

Множество $\Omega' = \cap_{s,t \in S, s<t} \{\zeta_s \leqslant \zeta_t\}$, будучи пересечением счетного числа

событий единичной вероятности, является событием единичной вероятности. Определим случайный процесс $\xi = \{\xi_t, t \in [0,a]\}$, положив

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = a, \omega \in \Omega, \\ \zeta_t(\omega) - \zeta_a(\omega), & \text{если } t \in S, \omega \in \Omega', \\ \inf_{S \ni s > t} \zeta_s(\omega) - \zeta_a(\omega), & \text{если } t \in [0,a] \setminus S, \omega \in \Omega', \\ 0, & \text{если } t \in [0,a], \omega \in \Omega \setminus \Omega' \end{cases}$$

Заметим, что все траектории случайного процесса ξ неположительны и не убывают.

Докажем, что для любого $t \in [0,a]$ выполняется равенство

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{3.6}$$

Пусть $t \in S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$. Так как $S_n \subset S_{n+1}$, то найдется $n(t) \in \mathbb{N}$ такое, что $t \in S_n, t = t_{n,k_n}$, для всех $n \geqslant n(t)$ и для некоторого $k_n \in \{1, \dots, n\}$. Из (3.3) и (3.4) следует, что

$$Y_t = \mathbb{E}(\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}(-A_a^{(n_{j_l})} + A_t^{(n_{j_l})})|\mathcal{F}_t) \to \mathbb{E}(-\zeta_a + \zeta_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

Здесь мы воспользовались известной теоремой ([33], теорема 3.1.8, iv), по которой утверждение (3.5) достаточно для предельного перехода под знаком условного математического ожидания. Пусть $t \in [0,a] \setminus S$ и $s_n \in S, n \in \mathbb{N}, s_n \downarrow t$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\zeta_{s_n} - \zeta_a) = \xi_t$ п.в. и $|\zeta_a - \zeta_{s_r}| \leqslant \zeta_a$ п.в. Применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|(\zeta_{s_n} - \zeta_a) - \xi_t| = 0.$$

По неравенству Иенсена для условных математических ожиданий мы получим

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\zeta_{s_n} - \zeta_a|\mathcal{F}_t)| \leqslant \mathbb{E}|\xi_t - (\zeta_{s_n} - \zeta_a)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (3.7)$$

Поэтому $\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\zeta_a - \zeta_a|\mathcal{F}_t) \to \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ по вероятности при $n \to \infty$. По теореме Рисса найдется некоторая подпоследовательность последовательности $\{\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что сама последовательность $\{\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. к $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$. В силу равенства (3.6) для $t = s_n$, субмартингального свойства и свойств условных математических ожиданий выполняются следующие соотношения

$$Y_t \leqslant \mathbb{E}(Y_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим неравенство $Y_t \leqslant \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. В силу (3.6) для $t = s_n \in S$ выполняется равенство $\mathbb{E}X_{s_n} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\zeta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})$. Напомним, что S содержит все скачки функции $\mathbb{E}Y_t, t \in [0,a]$. Поэтому $t \in [0,a] \setminus S$ является точкой непрерывности функции $\mathbb{E}Y_t, t \in [0,a]$. Отсюда и из (3.6) для $t = s_n$ следует, что

$$\mathbb{E}Y_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_{s_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_{s_n} = \mathbb{E}\xi_t = \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t).$$

Так как $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t) - Y_t) = 0$ и $Y_t \leqslant \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в., то $Y_t = \mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Равенство (3.6) доказано.

Предположим, что субмартингал $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ непрерывен справа. Определим случайный процесс $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$, положив $\eta_t = \inf_{s\geqslant t} \xi_s$ для $t \in [0,a)$ и $\eta_a = 0$. Обратим внимание, что $\eta_t = \xi_t$ для любого $t \in S$. Случайный процесс η не убывает, так как этим свойством обладает случайный процесс ξ. По известной теореме ([33], стр. 70) случайный процес η непрерывен справа. Убедимся, что для любого $t \in [0,a]$ выполняется равенство $X_t = \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Это равенство выполняется для

$t \in S$ и, в частности, для $t = a$. Пусть $t \in [0, a) \setminus S$. Найдутся числа $s_n \in S, n \in \mathbb{N}$, такие, что $s_n \downarrow t$. Так как $\xi_{s_n} \downarrow \eta_t, \xi_{s_n} \leqslant 0$, то применима теорема о монотонной сходимости, согласно которой

$$0 \leqslant \mathbb{E}\eta_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_{s_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_{s_n} = \mathbb{E}Y_t > -\infty.$$

Отсюда, в силу теоремы Витали, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_{s_n} - \eta_t| = 0$. По неравенству Иенсена для условных математических ожиданий мы получим, что

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)| \leqslant \mathbb{E}|\xi_{s_n} - \eta_t| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому последовательность $\{\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$ сходится по вероятности к $\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$. По теореме Рисса найдется подпоследовательность последовательности $\{\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность $\{\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t)\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. к $\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$. В силу субмартингального свойства и свойств условных математических ожиданий выполняются следующие соотношения

$$Y_t \leqslant \mathbb{E}(Y_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим неравенство $Y_t \leqslant \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в. Так как $\mathbb{E}Y_{s_n} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})$ и функция $\mathbb{E}Y_t, t \in [0, a]$, непрерывна справа, то

$$\mathbb{E}Y_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_{s_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi_{s_n}|\mathcal{F}_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_{s_n} = \mathbb{E}\eta_t = \mathbb{E}\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t).$$

Поэтому $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t) - Y_t) = 0$. Так как $Y_t \leqslant \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в., то $Y_t = \mathbb{E}(\eta_t|\mathcal{F}_t)$ п.в.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось доказать равенство (3.2) с η вместо ξ. Множество $\Omega_X = \cap_{s\in S}\{X_s = \mathbb{E}(X_a + \eta_s|\mathcal{F}_s)\}$, будучи пересечением счетного числа событий единичной вероятности, является событием единичной вероятности. Для любых $\omega \in \Omega_X$ и $s \in S$ выполняется равенство $X_s(\omega) = \mathbb{E}(\eta_s|\mathcal{F}_s)(\omega)$, в частности, для $s = a \in S$. Пусть

$t \in [0,a)\backslash S, S \ni s_n \downarrow t$ при $n \uparrow \infty$.Так как субмартингал $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ непрерывен справа и $\eta_s = \xi_s$ для $s \in S$, то

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_a + \eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})(\omega)$$

Обозначим $Z_t(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_a + \eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})(\omega)$, если $\omega \in \Omega_X$, и $Z_t(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega_X$. Докажем, что функция Z_t является некоторым вариантом условного математического ожидания случайной величины $X_a + \eta_t$. Сначала мы убедимся, что Z_t измеримо относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Для любого $u \in (t,a)$ условное метематическое ожидание $\mathbb{E}(X_a + \eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n}), s_n < u$, измеримо относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_u$. Дополнение множества Ω_X является событием нулевой вероятности. Так как фильтрации $\mathbb{F}_{[0,a]}$ расширена, то множество Ω_X принадлежит $\mathcal{F}_u$. Произведение $\mathbb{E}(X_a + \eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})\mathbb{1}_{\Omega_X}, s_n < u$, измеримо относительно $\mathcal{F}_u$. Функция Z_t измерима относительно $\mathcal{F}_u$, так как она является поточечным пределом $\mathcal{F}_u$-измеримых функций $\mathbb{E}(X_a + \eta_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n})\mathbb{1}_{\Omega_X}$ при $n \to \infty$. Поэтому функция Z_t измерима относительно пересечения $\cap_{u>t}\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$. Последнее равенство выполняется в силу непрерывности справа фильтрации $\mathbb{F}_{[0,a]}$. Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|\eta_t - \xi_{s_n}| = 0$, то

$$\int_A Z_t d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A \mathbb{E}(X_a + \xi_{s_n}|\mathcal{F}_{s_n}) d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A (X_a + \xi_{s_n})\mathbb{P} = \int_A (X_a + \eta_t) d\mathbb{P}$$

для любого $A \in \mathcal{F}_t$. По определению условного математического ожидания равенство первого и последнего интегралов для любого $A \in \mathcal{F}_t$ означает, что Z_t можно взять в качестве условного математического ожидания случайной величины η_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Равенство (3.2) доказано. Теорема доказана.

4 Общая теорема Дуба-Мейера

Представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса, доказанное в предыдущем разделе, позволяет упростить доказательство теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. Для доказательства теоремы Дуба-Мейера нам понадобятся вспомогательные утверждения, которые мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 4.1. *Для любого ограниченного, непрерывного справа $\mathbb{F}_U$-мартингала $M = \{M_t,\ t \in U\}$ и для любого возрастающего процесса $A = \{A_t, t \in U\}$ справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(A_t M_t) = \mathbb{E}\int_0^t M_s\, dA_s \text{ для любого } t \in U.$$

Доказательство. См. ([33], стр. 162 или [56], стр. 169). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть даны $\mathbb{F}_U$-согласованне случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in U\}, A = \{A_t, t \in U\}, A' = \{A'_t, t \in U\}$. Предположим, что Y непрерывен слева и ограничен, A и A' являются возрастающими процессами такие, что для любых $s, t \in U, s < t$, выполняется равенство $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(A'_t - A'_s|\mathcal{F}_s)$ п.в. Тогда*

$$\mathbb{E}\int_0^t Y_s\, dA_s = \mathbb{E}\int_0^t Y_s\, dA'_s \text{ для любого } t \in U.$$

Доказательство. См. ([33], стр. 163 или [56], стр. 176). Лемма доказана.

Известно ([33], стр. 144 или [56], стр.145), что для любого $\mathbb{F}_U$-субмартингала $X = \{X_t, t \in U\}$ и для любого счетного всюду плотного множества $S \subset U$ существует множество $\Omega_S \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любых $\omega \in \Omega_S$ и $t \in U, t > 0$, существует предел

$\lim\limits_{s\uparrow t} X_s(\omega)$. Пусть дан $\mathbb{F}_U$-мартингал $Z = \{Z_t, t \in U\}$. Обозначим $Z_{0-} = Z_0$ и $Z_{t-}(\omega) = \lim\limits_{s\uparrow t} Z_s(\omega)$, если $\omega \in \Omega_Z, t \in U, t > 0$, и $Z_{t-}(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega_Z, t \in U, t > 0$. Обратим внимание, что все траектории случайного процесса $\{Z_{t-}, t \in U\}$ непрерывны слева.

Условимся называть возрастающий процесс $A = \{A_t, t \in U\}$ натуральным, если для любого ограниченного непрерывного справа $\mathbb{F}_U$-мартингала $Z = \{Z_t, t \in U\}$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^t Z_{s-} dA_s, t \in U. \tag{4.1}$$

Лемма 4.3. *Пусть даны непрерывный справа $\mathbb{F}_U$-субмартингал $X = \{X_t, t \in U\}$ и возрастающие натуральные процессы $A = \{A_t, t \in U\}$ и $A' = \{A'_t, t \in U\}$ такие, что $M = X - A$ и $M' = X - A'$ являются $\mathbb{F}_U$-мартингалами. Тогда случайные процессы A и A' неотличимы.*

Доказательство. См. ([33], стр. 165 или [56], стр 178). Лемма доказана.

Напомним, что функция $\tau : \Omega \to U \cup \{+\infty\}$ называется $\mathcal{F}_U$-марковским моментом, если $\{\tau \leqslant t\} \in F_t$ для любого $t \in U$. Субмартингал $X = \{X_t, t \in U\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}_U$ принадлежит классу Дуба $\mathcal{D}_a, a > 0$, если семейство всех суперпозиций X_τ, когда τ пробегает множество всех $\mathcal{F}_U$-марковсех моментов, ограниченных числом a, равномерно интегрируемо.

Теорема 4.4. *Если непрерывный справа $\mathbb{F}$-субмартингал $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ принадлежит классу $DL = \cap_{a>0}\mathcal{D}_a$, то его можно представить в виде суммы*

$$X = X_0 + M + A \text{ п.в.} \tag{4.2}$$

начального значения X_0, некоторого непрерывного справа $\mathbb{F}$-мартингала $M = \{M_t, t \geqslant 0\}, M_0 = 0$, и некоторого возрастающего натурального процесса $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$. Это представление единственно с точностью до неотличимости.

