

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Марков Алексей Сергеевич

**Исследование скорости сходимости
спектральных разложений обыкновенных
дифференциальных операторов**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор
Ломов Игорь Сергеевич

Москва – 2014

Содержание

Введение	4
Глава 1. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного чётного порядка . . .	9
1.1. Основные понятия и обозначения для глав 1-4	9
1.2. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка	23
1.3. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка	37
1.4. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка с матричными коэффициентами	44
1.5. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка с матричными коэффициентами	51
Глава 2. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного нечётного порядка .	56
2.1. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора первого порядка	56
2.2. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка	64
2.3. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора первого порядка с матричными коэффициентами	88
2.4. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка с матричными коэффициентами	90

Глава 3. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для операторов произвольного чётного порядка на всём интервале	94
3.1. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора второго порядка на всём интервале	94
3.2. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка на всём интервале	97
3.3. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора второго порядка с матричными коэффициентами на всём интервале	102
3.4. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка с матричными коэффициентами на всём интервале	104
 Глава 4. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для операторов произвольного нечётного порядка на всём интервале	 107
4.1. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка на всём интервале	107
4.2. Оценки скорости равномерности спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка с матричными коэффициентами на всём интервале	109
 Заключение	 112
 Список литературы	 113

Введение

В данной работе исследуются специальные функциональные ряды, полученные в результате разложения функций по собственным и присоединённым (корневым) функциям несамосопряжённых обыкновенных линейных дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами, заданных на конечном интервале числовой прямой. Решается задача о выяснении вопросов сходимости и скорости сходимости рядов для этого класса операторов.

Для решения этой задачи указанные ряды сравниваются с тригонометрическими рядами Фурье (ТРФ), которые получаются при разложении тех же функций по тригонометрической системе. Особенностью подхода является рассмотрение дифференциальных операторов на некотором классе функций без явного задания краевых условий. Сужение операторов задаётся так называемыми *условиями Ильина* на спектр и корневые функции этих операторов. Для проверки этих условий нужно знать, является ли полной/замкнутой система корневых функций в некотором пространстве $L_p(0, 1)$ и требуется знание асимптотик спектра и корневых функций.

Поскольку этих данных для применения в конкретных задачах рядов по корневым функциям недостаточно, результаты данной работы позволяют заменить их тригонометрическими рядами (для которых разработан богатый математический и вычислительный аппарат), учитывая полученную в работе оценку погрешности этой операции.

В работе рассмотрены дифференциальные операторы произвольного (чётного и нечётного) порядка, как в скалярном, так и в матричном случаях. Результаты также применимы к обычной системе экспонент, к различным системам синусов и системам косинусов. Для получения результатов не предполагается наличие сопряжённого оператора у рассматриваемых операторов. Это позволяет не накладывать условий гладкости на коэффициенты операторов, а краевые условия рассматривать самые разнообразные, либо вообще обходиться без краевых условий (налагая ограничения

на целые функции, как в случае системы экспонент). Такой подход был разработан В.А. Ильиным, и далее развит им и его учениками.

Корневые функции рассмотренных операторов и тригонометрическая система функций в общем случае удовлетворяют разным краевым условиям. Поэтому сравниваются ряды в метрике пространств L_p . При этом рассматривается как случай сравнения рядов на всём интервале задания дифференциальной операции, так и на произвольном внутреннем отрезке (частная задача, представляющая самостоятельный интерес).

Вопросы сходимости рядов по корневым функциям различных операторов исследуются с 18-го века (Л. Эйлер). Остановимся на кратком обзоре последних результатов, имеющих непосредственное отношение к теме представленной работы.

В работе [32] (в которых рассматривался тот же оператор, что и в [23]) была получена оценка $O(\ln \lambda / \lambda^{1/p})$ скорости равномерности спектральных разложений на всём интервале задания дифференциальной операции в интегральной метрике $\mathcal{L}^p(G)$, $p \geq 2$. Затем И.С. Ломов в своих статьях перенёс полученный результат на несамосопряжённый оператор Шрёдингера с точной оценкой $O(1/\lambda^{1/p})$ и на дифференциальный оператор 2-го порядка, у которого в дифференциальной операции коэффициент $p_1(x)$ при первой производной представляет собой негладкую суммируемую функцию, в [35], [36], $p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G)$, $s \geq 1$. Последующие результаты, опубликованные в [41], [42], получены для операторов произвольного чётного порядка – это аналогичные оценки на внутреннем компакте [41] и на всём интервале [42]; в работе [43] установлена зависимость рассматриваемой скорости равномерности от расстояния компакта до границы интервала. В работах [2], [3], [4], [5] С.В. Афониним и И.С. Ломовым были установлены аналогичные оценки для операторов произвольного нечётного порядка.

