

На правах рукописи

Кондаков Василий Гаврильевич

**ОБОБЩЕНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ
НА МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

Специальность 05.13.18-«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2014г.

Работа выполнена в лаборатории №152 суперкомпьютерного моделирования и программных комплексов Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук (ИБРАЭ РАН)

Научный руководитель:

Карабасов Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нейтронно-физических процессов ИБРАЭ РАН

Официальные оппоненты:

Козубская Татьяна Константиновна, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Титарев Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела механики Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН

Ведущая организация: Институт автоматизации проектирования РАН

Защита диссертации состоится «17» сентября 2014 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, а также на официальном сайте ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе “Диссертации”.

Автореферат разослан «__»_____2014г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор.

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Эффективные алгоритмы для решения уравнений газовой динамики играют ключевую роль во многих областях механики жидкости и газа, от нестационарной аэродинамики и аэроакустики до задач переноса в гидродинамике при высоких числах Рейнольдса и Пекле. В этой связи разработка новых и модификация уже существующих численных методов решения уравнений газовой динамики остается актуальной задачей вычислительной математики.

Несмотря на успехи методов повышенного порядка аппроксимации для решения уравнений переноса, возможности схем второго порядка в этом направлении представляются далеко не исчерпанными. Главными достоинствами таких методов являются компактность вычислительного шаблона, простота реализации, робастность при обобщении на неоднородные сетки и в режимах больших градиентов решения, а также естественная согласованность граничных условий с сеточным шаблоном, используемым внутри области. Именно с этим связано то, что во многих современных кодах до сих пор широко применяются классические конечно-разностные методы второго порядка. Улучшение диссипативных и дисперсионных свойств решений, в классе схем второго порядка точности, представляется самостоятельной актуальной задачей. Примером перспективного метода второго порядка является схема Кабаре, определенная на компактном постоянном шаблоне, обладающая улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами и допускающая введение нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума в областях больших градиентов решения.

Основной целью диссертационной работы является

Разработка численных схем газовой динамики путем обобщения разностной схемы КАБАРЕ на различные типы сеток (двумерные и трехмерные ортогональные, трехмерные гексагональные).

Методология исследования

Обобщение схемы КАБАРЕ осуществляется на следующей единой методологической основе. Переменные в схеме КАБАРЕ разделяются на два типа: консервативные и потоковые. Разделение переменных позволяет построить схему, сочетающую преимущества консервативных и сеточно-характеристических разностных схем. Для вычисления консервативных переменных используется аппроксимация системы уравнений газовой динамики в дивергентном представлении. Потоковые переменные вычисляются путем линейной экстраполяции локальных инвариантов Римана на новый временной слой. Для монотонизации потоков используется процедура нелинейной коррекции потоков. Такая экстраполяция зависит от направлений

характеристических скоростей, в том числе от наличия или отсутствия т.н. звуковой точки.

Защищаемые положения

1. Предложено обобщение схемы КАБАРЕ для уравнений газовой динамики в двумерном и трехмерном случаях. Улучшена процедура реконструкции потоков при наличии звуковой точки.
2. Проведена серия двумерных расчетов изолированных вихрей и их взаимодействия с ударными волнами, на которых подтверждены такие положительные качества алгоритмов Кабаре, как малая диссипативность и отсутствие паразитных осцилляций при наличии больших градиентов решения.
3. Разработаны параллельные алгоритмы для решения, на основе схемы Кабаре, трехмерных уравнений Навье-Стокса.
4. Решена прикладная задача о турбулентном истечении реактивной струи из сопла авиадвигателя. Проведена статистическая обработка решения для нескольких сеток и показано хорошее совпадение результатов расчета с данными европейского верификационного эксперимента JEAN.

Личный вклад автора

1. Разработан программный модуль для решения уравнения газовой динамики в одномерном случае, учитывающий особенности алгоритма реконструкции потоков при возникновении звуковой точки. Проведена кросс-верификация различных возможных вариантов такого учета.
2. Разработаны вычислительные алгоритмы решения уравнения газовой динамики в двумерном случае на регулярных сетках. Добавлен блок реконструкции потоков на случай звуковой точки. Проведены тестовые расчеты для верификации заявленных свойств обобщенной схемы на примере изолированного изэнтропического вихря.
3. Разработаны вычислительные алгоритмы решения уравнений газовой динамики в трехмерном случае на регулярных сетках. Реализована параллельная версия этой схемы. На примере задачи обтекания обратной ступеньки, где область была представлена как совокупность нескольких параллелепипедов, были получены удовлетворительные результаты по величине длины присоединения потока.
4. Разработаны вычислительные алгоритмы решения уравнений газовой динамики в трехмерном случае на гексагональных ячейках. Реализован параллельный алгоритм счета на основе сеточных данных подготовленных в среде OpenFOAM и декомпозированных с помощью библиотеки METIS. Программа была настроена на решение задачи истечения высокоскоростной турбулентной струи из сопла одноконтурного двигателя. Проведена статистическая обработка данных расчетов по этой задаче.

5. Вышеуказанные алгоритмы программно реализованы на языке Фортран. Составлены тестовые расчеты для каждого алгоритма. Отлаженные программы были применены на решение практических задач.

Научная новизна

Проведено комплексное исследование свойств новых вычислительных алгоритмов. На примере тестовых расчетов показана переносимость свойств одномерной схемы КАБАРЕ на многомерную область. В отсутствии больших градиентов в решении схема КАБАРЕ демонстрирует улучшенные дисперсионные и диссипативные свойства по сравнению другими схемами второго порядка точности. Новым элементом является такое свойство схемы КАБАРЕ как отсутствие каких-либо настроечных параметров.

Научная и практическая значимость

Результаты проделанной работы используются для оценки уровня шумов для существующих и проектируемых авиадвигателей. Была проведена серия расчетов для моделирования турбулентной струи за одноконтурным соплом двигателя, данные по которой были взяты из эксперимента JEAN. Результаты численного расчета находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными и были использованы для оценки уровня шума двигателя. Несомненным преимуществом такого рода обобщений является компактный вычислительный шаблон, который позволяет естественным образом реализовать параллельный счет, что играет существенную роль когда речь заходит о эффективном моделировании задач индустриальной математики.