Доказательство. Напомним известное доказательство единственности разложения (4.2). Предположим, что наряду с разложением $X = X_0 + M + A$ п.в. имеется еще одно разложение $X = X_0 + M' + A'$ п.в. Случайные процессы $M + X_0 = X - A$ и $M' + X_0 = X - A'$ являются $\mathbb{F}$-мартингалами. По лемме 4.3 случайные процессы A и A' неотличимы и, следовательно мартингалы M и M' неотличимы.

Предположим, что теорема доказана для субмартингала $\{X_t, t \in [0, a]\}$ для любого $a > 0$. В таком случае для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют непрерывный справа $\mathbb{F}_{[0,n]}$-мартингал $\{M_t^{(n)}, t \in [0, n]\}, M_0^{(0)} = 0$, возрастающий натуральный процесс $\{A_t^{(n)}, t \in [0, n]\}$ и множество $\Omega_n \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такие, что для всех $t \in [0, n]$ и $\omega \in \Omega_n$ выполняется равенство $X_t(\omega) = X_0(\omega) + M_t^{(n)}(\omega) + A_t^{(n)}(\omega)$. В силу утверждения о единственности для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства $M_t^{(n)}(\omega) = M_t^{(n+1)}(\omega)$ и $A_t^{(n)}(\omega) = A_t^{(n+1)}(\omega)$ для всех $t \in [0, n]$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega'_n \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Множество $\Omega' = \cap_{n=1}^{\infty}(\Omega_n \cap \Omega'_n)$ является событием единичной вероятности. Определим случайные процессы $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ и $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$, положив

$$M_t(\omega) = \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega', n-1 \leqslant t < n, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } \omega \notin \Omega', \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

$$A_t(\omega) = \begin{cases} A_t^{(n)}(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega', n-1 \leqslant t < n, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } \omega \notin \Omega' \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что M и A являются непрерывным справа мартингалом и возрастающим натуральным процессом относительно фильтрации $\mathbb{F}$ и выполняется равенство (4.2).

Докажем существование разложения (4.2) для субмартингала $X = \{X_t, t \in [0, a]\}, a > 0$. По теореме 3.2 выполняется равенство $X_t(\omega) =$

$\mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)(\omega)$ для всех $t \in [0, a]$ и для всех ω из некоторого множества $\Omega_X \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Все траектории случайного процесса ξ неположительны, непрервы справа и обращаются в ноль в точке $t = 0$. Возьмем произвольное счетное множество $S \subset [0, a]$, всюду плотное в $[0, a]$ и содержащее точку a.

Обозначим $\mathbb{1}_B$ индикаторную функцию события $B \in \mathcal{F}$ и определим $\mathbb{F}_{[0,a]}$-мартингал $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$. По известной теореме ([33], стр. 144) существует множество $\Omega_B \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любых $\omega \in \Omega_B$ и $t > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\uparrow t} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-})$. Положим $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{0-}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_0)$ и $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-})(\omega) = \lim\limits_{s\uparrow t} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_s)(\omega)$, если $\omega \in \Omega_B, t > 0$, и $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B\mathcal{F}_{t-})(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega_B, t > 0$. По известной теореме ([33], стр. 70) все траектории случайного процесса $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-}), t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ непрерывны слева. Нетрудно видеть, что случайный процесс $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{t-}), t \in [0, a]\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_{[0,a]}$ и измерим.

Заметим, что случайный процесс $\{\xi_t - \xi_0, t \in [0, a]\}$ является возрастающим процессом. Определим функцию, для каждого $t \in [0, a]$,

$$\mu_t\{B\} = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0),\ B \in \mathcal{F}_t.$$

Напомним, что интеграл, стоящий под знаком математического ожидания, является интегралом по мере Лебега-Стилтьеса, построенной по возрастающему процессу $\{\xi_t - \xi_0), t \in [0, a]\}$. Так как $\mathbb{1}_\Omega = 1$, то $\mu_t\{\Omega\} = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_0) < \infty$. Функция μ_t конечно-аддитивна, так как для любых попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}_t$ выполняются равенства

$$\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{B_k},\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k}|\mathcal{F}_{s-}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k}|\mathcal{F}_{s-}) \text{ п.в.}$$

В силу линейного свойства интеграла и математического ожидания мы получим

$$\mu_t\{\cup_{k=1}^n B_k\} = \mathbb{E}\int\limits_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n B_k}|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\int\limits_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k}|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = \sum_{k=1}^n \mu_t\{B_k\}.$$

Убедимся, что функция μ_t является конечной мерой. Выше было доказано, что функция μ_t ограничена. Докажем, что она непрерывна сверху на пустом множестве. Пусть $B_n \in \mathcal{F}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Так как $\mathbb{1}_{B_{n+1}} \leqslant \mathbb{1}_{B_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{B_n} = 0$, то $1 \geqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}|\mathcal{F}_{u-}) \downarrow 0$ п.в. при $n \uparrow \infty$ для любого $u \geqslant 0$ в силу известных свойств условных математических ожиданий. По теореме об ограниченной сходимости, примененной последовательно к внутреннему интегралу и к математическому ожиданию, мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \mu_t\{B_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int\limits_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = 0.$$

Известно, что ограниченная функция $\mu_t\{B\}, B \in \mathcal{F}_t$, является мерой, если она конечно аддитивна и непрерывна сверху на пустом множестве.

Нетрудно видеть, что мера μ_t абсолютно непрерывна относительно вероятности. По теореме Радона-Никодима существует $\mathcal{F}_t$-измеримая, интегрируемая по мере $\mathbb{P}$ функция $A'_t : \Omega \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ такая, что

$$\mu_t\{B\} = \int_B A'_t d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_t.$$

Докажем, что для любых s, t, $0 \leqslant s < t \leqslant a$, выполняется неравенство

$A'_s \leqslant A'_t$ п.в. Действительно, для любого $B \in \mathcal{F}_t$ мы имеем

$$\begin{aligned}
0 \leqslant & \mathbb{E} \int\limits_s^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) d(\xi_u - \xi_0) = \\
& = \mathbb{E} \int\limits_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) d(\xi_u - \xi_0) - \mathbb{E} \int\limits_0^s \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) d(\xi_u - \xi_0) \\
& = \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\} = \int\limits_B A'_t d\mathbb{P} - \int\limits_B A'_s d\mathbb{P} = \int\limits_B (A'_t - A'_s) d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Последний интеграл принимает неотрицательные значения для любого $B \in \mathcal{F}_t$. По известной теореме ([33], стр. 29) выполняется неравенство $0 \leqslant A'_t - A'_s$ п.в. Множество $\Omega_{s,t} = \{A'_s \leqslant A'_t\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ является событием единичной вероятности. Поэтому пересечение $\Omega' = \bigcap\limits_{s,t \in S, s<t} \Omega_{s,t}$ счетного числа таких множеств также является событием единичной вероятности. Для любого $\omega \in \Omega'$ функция $A'_t(\omega), t \in S$, не убывает. Определим случайный процесс $A = \{A_t, t \in [0,a]\}$, положив $A_t(\omega) = \inf\limits_{S \ni s \geqslant t} A'_s(\omega)$, если $\omega \in \Omega'$, и $A_t(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega'$. Заметим, что $A_t(\omega = A'_t(\omega)$ для всех $t \in S$ и $\omega \in \Omega'$. По известной теореме ([33], стр. 70) случайный процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ непрерывен справа. Так как мера μ_0 тождественно равна нулю, то $A'_0 = 0$ п.в. и, следовательно, $A_0 = A'_0 \mathbb{1}_{\Omega'} = 0$ п.в. Можно считать, что $A_0 = 0$. В противном случае вместо Ω' можно взять множество $\Omega' \cup \{A_0 = 0\} \in \mathcal{F}$.

Докажем, что для любого $t \in [0,a]$ выполяется равенство

$$\mu_t\{B\} = \int_B A_t d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_t. \tag{4.3}$$

Это равенство выполняется для любого $t \in S$ и, в частности, для $t = a$, так как $a \in S, A_t = A'_t \mathbb{1}_{\Omega'}, \mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$. Пусть $t \in [0,a) \setminus S$. Так как S всюду плотно в $[0,a]$, то найдутся числа $s_n \in S, t < s_n$, такие, что $s_n \downarrow t$ при

$n \uparrow \infty$. Случайный процесс A непрерывен справа. Поэтому $A_{s_n} \to A_t$ при $n \uparrow \infty$. Заметим также, что $0 \leqslant A_{s_n} \leqslant A_a, \mathbb{E}A_a < \infty, \mathbb{E}(\xi_a - \xi_0) < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{s_n} \mathbb{E}(1_B|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = \int_0^t \mathbb{E}(1_B|\mathcal{F}_{s-}d(\xi_s - \xi_0),$$
$$0 \leqslant \int_0^{s_n} \mathbb{E}(1_B|\mathcal{F}_{s-}d(\xi_s - \xi_0) \leqslant \xi_a - \xi_0.$$

Из перечисленных условий следует, что применима теорема об ограниченной сходимости, по которой выполняются следующие соотношения

$$\int_B A_t d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_B A_{s_n} d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \mu_{s_n}\{B\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^{s_n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = \mu_t\{B\}.$$

Равенство (4.3) доказано.

Докажем, что случайный процесс $M = \{M_t, t \in [0.a]\}, M_t = X_t - A_t$, является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}_{[0,a]}$. В силу (4.3) выполняется следующее равенство

$$\int\limits_B (A_t - A_s)d\mathbb{P} = \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\}$$

для любых s, t, $0 \leqslant s < t \leqslant a$ и $B \in \mathcal{F}_t$. В частности, оно справедливо для любого $B \in \mathcal{F}_s$. Так как $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-}) = \mathbb{1}_B$ п.в. для всех $u > s$, то

$$\int\limits_B (A_t - A_s)d\mathbb{P} = \mu_t\{B\} - \mu_s\{B\} = \mathbb{E} \int\limits_s^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{u-})d(\xi_u - \xi_0) = \int\limits_B (\xi_t - \xi_s)d\mathbb{P}.$$

Отсюда и из определения условного математического ожидания следует, что

$$\int\limits_B \mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)d\mathbb{P} = \int\limits_B (A_t - A_s)d\mathbb{P}$$
$$= \int\limits_B (\xi_t - \xi_s)d\mathbb{P} = \int\limits_B \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s)d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}_s.$$

По известной теореме ([33], стр. 70) равенство первого и последнего интегралов для любого $B \in \mathcal{F}_s$ равносильно равенству $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s)$ п.в. Привлекая теорему 3.2, мы получим

$$\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((X_a + \xi_t) - (X_a + \xi_s)|\mathcal{F}_s)$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_a + \xi_t|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X_a + X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s \text{ п.в.}$$

Равенство $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s$ п. в. можно переписать в следующем виде: $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - A_t|\mathcal{F}_s) = X_s - A_s = M_s$ п.в. Тем самым доказано, что случайный процесс M удовлетворяет мартингальному условию и, следовательно, является $\mathbb{F}_{[0,a]}$-мартингалом.

