Отзыв
официального оппонента
на диссертацию Д.С. Малышева
“Исследование “критических” наследственных классов в анализе вычислительной сложности задач на графах”,
представленную к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертационная работа Д.С. Малышева относится к одной из наиболее важных и активно развиваемых в России и мире областей дискретного анализа. А именно, речь идет об алгоритмически сложных задачах на графах.

Разумеется, всем специалистам в теории сложности вычислений хорошо известно о существовании разнообразных примеров “трудных” (т.е. NP-полных) задач на графах. Среди этих задач — задачи о раскраске (отыскание хроматического числа и др.), задачи о наибольших кликах и независимых множествах, задачи о покрытии и т.д. Значительная литература, корпус которой постоянно и очень быстро пополняется многочисленными публикациями в профильных журналах и трудах ведущих профильных конференций, посвящена прежде всего отысканию все новых подобных задач и их классификации (существуют десятки сложностных классов). Также для известных классических задач (типа раскраски) строятся уточнения экспоненциальных по сложности алгоритмов и рассматриваются проблемы отыскания разумных аппроксимаций для характеристик графов, неподдающихся вычислению за полиномиальное время. Наконец, предпринимаются попытки построения “хороших” алгоритмов не для всех графов, но лишь для графов из того или иного класса: например, знаменитая проблема изоморфизма решена для планарных графов, графов с ограниченной степенью вершины и т.д. При всей исключительной значимости таких исследований есть в них и некоторый элемент разрозненности. Скажем, когда речь идет об отыскании классов графов, для которых какая-нибудь трудная задача имеет полиномиальное по сложности решение, выбор самих этих классов обычно осуществляется по принципу “переберем стандартные классы и найдем хотя бы один, где удастся что-то сделать”. Конечно, и там получаются весьма изощренные и важные как для теории, так и для практики алгоритмы. Более того, без подобных подходов теория алгоритмов просто перестанет развиваться. Но все же кажется правильным попытаться взглянуть и несколько более общо на вопрос о классах графов, для которых известные сложные задачи либо сохраняют свою сложность, либо становятся простыми. Такую попытку осуществил В.Е. Алексеев, и в диссертации Малышева соответствующий подход получает весьма серьезную проработку.

Центральный объект диссертации — “критический” класс графов. Критичность, грубо говоря, понимается в том смысле, что для данной сложной задачи соответствующий класс лежит на своего рода границе между “простыми” и “сложными” частями семейства наследственных классов графов. Оказывается, что иногда можно давать исчерпывающие описания критических классов. Разумеется, в каждой главе диссертации в указанное понятие вкладывается строгий смысл.

Первая глава диссертации, по существу, вводная. В ней даются основные определения, главным из которых является определение граничного класса. Результаты главы 1 отталкиваются от основополагающей теоремы В.Е. Алексеева и представляют собой критерии граничности для различных классов графов и для тех или иных графовых задач.

Во **второй главе** теория граничных классов развивается дальше, и уже в *первом разделе* вводится понятие относительного граничного класса. В главе 2 получен ряд ярких, зачастую исчерпывающих, результатов о том, как устроены граничные системы относительно некоторых классов графов для конкретных сложных графовых задач. В частности, рассмотрены задачи о доминирующем множестве и о вершинном (реберном) списковом ранжировании. Вероятно, один из наиболее заметных (ввиду своей окончательности) результатов — это теорема 2.8, в которой для задачи о вершинном списковом ранжировании найдена граничная система относительно класса лесов. Также в главе установлен ряд интересных и важных соотношений между относительными граничными системами для различных классов графов. Такой подход является даже более общим, нежели подход теоремы 2.8 и ее аналогов.