Апробация работы

Основные результаты были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1. II Всероссийская научная конференция и VII Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации», 2009г., «Численное моделирование течения за обратным уступом с помощью трехмерной схемы Кабаре», Д.Г. Асфандияров, В.Г. Кондаков, С.И. Скрыбыкина.
2. Международная научно-техническая конференция «Суперкомпьютерные технологии: разработка, программирование, применение», 2010г., «Прямое численное моделирование турбулентных течений в двумерном случае», И.А.Короткин, В.Г.Кондаков.
3. XIV молодежная конференция-школа с международным участием «Современные проблемы математического моделирования», 2011г., «Решение задачи двумерной термоконвекции методом КАБАРЕ», В.Г.Кондаков, И.А.Короткин.

4. Международная конференция по математическому моделированию SCTEMM2011, 2011г., "Моделирование газового потока за соплом" В.Г.Кондаков.
5. IV всероссийская конференция "Вычислительный эксперимент в аэроакустике" СЕАА2012, 2012г., "Моделирование турбулентной струи методом КАБАРЕ", В.М.Головизнин, М.А.Зайцев, С.А.Карабасов, В.Г.Кондаков, В.Ф.Копьев, Г.А.Фараносов.
6. XV всероссийская конференция-школа молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», 2013г., «Численное моделирование трехмерных течений схемой КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости», В.Г.Кондаков.

Публикации

По теме диссертации опубликовано более 10 работ, среди которых 2 статьи в журнале «Математическое моделирование», одна статья в журнале Elsevier Computers & Fluids, 6 докладов в сборниках трудов всероссийских и международных конференций.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения и 5 глав. В конце каждой главы приведены выводы.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен обзор существующих численных схем, применяемых для решения уравнений газовой динамики. В данном обзоре обосновывается актуальность развития новых эффективных методик решения гиперболических систем уравнений. Приводится пример схемы Кабаре для одномерного уравнения переноса, сочетающей в себе свойства консервативных разностных схем и метода характеристик, которые дают этой схеме преимущество над классическими конечно-разностными схемами второго порядка. Приведено краткое описание основных этапов развития метода КАБАРЕ. Предложено дальнейшее развитие этой разностной схемы путем ее обобщения на двумерные и трехмерные уравнения газовой динамики.

В **главе 1** представлен одномерный вариант разностной схемы КАБАРЕ на неравномерной сетке. Для аппроксимации консервативных переменных используется дивергентная форма записи уравнений Эйлера. Для вычисления потоковых переменных используется метод линейной экстраполяции квазиинвариантов Римана. Вкладом автора является введение процедуры реконструкции потоков в случае возникновения звуковых точек.

Разностная схема КАБАРЕ для уравнений газовой динамики может быть представлена тремя основными этапами:

- I. Вычисление промежуточных значений консервативных переменных.
- II. Линейная экстраполяция квазиинвариантов Римана. Вычисление потоковых переменных из новых значений квазиинвариантов.
- III. Вычисление консервативных переменных на новом временном слое

Для проверки преимуществ модифицированной схемы КАБАРЕ была решена классическая задача распада разрыва – задача Сода.

Для демонстрации дисперсионных свойств схемы КАБАРЕ была решена задача Шу-Ошера. В этой задаче исследуется прохождение сильной ударной волны по неподвижному фону с синусоидально возмущенной плотностью. Согласно постановке следует брать начальные данные в виде:

$$\begin{aligned} \rho_L &= 3,857143; & u_L &= 2,629369; & p_L &= 10,3333; \\ \rho_R &= 1 + 0.2 \cdot \sin(5x); & u_R &= 0; & p_R &= 1; \\ x &\in [-5, 5]; & t_{contr} &= 1,8; \end{aligned} \quad (1)$$

где точка раздела расположена при $x=-4$.

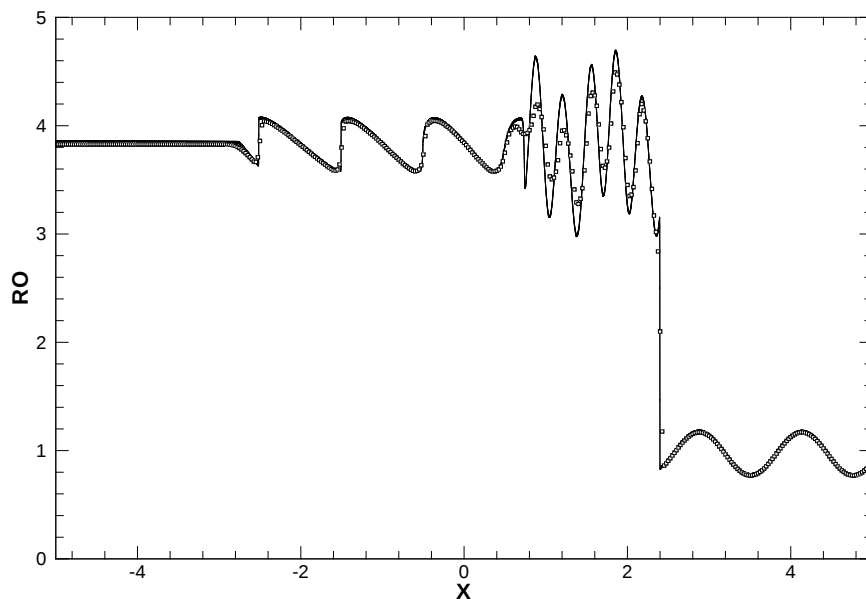


Рис.1. Распределение плотности в момент времени $t=1.8$ с, сетка $N=401$.

Таблица 1. Значения отклонения плотности в расчетах на последовательности сгущающихся сеток по схеме КАБАРЕ, в нормах L_1 и C .

N-1	H	$ E _C$	$ E _L$
200	0.05	1.415136844	0.025729251
400	0.025	0.568627544	0.010885636
800	0.0125	0.539266908	0.004653576
1600	0.00625	0.445486074	0.002061894
3200	0.003125	0.225244943	0.000787596

Во **второй главе** предложено обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные сетки для решения уравнений Эйлера.

Разностная схема КАБАРЕ в двумерном случае может быть представлена, так же как и в одномерном случае, тремя основными этапами:

- I. Вычисление промежуточных значений консервативных переменных на полу слое по времени.

- II. Линейная экстраполяция инвариантов Римана по вдоль осей x, y на новый слой по времени. Вычисление потоковых переменных в центрах граней отдельно для вертикальных и горизонтальных.
- III. Вычисление консервативных переменных на новом временном слое.
- Для проверки диссипативных свойств полученной численной схемы был рассмотрен тестовый пример локализованного изэнтропического вихря. Вихрь характеризуется параметрами радиуса r_0 , амплитудой α и степенным показателем экспоненты β .