Сформулируем некоторые из полученных в диссертации результатов и укажем их отличия от предшествующих.

В работе рассмотрен оператор второго порядка, порождённый дифференциаль-

ной операцией $lu = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u$, $x \in G = (0, 1)$, на классе абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной функций, коэффициенты которого удовлетворяют следующим соотношениям: $p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C})$, $s > 1$, $q_1(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C})$, корневые функции, как и в работах В.А. Ильина, рассматриваются в обобщённом смысле. Зафиксировав произвольную систему $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ (собственные значения оператора L) и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ (корневые функции, отвечающие выбранной системе собственных значений), а также систему $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряжённую с $\{u_k\}$, сформулируем основные ограничения (условия Ильина или *Основные операторные условия*):

- 1) система $\{u_k\}$ минимальна и замкнута в $\mathcal{L}^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$;
- 2) существуют $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ такие, что

$$|\text{Im } \lambda_k| \leq c_1, \forall k; \quad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2, \forall \lambda \geq 0;$$

- 3) существует $c_3 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \|v_k\|_{r'} \leq c_3, \forall k,$$

где мы использовали следующие обозначения: $\|u_k\|_r = \|u_k\|_{\mathcal{L}^r(G)}$, $\|u_k\|_{r,K} = \|u_k\|_{\mathcal{L}^r(K)}$, $K \subset G$.

Для асимптотики коэффициентов f_k : $\exists \nu = \text{const} > 0 : \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu})$, $|\lambda_k| > 1$, где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$, И.С. Ломовым была доказана теорема [43], в которой получены оценки скорости равносходимости разложений для рассматриваемого нами оператора на внутреннем компакте, где $\eta = \rho(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G :

Теорема (И.С. Ломов) *При выполнении для оператора L и функции $f(x)$ основных операторных условий для достаточно больших чисел λ и внутреннего отрезка $K \subset G$ справедливы нижеследующие оценки.*

$$1). \quad \Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} \leq \\ \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda} + \|q_1\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda^\nu} + \|q_1\|_1 \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}} + \|p_1\|_s \max\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \end{cases}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае.

2). Если $s = \infty$, то есть $p_1(x) \in \mathcal{L}^\infty(G)$, то

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda} + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + \|p_1\|_\infty \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right). \end{cases}$$

3). Пусть $lu = u''$ и дополнительно к условиям теоремы система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^\alpha(G)$ для какого-либо числа $\alpha \in [1, \infty)$ (то есть $\forall f(x) \in \mathcal{L}^\alpha(G), \forall K \subset G : \|\sigma_\lambda(x, f) - f(x)\|_{\alpha,K} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$), тогда можно записать равномерные оценки

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{C(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda^\nu} \right]. \end{cases}$$

Постоянные $c > 0$ не зависят от λ и η .

В первой главе диссертации получены аналогичные результаты для оператора второго порядка, но асимптотика коэффициентов f_k была иной: $\exists \nu = const > 0, \beta = const : \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|)$, $|\lambda_k| > 1$. Для новой асимптотики для оператора произвольного чётного $(2n)$ порядка получены оценки скорости равномерности, указана зависимость скорости равномерности от расстояния компакта до границы интервала, затем все результаты были перенесены на случай операторов с матричными коэффициентами. Во второй главе решены аналогичные задачи для

операторов произвольного нечётного порядка, а в третьей и четвёртой главах получены результаты для всех рассматриваемых операторов, заданных на всём отрезке G .

Автор глубоко благодарен своему Учителю Ломову Игорю Сергеевичу за постановку задачи, постоянное внимание, поддержку и полезные замечания к работе.

Глава 1

Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного чётного порядка

Данная глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов второго и произвольного чётного порядков на любом внутреннем отрезке. Рассматриваются случаи оператора со скалярными коэффициентами, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами.

