

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Уфимского государственного авиационного технического университета, доктор технических наук, профессор

Криони Н.К.

5 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Кашаевой Светланы Юрьевны «Представление субмартигалов в виде функций монотонных случайных процессов», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

Актуальность темы диссертации

В рассматриваемой диссертации исследованы свойства субмартигалов, основанные на идее представить субмартигал в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса или представления субмартигала в виде предела монотонной последовательности случайных процессов простой структуры. Такой подход позволяет выявить основные свойства субмартигалов и связать свойства субмартигалов со свойствами родственных случайных процессов более простой природы, а также указать более простые доказательства известных трудных утверждений из общей теории случайных процессов. Идея представить субмартигал в виде условного математического ожидания возрастающего процесса принадлежит С.Н. Смирнову и М.Ю. Сверчкову. В 1987 году они построили такое представление для ограниченных субмартигалов и указали возможные применения такого представления. Н.В. Крылов распространил доказательство Сверчкова-Смирновна на положительные субмартигалы из класса Дуба. Следует сказать, что указанные представления можно построить с помощью теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартигалов в виде суммы мартигала и возрастающего случайного процесса. Однако такое доказательство нельзя признать рациональным, так как доказательство разложения Дуба-Мейера значительно сложнее доказательства упомянутого представления субмартигала.

Предпочтительней поступать прямо наоборот, как показал Н.В. Крылов. В диссертации построено представление субмартингала из класса DL в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Затем оно привлекается для упрощенного доказательства теоремы Дуба-Мейера. Идея указанного представления субмартингалов может быть использована для построения представлений более сложных случайных процессов, скажем, квазимартингалов, в виде функций от случайных процессов с ограниченным изменением.

Методы теории мартингалов оказываются эффективными при решении большого числа задач из актуарной математики, финансовой математики, теории управления и ряда смежных научных областей. Типичная задача из перечисленных областей часто ставится в виде поиска решения обратного стохастического дифференциального уравнения. Теория таких уравнений сравнительно молодая. Подавляющее большинство утверждений об обратных стохастических дифференциальных уравнениях доказаны и сформулированы в терминах броуновской фильтрации и стохастических интегралов Ито. Обычно предполагается, что случайные процессы, которые выступают в качестве решений обратных стохастических дифференциальных уравнений, квадратично интегрируемы. Предположение о квадратичной интегрируемости продиктовано тем, что в этом случае применимы классические методы из теории стохастических дифференциальных уравнений. В диссертации доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения при предположении, что случайные процессы интегрируемы в некоторой степени $p > 1$ в терминах произвольной фильтрации, не обязательно в терминах броуновской фильтрации. Доказан вариант теоремы о перестановочности условного математического ожидания и интеграла от случайного процесса. Такого вида теоремы, как правило, нужны при доказательстве различных утверждений стохастического анализа. В работе она используется при доказательстве теоремы о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения. Исследована последовательность, связанных между собой и с данным супермартингалом, специальных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Показано, что решения уравнений возрастают и сходятся поточечно и в среднем к данному супермартингалу. Это приводит к новому доказательству разложения Дуба-Мейера супермартингала в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Сказанное выше убедительно доказывает, что диссертация написана на актуальную тему, важную как в теоретическом, так и прикладном отношениях.

Научная новизна исследования и его результатов

Диссертация разбита на введение, шесть разделов и раздел цитируемой литературы, содержащим 56 наименований. Общий объем диссертации составляет 97

страниц. Введение содержит краткую историю исследований, предшествующих результатам диссертации. Подчеркнут широкий интерес к теме большого числа специалистов. Указано на важность темы для теории случайных процессов в целом и для теории обратных стохастических дифференциальных уравнений.

Первый раздел *Представление положительного субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса* содержит описание конструкции указанного представления. Идея такого представления принадлежит М.Ю. Сверчкову и С.Н. Смирнову и развита Н.В. Крыловым. Итогом указанных исследований является то, что положительный субмартингал из класса Дуба может быть представлен в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. В диссертации предложено упрощенное доказательство теоремы Крылова. Упрощение состоит в привлечении теоремы Комлоша о сходимости чезаровских средних, построенных по ограниченным в среднем последовательностям случайных величин. Для доказательства оказываются достаточно стандартных теорем о монотонных функциях и интегралах по мере.

Второй раздел *Теорема Дуба-Мейера для положительных субмартингалов* содержит упрощенное доказательство разложения положительного субмартингала из класса Дуба в виде суммы равномерно интегрируемого мартингала и интегрируемого натурального случайного процесса. Доказательство построено на основе представления субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего случайного процесса. Идея и некоторые детали доказательства принадлежат Н.В. Крылову. Основное упрощение доказательства состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин. Такая замена видов сходимостей позволяет доказать теорему Дуба-Мейера с помощью стандартных теорем о сходимости интегралов и известных свойств последовательностей равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин.

Третий раздел *Представление субмартингала в виде условного математического ожидания возрастающего процесса* содержит конструкцию упомянутого представления. Основное отличие от случая, исследованного в первом разделе, состоит в том, что представление строится для субмартингала с ограниченным параметрическим множеством. Доказательство из первого раздела не годится и, следовательно, требует привлечения нового подхода. Важное отличие состоит в том, что предлагаемая конструкция применима к произвольным субмартингалам, а не только к ограниченным или положительным субмартингалам.