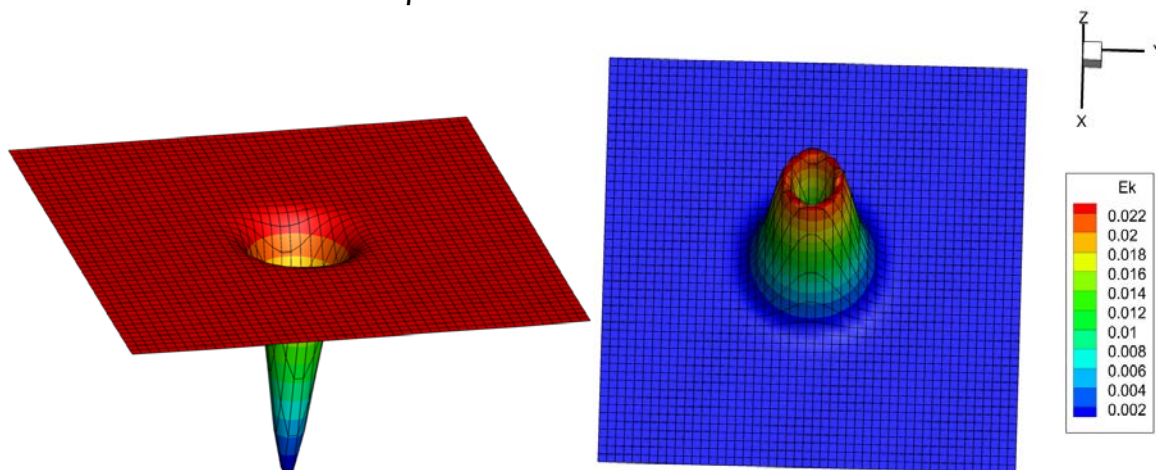


Рис. 2. Начальный профиль давления (слева) и кинетической энергии (справа) На рис.2 приведен начальный профиль давления для вихря Гаусса. Равновесное течение в данном вихре обеспечивается тем, что центробежные силы уравниваются градиентом давления. Энтропия в вихре при этом остается постоянной и равной энтропии невозмущенной среды. Известно, что такой изолированный 2-D вихрь без учета вязкости соответствует устойчивому решению для всех мод колебаний.

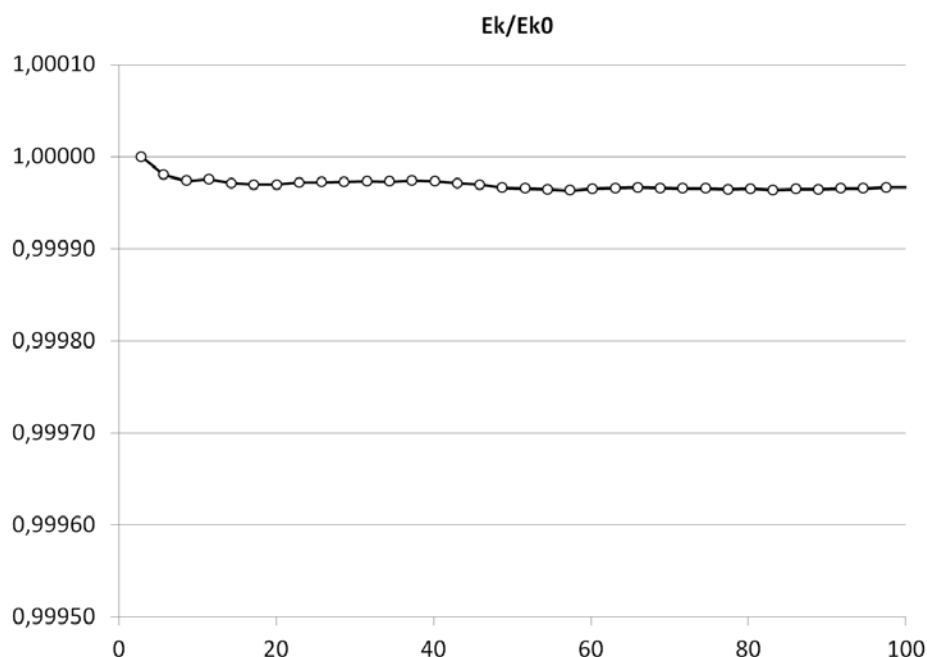


Рис.3. Зависимость интегральной кинетической энергии вихря от времени. При расчете вихрь полностью сохраняет свою начальную форму, как минимум 100 оборотам вихря вокруг своей оси.

В третьей главе предложено обобщение схемы КАБАРЕ на трехмерные ортогональные сетки для решения уравнений Навье-Стокса. Рассмотрим неравномерную регулярную IJK-сетку в параллелепипеде, заданную точками (x_L, y_L, z_L) и (x_R, y_R, z_R) . Координаты узлов определяются координатами (x_I, y_J, z_K) , $I=1, N_x, J=1, N_y, K=1, N_z$: $x_1=x_L < x_2 < \dots < x_{I-1} < x_I < x_{I+1} < \dots < x_{N_x}=x_R$, $y_1=y_L < y_2 < \dots < y_{J-1} < y_J < y_{J+1} < \dots < y_{N_y}=y_R$, $z_1=z_L < z_2 < \dots < z_{K-1} < z_K < z_{K+1} < \dots < z_{N_z}=z_R$. Вводятся два типа переменных, потоковые и консервативные. Консервативные переменные располагаются в центрах ячеек и имеют полуцелые индексы $(I+1/2, J+1/2, K+1/2)$. Потоковые переменные определим в центрах граней ячеек.

Запишем систему уравнений Навье-Стокса в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0,$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p - \tau_{xx}, \rho uv - \tau_{xy}, \rho uw - \tau_{xz}, (\rho E + p - \tau_{xx})u - v\tau_{xy} - w\tau_{xz})^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv - \tau_{xy}, \rho v^2 + p - \tau_{yy}, \rho vw - \tau_{yz}, (\rho E + p - \tau_{yy})v - u\tau_{xy} - w\tau_{yz})^T,$$

$$\mathbf{H} = (\rho w, \rho uw - \tau_{xz}, \rho vw - \tau_{yz}, \rho w^2 + p - \tau_{zz}, (\rho E + p - \tau_{zz})w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz})^T,$$

где $\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$, $i, j, k = 1, 2, 3$. – тензор вязких напряжений.

Система уравнений (2) замыкается уравнением состояния идеального газа в форме:

$$p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon, \quad (3)$$

где ε – удельная внутренняя энергия, которая связана с полной энергией соотношением $E = \varepsilon + 0.5 \cdot (u^2 + v^2 + w^2)$.

