

**Отзыв официального оппонента
на диссертацию Кашаевой Светланы Юрьевны
«Представление субмартингалов в виде функций монотонных
случайных процессов», представленную на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.01.05 – теория вероятностей и
математическая статистика**

Случайные процессы, обладающие мартингальными свойствами, являются полезным инструментом при решении широкого круга прикладных задач в математической физике, в страховой и финансовой математике, в теории управления и многих других областях. Следует отметить тот факт, что для решения большинства таких задач требуется использовать стохастические дифференциальные уравнения, в частности, обратные стохастические дифференциальные уравнения. В теории последних уравнений к настоящему времени хорошо исследован только случай квадратично интегрируемых процессов, представимых в виде стохастических интегралов Ито. В общем случае при весьма слабых предположениях получены отдельные результаты, которые пока нельзя связать в единую теорию. В силу этого тема, выбранная для исследования в данной диссертации, является очень актуальной, имеющей большой теоретический и прикладной интерес.

Диссертация Кашаевой С.Ю. посвящена исследованию свойств субмартингалов с помощью представления их в виде условного математического ожидания возрастающих случайных процессов и с помощью обратных стохастических дифференциальных уравнений. В качестве применения упомянутого представления дано новое упрощенное доказательство разложения Дуба-Мейера субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. В диссертации также исследованы сами обратные стохастические дифференциальные уравнения, доказана общая теорема о существовании решений таких уравнений. С помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений указаны решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений. В диссертации продемонстрирован интересный подход к исследованию субмартингалов и супермартингалов с помощью специальных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Построена последовательность обратных стохастических дифференциальных уравнений, каждое из которых связано с данным супермартингалом. Показано, что решения этих уравнений возрастают и сходятся почти всюду и в среднем к упомянутому супермартингалу. Это, в свою очередь, привело к новому упрощенному доказательству разложения супермартингала в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Попутно дано простое доказательство части известной теоремы Долеан об эквивалентности классов возрастающих натуральных и предсказуемых случайных процессов, а именно, что предсказуемый возрастающий процесс является натуральным. Доказана теорема о перестановке операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса. Стоит отметить также некоторые подготовительные результаты, например, описание класса случайных процессов, среди

которых ищется решение обратного стохастического дифференциального уравнения. Кажется весьма удачным привлечение теоремы Комлоша о сходимости чезаровских средних некоторой подпоследовательности у любой последовательности случайных величин, ограниченной в среднем. Применение теоремы Комлоша позволяет упростить доказательство разложения Дуба-Мейера субмартингала в виде мартингала и возрастающего натурального процесса.

Естественно, что исследования, проведенные в диссертации, основаны на предшествующих исследованиях других ученых. Идея представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса принадлежит М.Ю. Сверчкову и С.Н. Смирнову, которые в своей статье за 1987 год доказали такое представление для ограниченных субмартингалов. Позднее Н.В. Крылов распространил теорему Сверчкова-Смирнова на положительные субмартингалы. С помощью своего представления он дал доказательство разложения Дуба-Мейера о представлении положительного субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. Общий случай, рассмотренный в диссертации, требует особого математического аппарата для своего доказательства. Добавим к этому, что М.Ю. Сверчков и С.Н. Смирнов указали некоторые возможные применения упомянутого представления субмартингала в теории случайных процессов.

Обратимся к изложению материала в диссертации. Диссертация разбита на шесть разделов. Еще один раздел составляет список используемой литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц.

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, изложена краткая история возникновения темы и указаны наиболее важные публикации, предшествующие исследованиям диссертации.

В первом разделе даётся упрощенное доказательство теоремы Крылова о представлении положительного субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Упрощение достигается за счёт привлечения теоремы Комлоша о сходимости чезаровских средних, построенных по ограниченным в среднем последовательностям случайных величин.

Во втором разделе приводится упрощенное доказательство разложения положительного субмартингала из класса Дуба в виде суммы равномерно интегрируемого мартингала и интегрируемого натурального случайного процесса. Доказательство следует идее Н.В. Крылова. Основное упрощение доказательства состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такая замена видов сходимостей позволяет доказать теорему Дуба-Мейера с помощью стандартных теорем о сходимости интегралов и известных свойств последовательностей равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин.

В третьем разделе дано доказательство представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Основное отличие от случая, исследованного в первом разделе, состоит в том, что представление строится для субмартингала с ограниченным параметрическим множеством.

Доказательство из первого раздела не годится и, следовательно, требует привлечения нового подхода. Важное отличие состоит в том, что предлагаемая конструкция применима к произвольным субмартингалам, а не только к ограниченным или положительным субмартингалам.