Четвертый раздел *Общая теорема Дуба-Мейера* содержит упрощенное доказательство упомянутой теоремы. Доказательство построено на использовании представления субмартингала в виде условного математического ожидания воз-

растающего случайного процесса. Другое упрощение состоит в замене слабой сходимости на сходимость почти всюду и в среднем последовательностей равномерно интегрируемых случайных величин. Формулировка теоремы совпадает с классической формулировкой теоремы Дуба-Мейера. Важно отметить, что теперь мартингал не обладает свойством равномерной интегрируемости и натуральный процесс не является интегрируемым в отличие от случая положительного субмартингала, о котором шла речь во втором разделе.

Пятый раздел *Обратные стохастические дифференциальные уравнения* содержит доказательство нескольких теорем. Первая теорема содержит описание класса случайных процессов, в котором потенциально содержатся решения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Вторая теорема указывает условия, при которых можно поменять порядок операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса. Третья теорема содержит достаточные условия существования решения обратного стохастического дифференциального уравнения. Теорема доказана в терминах общей фильтрации и при предположении об интегрируемости случайных процессов в степени $p > 1$. Выше отмечалось, что подавляющее большинство известных аналогов сформулированной теоремы доказаны в предположении об интегрируемости случайных процессов в степени 2 в терминах интегралов Ито. Еще две теоремы содержат точные решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Их доказательство построено на теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шестой раздел *Один класс обратных стохастических дифференциальных уравнений* содержит исследование последовательности связанных между собой обратных стохастических дифференциальных уравнений. В формулировке каждого уравнения участвует наперед данный супермартингал. Решения этих уравнений образуют возрастающую последовательность случайных процессов. Эта последовательность сходится почти всюду и в среднем к упомянутому данному супермартингалу. Решение каждого уравнения можно записать в виде разности мартингала и непрерывного возрастающего случайного процесса. Это свойство решений позволяет построить разложение данного супермартингала из класса DL в виде разности мартингала и предсказуемого возрастающего случайного процесса. Известная теорема Долеан-Дэд утверждает, что классы возрастающих натуральных процессов и возрастающих предсказуемых процессов совпадают. В качестве побочного результата теоремы получается часть теоремы Долеан-Дэд, а именно, что каждый возрастающий предсказуемый случайный процесс является натуральным процессом.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Доказательство теоремы о представлении субмартингала в виде условного

математического ожидания от возрастающего случайного процесса.

2. Теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения в классе L_p -интегрируемых, $p > 1$, случайных процессов.

3. Доказательство варианта теоремы о перестановочности операций условного математического ожидания и интегрирования случайного процесса.

4. Новые упрощенные доказательства глубокой теоремы Дуба-Мейера о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего натурального (предсказуемого) процесса.

Замечания

1. Обзор результатов об обратных стохастических дифференциальных уравнениях кажется неполным. Диссертация при наличии такого обзора только бы выиграла, тем более, что тематика эта сравнительно новая и объем диссертации вполне позволял это сделать.

2. В работе имеются некоторые опечатки и оговорки, например на стр. 49 дважды фразу “непрерывность сверху на пустом множестве” следует читать как “непрерывность в нуле”.

Заключительная оценка диссертации

Диссертация Кашаевой С.Ю. является законченным теоретическим математическим исследованием. В полной мере реализована идея о представлении непрерывного справа субмартингала из класса DL в виде условного математического ожидания возрастающего процесса. На основе такого представления дано упрощенное доказательство трудной и важной теоремы Мейера о представлении субмартингала в виде мартингала и возрастающего процесса. Доказанный вариант теоремы о перестановке условного математического ожидания и интеграла случайного процесса представляет собой важный аппарат, необходимый в теории стохастического интегрирования. Теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения является важным обобщением ранее известных аналогов. Перечисленные результаты представляют собой существенный вклад в теорию мартингалов и в общую теорию случайных процессов.

Результаты и методы диссертации могут оказаться полезными для научных и образовательных учреждений, в которых исследуют и изучают случайные процессы и, в частности, мартингалы и родственные объекты. Среди таких учреждений следует упомянуть Московский, Санкт-Петербургский, Новосибирский, Ростовский, Иркутский, Уфимский авиационный технический и др. университеты.

Автореферат верно и полно отражает содержание диссертации. Результаты исследования опубликованы в ведущих научных изданиях и доложены на научных

семинарах. Диссертация С.Ю. Кашаевой «Представление субмартингалов виде функций монотонных случайных процессов» удовлетворяет всем требованиям, которые предъявляются ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. Автор диссертации – Светлана Юрьевна Кашаева заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв заслушан и утвержден 29 июня 2015 года на заседании кафедры математики УГАТУ (протокол №7, заведующий кафедрой математики доктор физико-математических наук, профессор Байков В.А.)

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Уфимский государственный авиационный технический университет.

Почтовый адрес: 450000, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.

Телефон: 273-77-35 в г. Уфе

Адрес электронной почты: *farsagit@yandex.ru*

Доктор физико-математических наук,
профессор



Ф.С. Насыров

Подпись	<i>Насырова Ф.С.</i>				
Удостоверяю «	<i>06</i> »	<i>07</i>	20	<i>15</i>	г.
Начальник управления по делопроизводству и референтуре УГАТУ	<i>Алиф Габеев</i>				