Для системы уравнений (2) запишем разностную схему КАБАРЕ в неявном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{U}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n}{\tau} + \frac{\bar{\mathbf{F}}_{i+1, j+1/2, k+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i, j+1/2, k+1/2}}{x_{i+1} - x_i} + \\ & + \frac{\bar{\mathbf{G}}_{i+1/2, j+1, k+1/2} - \bar{\mathbf{G}}_{i+1/2, j, k+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\bar{\mathbf{H}}_{i+1/2, j+1/2, k+1} - \bar{\mathbf{H}}_{i+1/2, j+1/2, k}}{z_{k+1} - z_k} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где верхнее подчеркивание означает полу сумму векторов по двум временным слоям $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (\boldsymbol{\eta}^{n+1} + \boldsymbol{\eta}^n) / 2$. Как видно из выражения (4) для разрешения этой схемы нужно вычислить консервативные переменные на текущем временном слое $t=t_n$, а также потоковые переменные на новом временном слое $t=t_{n+1}$. Ниже приводится алгоритм решения разностного уравнения (4):

I. Вычисление промежуточных значений консервативных величин.

II. Линейная экстраполяция квазиинвариантов вдоль осей x, y, z . Вычисление потоковых переменных в центрах граней отдельно вдоль каждой из осей x, y, z .

III. Вычисление новых значений консервативных величин

Трехмерная схема КАБАРЕ была реализована автором на Фортране. Для отладки программы был проведен ряд расчетов тестовых задач, включающих ламинарное течение жидкости в плоском канале с выстраиванием Пуазейлевского профиля скорости. Была также рассмотрена задача обтекания обратного уступа. Течение жидкости в канале с внезапным расширением по высоте представляет интерес ввиду того, что при достаточно большом числе Рейнольдса в области за ступенькой образуются регулярные вихревые структуры. В литературе [Armaly BF, Durst F, Pereira JCF, Schönung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. J.Fluid.Mech. February 1983;127:473–96.] имеется достаточно полный набор результатов по измерению параметров турбулентного потока в зоне отрыва и присоединения потока ниже по течению за уступом. Одним из ключевых параметров является длина зоны присоединения за уступом. Изучение отрывных течений за уступом с точки зрения вычислительного эксперимента требует проведения трехмерных расчетов в режиме разрешения крупных вихрей (Large Eddy Simulation).

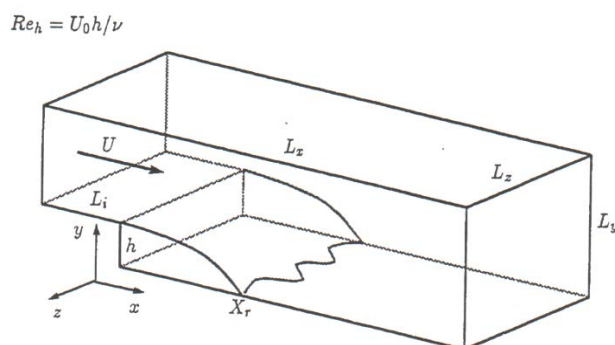


Рис.4.Параметры расчетной области.

Таблица 1. Размеры расчетной области:

H	L_{in}	L_x	L_y	L_z
1	10	20	2	2

Шаг сетки был равномерным в каждом из направлений, 10 контрольных объемов на высоту уступа, принятого за единицу длины. Общее количество ячеек составляет 10^5 . Для реализации численного расчета была написана параллельная версия трехмерной программы. Область была поделена на 8 частей (см.рис.5) и на общих гранях был организован обмен данными с помощью протокола передачи сообщений MPI.

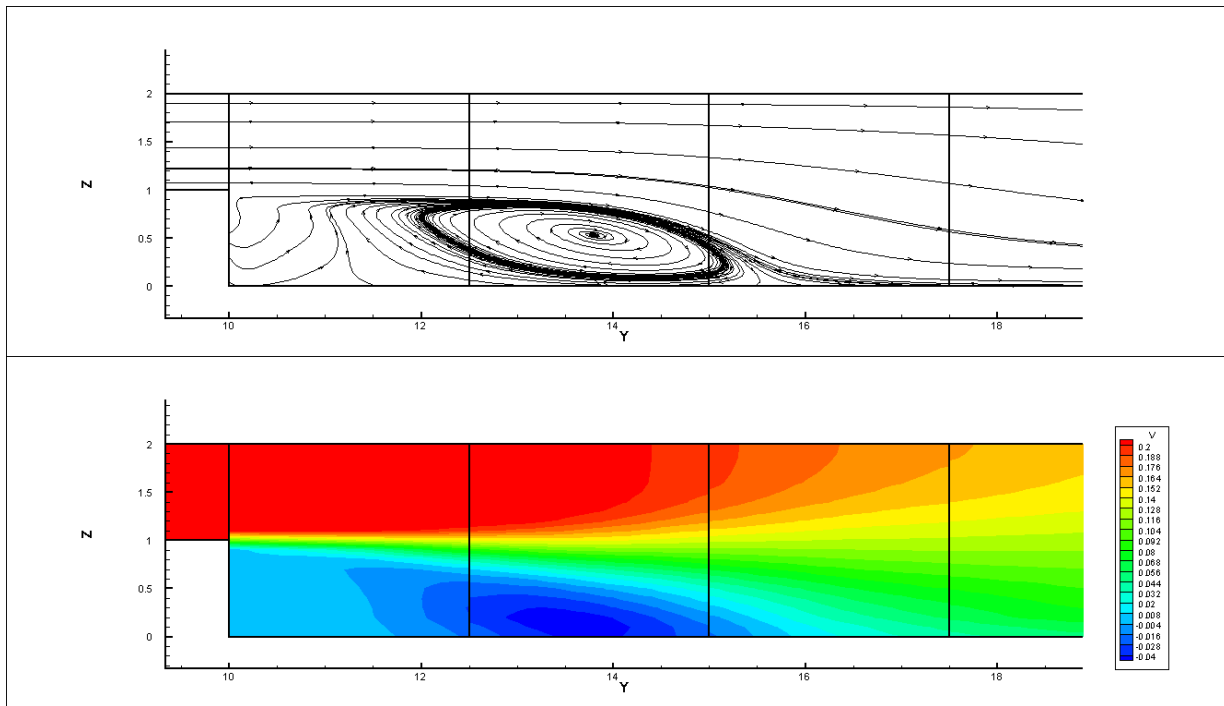


Рис.5. Линии тока и распределение скорости по потоку в сечении $x=1$, отвечающему плоскости симметрии задачи.