1.1. Основные понятия и обозначения для глав 1-4

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \quad (1.1.1)$$

на классе функций D – абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной;

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad q_1(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad (1.1.2)$$

корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) понимаются в обобщённом (по В.А. Ильину) смысле.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую этим собственным значениям, пусть $\{v_k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u_k\}$ система функций.

Сформулируем основные ограничения на корневые системы (на оператор L).

Определение 1.1. Под собственной функцией оператора L , отвечающей собственному значению $\lambda^2 \in \mathcal{C}$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} + \lambda^2 \overset{\circ}{u} = 0$.

Определение 1.2. Под присоединённой функцией порядка $m, m = 1, 2, \dots$, отвечающей тому же λ^2 и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $l \overset{m}{u} + \lambda^2 \overset{m}{u} = \mu_m \overset{m-1}{u}$, где либо $\mu_m = 1$ (задача 1), либо $\mu_m = \lambda, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$, при $|\lambda| \geq 1$ и $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2).

Рассматриваемые системы $\{\lambda_k\}, \{u_k(x), v_k(x)\}$ удовлетворяют трём условиям Ильина (назовём их Условия А1):

- 1) система $\{u_k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$;
- 2) существуют $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ такие, что

$$|Im \lambda_k| \leq c_1, \forall k; \quad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2, \forall \lambda \geq 0; \quad (1.1.3)$$

- 3) существует $c_3 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \|v_k\|_{r'} \leq c_3, \forall k, \quad (1.1.4)$$

где $v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G), r' = r/(r-1)$, через $\|\cdot\|_r$ обозначается норма в $\mathcal{L}^r(G)$. Заметим, что для проверки условий (1.1.3) и (1.1.4) из Условий А1 достаточно знать главные члены асимптотик для величин λ_k, u_k, v_k .

Через $S_0[\varphi(\rho, R)]$ обозначим (как и в работе В.А. Ильина [19]) усреднение функции по R :

$$S_0[\varphi(\rho, R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R \varphi(\rho, R) dR \quad (S_0[1] = 1).$$

Выпишем лемму о разрывном множителе Дирихле в $\mathcal{C}$ [43].

Лемма 1.1. *Справедливо следующее равенство*

$$\frac{2}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t \cos \lambda_k t}{t} dt \right] = \delta_k^\lambda + I_k^\lambda(R_0), \quad (1.1.5)$$

где

$$\delta_k^\lambda = (1 + \operatorname{sgn}(\lambda - |\operatorname{Re} \lambda_k|))/2, \quad (1.1.6)$$

а для слагаемого $I_k^\lambda(R_0)$ справедливы оценки

$$I_k^\lambda(R_0) = \begin{cases} \frac{1}{R_0} O(1) & \forall \lambda_k \in \{\lambda_k\}, \\ \frac{1}{R_0} \frac{O(1)}{|\lambda - |\lambda_k||} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_0^2} \frac{O(1)}{|\lambda - |\lambda_k||^2} & \forall \lambda_k \in \{\lambda_k\}. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Фиксируем произвольно числа $\alpha, \beta \in \overline{G}$, $\alpha < \beta$, $R \in [R_0/2, R_0]$, $\tau \in [0, R]$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, $\lambda > 0$ – достаточно большое число ($\lambda > 4$), $\{\lambda_k\} \in \mathcal{C}$, $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq c = \operatorname{const} < \infty$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующие интегралы:

$$K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_\tau^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k(r - \tau)}{r} dr, \quad \lambda_k \neq 0, \quad (1.1.8)$$

$$A_k^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int_\alpha^\beta |K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \quad A_k \equiv A_k^1(\lambda, \alpha, \beta, R). \quad (1.1.9)$$

Лемма 1.2. [38] *Равномерно по $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

$$1) \quad A_k = O(\lambda^{-1}), \quad A_k^s = O(\lambda^{-1}) \text{ при } |\lambda_k| \leq 1;$$

$$2) \quad A_k = O((\lambda |\lambda_k|)^{-1} \ln |\lambda_k|), \quad A_k^s = O(\lambda^{-1} |\lambda_k|^{-\frac{1}{s}}) \text{ при } 1 \leq |\lambda_k| \leq \frac{\lambda}{2};$$

$$3) \quad A_k = O(|\lambda_k|^{-2} \ln \lambda), \quad A_k^s = O(\lambda^{1-\frac{1}{s}} |\lambda_k|^{-2}) \text{ при } |\lambda_k| \geq \frac{3\lambda}{2};$$