Третья глава посвящена исследованию относительных граничных классов для еще одной классической сложной задачи — задачи отыскания максимального по мощности независимого множества вершин графа. Здесь граничные классы рассматриваются относительно класса планарных графов и класса субкубических планарных графов. Интересным в этой главе является, в частности, новый инструмент, предложенный автором, — "НМ-расширяющий оператор" (НМ — от "незавимое множество"). Этот инструмент позволил систематически генерировать простые (с точки зрения задачи о независимом множестве) подмножества множества графов, свободных от цепей и циклов длины 5. Это исключительно важно, поскольку, как верно замечает сам автор, "вычислительный статус задачи о независимом множестве в классе всех графов, свободных от цепи длины 5 и некоторого другого связного графа на не более чем пяти вершинах, не известен только для случая цикла длины 5" (цитата слегка вольная). Также весьма ярким достижением третьей главы служит теорема 3.9 о полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве в некотором довольно широком конкретном классе графов.

Четвертая глава диссертации направлена на установление континуальности множеств граничных классов для ряда важных задач на графах. Это дает все основания полагать, что задача о полном описании систем граничных классов зачастую необозримо трудна. Так, например, в теореме 4.1 доказано, что граничные системы для вершинной и реберной раскраски в 3 цвета уже континуальны, а в теоремах 4.2 и 4.3 аналогичные результаты получены для раскраски в k цветов с любым k. При этом автору удалось показать, что соотношения между граничными классами для разных задач из числа упомянутых весьма нетривиальны.

В **пятой главе** дается полная характеризация классов графов из достаточно представительного семейства по сложности задачи реберного спискового ранжирования. Например, найдены минимальные классы, в которых данная задача сложна. А также вводится важное понятие минора класса графов, позволяющее делать исчерпывающую классификацию такого типа. Замечательна теорема 5.6: в ней описываются все конечно определенные минимальные классы, в которых сложна задача реберного спискового ранжирования.

Наконец, в **главе 6** исследуются элементы границы между классами, в которых, соответственно, просты и сложны некоторые графовые задачи. Впервые приводятся полные описания совокупностей минимальных сложных классов.

Несомненно, диссертационная работа Д.С. Малышева — это крупный вклад в теорию сложности вычислений и в теорию графов. Она может быть полезна специалистам из многих ведущих профильных российских и мировых центров, среди которых МГУ им. М.В. Ломоносова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ИМ СО РАН, МФТИ, ВЦ РАН, МИРАН им. В.А. Стеклова, ИППИ РАН, Математический институт им. А. Реньи в Будапеште, университет Тель-Авива и др.

Разумеется, у любой работы есть и недостатки. Одним из основных недостатков данной работы является то, что в ней мало уделяется внимания связям с исследованиями, которые ведутся не только в нашей стране, но и за ее пределами. С одной стороны, следовало бы больше сказать об истории проблематики, а с другой стороны, даже немного досадно от того, что автор явно недостаточно пропагандирует свои результаты среди заинтересованных зарубежных специалистов. Это видно и по апробации работы, и по списку публикаций автора: они весьма представительны, но среди них могло бы быть и больше выступлений и статей на профильных конференциях, проходящих в Европе, США и др. Просто работа реально очень хорошая, и хотелось бы, чтобы это направление было известно как можно большему числу специалистов. В этом ключе и еще одно замечание. Автор использует русскоязычные (кириллические) аббревиатуры для названий задач: ВСР (вершинное списковое ранжирование), ДМ (доминирующее множество), НМ (независимое множество), РСР (реберное списковое ранжирование). Само по себе — не криминал (переводчики сделают аналоги латиницей), но даже меня на миг ввело в заблуждение обозначение РСР, настолько уже привычно оно как сокращение для сложностного класса (т.е. прямо в той же области!) “probabilistically checkable proofs”. И в качестве курьеза: на странице 18 упоминается выдача поисковика Гугл; а почему про Яндекс ни слова?

В целом работа написана хорошим языком, все результаты ясно и аккуратно обоснованы, изредка попадающиеся опечатки не влияют на понятность текста, автореферат верно отражает содержание диссертации. Указанные выше замечания никак не умаляют значимости работы.

Считаю, что диссертационная работа Д.С. Малышева полностью соответствует требованиям п. 9 “Положения о порядке присуждения ученых степеней” Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а Дмитрий Сергеевич Малышев заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

28.04.2014

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук

А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

И.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор

В.Н. Чубариков