Согласно результатам расчета при числе Рейнольдса на высоту ступеньки $Re=5000$ размер длина присоединения составляет 5.8 высот ступеньки, что находится в хорошем соответствии с результатами эксперимента (длина зоны присоединения ~ 6 высот ступеньки).

В **четвертой главе** предложено обобщение схемы КАБАРЕ на произвольные гексагональные ячейки для решения уравнений газовой динамики. В данной главе рассматривается трехмерная модель идеального газа на произвольной расчетной сетке с гексагональными ячейками. Вычислительный шаблон схемы для такой сетки размещается внутри одной гексагональной ячейки (см.рис.6). Нестационарная система уравнений Эйлера газовой динамики, описывающая трехмерные течения идеального газа, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{I}}) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}[(\rho E + p) \mathbf{v}] &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho = \rho(t, x, y, z)$ – плотность, t – время, (x, y, z) – декартовы координаты в пространстве, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z) = (u, v, w)^T$ – скорость, $\hat{\mathbf{I}} = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$ – единичный тензор размерности 3×3 , $E = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ – удельная полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, $p = p(\rho, \varepsilon)$ – давление. Соотношение между

давлением, плотностью и внутренней энергией устанавливается с помощью уравнения состояния (3).

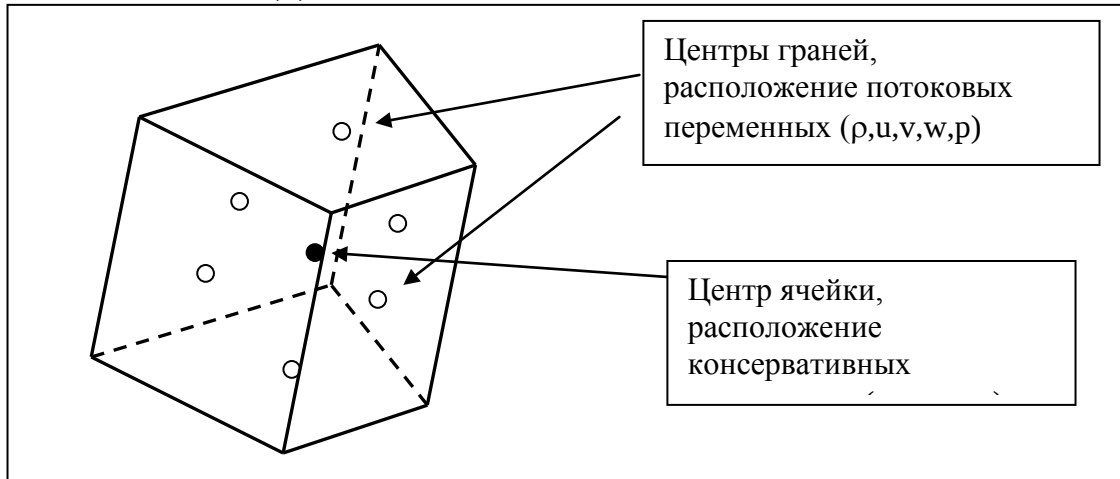


Рис.6. Расположение переменных КАБАРЕ в гексагональной ячейке.

Схема КАБАРЕ на гексагональной ячейке может быть получена с использованием интегро-интерполяционного метода в совокупности с линейной экстраполяцией квазиинвариантов Римана.

I. Покроем всю вычислительную область дискретными гексагональными ячейками G_i , $i=1,2,\dots$, и гранями с площадями S_j , $j=1,2,3,4,5,6$. Аппроксимируем интегральные уравнения в каждом из многогранников следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_i \frac{\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 R_j^n (\mathbf{V}_j^n \cdot \mathbf{S}_j) &= 0, \\
 G_i \frac{(\rho \mathbf{v})_i^{n+1/2} - (\rho \mathbf{v})_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (R \mathbf{V})_j^n (\mathbf{V}_j^n \cdot \mathbf{S}_j) + \sum_{j=1}^6 P_j^n \mathbf{S}_j &= 0, \\
 G_i \frac{(\rho E)_i^{n+1/2} - (\rho E)_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (R E + P)_j^n (\mathbf{V}_j^n \cdot \mathbf{S}_j) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j S_j$ - вектор нормали к грани j с модулем равным площади грани S_j , τ - шаг по времени, нижний целый индекс i в уравнениях (6) обозначает величины функций, отнесенные к центру масс i -го многогранника, а нижний целый индекс j обозначает величины функций, отнесенные к центру j -й грани дискретной ячейки. Верхний индекс n обозначает номер шага по времени. Соответствующие большие буквы в формулах обозначают плотность R , скорость $\mathbf{V}$, давление P и полную энергию E на гранях дискретной сеточной ячейки.

II. Система характеристических уравнений относительно локальных инвариантов Римана имеет вид:

$$J \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial t} + \Lambda_k \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial \alpha_k} = \mathbf{g}_k, k=1,3 \tag{7}$$

где $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ – якобиан преобразования,

$$\Lambda_\alpha = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5),$$

$\lambda_1 = |\mathbf{S}_{\alpha_k}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\alpha_k} - c)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_{\alpha_k}$, $\lambda_5 = |\mathbf{S}_{\alpha_k}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\alpha_k} + c)$ - характеристические числа в направлении криволинейной оси α_k , $\mathbf{g}_k$ – правая часть характеристических уравнений,

$\mathbf{S}_k = (\mathbf{n}_{\alpha_k} \cdot \mathbf{v} - Gp^{(\gamma-1)/2\gamma}, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v}, \ln(p / \rho^\gamma), \mathbf{n}_{\alpha_k} \cdot \mathbf{v} + Gp^{(\gamma-1)/2\gamma})^T$ - вектор-функция

квазиинвариантов Римана, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - два единичных вектора ортогональных нормали $\mathbf{n}_{\alpha_k}$, такие что вектора $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_{\alpha_k})$ образуют ортонормированный

базис, $G = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \right)^{1/2\gamma}$ - коэффициент перед степенью давления в выражениях

для инвариантов.

Производится линейная экстраполяция локальных инвариантов Римана вдоль криволинейной координаты α_k , соединяющей центр ячейки и противоположные центры граней. Для определения потоковых переменных на новом временном слое используется шаблон из рис.7.