$$4) \quad A_k = O(\lambda^{-1} \ln \lambda), \quad A_k^s = O(\lambda^{-\frac{1}{s}}) \text{ при } |\lambda - |\lambda_k|| \leq \frac{2}{R_0};$$

$$5) \quad A_k = O((|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1} \ln \lambda), \quad A_k^s = O(\lambda^{1-\frac{1}{s}}(|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1})$$

$$\text{при } \frac{2}{R_0} \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Лемма 1.3. [43] Пусть $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет второму Условию A1 (1.1.3). Тогда справедливы следующие оценки для величины $I_k^\lambda(R_0)$:

$$1) \quad \text{при } |\lambda_k| \leq \frac{\lambda}{2}: \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0^2} O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0} O\left(\frac{1}{\lambda}\right);$$

$$2) \quad \text{при } |\lambda_k| \geq \frac{3\lambda}{2}: \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0^2} O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right), \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0} O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right);$$

$$3) \quad \text{при } |\lambda - |\lambda_k|| \leq 2: \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0} O(1);$$

$$4) \quad \text{при } 2 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \frac{\lambda}{2}: \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0^2} O\left(\frac{1}{|\lambda - |\lambda_k||^2}\right), \quad I_k^\lambda = \frac{1}{R_0} O\left(\frac{1}{|\lambda - |\lambda_k||}\right).$$

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} p_l(x) \frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1; \quad (1.1.10)$$

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad p_l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad l = \overline{2, 2n},$$

на классе функций D_{2n} , абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка. Корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) определим в обобщённом (по В.А. Ильину) смысле.

Определение 1.3. Под собственной функцией оператора L , отвечающей значению $\lambda \in \mathcal{C}$ спектрального параметра, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D_{2n}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} - \omega \lambda^n \overset{\circ}{u} = 0$.

Определение 1.4. Под присоединённой функцией порядка $m, m = \overline{1, m_0}$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x) \in D_{2n}$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $l \overset{m}{u} - \omega \lambda^{2n} \overset{m}{u} = \mu_0 \overset{m-1}{u}$.

Здесь либо $\mu_0 = 1$ (спектральная задача 1), либо $\mu_0 = \nu_0 \lambda^{2n-1}$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_0 = \nu_0$ при $|\lambda| < 1$, $\nu_0 = \text{const} \neq 0$ (спектральная задача 2); будем считать, что $\lambda \in S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq 0, \arg \lambda \in [0, \pi/(2n)], \exists \gamma_0 > 0 : \text{Im } \lambda \leq \gamma_0\}$; $\omega = (-1)^n$.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L (1.1.10), отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие следующим трём условиям Ильина (Условия $A2$):

- 1) система $\{u_k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}^{r_0}(G)$;
- 2) $\lambda_k \in S_1$, существует $c_1 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_1, \forall \lambda \geq 0; \quad (1.1.11)$$

- 3) существует $c_2 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_{r_0} \|v_k\|_{r'_0} \leq c_2, \forall k, \quad (1.1.12)$$

где $\{v_k\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u_k\}$ система функций: $v_k \in \mathcal{L}^{r'_0}(G)$, $(u_k, v_j) = \delta_{kj} \forall k, j \in \mathbb{N}$, $r'_0 = r_0/(r_0 - 1)$; $\|\cdot\|_r$ – норма в $\mathcal{L}^r(G)$.

Введём скалярное произведение в пространстве h –компонентных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_h(x))$ и $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_h(x))$, определив его равенством

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \sum_{j=1}^h f_j(x) \cdot \overline{g_j(x)} dx. \quad (1.1.13)$$

Пространство h –компонентных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_h(x))$, для которых при фиксированном $p \geq 1$ существует интеграл

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^h |f_j(x)|^p dx,$$

будем обозначать символом $L_p^h[0, 1]$.

Норму вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_h(x))$ в пространстве $L_p^h[0, 1]$ введём соотношением

$$\|f\|_{L_p^h[0,1]} = \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^h |f_j(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.1.14)$$

Заметим, что скалярное произведение (1.1.13) всегда определено для двух h -компонентных вектор-функций $f(x)$ и $g(x)$, первая из которых принадлежит пространству $L_p^h[0, 1]$ при произвольном p , удовлетворяющем неравенствам $1 \leq p \leq +\infty$, а вторая – пространству $L_q^h[0, 1]$ при $q = p/(p-1)$ ($q = \infty$ при $p = 1$).