Докажем, что случайный процесс $A = \{A_t, t \in [0,a]\}$ удовлетворяет условию (4.1) для любого ограниченного непрерывного справа $\mathbb{F}_{[0,a]}$-мартингала $Z = \{Z_t, t \in [0,a]\}$. Можно считать, что Z положительный мартингал. Действительно, по условию существует постоянная $c > 0$ такая, что $|Z_t| < c$ для всех $t \in [0,a]$. Вместо Z можно взять положительный $\mathcal{F}_{[0,a]}$-мартингал $c - Z = \{c - Z_t, t \in [0,a]\}$. Выше были доказано, что для любых $s, t, 0 \leqslant s < t \leqslant a$ выполняется равенство $\mathbb{E}(A_t - A_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s)$ п.в. Равенство (4.1) заведомо выполняется для $t = 0$. Фиксируем число $t \in (0,a]$ и разобьем сегмент $[0,t]$ точками $t_{n,k} = k2^{-n}t, k = 0, \ldots 2^n$. Заметим, что

$$\int_0^t Z_{s-} dA_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}} - A_{t_{n,k-1}}).$$

Так как мартингал Z ограничен некоторым числом $c > 0$, то

$$\Big|\sum_{k=1}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}} - A_{t_{n,k-1}})\Big| \leqslant cA_t, \Big|\sum_{k=1}^{2^n} Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}} - \xi_{t_{n,k-1}})\Big| \leqslant c(\xi - \xi_0).$$

По теореме об ограниченной сходимости мы получим, что

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_{s-} dA_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}} - A_{t_{n,k-1}}). \tag{4.4}$$

Общее слагаемое в сумме (4.4) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}})|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))=\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}\mathbb{E}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}})|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ =\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}\mathbb{E}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))\\ =\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}}).\end{aligned}$$

В результате мы получим

$$\sum_{k=0}^{2^n}\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}(A_{t_{n,k}}-A_{t_{n,k-1}})|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}))=\sum_{k=0}^{2^n}\mathbb{E}(Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})=$$

$$=\mathbb{E}\sum_{k=0}^{2^n}(Z_{t_{n,k-1}-}(\xi_{t_{n,k}}-\xi_{t_{n,k-1}})=\mathbb{E}\int_0^t Z_{s-}d(\xi_s-\xi_0).$$

Отсюда и из (4.4) следует равенство

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_{s-}dA_s=\mathbb{E}\int_0^t Z_{s-}d(\xi_s-\xi_0).$$

Для доказательства (4.1) достаточно убедиться, что

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_s dA_s=\mathbb{E}\int_0^t Z_{s-}d(\xi_s-\xi_0), t\in[0,a] \tag{4.5}$$

По лемме 4.1 величина слева равна $\mathbb{E}(A_t Z_t)$. Отсюда и из равенства (4.3) следует, по формуле замены меры интегрирования, что

$$\mathbb{E}\int_0^t Z_s dA_s=\mathbb{E}(Z_t A_t)=\int_\Omega Z_t A_t d\mathbb{P}=\int_\Omega Z_t d\mu_t. \tag{4.6}$$

Напомним, что Z_t является неотрицательной случайной величиной измеримой относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. По известной теореме из курса по теории меры ([33], стр. 22) найдется возрастающая последовательность простых функций $f_n, n\in\mathbb{N}$,

$$f_n=\sum_{k=1}^{m_n}c_{n,k}\mathbb{1}_{B_{n,k}}, c_{n,k}\geqslant 0, B_{n,k}\in\mathcal{F}_t,$$

такая, что $f_n \uparrow Z_t$ при $n \uparrow \infty$. По теореме о монотонной сходимости и по теореме о монотонной сходимости для условных математических ожиданий мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu_t = \int_\Omega Z_t d\mu_t, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{s-}) = \mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{s-}) \text{ п.в.}$$

для любого $s \in [0,t]$. Заметим, что

$$\int_\Omega f_n d\mu_t = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}\mu_t\{B_{n,k}\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m_n} c_{n,k}\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n,k}}|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0).$$

Снова применяя теорему о монотонной сходимости, мы получим

$$\int_\Omega Z_t d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(f_n|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0) =$$
$$= \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{s-})d(\xi_s - \xi_0).$$

Так как случайный процесс Z является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, то для любого $s \in [0,t]$ выполняется равенство $\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{s-}) = Z_{s-}$ п.в. В результате мы получим равенство

$$\int_\Omega Z_t d\mu_t = \mathbb{E}\int_0^t Z_{s-} d(\xi_s - \xi_0).$$

Отсюда и из (4.6) сдедует (4.5). Тем самым доказано, что $A = \{A_t, t \in [0,a]\}$ является возрастающим натуральным процессом. Выше было показано, что разность $M = X - A = \{X_t - A_t, t \in [0,a]\}$ является $\mathbb{F}_{0,a]}$-мартингалом. Случайный процесс, будучи разностью двух непрерывных справа случайных процессов, непрерывен справа. Заметим, что $X_0 = M_0$ и $M - M_0$ является непрерывным справа $\mathbb{F}_{[0,a]}$-мартингалом. Требуемое разложение $X = X_0 + (M - X_0) + A$ п.в. построено. Теорема доказана.

5 Обратные стохастические дифференциальные уравнения

В этом разделе мы докажем теорему существования решений обратного стохастического дифференциального уравнения в классе случайных процессов, интегрируемых в степени $p > 1$. С помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы найдем точные решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Будет также доказана теорема о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.

Основным объектом нашего исследования является обратное стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t\Big), t \in [0, a], X_a = \xi. \tag{5.1}$$

Решением этого уравнения называется случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$, который, будучи подставленным в уравнение, обращает уравнение в тождество для всех $t \in [0, a]$ на некотором событии $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Случайный процесс X должен удовлетворять некоторым естественным условиям, а именно быть $\mathbb{F}$-согласованным, измеримым и интегрируемым. Действительно, случайная величина X_t является условным математическим ожиданием от случайной величины $\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$ и, следовательно, $\mathcal{F}_t$-измерима. Чтобы существовало условное математическое ожидание, следует предположить, что

$$\mathbb{E}\int_0^a |\mu(t, X_t)|dt < \infty. \tag{5.2}$$

Чтобы существовал интеграл под знаком математического ожидания, следует предположить, что случайный процесс $\{\mu(s, X_s), s \in [0, a]\}$ является измеримым. Для этого достаточно, чтобы функция $\mu : \Omega \times [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ была измеримой, как функция трех переменных, и случайный процесс X был измеримым. Название *обратное* стохастическое дифференциальное уравнение объясняется тем, что граничное условие $X_a = \xi$ задается в правой конечной точке параметрического множества $[0, a]$. Случайная величина ξ должна иметь конечный абсолютный момент $\mathbb{E}|\xi|$ и быть $\mathcal{F}_a$-измеримой. Последнее условие необходимо, чтобы решение X уравнения (5.1) было согласованным с фильтрацией $\mathbb{F}$.

Предположим, что X является решением уравнения (5.1). Перепишем уравнение (5.1) (теперь тождество) в следующем виде

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds - \int_0^t \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t\Big) = -\int_0^t \mu(s, X_s)ds + M_t =$$
$$= \xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds - (M_a - M_t),$$

где $M_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)$. Случайный процесс $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$ является $\mathbb{F}$-мартингалом. По известной теореме ([33], стр. 145) существует регулярная версия мартингала M. Из сказанного следует, что любое решение уравнения (5.1) является решением обратного стохастического дифференциального уравнения

$$X_t = \xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds - (M_a - M_t), X_a = \xi. \tag{5.3}$$

Предположим теперь, что случайный процесс X удовлетворяет этому уравнению с некоторым регулярным справа $\mathbb{F}$–мартингалом $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$. Можно выбрать вариант условного математического ожидания $\mathbb{E}(M_a|\mathcal{F}_t)$ так, что случайные процессы $\{\mathbb{E}(M_a|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ и M будут неотличимыми. В этом случае любое решение уравнения (5.3) является решением уравнения (5.1). Уравнения (5.1) и (5.3) оказываются эквивалентными. В научной литературе можно найти достаточные условия для существования решений обратных стохастических дифференциальных уравнений (5.1) и (5.3). Некоторые достаточные условия для существования решений уравнений (5.1) и (5.3) мы обсудим в следующем разделе.

Следующая теорема содержит описание класса случайных процессов, которые участвуют в формулировках теорем об обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 5.1. *Пусть даны регулярные справа случайные процессы $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}, n \in \mathbb{N}$. Если $\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)}|^p) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для некоторого числа $p \geqslant 1$ и*

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^p) = 0, \tag{5.4}$$

то существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ такие, что $\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t|^p) < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0, \lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в.} \tag{5.5}$$

Доказательство. Обозначим Q_a множество всех рациональных чисел в сегменте $[0,a]$, к которому добавим число a. Для любых $n,m \in \mathbb{N}$, функция $\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|$ является $\mathcal{F}$-измеримой. Для этого достаточно доказать, что $A = \{\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\} \in \mathcal{F}$ для любого вещественного числа c. Если $c < 0$, то $A = \varnothing \in \mathcal{F}$. Если $c \geqslant 0$ и справедливо равенство $A = \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$, то $A \in \mathcal{F}$, так как A является пересечением счетного числа множеств из $\mathcal{F}$. Докажем упомянутое равенство. Пусть $\omega \in \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$. Для любого $t \in [0,a) \setminus Q_a$ найдется убывающая последовательность $\{t_j\}_{j\geqslant 1}$ чисел из Q_a, которая сходится к t. Так как функция $|X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(m)}(\omega)|, t \in [0,a]$, непрерывна справа и ограничена числом c на множестве Q_a, то

$$|X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(m)}(\omega)| = \lim_{j\to\infty} |X_{t_j}^{(n)}(\omega) - X_{t_j}^{(m)}(\omega)| \leqslant c$$

и, следовательно, $\omega \in A$. С другой стороны, очевидно, что $A \subseteq \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$. Множества A и $\cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$ совпадают, так как являются частями друг друга.

В силу условия (5.4) найдется последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ индексов такая, что

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p) \leqslant 2^{-np}, n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

С помощью теоремы о монотонной сходимости и неравенства Ляпунова $\mathbb{E}\xi \leqslant (\mathbb{E}\xi^p)^{1/p}$ для любой неотрицательной случайной величины ξ, мы получим

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p))^{1/p} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Отсюда следует, что множество $\Omega' = \{\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}| < \infty\}$ является событием единичной вероятности. Определим случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$, положив

$$X_t(\omega) = \begin{cases} X_t^{(m_1)}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} (X_t^{(m_{n+1})}(\omega) - X_t^{(m_n)}(\omega)), & \text{если } \omega \in \Omega', \\ 0, & \text{если } \omega \in \Omega \setminus \Omega' \end{cases}$$

Если $\omega \in \Omega$, то функция $X_t(\omega), t \in [0, a]$, непрерывна справа и имеет предел слева в каждой точке $t \in (0, a]$, так как является суммой равномерно сходящегося ряда функций с такими свойствами. Если $\omega \in \Omega\setminus\Omega'$, то функция $X_t(\omega), t \in [0, a]$, постоянна и, следовательно, непрерывна. Для каждого $t \in [0, a]$ функция $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима относительно сигма-алгебры

$\mathcal{F}$, так как является пределом почти всюду сходящегося ряда случайных величин. Второе утверждение (5.5) является следствием следующих соотношений, которые выполняются на множестве Ω',

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_{n+1})}|) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)}|) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)}| = 0.$$

С помощью (5.6) и неравенства Минковского можно убедиться, что

$$(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t|^p))^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p))^{1/p} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p))^{1/p} + \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} = (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p)^{1/p} + 1 < \infty.$$

Снова с помощью неравенства Минковского мы получим

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_{n+1})}|^p))^{1/p} =$$
$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)})|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)}|^p))^{1/p} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-n} = 0.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $m_n \leqslant k < m_{n+1}$. Для таких k и n справедливы неравенства

$$(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(k)}|^p))^{1/p} = (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_n)} + X_t^{(m_n)} - X_t^{(k)}|^p))^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_n)}|^p))^{1/p} + (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)} - X_t^{(k)}|^p))^{1/p} \to 0$$

при $k \to \infty$, так как по доказанному выше $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_n)}|^p) = 0$

и выполняется утверждение $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)} - X^{(k)}|^p) = 0$ по условию (5.4). Первое утверждение (5.5) доказано. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть счетно-конечная мера* ν *определена на сигма-алгебре* $\mathcal{B}_a$. *Если измеримый случайный процесс* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{E}\int_0^a |X_t|\nu\{dt\} < \infty, \tag{5.7}$$

то для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *существует* $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{G}$*-измеримая версия* $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ *случайного процесса* $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$ *такая, что*

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}\Big(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}\Big) \text{ для любых } 0 \leqslant u < v \leqslant a. \tag{5.8}$$

Доказательство. Равенство (5.8) означает, что в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Предположим сначала, что мера ν конечна. Условимся называть случайный процесс Y, о котором говорится в теореме, соответствующим случайному процессу X. Теорема справедлива для индикаторной функции $\mathbb{1}_{A\times B}$ любого прямоугольника $A\times B$ со сторонами $A\in\mathcal{B}_a$ и $B\in\mathcal{F}$. Действительно, случайный процесс $X = \{X_t, t\in[0,a]\}, X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t)\mathbb{1}_B(\omega)$, является измеримым и удовлетворяет условию (5.7)

$$\mathbb{E}\int_0^a |X_t|\mu\{dt\} = \int_0^a \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}\mathbb{E}\mathbb{1}_B = \nu\{A\}\mathbb{P}\{B\} < \infty.$$

Произведение $c\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ можно взять (так мы и поступим) в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(c\xi|\mathcal{G})$ для любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием и для любой неслучайной постоянной или функции c аргумента $t\in[0,a]$.

