

**Отзыв официального оппонента
на диссертацию Кашаевой Светланы Юрьевны «Представление
субмартингалов в виде функций монотонных случайных процессов»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.05- теория
вероятностей и математическая статистика**

В рассматриваемой диссертации решены несколько важных задач, объединенных одним методом исследования. Суть этого метода отражена в названии диссертации. Автор представляет исследуемый объект, чаще всего это субмартингал, в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса, а затем использует это представление для описания свойств исследуемого объекта.

Диссертация состоит из введения, шести разделов и списка используемой литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц. Во введении изложена история возникновения тематики, которой посвящена диссертация. Фактически данная тематика зародилась с публикации в 1989 году статьи М.Ю. Сверчкова и С.Н. Смирнова, в которой была реализована идея представления субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Такое представление они построили для ограниченных субмартингалов. Через год, в 1990 году, Н.В. Крылов распространил теорему Сверчкова-Смирнова на положительные субмартингалы из класса Дуба и использовал свою теорему для упрощенного доказательства важной и глубокой теоремы Мейера о представлении положительного субмартингала в виде равномерно интегрируемого мартингала и интегрируемого возрастающего натурального процесса. Представление субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего процесса известно под названием «разложения Дуба-Мейера». Разложение Дуба-Мейера лежит в основе построения современной теории стохастического интегрирования. Ее оригинальное доказательство весьма сложно. Поэтому не удивительно, что были предприняты многочисленные попытки найти более простые доказательства. В диссертации Кашаевой С.Ю. дано представление субмартингала из класса \mathcal{DL} в виде условного математического ожидания от возрастающего процесса. Это результат можно рассматривать как завершающий в рамках осуществления идеи Сверчкова-Смирнова. Вместе с тем, представляется, что метод доказательства позволяет распространить результат Кашаевой на более широкий класс случайных процессов, например, на квазимартингалы (что, впрочем, в диссертации не сделано). С помощью своей теоремы о представлении Кашаева С.Ю. дает новое упрощенное доказательство разложения Дуба-Мейера для субмартингалов из класса \mathcal{DL} . Доказательство, кроме использования представления, содержит еще некоторые простые средства. В частности, обращение к теореме Данфорда-Петиса

о слабой сходимости равномерно интегрируемой последовательности случайных величин заменяется обращением к теореме Комлоша о сходимости почти всюду и в среднем Чезаровских средних упомянутых случайных величин. Это позволяет обойтись при доказательстве разложения Дуба-Мейера более привычным аппаратом из теории абстрактного интеграла по мере.

Другой возможный подход к исследованию субмартингалов и супермартингалов состоит в том, чтобы представить их в виде предела последовательности более простых случайных процессов. Именно таким способом Рао дал свое ныне популярное доказательство разложения Дуба-Мейера. Доказательство Рао основано на глубокой теореме Данфорда-Петиса о слабой компактности равномерно интегрируемой последовательности случайных величин. В текущей научной литературе можно найти более простые доказательства этого этапа доказательства Рао. В диссертации Кашаевой С.Ю. показано, что субмартингал и супермартингал из класса \mathcal{DL} можно представить в виде предела монотонной последовательности решений обратных стохастических дифференциальных уравнений. Природа рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений такова, что они содержат в себе элементы будущего разложения Дуба-Мейера исследуемого субмартингала или супермартингала. Результат гласит, что субмартингал представим в виде суммы мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Это доказательство приводит к важному побочному результату, а именно к частичному доказательству трудной теоремы Долеан-Дэд о том, что класс возрастающих натуральных процессов и класс возрастающих предсказуемых процессов совпадают. В диссертации сделан важный вклад в саму теорию обратных стохастических дифференциальных уравнений. Доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе p -интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов, согласованных с наперед данной фильтрацией. Ранее известные результаты такого сорта были доказаны для квадратично интегрируемых случайных процессов, согласованных с броуновской фильтрацией. С привлечением теории обыкновенных дифференциальных уравнений найдены точные решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Упомянутые результаты составляют содержание отдельных разделов диссертации. В первом разделе дано упрощенное доказательство теоремы Крылова о представлении положительного субмартингала из класса Дуба в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Второй раздел посвящен упрощенному доказательству Крылова о разложении Дуба-Мейера субмартингала из класса Дуба. Привнесены новые приемы, значительно упрощающие доказательство. В третьем разделе доказано представление субмартингала из класса \mathcal{DL} в виде условного математического ожидания возрастающего процесса. В четвертом разделе дано упрощенное доказательство разложения Дуба-Мейера субмартингала из класса \mathcal{DL} , основанное на упомянутом представлении субмартингала в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. В пятом разделе содержится описание класса случайных процессов, в котором потенциально содержатся решения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Доказана теорема о перестановочности условного математического ожидания и интеграла от случайного процесса. Указаны достаточные условия существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения. Получены точные решения линейных обратных стохастических

дифференциальных уравнений. В шестом разделе исследована последовательность обратных стохастических дифференциальных уравнений, связанных с данным супермартингалом. Последовательность решений возрастает, сходится почти всюду и в среднем к упомянутому данному супермартингалу. Из свойств решений выводится представление Дуба-Мейера супермартингала в виде разности мартингала и предсказуемого возрастающего случайного процесса.

К числу недостатков диссертации можно отнести, например, то, что теорема об описании класса случайных процессов, в котором ищется решение обратного стохастического дифференциального уравнения, хорошо известна, однако соответствующая ссылка не приведена. Стоит отметить, что этот результат не относится к основным и не внесен в список утверждений, выносимых на защиту. Также в диссертации содержится ряд опечаток.

Сказавное выше позволяет заключить, что диссертация Кашаевой С.Ю. является законченным математическим исследованием теоретического характера на актуальную тему. Доказаны новые утверждения, которые в совокупности составляют вклад в теорию мартингалов и теорию обратных стохастических дифференциальных уравнений. Доказательства основных результатов объединены идеей монотонности. Все основные результаты диссертации опубликованы в журналах из перечня ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации будут востребованы при дальнейших исследованиях в области теории мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений.

Диссертационная работа Кашаевой С. Ю. «Представление субмартингалов в виде функций монотонных случайных процессов» соответствует специальности 01.01.05-Теория вероятностей и математическая статистика, удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к диссертационным работам на степень кандидата физико-математических наук. Считаю, что автор диссертации – Кашаева Светлана Юрьевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук, профессор

Павлов И.В.

Подпись г.ф.м.н., н.п.

Визит/юлва

заверяю



П.

015

Контактные данные опонента: 344113,
г. Ростов-на-Дону, ул. Королева, 15/1, кв. 103,
Павлов И.В., тел. моб. 8-928-9087827,
pavloviv2005@mail.ru