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + P(x)u' + Q(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} P(x) &= \{P_{ij}(x)\}, \quad P_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad i, j = \overline{1, h}, \\ Q(x) &= \{Q_{ij}(x)\}, \quad Q_{ij}(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), \quad u_j(x) \in D, \quad j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной.

Сформулируем основные ограничения на корневые системы (на оператор L).

Определение 1.5. *Под собственной функцией оператора L , отвечающей собственному значению $\lambda^2 \in \mathcal{C}$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x)$, все компоненты которой принадлежат классу D , удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} + \lambda^2 \overset{\circ}{u} = 0$ (в покомпонентной записи представляет собой систему).*

Определение 1.6. *Под присоединённой функцией порядка $m, m = 1, 2, \dots$, отвечающей тому же λ^2 и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию*

$\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет системе $l \overset{m}{u} + \lambda^2 \overset{m}{u} = \mu_m \overset{m-1}{u}$, где либо $\mu_m = 1$ (задача 1), либо $\mu_m = \lambda, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$, при $|\lambda| \geq 1$ и $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2).

Рассматриваемые системы $\{\lambda_k\}, \{u^k, v^k\}$ удовлетворяют трём условиям Ильина (назовём их *Условия А3*):

1) система $\{u^k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}_p^h(G)$;

2) существуют $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ такие, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq c_1, \forall k; \quad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2, \forall \lambda \geq 0; \quad (1.1.16)$$

3) существует $c_3 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}_p^h(G)} \|v^k\|_{\mathcal{L}_q^h(G)} \leq c_3, \forall k, p^{-1} + q^{-1} = 1. \quad (1.1.17)$$

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = \frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} P^l(x) \frac{d^{2n-l}u}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1,$$

где

$$\begin{aligned} P^1(x) &= \{P_{ij}^1(x)\}, P_{ij}^1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \forall i, j = \overline{1, h}, s > 1, \\ P^l(x) &= \{P_{ij}^l(x)\}, P_{ij}^l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \forall i, j = \overline{1, h}, \forall l = \overline{2, 2n}, \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), u_j(x) \in D_{2n}, j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

класс D_{2n} – абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка включительно функции.

Определение 1.7. Под собственной функцией оператора L , отвечающей значению $\lambda \in \mathcal{C}$ спектрального параметра, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x)$, все компоненты которой принадлежат классу D_{2n} , удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} - \omega \lambda^n \overset{\circ}{u} = 0$ (в покомпонентной записи представляет собой систему).

Определение 1.8. Под присоединённой функцией порядка $m, m = \overline{1, m_0}$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x) \in D_{2n}$, которая почти всюду в G удовлетворяет системе $l \overset{m}{u} - \omega \lambda^{2n} \overset{m}{u} = \mu_0 \overset{m-1}{u}$.

Здесь либо $\mu_0 = 1$ (спектральная задача 1), либо $\mu_0 = \nu_0 \lambda^{2n-1}$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_0 = \nu_0$ при $|\lambda| < 1$, $\nu_0 = \text{const} \neq 0$ (спектральная задача 2); будем считать, что $\lambda \in S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq 0, \arg \lambda \in [0, \pi/(2n)], \exists \gamma_0 > 0 : \text{Im } \lambda \leq \gamma_0\}$; $\omega = (-1)^n$.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u^k\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие следующим трём условиям Ильина (Условия A_4):

- 1) система $\{u^k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}_{r_0}^h(G)$;
- 2) $\lambda_k \in S_1$, существует $c_1 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_1, \quad \forall \lambda \geq 0; \quad (1.1.19)$$

- 3) существует $c_2 = \text{const} > 0$ такая, что

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \|v^k\|_{\mathcal{L}_{r'_0}^h(G)} \leq c_2, \quad \forall k, \quad (1.1.20)$$

где $\{v^k\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций: $v^k \in \mathcal{L}^{r'_0}(G)$, $(u^k, v^j) = \delta_{kj} \quad \forall k, j \in \mathbb{N}$, $r'_0 = r_0/(r_0 - 1)$.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + a_0(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \quad a_0(x) \in \mathcal{L}^s(G), \quad s > 1. \quad (1.1.21)$$

на классе функций D , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$.