Случайный процесс $Y = \{Y_t, t\in[0,a]\}, Y_t = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_A(t)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$, является $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{G}$-измеримым. Равенство (5.8) следует из следующих соотношений

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A\times B}(t)|\mathcal{G})\nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})\nu\{dt\} =$$
$$= \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A\times B}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Убедимся, что теорема справедлива для индикаторной функции любого множества из $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$ индикаторных функций, для которых справедлива теорема. Заметим, что индикаторная функция $\mathbb{1}_A$ является измеримым случайным процессом, более подробно, $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$-измеримым. Она удовлетворяет условию (5.7), так как $0 \leqslant \mathbb{1}_A \leqslant 1$. Убедимся, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Выше было доказано, что прямоугольник $[0, a] \times \Omega$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$. Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in [0, a]\}$, соответствуют случайным процессам $\mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}_B$. Разность $Z - Y$ двух $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримых случайных процессов является $\mathcal{B}_a \times \mathcal{G}$-измеримым случайным процессом Из равенств

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}), \int_u^v Z_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_B(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

следует, что $Z - Y$ удовлетворят равенству (5.8)

$$\int_u^v (Z_t - Y_t)\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v (\mathbb{1}_B(t) - \mathbb{1}_A(t))\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{B\setminus A}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Случайный процесс $Z - Y$ соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_{B\setminus A}$. Это означает, что $B \setminus A \in \mathcal{L}$. Если $A_n \in \mathcal{L}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$. К возрастающим последовательностям $\{\mathbb{1}_{A_n}\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\}\}$ применимы теорема о монотонной сходимости и теорема о монотонной сходимости для условных математических ожиданий, по которым

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\},\\
&\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Пусть случайный процесс $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_{A_n}$. Так как $Y^{(n)}$ является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}(t)|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$ и последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ возрастает, то

$$Y_t^{(n)} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}(t)|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)|\mathcal{G}) = Y_t^{(n+1)} \leqslant 1 \text{ п.в.}$$

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ положив $Y_t = \sup_{n\geqslant 1} Y_t^{(n)}$. Случайный процесс Y измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$. Для любого $t \in [0,a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. к $Y_.$ По теореме об ограниченной сходимости последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится в среднем к Y_t и, следовательно,

$$\mathbb{E}\Big|\int_u^v Y_t^{(n)}\nu\{dt\} - \int_u^v Y_t\nu\{dt\}\Big| \leqslant \int_u^v \mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t|\nu\{dt\} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

По известной теорема Рисса ([33], стр. 24) найдется последовательность $\{\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\}\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\int_u^v Y_t\nu\{dt$. Отсюда и из (6.9) следует, что

$$\begin{aligned}
\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A^{m_n}}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) =\\
= \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}
\end{aligned}$$

Величины справа и слева совпадают п.в. Это означает, что в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_A$. Это означает, что $A \in \mathcal{L}$. Доказательство, что $\mathcal{L}$ является λ-классом, завершено. По доказанному выше класс $\mathcal{L}$ содержит все прямоугольники $A\times B$ со сторонами $A \in \mathcal{B}_a$ и $B \in \mathcal{F}$. По теореме Серпинского

([33], стр. 13) сигма-алгебра, порожденная указанными прямоугольниками содержится в λ-классе $\mathcal{L}$. По определению, сигма-алгебра $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$ порождается указанными прямоугольниками и, следовательно, $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$. С другой стороны, класс $\mathcal{L}$ по своему определению содержится в $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$ и, следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$. Тем самым доказано, что теорема справедлива для индикаторной функции $\mathbb{1}_A$ любого множества $A \in \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$, трактуемой как случайный процесс. В силу линейного свойства интеграла и условного математического ожидания теорема справедлива для простых случайных случайных процессов следующего вида

$$X = \sum_{k=1}^{m_n} c_k \mathbb{1}_{A_n}, A_k \in \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}, c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n.$$

Пусть дан любой $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$-измеримый, неотрицательный случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющий условию (5.7). По известной теореме ([33], стр. 22) существует возрастающая последовательность $\{X^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ простых процессов $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$, которая поточечно сходится к X. По теореме о монотонной сходимости и по теореме о монотонной сходимости для условных математических ожиданий мы получим

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_u^v X_t^{(n)} \nu\{dt\} = \int_u^v X_t \nu\{dt\}, \\ &\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(n)} \nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Пусть случайный процесс $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ соответствует случайному процессу $X^{(n)}$. Так как $Y^{(n)}$ является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(X_t^{(n)}|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$, и для каждого $t \in [0,a]$ последовательность $\{X_t^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ возрастает и ограничена случайной величиной X_t, то справедливы следующие неравенства

$$Y_t^{(n)} = \mathbb{E}(X_t^{(n)}|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(X_t^{(n+1)}|\mathcal{G}) = Y_t^{(n+1)} \leqslant \mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \geqslant [0,a]\}$ положив $Y_t = \sup_{n\geqslant 1} Y_t^{(n)}$. Случайный процесс Y измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$. Для любого $t \in [0,a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. к Y_t, и выполняется неравенство $Y_t \leqslant \mathbb{E}X_t|\mathcal{G})$ п.в. В силу условия (5.7) и теоремы Фубини мы имеем $\int_0^a \mathbb{E}X_t \nu\{dt\} = \mathbb{E}\int_0^a X_t\nu\{dt\} < \infty$. Поэтому $\mathbb{E}X_t < \infty$ для ν-почти всех $t \in [0,a]$. Для таких $t \in [0,a]$ справедливы неравенства $\mathbb{E}Y_t^{(n)} \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X_t < \infty$ и $\mathbb{E}Y_t \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X_t < \infty$, а также имеет место сходимость в среднем $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t| = 0$ по теореме о монотонной сходимости. Так как $\mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t| \leqslant 2\mathbb{E}X_t$ и $\int_0^a \mathbb{E}X_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}\int_0^a X_t\nu\{dt\} < \infty$ по условию (5.7), то применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\mathbb{E}\Big|\int_u^v Y_t\nu\{dt\} - \int_u^v \mathbb{E}Y_t\nu\{dt\}\Big| \leqslant \mathbb{E}\int_u^v |Y_t - Y_t|\nu\{dt\}\Big| = \int_u^v \mathbb{E}|Y_t^{n)} - Y_t|\nu\{dt\} \to 0$$

при $n \to \infty$. По известной теореме Рисса найдется последовательность $\{\int_0^a Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\}\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\int_0^a Y_t\nu\{dt\}$. Отсюда и из (5.10) следует, что

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(m_n)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G})$$

В качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу X.

Пусть теперь дан любой $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющий условию (5.7). Положительная $X^{(+)} = \{X_t^{(+)}, t \in [0,a]\}$ и отрицательная часть $X^{(-)} = \{X_t^{(-)}, t \in [0,a]\}$ случайного процесса X измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$. Они удовлетворяют условию (5.7), так как $\mathbb{E}\int_0^a X_t^{(\pm)}\nu\{dt\} \leqslant \mathbb{E}\int_0^a |X_t|\nu\{dt\}$. Для неотрицательных случайных процессов $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$ теорема справедлива.

Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in]0,a]\}$ соответствуют случайным процессам $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$. Случайный процесс $Y - Z$ является $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$, так как $X = X^{(+)} - X^{(-)}$ и $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_t^{(+)}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_t^{(-)}|\mathcal{G})$. Он удовлетворяет равенству (5.8). Это следует из следующих соотношений

$$\int_u^v (Y_t - Z_t)\nu\{dt\} = \int_u^v Y_t\nu\{dt\} - \int_u^v Z_t\nu\{dt\} =$$
$$= \mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(+)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(-)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(\int_u^v (X_t^{(+)} - X_t^{(-)})\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Случайный процесс $Y - Z = \{Z_t - Y_t, t \in [0,a]\}$ соответствует случайному процессу X.

Предположим теперь, что мера ν счетно-конечна. В этом случае найдутся множества $B_n \in \mathcal{B}_a, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\nu\{B_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $[0,a] = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Можно считать, что множества $B_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. В противном случае вместо B_n можно взять $B_1' = B_1, B_{n+1}' = B_{n+1} \setminus \cup_{k=1}^{n} B_k$ для $n \in \mathbb{N}$. Множества $B_n', n \in \mathbb{N}$, как нетрудно видеть, попарно не пересекаются, $\nu\{B_n'\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $[0,a] = \cup_{n=1}^{\infty} B_n'$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ мера $\nu_n\{A \cap B_n\}, A \in \mathcal{B}_a$, конечна. По доказанному выше для любого измеримого неотрацательного случайного процесса $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющего условию (5.7), и для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ существует $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ такой, что

$$\int_{B_n \cap [u,v]} Y_t^{(n)}\nu\{dt\} = \int_u^v Y_t^{(n)}\nu_n\{dt\} =$$
$$= \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_{B_n \cap [u,v]} X_t\nu_n\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$, положив $Y_t =$

$\sum_{n=1}^{\infty} Y_t^{(n)} \mathbb{1}_{B_n}$. Нетрудно видеть, что случайный процесс Y является $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримым. Суммируя, мы получим

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n \cap [u,v]} Y_t^{(n)} \nu\{dt\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\int_{B_n \cap [u,v]} X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n \cap [u,v]} X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Предпоследнее равенство выполняется по известной теореме ([33], стр. 102). В качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t \nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу X.

Общий случай можно доказать уже знакомым образом. Пусть дан измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$, удовлетворяющий условию (6.7). Теорема справедлива для положительной части $X^{(+)} = \{X_t^{(+)}, t \in [0, a]\}$ и отрицательной части $X^{(-)} = \{X_t^{(-)}, t \in [0, a]\}$ случайного процесса X. Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in]0, a]\}$ соответствуют случайным процессам $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$. Разность $Y - Z$ соответствует случайному процессу X. Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$- измеримая функция $\mu : \Omega \times [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leqslant c|x - y| \tag{5.11}$$

для некоторого $c > 0$ и для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Если $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$ для некоторого $c > 0$, тогда существует единственное с точностью до неразличимости регулярное справа решение $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения (5.1) такое, что

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t|^p) < \infty. \tag{5.12}$$

Доказательство. Теорема будет доказана методом последовательного приближения. Именно этим методом обычно ([?], стр. 217-263) доказывают существование сильного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Определим случайные процессы $X^{(0)} = \{X_t^{(0)}, t \in [0,a]\}$ и $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}, n \in \mathbb{N}$, положив $X_t^{(0)} = 0$ для всех $t \in [0,a]$ и

$$X_t^{(n+1)} = M_t^{(n)} - \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds, t \in [0,a], \tag{5.13}$$

где случайный процесс $M^{(n)} = \{M_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ является регулярной справа версией мартингала $\{\mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$. Известно ([33], стр. 84), что регулярные справа случайные процессы измеримы и, следовательно, все их траектории является борелевскими функциями. Поэтому для любого $\omega \in \Omega$ существует интеграл Лебега $\int_0^a \mu(\omega, s, X_s(\omega))ds$. По традиции переменную ω не указывают.

Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(n)}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$, обладает свойством регулярности справа, и удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n)}|^p) < \infty. \tag{5.14}$$

Это утверждение справедливо для случайного процесса $X^{(0)}$, тождественно равного нулю. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(n)}$ обладает всеми перечисленными свойствами. Из определения (5.13) следует, что случайный процесс $X^{(n+1)}$ является регулярным справа. Убедимся, что он согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Для этого достаточно доказать, что для любого $t \in [0,a]$ случайная величина $\int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. С этой целью разобьем сегмент $[0,t]$ точками $s_{m,k} = k2^{-m}t, k = 0,\ldots .2^m, m \in \mathbb{N}$, и определим случайный процесс $\eta^{(m)} = \{\eta_s^{(m)}, s \in [0,t]\}$, положив $\eta_0^{(m)} = X_0^{(n)}, \eta_s^{(m)} = X_{s_{m,k}}^{(n)}$ для $s \in (s_{n,k-1}, s_{n,k}], k = 1,\ldots,2^m$. Так как случайный процесс $X^{(n)}$ непрерывен справа, и выполняется условие (5.11), то

$$\lim_{m\to\infty} \mu(s,\eta_s^{(m)}) = \mu(s,X_s^{(n)}) \text{ для любого } s \in [0,t].$$

В силу (5.11) справедливы следующие оценки

$$|\mu(s,\eta_s^{(m)})| = |\mu(s,0) + \mu(s,\eta_s^{(m)}) - \mu(s,0)| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu(s,0)| + c|\eta_s^{(m)}| \leqslant |\mu(s,0)| + \sup_{0\leqslant s\leqslant a} |X_s^{(n)}|.$$

Справа стоит сумма п.в. конечных случайных величин, так как они имеют конечный момент p-порядка в силу условия теоремы и индуктивного предположения (5.14). По теореме об ограниченной сходимости мы получим

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{2^m} \mu(s_{m,k},\eta_{s_{m,k}}^{(m)})(s_{m,k} - s_{m,k-1}) = \lim_{m\to\infty} \int_0^t \mu(s,\eta_s^{(m)})ds =$$
$$= \int_0^t \mu(s,X_s^{(n)})ds \text{ п.в.}$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ сумма, стоящая слева под знаком предела, является $\mathcal{F}_t$-измеримой случайной величиной. Случайная величина $\int_0^t \mu(s,X^{(n)}ds$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$, так как является пределом п.в. некоторой последовательности $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин на полном вероятностном пространстве.