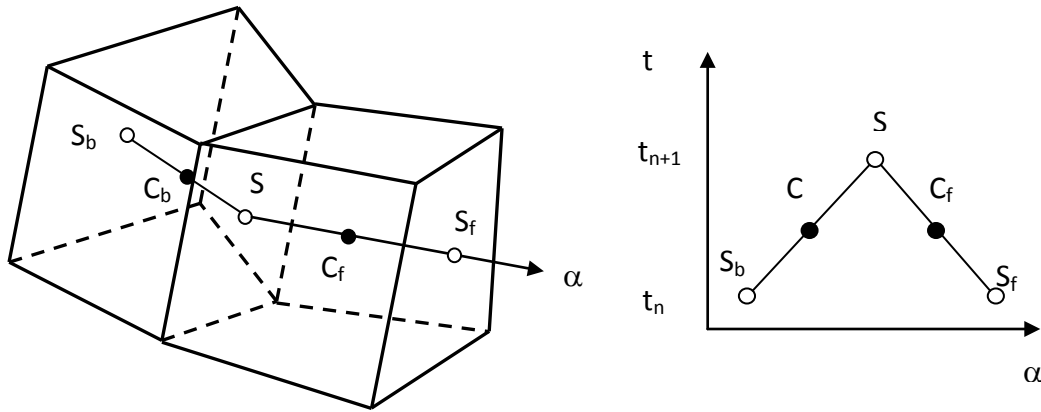


Рис.7. Шаблон КАБАРЕ для вычисления потоковых переменных.

III. Вычисляются консервативные переменные на новом слое:

$$\begin{aligned} G_i \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^{n+1/2}}{\tau / 2} + \sum_{j=1}^6 R_j^{n+1} (\mathbf{v}_j^{n+1} \cdot \mathbf{S}_j) &= 0, \\ G_i \frac{(\rho \mathbf{v})_i^{n+1} - (\rho \mathbf{v})_i^{n+1/2}}{\tau / 2} + \sum_{j=1}^6 (R \mathbf{v})_j^{n+1} (\mathbf{v}_j^{n+1} \cdot \mathbf{S}_j) + \sum_{j=1}^6 P_j^{n+1} \mathbf{S}_j &= 0, \\ G_i \frac{(\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^{n+1/2}}{\tau / 2} + \sum_{j=1}^6 (R E + P)_j^{n+1} (\mathbf{v}_j^{n+1} \cdot \mathbf{S}_j) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Практическое применение разностной трехмерной разностной схемы на гексагональных ячейках представлено в **Главе 5**, где приведены результаты численного моделирования истечения высокоскоростной турбулентной струи из сопла одноконтурного двигателя.

Рассматривается, простая статическая изотермическая струя из осесимметричного конического сопла. Струя отвечает истечению газа из одноконтурного сопла двигателя в покоящуюся среду, при условии равенства температуры на выходе из сопла температуре окружающего воздуха, и является идеально расширенной. Струя соответствовала числу Маха 0,75 на срезе сопла и числу Рейнольдса, определённом по диаметру сопла, $Re=10^6$.

Вдоль оси струи расчетная сетка имела Н-топологию со сгущением в районе кромки сопла. Примеры использовавшихся сеток в срезах x-y и x-z со сгущением в окрестности слоя смешения и без сгущения - равномерной цилиндрической сетки показаны на рис.8.a,b,c,d. Обе сетки состоят из $3,6 \cdot 10^6$ ячеек, различие - только в степени неоднородности. На неоднородной сетке отношение минимальной ячейки в слое смешения струи к радиусу сопла составляет $\sim 1\%$, на однородной сетке эта величина $\sim 5\%$.

На открытых границах области задавались безотражающие характеристические граничные условия с использованием разнесенного шаблона Кабаре и линейного расширения сетки у границ области для уменьшения паразитных отражений от границ области. На границе сопла задавалось адиабатическое условие прилипания. Для сетки со сгущением в окрестности слоя смешения струи в силу положительных свойств Кабаре этого условия оказывалось достаточно, и паразитных отрывов потока от кромки сопла не возникало. В случае однородной сетки, которая была слишком грубой в районе кромки сопла, условие полного прилипания заменялось на условие частичного проскальзывания для предотвращения отрывов.

Мгновенные распределения модуля завихренности в плоскости x-z, полученные по методу Кабаре для обеих сеток, показаны на рис. 8 e,f. Видно, что решение на однородной сетке с крупными ячейками в слое смешения отвечает более ламинарному поведению струи на выходе из сопла, неустойчивость струи, сопровождающаяся возникновением достаточно крупных вихрей, возникает уже только на расстоянии 1-2 калибра струи от среза сопла. Вихри начинают интенсивное взаимодействие в результате которого струя достаточно быстро распадется. В отличие от однородной сетки, на сетке с мелким разрешением слоя смешения тонкие вихревые структуры порождаются уже начиная с 0,1-0,2 калибра струи, нарастание неустойчивости слоя смешения происходит более плавно, без резких скачков, а расширение слоя смешения происходит более линейно, и ядро струи становится более вытянутым.