Определение 1.9. Под собственной функцией оператора L , отвечающей спектральному параметру $\lambda \in C$, будем понимать любую не равную тождественно

ному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} - \omega \lambda \overset{\circ}{u}(x) = 0$, где $\omega = -i$ при $Im \Lambda \geq 0$ и $\omega = +i$ при $Im \Lambda < 0$.

Определение 1.10. Под присоединённой функцией порядка $m, m = 1, 2, \dots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}(x)$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду удовлетворяет уравнению $l \overset{m}{u}(x) - \omega \lambda \overset{m}{u}(x) = \mu_m \overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_m = 1$ (задача 1), либо $\mu_m = \lambda$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2).

Фиксируем произвольно числа $\alpha, \beta \in \overline{G}$, $\alpha < \beta$, $R \in [R_0/2, R_0]$, $\tau \in [0, R]$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, $\lambda > 0$ – достаточно большое число ($\lambda > 4$), $\{\lambda_k\} \in C$, $|Im \lambda_k| \leq c = const < \infty$, $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующие интегралы (для определенности положим $\omega = -i$, т.е. тем самым $Re \lambda_k \geq 0$):

$$\widehat{K}_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda r \exp \omega \lambda_k(r - \tau)}{r} dr, \quad (1.1.22)$$

$$A_k^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\widehat{K}_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \quad A_k \equiv A_k^1(\lambda, \alpha, \beta, R). \quad (1.1.23)$$

Далее, положим $\widehat{K}_0 \equiv \lambda_k [K_1 - iK_2]$, где

$$K_1(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k(r - \tau)}{r} dr, \quad (1.1.24)$$

$$K_2(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k(r - \tau)}{r} dr. \quad (1.1.25)$$

Положим также

$$A_{1k}^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int_{\alpha}^{\beta} |K_1(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \quad A_{1k} \equiv A_{1k}^1(\lambda, \alpha, \beta, R), \quad (1.1.26)$$

$$A_{2k}^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int_{\alpha}^{\beta} |K_2(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \quad A_{2k} \equiv A_{2k}^1(\lambda, \alpha, \beta, R). \quad (1.1.27)$$

Лемма 1.4. [2] Равномерно по $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:

- 1) $A_{1k} = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1} \ln \lambda)$, $A_{1k}^s = O(|\lambda_k|^{-1} \lambda^{-1/s})$ при $|\lambda_k| \leq 1$;
- 2) $A_{1k} = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1} \ln |\lambda_k|)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{-1/s} |\lambda_k|^{-1})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
- 3) $A_{1k} = O(|\lambda_k|^{-2} \ln \lambda)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{1-1/s} |\lambda_k|^{-2})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
- 4) $A_{1k} = O(\lambda^{-1})$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
- 5) $A_{1k} = O((|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1} \ln \lambda)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{1-1/s} (|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}) = O(\lambda^{-1/s} |\lambda - |\lambda_k||^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Лемма 1.5. [2] Равномерно по $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:

- 1) $A_{2k} = O(\lambda^{-1})$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda_k| \leq 1$;
- 2) $A_{2k} = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1} \ln |\lambda_k|)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1} |\lambda_k|^{-1/s})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
- 3) $A_{2k} = O(|\lambda_k|^{-2} \ln \lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{1-1/s} |\lambda_k|^{-2})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
- 4) $A_{2k} = O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1/s})$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
- 5) $A_{2k} = O((|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1} \ln \lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{1-1/s} (|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}) = O(\lambda^{-1/s} |\lambda - |\lambda_k||^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Лемма 1.6. [2] Равномерно по $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:

- 1) $A_k = O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$, $A_k^s = O(\lambda^{-1/s})$ при $|\lambda_k| \leq 1$;

$$2) \quad A_k = O(\lambda^{-1} \ln |\lambda_k|), \quad A_k^s = O(\lambda^{-1/s}) \text{ при } 1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2;$$

$$3) \quad A_k = O(|\lambda_k|^{-1} \ln \lambda), \quad A_k^s = O(\lambda^{1-1/s} |\lambda_k|^{-1}) \text{ при } |\lambda_k| \geq 3\lambda/2;$$

$$4) \quad A_k = O(1), \quad A_k^s = O(1) \text{ при } |\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0;$$

$$5) \quad A_k = O((|\lambda - |\lambda_k||)^{-1} \ln \lambda), \quad A_k^s = O(\lambda^{1-1/s} (|\lambda - |\lambda_k||)^{-1}) \\ \text{при } 2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2.$$

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq 0; \\ a_{n-1}(x) \in L^s(G), \quad s > 1, \quad a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-2}, \quad (1.1.28)$$

на классе функций D_n , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Собственные и присоединённые функции те же, что и в определениях 1.9 и 1.10.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А2.