Убедимся, что выполняется (5.14) с $n+1$ вместо n. С помощью интегрального неравенства Гельдера и неравенства $|\alpha + \beta|^p \leqslant 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$

для любых вещественных чисел α и β мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n+1)}|^p)\leqslant\\
&\leqslant 2^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n)}|^p)+2^p\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\Big|\int_0^t\mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|^p\Big)\leqslant\\
&\leqslant 2^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n)}|^p)+(2a^{1/q})^p\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\int_0^t|\mu(s,X_s^{(n)})|^p ds\Big),
\end{aligned}\tag{5.15}$$

где $q = p/(p-1)$. Второе слагаемое можно оценить с помощью (5.11) и (5.14) следующим образом

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\int_0^t|\mu(s,X_s^{(n)})|^p ds\Big)\leqslant\mathbb{E}\Big(\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})|^p ds\Big)=\\
&=\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,0)+\mu(s,0)|^p)ds\leqslant\\
&\leqslant(2c)^p\mathbb{E}\int_0^a(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_s^{(n)}|^p)ds+2^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^2)ds\leqslant\\
&\leqslant(2c)^p a\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_s^{(n)}|^p)+2^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^p)ds<\infty.
\end{aligned}$$

Обратимся к оценке первого слагаемого справа в (5.15). Привлекая максимальное неравенство ([33], стр. 134) для мартингалов, неравенство Иенсена для условных математических ожиданий и неравенство Гельдера, мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n)}|^p)\leqslant q^p\mathbb{E}|M_a^{(n)}|^p=q^p\mathbb{E}\Big(\int_0^a\mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|\mathcal{F}_a\Big)\Big)^p\leqslant\\
&\leqslant q^p\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^a\mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|^p\Big|\mathcal{F}_a\Big)\Big)=q^p\mathbb{E}\Big|\int_0^a\mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|^p\leqslant\\
&\leqslant(qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})|^p ds=\\
&=(qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,0)+\mu(s,0)|^p ds\leqslant\\
&\leqslant(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,0)|^p ds+(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^p ds\leqslant\\
&\leqslant(2qa^{1/q}c)^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a}|X_s^{(n)}|^p)+(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^p ds<\infty.
\end{aligned}$$

Утверждение (5.14) доказано.

Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} \mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leqslant \frac{(ca^{1/q})^{np}}{n!}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a}|X_s^{(1)}|^p). \tag{5.16}$$

Мартингалы $M^{(n)}$ и $\{\mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ являются версиями друг друга. Поэтому (5.13) для n и $n+1$ можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s^{(n-1)})ds|\mathcal{F}_t) - \int_0^t \mu(s, X_s^{(n-1)})ds = \\ &= \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s^{(n-1)})ds|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}, \\ X_t^{(n+1)} &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t) - \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds = \\ &= \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \end{aligned}$$

Из этих равенств и из условия (5.11) следует, что

$$\begin{aligned} &|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leqslant \mathbb{E}(\int_t^a |\mu(s, X_s^{(n)}) - \mu(s, X_s^{(n-1)})|ds|\mathcal{F}_t) \leqslant \\ &\leqslant c\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|ds|\mathcal{F}_t) \leqslant ca^{1/q}\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \end{aligned}$$

На последнем этапе было применено неравенство Гельдера. С помощью неравенства Иенсена для условных математических для выпуклых функций мы получим

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p \leqslant (ca^{1/q})^p\mathbb{E}|\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t)|^p \leqslant \\ &\leqslant (ca^{1/q})^p\mathbb{E}\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds|\mathcal{F}_t) = \\ &= (ca^{1/q})^p\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds = (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется по теореме Фубини. Неравенство между первым и последним выражением имеет итерационный характер. Многократная итерация ведет к следующим неравенствам

$$\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p \leqslant (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds =$$
$$= (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_{s_n}^{(n)} - X_{s_n}^{(n-1)}|^p ds_n$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^{2p} \int_t^a \int_{s_n}^a \mathbb{E}|X_{s_{n-1}}^{(n-1)} - X_{s_{n-1}}^{(n-2)}|^p ds_{n-1} ds_n \leqslant \cdots$$
$$\cdots \leqslant (ca^{1/q})^{np} \int_t^a \int_{s_n}^a \int_{s_{n-1}}^a \cdots \int_{s_1}^a \mathbb{E}|X_{s_1}^{(1)} - X_{s_1}^{(0)}|^p ds_1 \cdots ds_{n-1} ds_n \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^{np} \mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant s_1 \leqslant a} |X_{s_1}^{(1)}|^p) \int_t^a \int_{s_n}^a \int_{s_{n-1}}^a \cdots \int_{s_1}^a ds_1 \cdots ds_{n-1} ds_n.$$

Последний многократный интеграл равен $(a-t)^n/n!$. Отсюда следует неравенство (5.16).

Из неравенства (5.16) и неравенства Минковского следует, что

$$(\mathbb{E}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p)^{1/p} = (\mathbb{E}|\sum_{k=m}^{n+m} (X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)})|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{n+m} (\mathbb{E}|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}|^p)^{1/p} \leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0 \leqslant s \leqslant a} |X_s^{(1)}|^p)^{1/p} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(ca^{1/q})^n}{(n!)^{1/p}}.$$

Эти неравенства выполняются равномерно по $t \in [0, a]$. Так как остаток ряда стремится к нулю при $m \to \infty$, то

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \geqslant 1} \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} E|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p = 0. \tag{5.17}$$

Из условия (5.11) и определения (5.13) следует, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}| + c \int_0^a |X_s^{(n+m+1)}) - X_s^{(m)}| ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}| + ca^{1/q} (\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)})|^p ds)^{1/p}.$$

На последнем этапе было применено неравенство Гельдера. Разность $M^{(n+m+1)} - M^{(m)}$ двух регулярных справа $\mathbb{F}$-мартингалов является регулярным справа $\mathbb{F}$-мартингалом. С помощью максимального неравенства для мартингалов ([33], стр. 134) и знакомого неравенства $|\alpha + \beta|^p \leqslant 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$ для вещественных чисел α и β мы получим

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|)^p \leqslant (2q)^p \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}|^p)+$$
$$+ (2ca^{1/q})^p \mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)})|^p ds) \leqslant$$
$$\leqslant (2q)^p \mathbb{E}(|M_a^{(n+m+1)} - M_a^{(m)}|^p + (2ca^{1/q})^p \mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)})|^p ds).$$

Мартингалы $M^{(n+m+1)} - M^{(m)}$ и

$$\{\mathbb{E}(\int_0^a (\mu(s, X_s^{(n+m+1)}) - \mu(s, X_s^{(m)}))ds|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$$

являются версиями друг друга. Отсюда и из условия (5.11) следует, что

$$\mathbb{E}|M_a^{(n+m+1)} - M_a^{(m)}|^p = \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_0^a (\mu(s, X_s^{(n+m+1)}) - \mu(s, X_s^{(m)}))ds|\mathcal{F}_a)\Big|^p =$$
$$= c^p \mathbb{E}\Big|\int_0^a |X_s^{(n+m+1)}) - X_s^{(m)})|ds\Big|^p \leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds.$$

На последнем этапе было использовано неравенство Гельдера. Отсюда и из предыдущих неравенств следует, что

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p) \leqslant 2(2ca^{1/q})^p \mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds) =$$
$$= 2(2ca^{1/q})^p \int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds.$$

На последнем этапе была использована теорема Фубини. Отсюда и из (5.17) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p) = 0.$$

По теореме 5.1 существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ индексов такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в. и } \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0. \quad (5.18)$$

Докажем, что случайный процесс X является решением уравнения (5.1). С этой целью заметим, что

$$|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)| = |\mathbb{E}(\int_t^a (\mu(s, X_s^{(n)}) - \mu(s, X_s))ds|\mathcal{F}_t)| \leqslant$$
$$\leqslant c\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|ds|\mathcal{F}_t) = ca^{1/q}\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t).$$

Эти неравенства являются следствиями условия (5.11) и неравенства Гельдера. С помощью знакомых рассуждений можно убедиться, что

$$\mathbb{E}(|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant$$
$$(ca^{1/q})^p \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t)\Big|^p \leqslant (ca^{1/q})^p \int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p ds.$$

Отсюда и из (5.18) следует, что

$$\mathbb{E}(|X_t - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \lim_{n\to\infty} \int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p ds = 0$$

и, следовательно, $X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)$ п.в. Вспомним (см. предисловие к данному разделу), что условное математическое должно быть записано в следующем виде

$$\mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t) = M_t - \int_0^t \mu(s, X_s)ds,$$

где случайный процесс $M = \{M_t, t \in [0,a]\}$ является регулярной справа версией мартингала $\{\mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t, t \in [0,a]\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Для любого $t \in [0,a]$ выполняется равенство $X_t =$

$M_t - \int_0^t \mu(s, X_s)ds$ п.в. С обоих сторон этого равенства стоят регулярные справа случайные процессы и, следовательно, равенство выполняется для всех $t \in [0,a]$ на некотором событии $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Докажем, что любые два решения уравнения (5.1) со свойством (5.12) неотличимы. Пусть имеются два решения $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и $X' = \{X'_t, t \in [0,a]\}$ уравнения (5.1) со свойством (5.12). С помощью условия (5.11), неравенства Гельдера и теоремы Фубини мы получим

$$\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p = \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X'_s)ds|\mathcal{F}_t)\Big|^p =$$
$$= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_t^a (\mu(s, X_s) - \mu(s, X'_s))ds|\mathcal{F}_t)\Big|^p \leqslant \mathbb{E}\Big|\int_t^a (\mu(s, X_s) - \mu(s, X'_s))ds\Big|^p \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}\int_t^a |X_s - X'_s|^p ds = (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s - X'_s|^p ds.$$

Далее можно рассуждать как при доказательстве неравенства (5.16) и убедиться, что

$$\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p \leqslant \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a} |X_s - X'_s|^p)\frac{(ca^{1/q})^{np}}{n!}.$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим равенство $\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p = 0$ и, следовательно, $X_t = X'_t$ п.в. Так как случайные процессы X и X' регулярны справа, то они неотличимы. Теорема доказана.

Предположение о том, что $p > 1$ существенно для справедливости теоремы 5.3. Именно это предположение дает возможность использовать максимальное неравенство для мартингалов, которое играет ключевую роль в доказательстве. Случай $p = 1$ был изучен в статье [1]. Процитируем основной результат этой статьи.

Теорема 5.4. *Если выполнены условия теоремы 5.3 с* $p = 1$, *тогда существует единственный с точностью до неразличимости регулярный справа случайный процесс* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *такой, что*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^a |X_t - \mathbb{E}(X_a + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)|dt\Big) = 0.$$

Предположение о том, что $p > 1$, при доказательстве единственности решения в теореме 5.3 не использовалось. Поэтому оно годится для доказательства единственности решения в рассматриваемом случае случае $p = 1$.