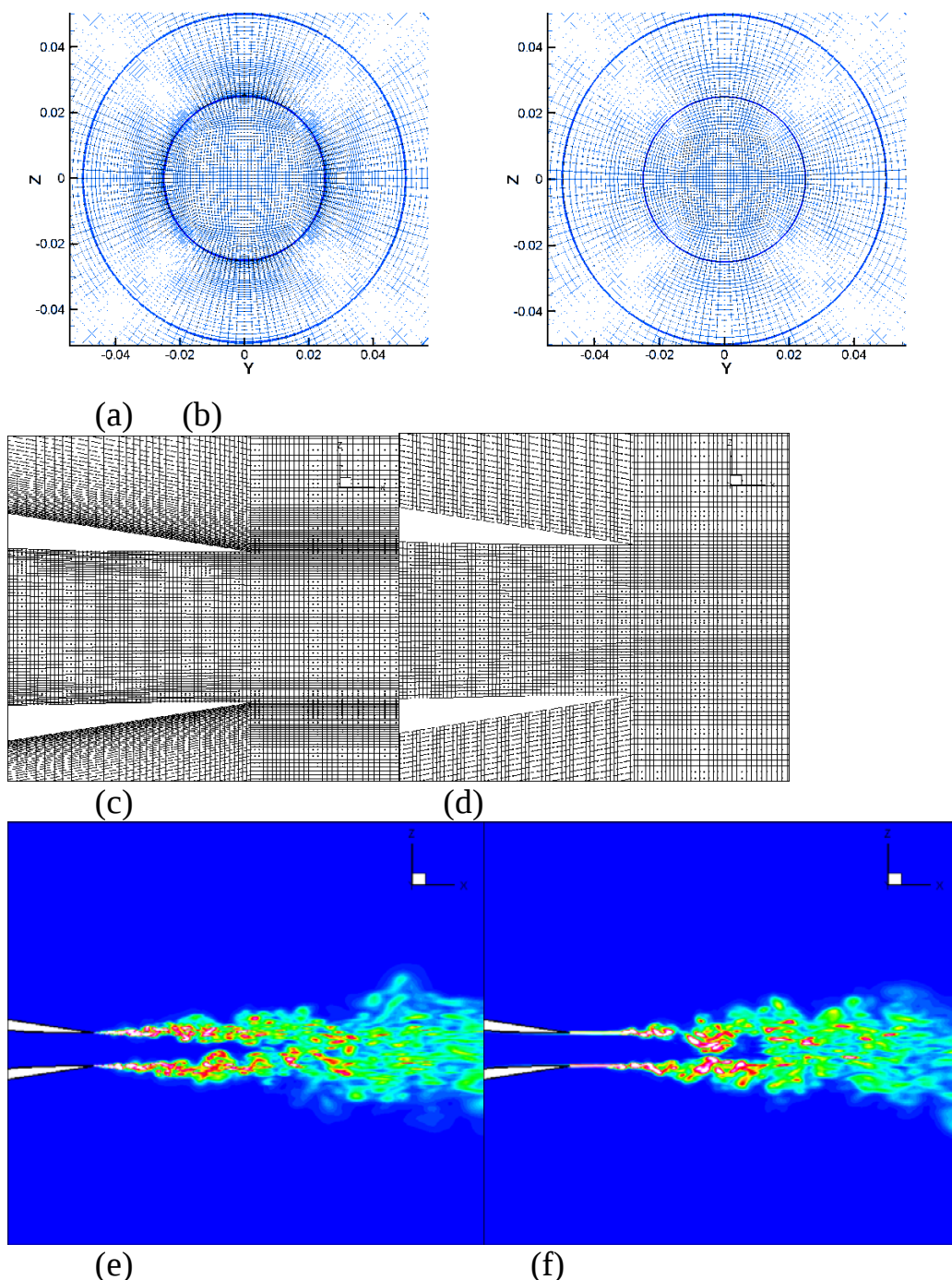


Рис. 8 Вычислительная сетка со сгущением (a),(c) и без сгущения (b),(d) в районе кромки сопла и соответствующие распределения полей завихренности, (e) и (f), в плоскости симметрии струи

На рис. 9 показано мгновенное распределение завихренности в ближнем поле струи и контуров давления в акустическом диапазоне $0,999 < p / p_{\infty} < 1,001$ на следующей по объему сетке – $7,8 \cdot 10^6$ ячеек. Эта сетка получена из сетки плотности $3,6 \cdot 10^6$ ячеек со сгущением в слое смешения путём увеличения количества точек по оси x в окрестности конца потенциального ядра струи, что позволяет сделать сетку в этой области более равномерной.

Хорошо заметны мелкомасштабные пульсации в начале струи, визуально соответствующие мелкомасштабным акустическим возмущениям. Мелкомасштабные возмущения переходят в крупные вихри интенсивно

перемешивающиеся в конце начального отрезка струи, соответствующие крупномасштабным акустическим возмущениям, переносимым под малыми углами к струе.