В четвертом разделе дано упрощенное доказательство разложения Дуба-Мейера субмартингала из класса DL в виде суммы мартингала и возрастающего натурального процесса. Доказательство основано на использовании представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Основное упрощение состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем последовательностей равномерно интегрируемых случайных величин. Заметим, что теперь мартингал не обладает свойством равномерной интегрируемости и натуральный процесс не является интегрируемым в отличие от случая положительного субмартингала, о котором шла речь во втором разделе.

В пятый раздел посвящён доказательствам нескольких теорем об обратных стохастических дифференциальных уравнениях. Первая теорема содержит описание класса случайных процессов, в котором потенциально содержатся решения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Вторая теорема указывает условия, при которых можно поменять порядок операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса. Третья теорема содержит достаточные условия существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения. Теорема доказана в терминах общей фильтрации и при предположении об интегрируемости случайных процессов в степени $p > 1$. Заметим, что подавляющее большинство известных аналогов сформулированной теоремы доказаны в предположении об интегрируемости случайных процессов в степени 2 в терминах интегралов Ито. Еще две теоремы содержат точные решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Их доказательство построено на теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В шестом разделе исследована последовательность специальных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Все уравнения связаны между собой. В каждое уравнение входит данный супермартингал. Решения этих уравнений образуют возрастающую последовательность случайных процессов. Эта последовательность сходится почти всюду и в среднем к упомянутому данному супермартингалу. Решение каждого уравнения можно записать в виде разности мартингала и непрерывного возрастающего случайного процесса. Это свойство решений позволяет построить разложение данного супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и предсказуемого возрастающего случайного процесса. Известная трудная теорема Долеан-Дэд утверждает, что классы возрастающих натуральных процессов и возрастающих предсказуемых процессов совпадают. В качестве побочного результата нашей теоремы получается часть теоремы Долеан-Дэд, а именно, каждый возрастающий предсказуемый случайный процесс является натуральным процессом.

В заключении даётся краткий обзор результатов, полученных в диссертационной работе.

В качестве замечаний хотелось бы отметить следующее:

- 1) обзор существующих результатов об обратных стохастических дифференциальных уравнениях кажется слишком кратким. В частности, не указана статья *Kailath T., Segal A., Zakai M. Fubini-type theorem for stochastic integrals. Sankhya – the Indian Journal of Statistics, 1978, vol. 40, p. 138-142*, в которой доказан частный случай теоремы о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса;
- 2) в разделе 1 при введении необходимых понятий их лучше было бы выделять в виде отдельных определений, а не выписывать сплошным текстом;
- 3) после логического завершения одной мысли, следующую мысль следует начинать с новой строки. Так, например, на стр. 19 вместо:

«Мы будем использовать приведенную терминологию и в том случае, когда вместо параметрического множества R_+ используется любой сегмент $[0, a]$. Например, говорить о \mathbb{F} -мартингале $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$. Важную роль в этом и других разделах диссертации играет следующая теорема Комлоша [27].»

следовало бы писать

«Мы будем использовать приведенную терминологию и в том случае, когда вместо параметрического множества R_+ используется любой сегмент $[0, a]$. Например, говорить о \mathbb{F} -мартингале $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$.

Важную роль в этом и других разделах диссертации играет следующая теорема Комлоша [27].»

- 4) в заключении следовало бы кратко охарактеризовать полученные результаты, а не выписывать вновь положения, выносимые на защиту;
- 5) в диссертации содержится ряд описок, например, на стр. 4, 33, 45, 48, 62, 81.

Указанные замечания не снижают ценности проделанной работы.

Диссертация Кашаевой С.Ю. является законченным математическим исследованием теоретического характера на актуальную тему. Она содержит новые глубокие утверждения, совокупность которых составляют важный вклад в теорию мартингалов и теорию обратных стохастических дифференциальных уравнений. Доказательства всех основных результатов объединены общей идеей монотонности. Все основные результаты диссертации опубликованы в журналах из перечня ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация Кашаевой С. Ю. «Представление субмартингалов в виде функций монотонных случайных процессов» соответствует специальности 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика, удовлетворяет требованиям, предъявляемым

ВАК к диссертациям на степень кандидата физико-математических наук. Считаю, что Кашаева Светлана Юрьевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Контактные данные оппонента:

1. Сидорова Оксана Игоревна;
2. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета;
3. Тверской государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, 170100 Россия, г. Тверь ул. Желябова, 33;
4. раб. тел. (4822)58-53-20 (добавочный 121), личн. тел. 8-915-715-80-13;
5. e-mail: oksana.i.sidorova@yandex.ru

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук

04.08.2015

Подпись к.ф.-м.н. О.И. Сидоровой заверяю
Начальник отдела аспирантуры ТвГУ

Подпись *Сидорова О.И.*
удостоверяю:
Начальник управления
аспирантуры и докторатуры
Ушенина Е.Н.