В следующих двух теоремах указаны точные решения линейного обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5.5. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и непрерывные справа случайные процессы $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ и $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ такие, что*

$$\mathbb{E}\xi^p < \infty, \mathbb{E}\exp\left\{q\int_0^a |\eta_t|dt\right\} < \infty, \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t|^p ds < \infty \tag{5.19}$$

для некоторого $p > 1$, где $q = p/(p-1)$. Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{5.20}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds, \tag{5.21}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ являются регулярными справа версиями $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. Случайный процесс X удовлетворяет следующему условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\mathbb{E}|X_t|) \leqslant (\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big(\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} + a^{1/q}(\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big). \tag{5.22}$$

Доказательство. Сначала мы докажем утверждение (5.22). Для любого $t \in [0,a]$ равенство (5.21) можно переписать в следующем виде

$$X_t = \mathbb{E}(\xi e^{u_a-u_t} + \int_0^a \zeta_s e^{u_s-u_t} ds - \int_0^t \zeta_s e^{u_s-u_t} | \mathcal{F}_t) =$$
$$= \mathbb{E}(\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t} ds | \mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

С помощью неравенства Иенсена для условных математических ожиданий и неравенства Гельдера мы получим

$$\mathbb{E}|X_t| \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(|\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t} ds||\mathcal{F}_t)) \leqslant \mathbb{E}|\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t} ds| \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}(|\xi|^p)^{1/p} (\mathbb{E} e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + \mathbb{E}\Big((\int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p} (\int_t^a e^{q(u_s-u_t)} ds)^{1/q} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}(|\xi|^p)^{1/p} (\mathbb{E} e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + (\mathbb{E} \int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p} (\mathbb{E} \int_t^a e^{q(u_s-u_t)} ds)^{1/q}.$$

Величины $u_a - u_t$ и $u_s - u_t$ можно оценить следующим образом

$$|u_a - u_t| = |\int_a^t \eta_s ds| \leqslant \int_0^a |\eta_s| ds, |u_s - u_t = |\int_t^s \eta_v dv| \leqslant \int_0^a |\eta_v| dv.$$

В результате мы получим, что

$$\mathbb{E}|X_t| \leqslant \mathbb{E}(|\xi|^p)^{1/p} (\mathbb{E} e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + (\mathbb{E} \int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p} (\mathbb{E} \int_t^a e^{q(u_s-u_t)} ds)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E} \exp\{q \int_0^a |\eta_s| ds\})^{1/q} \Big(\mathbb{E}(|\xi|^p)^{1/p} + a^{1/q} (\mathbb{E} \exp\{q \int_0^a |\eta_s| ds\})^{1/q} \Big).$$

Отсюда следует утверждение (5.22).

Фиксируем элементарное событие $\omega \in \Omega$. Найдем решение $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ следующего интегрального уравнения

$$Y_t = \xi(\omega) + \int_t^a (\eta_s(\omega) Y_s + \zeta_s(\omega)) ds, \tag{5.23}$$

удовлетворяющего краевому условию $Y_a = \xi(\omega)$. Далее мы будем опускать аргумент ω. С помощью дифференцирования можно убедиться, что искомая функция Y должна удовлетворять следующему линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY_t}{dt} + \eta_t Y_t = -\zeta_t, t \in [0,a],$$

В курсах по дифференциальным уравнениям (см., например, [50], стр. 99-100) можно найти правило решения линейного дифференциального уравнения с помощью подходящего интегрирующего множителя. В данном случае в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $u_t = \int_0^t \eta_v dv, t \in [0, a]$. Решение указанного дифференциального уравнения можно записать в следующем виде

$$Y_t = e^{-u_t}(c - \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds), \tag{5.24}$$

где c - произвольная постоянная. Постоянную c можно конкретизировать с помощью краевого условия $Y_a = \xi$,

$$\xi = e^{-u_a}(c - \int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds).$$

Вычислив c и подставив ее в решение (5.24), мы получим

$$Y_t = e^{-u_t}(c - \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds) = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t} \int_t^a \zeta_s e^{u_s} ds. \tag{5.25}$$

Эти равенства справедливы для любого $\omega \in \Omega$. Тем самым мы построили случайные процессы $\{u_t, t \in [0, a]\}$ и $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}$. Перепишем представление Y_t в следующем виде

$$Y_t = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t} \int_t^a \zeta_s e^{u_s} ds = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t}(D - \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds), \tag{5.26}$$

где $D = \int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds$. Для любого $t \in [0, a]$ случайные величины $\int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds$ и e^{-u_t} измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Отсюда и из (5.25) следует, что

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_t) = e^{-u_t}\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t) + e^{-u_t}\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_t) - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds. \tag{5.27}$$

Обозначим $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0, a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0, a]\}$ регулярные справа версии $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ и $\{\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$.

Докажем, что случайный процесс

$$X = \{X_t, t \in [0, a]\}, X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \qquad (5.28)$$

является решением уравнения (5.20). Из (5.25) и (5.26) следует, что $X_a = \mathbb{E}(Y_a|\mathcal{F}_a) = Y_a = \xi$ п.в. Случайный процесс X согласован с фильтрацией и обладает свойством регулярности справа. Фиксируем $t \in [0, a]$. Подставим случайный процесс (5.28) в выражение справа в (5.20) и воспользуемся теоремой 5.2. По теореме 5.2 найдется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}_t$-измеримый случайный процесс $Z = \{Z_s, s \in [0, a]\}$, который является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(\eta_s + \zeta_s|\mathcal{F}_t), s \in [0, a]\}$, и удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) + \int_t^a Z_s ds, \qquad (5.29)$$

Случайную величину Z_s можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}
Z_s &= \mathbb{E}(\eta_s X_s + \zeta_s)|\mathcal{F}_t) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\eta_s (e^{-u_s} M_s^{(1)} + e^{-u_s} M_s^{(2)} - e^{-u_s} \int_0^s \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\eta_s (\xi e^{-u_s} e^{u_a} + e^{-u_s} \int_0^a \zeta_v e^{u_v} dv - e^{-u_s} \int_0^s \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_t\Big).
\end{aligned}$$

Подставим преобразованное выражение в (5.29) и воспользуемся теоремой 5.2 . Мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t) = \\
&= \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) + \int_t^a \mathbb{E}\Big(\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_t\Big) ds = \\
&= \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}\Big(\int_t^a (\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a (\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_t) = X_t.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что случайный процесс (5.26) удовлетворяет интегральному уравнению (5.23). Теорема доказана.

Далее нам понадобится один специальный вариант предыдущей теоремы, в которой случайный процесс η ограничен, а случайный процесс ζ удовлетворяет условию с $p = 1$.

Теорема 5.6. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и непрерывные справа случайные процессы $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ и $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi| < \infty, \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |\eta_t| \leqslant c - \text{ постоянная, } \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t| ds < \infty. \qquad (5.30)$$

Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t), X_a = \xi, \qquad (5.31)$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \qquad (5.32)$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ являются регулярными справа версиями $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a} | \mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds | \mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. Случайный процесс X удовлетворяет следующему условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} \mathbb{E}|X_t| \leqslant e^{2c}\Big(\mathbb{E}|\xi| + \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s| ds\Big). \qquad (5.33)$$

Доказательство. Доказательство существования решения уравнения (5.31) можно осуществить по аналогии с доказательством теоремы 5.5. Докажем утверждения (5.33). С помощью неравенства Иенсена для условных математических ожиданий решение (5.32) можно оценить следующим образом

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t| &= \mathbb{E}\Big|e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds\Big| = \\
&= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(e^{-u_t}\xi e^{u_a} + e^{-u_t}\int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds|\mathcal{F}_t)\Big| = \\
&= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds|\mathcal{F}_t)\Big| \leqslant \\
&\leqslant \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(|\xi e^{u_a-u_t}| + |\int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds||\mathcal{F}_t)\Big| = \\
&= \mathbb{E}|\xi e^{u_a-u_t}| + \mathbb{E}|\int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds| \leqslant e^{ac}\mathbb{E}|\xi| + e^{ac}\mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s|ds.
\end{aligned}
$$

На последнем этапе мы воспользовались следующими неравенствами

$$
e^{u_s-u_t} = \exp\Big\{\int_t^s \eta_v dv\Big\} \leqslant \exp\Big\{\int_0^a |\eta_v|dv\Big\} \leqslant e^{ac}
$$

и аналогичным неравенством $e^{u_a-u_t} \leqslant e^{ac}$. Отсюда следует утверждение (5.33). Теорема доказана.

6 Один класс обратных стохастических дифференциальных уравнений

В этом разделе мы исследуем последовательность связанных межу собой обратных стохастических дифференциальных уравнений. Каждое уравнение в качестве своего элемента содержит заданный супермартингал. Будет доказано, что решения упомянутых уравнений образуют возрастающую последовательность случайных процессов, которая сходится почти всюду и в среднем к данному супермартингалу. Это позволяет построить разложение непрерывного супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что любой субмартингал из класса DL допускает разложение в виде суммы мартингала и возрастающего предсказуемого процесса.

В предыдущих разделах уже обсуждались разложения субмартингалов в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. Весьма трудная теорема Долеан-Дэд утверждает, что классы возрастающих натуральных и предсказуемых случайных процессов совпадают. В качестве побочного результата доказанной ниже теоремы о разложении супермартингала мы получаем часть утверждения теоремы Долеан-Дэд, что возрастающий предсказуемый процесс является натуральным процессом.

Теорема 6.1. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$Y_t = \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s)^+ ds|\mathcal{F}_t), Y_a^{(n)} = X_a. \tag{6.1}$$

Последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. и в среднем к *супермартингалу* X.

Доказательство. Функция $\mu(\omega, t, x) = n(X_t(\omega) - x)^+$ переменных $\omega \in \Omega, t \in [0, a], x \in \mathbb{R}$ измерима. Другими словами, каково бы ни было борелевское множество $A \subseteq \mathbb{R}$, его прообраз $\{(\omega, t, x) : \Omega \times [0, a] \times \mathbb{R} : \mu(\omega, t, x) \in A\}$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}$ сигма-алгебры $\mathcal{F}$, борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}_a$ на сегменте $[0, a]$ и борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. По переменной $x \in \mathbb{R}$ функция μ удовлетворяет условию Липшица

$$|\mu(\omega, t, x) - \mu(\omega, t, y)| = n\Big|(X_t(\omega) - x)^+ - (X_t(\omega) - y)^+\Big| \leqslant n|x - y|, x, y \in \mathbb{R}.$$

По теореме 5.4 существует решение $Y^{(n)}$ уравнения (6.1). Сравним решения $Y^{(n)}$ и $Y^{(n+1)}$ уравнений (6.1) для n и $n+1$. С этой целью определим случайные процессы $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0, a]\}$ и $\eta = \{\eta_t, t \in [0, a]\}$, положив $\zeta_t = (X_t - Y_t^{(n)})^+$ и

$$\eta_t = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(X_t - Y_t^{(n+1)})^+ - (n+1)(X_t - Y_t^{(n)})^+}{Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}}, & \text{если } Y_t^{(n+1)} \neq Y_t^{(n)}, \\ 0, & \text{если } Y_t^{(n+1)} = Y_t^{(n)}. \end{cases}$$

Заметим, что случайные процессы ζ и η обладают свойством регулярности справа, случайный процесс η ограничен числом $n+1$ и $\zeta_t \geqslant 0$ для всех $t \in [0, a]$. Так как случайные процессы $Y^{(n)}$ и $Y^{(n+1)}$ являются решениями уравнений (6.1) для n и $n+1$, то

$$\begin{aligned} &Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} = \\ &= \mathbb{E}\Big(\int_t^a (n+1)((X_s - Y_s^{(n+1)})^+ - (X_s - Y_s^{(n)})^+) + (X_s - Y_s^{(n)})^+)ds|\mathcal{F}_t\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(\int_t^a (\eta_s(Y_s^{(n+1)} - Y_s^{(n)}) + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t\Big). \end{aligned}$$

Мы видим, что разность $Y^{(n+1)} - Y^{(n)}$ является решением линейного обратного стохастического дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 5.6 с $\xi = 0$. Решение можно записать, как указано в теореме 5.6,

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} = e^{-u_t} M_t - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \tag{6.2}$$

где $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$ являются регулярной справа версией $\mathbb{F}$-мартингала

$$\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds | \mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}, \text{ где } u_t = \int_0^t \eta_s ds.$$

Величина справа в (6.2) неотрицательна. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать равенство (6.2) в следующем виде

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} = e^{-u_t} M_t - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds = \mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s - u_t} ds | \mathcal{F}_t) \geqslant 0. \tag{6.3}$$

Отсюда следует, что для любого $t \in [0, a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ возрастает.