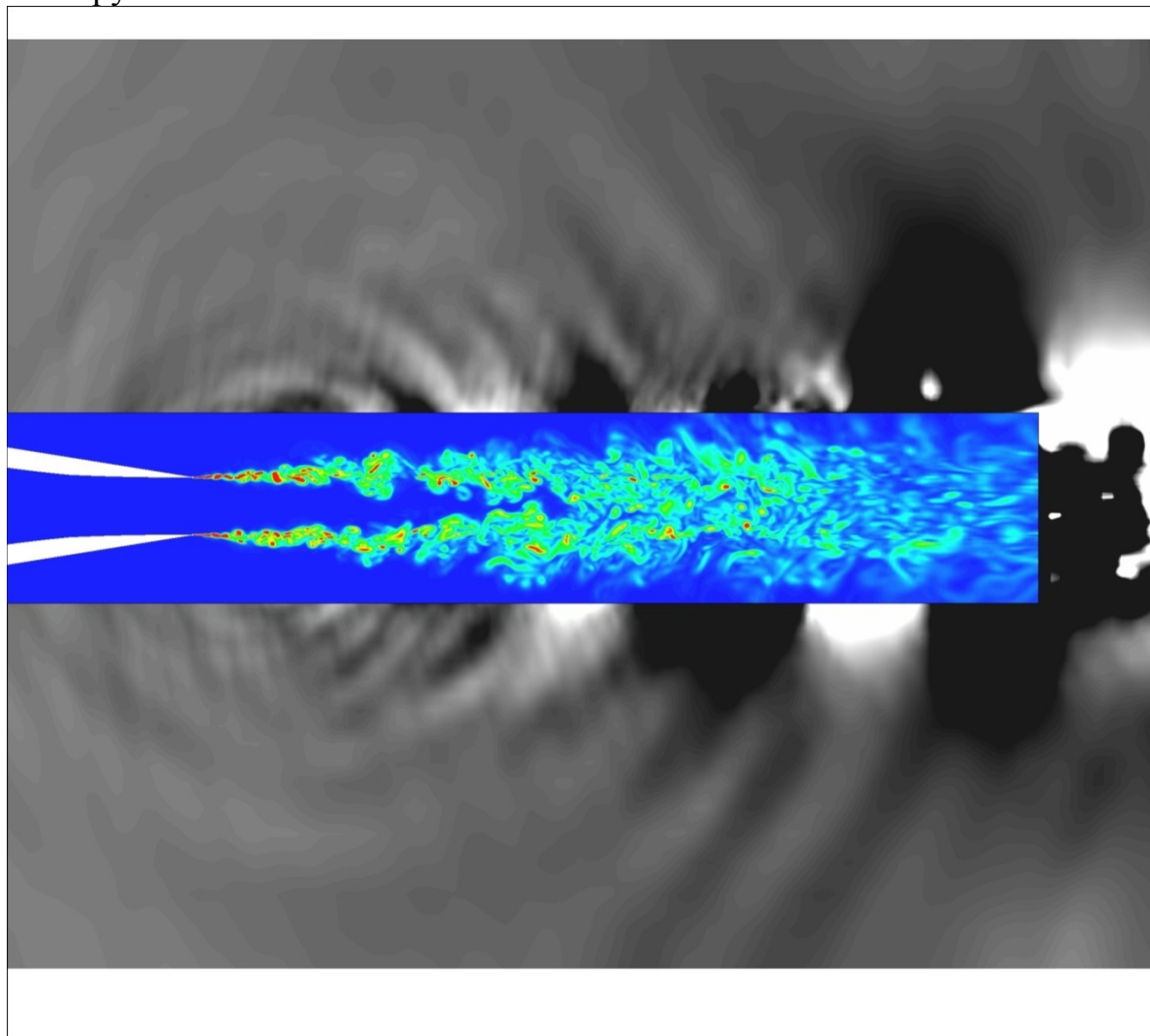


Рис. 9. Мгновенное распределение гидродинамических (завихренности) и акустических (давления в акустическом диапазоне) пульсаций с плоскости симметрии струи

Как видно из результатов расчетов, численный алгоритм позволяет моделировать разномасштабное турбулентное поле. Важным также оказывается правильное взаимодействие этих вихрей между собой, т.н. энергетический каскад. Согласно теории Колмогорова наклон энергетического спектра в задаче однородной изотропной турбулентности равен $-5/3$ в логарифмическом масштабе.

Результат использования расчета шума в дальнем поле по методу Фокса-Вильямса-Хоукинга в контрольных точках дает согласие с экспериментом в пределах 3 дБ.

Основные результаты работы

- Предложено обобщение схемы Кабаре на уравнения газовой динамики в двумерном и трехмерном случае с улучшенной процедурой реконструкции потоков в случае звуковой точки.

- Проведена серия двумерных расчетов изолированных вихрей и их взаимодействия с ударными волнами, на которых подтверждены такие положительные качества алгоритмов Кабаре, как малая диссипативность и отсутствие паразитных осцилляций при наличии больших градиентов решения.
- На основе схемы Кабаре разработаны параллельные алгоритмы для решения трехмерных уравнений Навье-Стокса. Эти алгоритмы использованы для решения задачи о моделировании обтекания обратного уступа турбулентным потоком [ArmalyBF, DurstF, PereiraJCF, SchönungB. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. J.Fluid Mech.February1983;127:473–96.] и истечения высокоскоростной затопленной турбулентной струи [Power, O., Kerherve, F., Fitzpatrick, J., and Jordan, P., “Measurements of turbulence statistics in high subsonic jets”, AIAA-2004-3021, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, UK, June 2004.]). Проведена статистическая обработка решения для нескольких сеток, и показано хорошее совпадение расчета с данными эксперимента.

Основные публикации автора по теме диссертации(по времени, в обратном порядке)

1. В.Г. Кондаков «Численное моделирование трехмерных течений схемой КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости», труды XV всероссийской конференции-школы молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», 2013г.
2. **В. М. Головизнин, С. А. Карабасов, В. Г. Кондаков, “Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки”, ж. Математическое моделирование, 2013 г., том 25, номер 7, стр. 103-136.**
3. **В.Г. Кондаков, "Схема КАБАРЕ для двумерной задачи термоконвекции", ж. Математическое Моделирование, 2013 г., том 25, номер 1, стр. 33–44.**
4. **G.A. Faranosov, V.M. Goloviznin, S.A. Karabasov, V.G. Kondakov, V.F. Kopiev, M.A. Zaitsev, “CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation”, Computer&Fluids, 2013, Vol. 88, pp. 165-179.**
5. В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, В.Г. Кондаков, В.Ф. Копьев, Г.А. Фараносов, "Моделирование турбулентной струи методом КАБАРЕ", труды IV всероссийской конференции "Вычислительный эксперимент в аэроакустике" СЕАА2012.
6. В.Г. Кондаков "Моделирование газового потока за соплом", труды международной конференции по математическому моделированию SCTEMM2011.
7. A.S. Filippov, A.A. Kanaev, V.G. Kondakov and I.A. Korotkin (2011). Hydrodynamical Simulation of Perspective Installations for Electrometallurgy

- of Aluminium, Hydrodynamics - Optimizing Methods and Tools, Prof. Harry Schulz (Ed.), ISBN: 978-953-307-712-3, InTech.
8. В.Г. Кондаков, И.А. Короткин «Решение задачи двумерной термоконвекции методом КАБАРЕ», труды XIV молодежной конференции-школы с международным участием «Современные проблемы математического моделирования», 2011г..
 9. И.А. Короткин, В.Г. Кондаков «Прямое численное моделирование турбулентных течений в двумерном случае», материалы международной научно-технической конференции «СКТ-2010», том № 2, стр.216.
 10. Д.Г. Асфандияров, В.Г. Кондаков, С.И. Скрыбыкина. «Численное моделирование течения за обратным уступом с помощью трехмерной схемы Кабаре». II Всероссийская научная конференция и VII Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации» (ММРСТ-2009). 15-22 июня 2009 г. Тезисы докладов. г.Якутск, 2009 г., с. 26-27.
 11. **А.С. Филиппов, И.А. Короткин, А.А. Канаев, В.Г. Кондаков, И.О. Уразов, О.А. Ушакова, П.Г. Яковлев «Тепло-электрический режим вертикального электролизера. 2. Численное моделирование конвекции двухфазного электролита.» Журнал инженерной теплофизики, том № 4, 2008г., с.1-28**
 12. A.S. Filippov, I.A. Korotkin, A.A. Kanaev, V.V. Kondakov, I.O. Urazov, O.A. Ushakova, and P.G. Yakovlev, Thermoelectrical Regime of a Vertical Electrolyzer. Part 2: Numerical Modeling of Two-Phase Electrolyte Convection. Journal of Engineering Thermophysics, 2008, Vol. 17, No. 4, pp. 320–327.
 13. В.М. Головизнин, В.Н. Семенов, А.А. Канаев, В.Г. Кондаков, И.А. Короткин, «Новый вычислительный алгоритм для математического моделирования просачивания влаги сквозь ненасыщенную трещиноватую геологическую среду с низкой проницаемостью». Препринт №IBRAE 2006 07, Москва: ИБРАЭ РАН, 2006. 53 с.

Кондаков Василий Гаврильевич
ОБОБЩЕНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ
НА МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 06.06.2014
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 1,125.

Тираж 100 экз.
Отпечатано в «ИБРАЭ РАН».
115191, Москва, ул.Б.Тульская, д.52