Уравнения, подобные уравнению (6.1), исследовались в статье [9], в которой доказано неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, a]$. Возрастающая последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ случайных процессов сходится к некоторому случайному процессу $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}, Y_t \leqslant X_t$ п.в. Докажем равенство $Y_t = X_t$ п.в. Так как $Y_s^{(n)} \leqslant X_s$ п.в., то

$$Y_t^{(n)} = \mathbb{E}(\xi + n \int_t^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi + n \int_t^a |X_s - Y_s^{(n)}| ds | \mathcal{F}_t),$$

$$\mathbb{E} Y_t^{(n)} = \mathbb{E}\xi + n \int_t^a \mathbb{E}|X_s - Y_s^{(n)}| ds.$$

Отсюда и из теоремы о монотонной сходимости следует, что

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} Y_0^{(n)} = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n} \mathbb{E}\xi + \int_0^a \mathbb{E}|X_s - Y_s^{(n)}| ds) = \int_0^a \mathbb{E}|X_s - Y_s| ds.$$

Для почти всех $s \in [0, a]$ по мере Лебега выполняется равенство $\mathbb{E}|X_s - Y_s| = 0$. Отсюда следует, что для почти всех $s \in [0, a]$ по мере Лебега выполняется равенство $Y_s = X_s$ п.в. по вероятности $\mathbb{P}$. Отсюда следует, что случайные процессы Y и X неотличимы. Теорема доказана.

Напомним, что регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ принадлежит классу $\mathcal{D}_a$, если семейство случайных величин X_τ, когда τ пробегает множество всех $\mathbb{F}$-марковских моментов, ограниченных числом a, равномерно интегрируемо.

Теорема 6.2. *Пусть дан любой регулярный справа $\mathbb{F}$-супермартингал $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ из класса $\mathcal{D}_a$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения и последовательность $\{n\int_0^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема.*

Доказательство. Существование решений $Y^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, было доказано выше. Было также доказано, что последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится к X. Для дальнейшего важно, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,a]$ выполняется неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в. Обозначим $A_t^{(n)} = \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds$ для любого $t \in [0,a]$ и докажем, что последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема, другими словами, что выполнено условие

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{\{n\geqslant 1\}} \int_{\{A_a^{(n)} > \lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = 0. \tag{6.4}$$

Разобъем сегмент $[0,a]$ точками $t_{n,k} = k2^{-n}a, k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Нетрудно проверить, что для любого $\lambda > 0$ функция $\tau_\lambda^{(n)} : \Omega \to [0,a]$,

$$\tau_\lambda^{(n)} = \begin{cases} \inf t_{n,k} \in \{t_{n,0}, \ldots, t_{n,2^n-1} : A_{t_{n,k+1}}^{(n)} > \lambda\}, \text{ если } A_a^{(n)} > \lambda, \\ \hfill a, \text{ если } A_a^{(n)} \leqslant \lambda, \end{cases}$$

является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Докажем, что выполняется равенство

$$\mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) = Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} - \mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) \text{ п.в.}, \tag{6.5}$$

где $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ обозначает сигма-алгебру, ассоциированную с марковским моментом $\tau_\lambda^{(n)}$. Для любого $F \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ справедливы следующие равенства

$$\int_F \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}})d\mathbb{P} = \int_F (X_a + A_a^{(n)})d\mathbb{P} =$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} (X_a + A_a^{(n)})d\mathbb{P} =$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{n,k}})d\mathbb{P}.$$

Последнее равенство выполняется по определению условного математического ожидания, так как $F \cap \{\tau_\lambda^{(n)} = t_{n,k}\} \in \mathcal{F}_{t_n,k}$. Так как случайный процесс $Y^{(n)}$ является решением уравнения (6.1), то

$$Y_{t_{n,k}}^{(n)} = \mathbb{E}(X_a + \int_{t_{n,k}}^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_{t_{n,k}}) =$$
$$= \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds - \int_0^{t_{n,k}} n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_{t_{n,k}}) =$$
$$= \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} - A_t^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{n,k}}) = \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{n,k}}) - A_{t_{n,k}}^{(n)} \text{ п.в.}$$

После подстановки мы получим

$$\int_F \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}})d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{n,k}})d\mathbb{P} =$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} (Y_{t_{n,k}}^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)})d\mathbb{P} =$$
$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} (Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)})d\mathbb{P} = \int_F (Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)})\mathbb{P}.$$

Функции $\mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}})$ и $Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}$ измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$. По известной теореме ([33], стр. 29) выполняется равенство $\mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) = Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}$ п.в., которое совпадает с требуемым равенством (6.5).

По известной теореме ([33], стр. 82) функция $\tau_\lambda^{(n)}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ и, следовательно, $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$. Из определения

$\tau_\lambda^{(n)}$ следует, что $A^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} \leqslant \lambda$ и $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = \{A_a^{(n)} > \lambda\}$. С учетом этих замечаний и равенства (6.5) мы получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} \mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) d\mathbb{P} = \\
&= \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} A^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) d\mathbb{P} = \\
&= \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} A^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P} \leqslant \\
&\leqslant \lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Оценим величину $\lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$. Определим $\mathbb{F}$-марковский момент $\tau_{\lambda/2}^{(n)}$ по аналогии с $\tau_\lambda^{(n)}$. Равенство (6.5) останется справедливым после замены $\tau_\lambda^{(n)}$ на $\tau_{\lambda/2}^{(n)}$. Заметим, что $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} \subseteq \{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\}$. На множестве $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$ выполняются неравенства $A^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}} \leqslant \lambda/2$ и $A_a^{(n)} > \lambda$. С учетом этих замечаний мы получим

$$\begin{aligned}
\lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} &\leqslant 2\int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} (A_a^{(n)} - A^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}) d\mathbb{P} \leqslant 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} (A_a^{(n)} - A^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}) d\mathbb{P} = \\
&= 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} \mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}) d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} A^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}} d\mathbb{P} = \\
&= 2\int_{\{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}} d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}) d\mathbb{P} = \\
&= 2\int_{\{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}} d\mathbb{P} - 2\int_{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

В результате мы придем к следующим неравенствам

$$\begin{aligned}
&\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)} \mathbb{P} \leqslant \lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P} \leqslant \\
&\leqslant \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_\lambda^{(n)}} \mathbb{P} + 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} Y^{(n)}_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}) d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

По теореме 6.1 последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. к X. Поэтому для любого $t \in [0, a]$ выполняется неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в.

Отсюда следуют следующие неравенства $Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} \leqslant X_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}, Y_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)} \leqslant X_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)}$ п.в. и

$$\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)}\mathbb{P} \leqslant \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_{\tau_\lambda^{(n)}}\mathbb{P} + 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} X_{\tau_{\lambda/2}^{(n)}})d\mathbb{P} - \\ - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}} X_a d\mathbb{P}.$$

Условие (6.4) выполняется, если каждый из четырех интегралов справа сходится к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно доказать, что вероятности событий $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$ и $\{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\}$ стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$, так как случайный процесс X принадлежит классу $\mathcal{D}_a$. Случайный процесс $Y^{(n)}$ является решением уравнения (6.1). Поэтому справедливы следующие равенства

$$Y_0^{(n)} = \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0) = \\ = \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0),$$

$$\mathbb{E}Y_0^{(n)} = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}\mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}X_a + \mathbb{E}A_a^{(n)}.$$

С помощью неравенства $Y_0^{(n)} \leqslant X_0$ и неравенства Маркова мы получим

$$\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = \mathbb{P}\{A_a^{(n)} > \lambda\} \leqslant \frac{\mathbb{E}A_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}Y_0^{(n)} - \mathbb{E}X_a}{\lambda} \leqslant \frac{\mathbb{E}X_0 - \mathbb{E}X_a}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = 0$. Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\} = 0$. Утверждение (6.4) доказано. Теорема доказана.

Теперь мы располагаем необходимым аппаратом для доказательства теоремы Дуба-Мейера о разложении супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса.

Теорема 6.3. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ из класса $DL = \cap_{a>0}\mathcal{D}_a$ существуют регулярный справа $\mathbb{F}$-мартингал и предсказуемый возрастающий процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$*

такие, что

$$X = M - A \text{ п.в.} \tag{6.6}$$

Если имеется другое такое разложение $X = M' - A'$ п.в., то случайные процессы M и M', а также A и A' неразличимы.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $a > 0$ существует событие $\Omega' = \Omega'(a) \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором выполняется равенство

$$X_t = M_t - A_t \text{ для всех } t \in [0, a]. \tag{6.7}$$

Выше было доказано, что уравнение (6.1) имеет единственное решение $Y^{(n)}$ и для каждого $t \in [0, a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ сходится п.в. и в среднем к X_t. По теореме 6.2 последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{\geqslant 1}$, где $A_t^{(n)} = \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds, t \in [0, a]$, равномерно интегрируема. Поэтому, в силу теоремы Комлоша [27] (лемма 1.1) существуют строго возрастающая последовательность $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$ натуральных чисел и случайная величина A_a такие, что $\mathbb{E} A_a < \infty$ и последовательность $\{\sum_{l=1}^m A_a^{(n_{j_l})}/m\}$ сходится п.в. к A_a для любой подпоследовательности $\{n_{j_l}\}_{l \geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$. Чтобы не усложнять обозначений мы будем считать, что теорема Комлоша применима к последовательности $\{\sum_{k=1}^n A_a^{(k)}/n\}$. Так как последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ равномерно интегрируема, то наряду со сходимостью

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_a^{(k)} = A_a \text{ п.в.} \tag{6.8}$$

имеет место сходимость в среднем

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{E} \Big| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_a^{(k)} - A_a \Big| = 0. \tag{6.9}$$

Из (6.8) и (6.9) в силу известной теореме ([33], стр. 117) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_a + A|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{6.10}$$

Обозначим $M = \{M_t, t \in [0,a]\}$ регулярную справа версию $\mathbb{F}$-мартингала $\{\mathbb{E}(X_a + A_a|\mathcal{F}_t, t \in [0,a]\}$ и $A_t = X_t - M_t$. Случайный процесс A, будучи разностью двух регулярных справа, $\mathbb{F}$-согласованных случайных процессов, обладает свойством регулярности справа, и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Требуемое разложение (6.7) будет доказано, если существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что случайный процесс $\mathbb{1}_{\Omega'}A = \{\mathbb{1}_{\Omega'}A_t, t \in [0,a]\}$ является возрастающим предсказуемым процессом.

Запишем решение решение $Y^{(n)}$ уравнения (6.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} Y_t^{(n)} &= \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_t) - \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds = \\ &= \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_t) - A_t^{(n)} \text{ п.в.} \end{aligned}$$

Выше отмечалось, что последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. и в среднем к X_t. Отсюда и из (6.8), (6.9), (6.10) следует, что

$$X_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_t^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \Big(\mathbb{E}(X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)}\Big) \text{ п.в.},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)} - X_t\Big| = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что для любого $t \in [0,a]$ справедливо следующее утверждение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)} = A_t \text{ п.в.}$$

Множество $\Omega_t = \{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)} = A_t\}$ является событием единичной вероятности. Обозначим Q_a объединение всех рациональных точек сегмента $[0,a]$ и одноточечного множества $\{a\}$. Множество $\Omega' = \cap_{t\in Q_a}\Omega_t$ является событием единичной вероятности. Для любых $t \in Q_a$ и $\omega \in \Omega'$ мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)}(\omega) = A_t(\omega). \tag{6.11}$$

Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $A^{(n)}$ непрерывен и возрастает. Пусть $\omega \in \Omega'$ и $t \in (0,a) \setminus Q_a$ является точкой непрерывности траектории $A_t(\omega), t \in [0,a]$. Для любых $t', t'' \in Q_a, t' < t < t''$, справедливы следующие соотношения

$$A_{t'}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_{t'}^{(k)}(\omega) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_{t''}^{(k)}(\omega) = A_{t''}(\omega).$$

Так как $\lim\limits_{t'\uparrow t} A_{t'}(\omega) = A_t(\omega) = \lim\limits_{t''\downarrow t} A_{t''}(\omega)$, то утверждение (6.11) выполняется для всех $\omega \in \Omega'$ и $t \in Q_a$ и для любой точки непрерывности $t \in (0,a)$ траектории $A_t(\omega), t \in [0,a]$.

Мы докажем утверждение (6.11) для всех $t \in [0,a]$ и для всех $\omega \in \Omega'$. Сначала мы убедимся, что каждая точка $s > 0$ разрыва любой траектории $A_t(\omega), t \in [0,a]$, является значением некоторого из марковских моментов следующего вида

$$\tau_{\alpha,\beta} = \inf\{t \geqslant \beta : |A_t - A_\beta| \geqslant \alpha\} \wedge a, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_0 = Q_a \setminus \{0\}. \tag{6.12}$$

Здесь использовано обозначение $a \wedge b$ для $\min\{a,b\}$ для любых вещественных чисел a и b. Найдется рациональное число $\alpha > 0$ такое, что $|A_s(\omega) - A_{s-}(\omega)| \geqslant 2\alpha$. Возьмем какую-нибудь строго возрастающую последовательность $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ чисел из $\mathbb{Q}_0$, которая сходится к s. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} A_{\beta_n}(\omega) = A_{s-}(\omega)$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| < \alpha/2$ для всех $\beta_{n_0} \leqslant s' < s$ и $|A_s(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что

$$|A_{s'}(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| \leqslant |A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| + |A_{s-}(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| < \alpha$$

и, следовательно, s является значением $s = \tau_{\alpha,\beta}(\omega)$ марковского момента (6.12) с α и $\beta = \beta_{n_0}$.

Докажем, что для любого марковского момента $\tau_{\alpha,\beta}$ существуют $\mathbb{F}$-марковские моменты $\sigma_m, m \in \mathbb{N}$ со значениями в Q_0 такие, что каждый марковский момент σ_m принимает конечное число значений, последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geqslant 1}$ убывает и сходится к $\tau_{\alpha,\beta}$. Разобьем сегмент $[0, a]$ точками $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \cdots < t_{m,m} = a$ таким образом, чтобы $t_{m,0}, \ldots, t_{m,m} \in Q_0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (t_{m,k} - t_{m,k-1}) = 0$. Определим функцию $v_m : [0, a] \to Q_0$, положив $v_{m,0}(0) = 0$ и $v_m(t) = t_{m,k}$ для $t \in (t_{m,k-1}, t_{m,k}], k = 1, \ldots, m$. Функция v_m возрастает и удовлетворяет неравенству $v_m(t) \geqslant t$ для всех $t \in [0, a]$. Кроме того, выполнены следующие соотношения $v_{m+1}(t) \leqslant v_m(t)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} v_m(t) = t$ для любого $t \in [0, a]$. Суперпозиция $v_m(\tau_{\alpha,\beta})$ функции v_m и марковского момента $\tau_{\alpha,\beta}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_{\alpha,\beta}}$, ассоциированной с марковским моментом $\tau_{\alpha,\beta}$, и удовлетворяет неравенству $\tau_{\alpha,\beta} \leqslant v_m(\tau_{\alpha,\beta})$. По известной теореме ([33], стр. 83) функция $\sigma_m = v_m(\tau_{\alpha,\beta}) : \Omega \to Q_0$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Функция σ_m принимает конечное число значений из Q_0. Из свойств функций $v_m, m \in \mathbb{N}$, следует, что $\sigma_m \downarrow \tau_{\alpha,\beta}$ при $m \uparrow \infty$.

Все траектории случайного процесса A непрерывны справа. Пусть $\omega \in \Omega'$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_m(\omega)}(\omega)| < \varepsilon$. Утверждение (6.11) справедливо при замене t на $\sigma_m(\omega)$ и, следовательно,

$$A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) - \varepsilon < A_{\sigma_m(\omega)}(\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_{\sigma_m(\omega)}(\omega) = A_{\sigma_m(\omega)}(\omega) < A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) + \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_{\sigma_m(\omega)}(\omega) = A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega).$$

Это означет, что утверждение (6.11) выполняется для всех $\omega \in \Omega'$ и для всех $t \in [0, a]$. Утверждение (6.11) можно переписать в следующем виде

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_t\Big) \mathbb{1}_{\Omega'} = A_t \mathbb{1}_{\Omega'}.$$

Случайный процесс $\{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_t, t \in [0, a]\}$, будучи непрерывным и $\mathbb{F}$-согласованным, является предсказуемым. Случайный процесс $A_t \mathbb{1}_{\Omega'}$ предсказуем, так как он является поточечным пределом последовательности предсказуемых процессов. Случайный процесс A неотличим от случайного процесса $A\mathbb{1}_{\Omega'}$ и, следовательно, предсказуем. Лемма доказана.

Заключение

В диссертации исследованы свойства субмартингалов (супермартингалов) путем представления их в виде функций от монотонных процессов, а также с помощью обратных стохастических дифференциальных уравнений. Все основные результыты диссертации являются новыми и строго доказанными.

На защиту выносятся следующие результаты:

1) Доказательство о представлении (теорема 3.2) субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса.

2) Доказательство существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p-интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов (теорема 5.3)

3) Доказательство теоремы о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса (теорема 5.2).

4) Доказательства теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса (теоремы 2.1, 4.4, 6.3).

Рекомендации. Результаты работы полезны всем, кто занимается стохастическим анализом.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Результаты имеют перспективу быть расширенными на более широкий класс случайных процессов, например, на класс квазимартингалов.

Литература

1. Antonelli F. Backward-forward stochastic differential equations.// – Ann. Appl. Probab. - 1993. - Vol. 3. - P. 777-793.
2. Barles G., Buckdahn R., and Pardoux E. Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations// – Stochastics and stochastics reports. - 1997. - Vol. 60. - P. 57-83.
3. Bass R.J. The Doob-Meyer decomposition revisited// – Canad. Math. Bull. - 1996. - Vol. 39. - P. 138-150.
4. Beiglbock M., Schachermayer W., Veliyev B. A short proof of the Doob-Meyer theorem// – Stochastic processes and their appl. - 2012. - Vol. 122, no. 4. - P. 1204-1209.
5. Бородин А., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. - Санкт-Петербург: Лань, 2000. - 639 с.
6. Briand P. and Hu Y. BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value// – Probab. theory and related fields. - 2006. - Vol. 136, no. 4. - P. 604-618.
7. Burgstaller B. A note on the Doob-Meyer decomposition of L^p-valued submartingales// – Bull. Austral. Math. Soc. - 2004. - Vol. 69. - P. 227-235.
8. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. - 319 с.
9. Chen Z. A new proof of Doob-Meyer decomposition theorem. – C.R. Acad. Sci. Paris. - 1999. - Vol. 328, no 10. - P. 919-924.
10. Chung K.L, Williams R.J. Introduction to stochastic integration. Second edition. Boston: Birkhäuser, 1990.

11. Dellacherie C. and Meyer P.A. Probabilities and Potential, Vol. 1-4. Hermann, Paris, 1975-87.

12. Doleans-Dade C. Processus croissants naturel et processus croissants trés bien mesurable// – C.R. Acad. Sci. Paris. - 1967. - Vol. 264. series A-B. - P. 874-876.

13. Duffie D., Epstein L. Assert pricing with stochastic differential utilitie// – The review of financial studies. - 1992. - Vol. 5. - P. 411- 436.

14. Duffie D. and Epstein L.G. Stochastic differential utility// – Econometrica. - 1992. - Vol. 60. - P. 353-394.

15. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Мир, 1956. - 605 с.

16. El Karoui N., Peng S.G., Quenez M.C. Backward stochastic differential equations in finance// – Mathematical finance. - 1997. - Vol. 7, no 1. - P. 1-71.

17. Ethier S.N., Kurtz G. Markov processes: characterization and convergence. Wiley, NewYork, 1986.

18. Di Nunno G. , Meyer-Brandis T., Oksendal B., Proske F. Optimal portfolio for an insider in a market driven by Levy processes// – Quantitative Finance. - 2006. - Vol. 6, no. 1. - P. 83-94.

19. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев. Наукова думка, 1982. - 612 с.

20. Hu Y., Peng S. Adapted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation// – Stoch. process. appl. - 1993. - Vol. 48. - P. 107-121.

21. Hu Y., Peng S. Solution of forward-backward stochastic differential equations// – Theory Related fields. - 1995. - Vol. 103. - P. 273-283.

22. Jakubowski A. Towards a general Doob-Meyer decomposition theorem// – Probab. and Mat. Statistics. - 2006. - Vol. 26. - P. 143-153.

23. Karatzas I, Shreve S.E. Brownian motion and stochastic calculus. Second ed. Springer. New York, 1997.
24. Кашаева С.Ю. Упрощенное доказательство теоремы Дуба-Мейера для неотрицательных субмартингалов// – Вестник Моск. Унив. Вычисл. Матем. и Кибернетика. - 2013. - № 3. - С. 49-60.
25. Kashayeva S.Yu., Kruglov V.M. On a representation of submartingales and its application// – Lobachevskii journal of mathem. - 2014. - Vol. 35, no 2. - P. 74-84.
26. Кашаева С.Ю. К теории обратных стохастических уравнений и их применении// – Вестник Тверского университета. - 2015. - Серия: Прикладная математика. - Т. 1. - С. 15-46.
27. Komlos J. A generalization of a problem of Steinhaus// – Acta Math. Acad. Sci. Hungar. - 1967. - Vol. 18. - P. 217-229.
28. Koopmans T. Stationary ordinary utility and impatience// – Econometrica. - 1960. - Vol. 28. - P. 287-309.
29. Krylov N.V. A representation of nonnegative submartingales and its applications // – Lecture Notes in Math. - 1990. - Vol. 1426. - P. 473-476.
30. Krylov N.V. Introduction to the theory of random processes. American math. society, 2002.
31. Круглов В.М. Комментарии к теоремам о сходимости субмартингалов// –Труды конференции, посвященной 10-летию РФФИ. М.: Физматлит, 2005. - С. 210-227.
32. Круглов В.М. О непрерывности естественной фильтрации процесса с независимыми приращениями// – Теор. вероятн. и ее применен. - 2009. - Vol. 54, no. 4. - С. 783-789.
33. Круглов В.М. Случайные процессы, Москва, издательский центр Академия, 2013. - 336 с.

34. Ma J., Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

35. Ma J., Yong J. Adapted solution of a degenerate backward SPDE, with applications// – Stochastic processes and their applications. - 1997. - Vol. 70, no. 1. - P. 59-84.

36. Medvegyev P. Stochastic integration theory. Oxford. Oxford University press, 2009.

37. Meyer P.-A. A decomposition theorem for supermartingales// – Illinois J. Math. - 1962. - Vol. 6, no. 2. - P. 193-205.

38. Meyer P.-A. Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem// – Illinois J. Math. - 1963. - Vol. 7, no. 1. - P. 1-17.

39. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике.// - Труды МИРАН. - 2002. - т. 237. - С. 265-278.

40. Насыров Ф.С. Обобщенная формула Ито и потраекторные итовские интегралы.// - Вестник УГАТУ. - 2005. - т. 6, в. 1. - С. 33-40.

41. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и стохастический анализ.// - Теория вероятност. и ее примен. - 2006. - т. 51, в. 3. - С. 496-517.

42. Oksendal B. Stochastic differential equations. Introduction with applications. 6-th edition. Springer, 2003.

43. Oksendal B. and Zhang T.. Backward stochastic differential equations with respect to general filtrations and applications to insider finance//- Communications on Stochastic Analysis. - 2012. - Vol. 6, no. 4. - P. 703-722.

44. Павлов И.В., Назарько О.В. Теорема о преобразовании свободного выбора для деформированных субмартингалов// – Теория вероятн. и ее применен. - 2014. - в. 59. - С. 585-594.

45. Pardoux E. Backward stochastic differential equations and applications//-Proc. ICM. - 1995. - P. 1502-1510.

46. Pardoux E. and Peng S.G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation// – Systems and control letters. - 1990. - Vol. 14. - P. 55-61.

47. Protter P.E. Stochastic integration and differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

48. Rao K.M. On decomposition theorems of Meyer// – Math. Scand. - 1969. - Vol. 24. - P. 66-78.

49. Сверчков М.Ю., Смирнов С.Н. Об одном представлении супермартингалов// – Вестник Московского Университета, сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. - 1989. - №3 - С. 46-50.

50. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. наук, 1958. - 468 с.

51. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I., М.:Наука, 1970. - 608 с.

52. Чжун К., Вильямс Р. Введение в стохастическое интегрирование. М: Мир, 1987. - 152 с.

53. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Москва: ФАЗИС, 1998. - 544 с.

54. Shreve S. Stochastic calculus for finance II. Springer finance, 2004.

55. Wiilliams D. Probability with martingales. Cambridge. Cambridge university press, 1994.

56. Yex J. Martingales and stochastic analysis. Wold Scientific, 1995.