Для $\alpha, \beta \in \overline{G}$, $\alpha < \beta$, $R \in [R_0/2, R_0]$, $\tau \in [0, R]$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, $\lambda \gg 1$, $\lambda_k \neq 0$, $\{\lambda_k\} \in S_1$, рассмотрим следующие интегралы:

$$K_l^+(\lambda, \lambda_k, \tau, R) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda r \exp \omega \lambda_k (r - \tau)}{r} dr, \quad (1.1.29)$$

$$A_{kl}^{s+}(\lambda, \alpha, \beta, R) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |K_l^+(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \quad A_{kl}^+ \equiv A_{kl}^{1+} = \int_{\alpha}^{\beta} |K_l^+| d\tau. \quad (1.1.30)$$

В работе [4] доказаны следующие леммы 1.7, 1.9, 1.10. Лемма 1.8 доказана в работе [39].

Лемма 1.7. *Равномерно по $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

- 1) $A_{kl}^+ = O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$, $A_{kl}^{s+} = O(\lambda^{-1/s})$ при $|\lambda_k| \leq 1$ (либо $|\lambda_k| \leq \Lambda_0$);
- 2) $A_{kl}^+ = O((\lambda \lambda_k)^{-1} \ln |\lambda_k|)$, $A_{kl}^{s+} = O(\lambda_k^{-1} \lambda^{-1/s})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
- 3) $A_{kl}^+ = O(|\lambda_k|^{-2} \ln \lambda)$, $A_{kl}^{s+} = O(\lambda^{1-1/s} |\lambda_k|^{-2})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
- 4) $A_{kl}^+ = O(\lambda^{-1})$, $A_{kl}^{s+} = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
- 5) $A_{kl}^+ = O(|\lambda_k|^{-1} |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \ln \lambda)$, $A_{kl}^{s+} = O(\lambda^{1-1/s} (|\lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||)^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Обозначим

$$Q_1(\lambda, t, r) = \sum_{j=0}^{l-1} [\omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda(t-r)} - \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda t} T_j^+(r)] + \sum_{j=l}^{n-1} \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda(t-r)}, \quad (1.1.31)$$

$$T_j^+(r) = e^{\omega_j \omega \lambda r} - \cos \lambda r.$$

Введём в рассмотрение величину Q_d^+ ($T_j^+(r) = T_d^+(r)$ при $j = d$):

$$Q_d^+(\lambda, t, r) = \begin{cases} e^{-\omega_d \omega \lambda(t-r)} - e^{-\omega_d \omega \lambda t} T_d^+(r), & 0 \leq d \leq l-1, \\ e^{-\omega_d \omega \lambda(t-r)}, & l \leq d \leq n-1. \end{cases} \quad (1.1.32)$$

Тогда $Q_1 = \sum_{d=0}^{n-1} \omega_d Q_d^+$. Рассмотрим интегралы

$$K_d^+(\lambda, \lambda_k, t, R) = \frac{1}{\lambda_k} \int_t^R \frac{\sin \lambda r}{r} Q_d^+(\lambda_k, t, r) dr, \quad (1.1.33)$$

$$A_{kd}^{s+}(\lambda, R) = \|K_d^+(\lambda, \lambda_k, t, R)\|_{s, [0, R]}, \quad s > 1, \quad A_{kd}^+ \equiv A_{kd}^{1+}. \quad (1.1.34)$$

(Как видно, введенный выше интеграл K_l^+ совпадает с выражением для интеграла K_d^+ при $d = l$).

Лемма 1.8. *Равномерно по R, t в указанных пределах имеют место следующие оценки ($d \neq l$, $0 \leq d \leq n-1$):*

$$1) K_d^+ = O(1/\lambda), A_{kd}^+ = O(1/\lambda), A_{kd}^{s+} = O(1/\lambda) \text{ при } |\lambda_k| \leq 1 \text{ (либо } |\lambda_k| \leq \Lambda_0);$$

$$2) K_d^+ = O(1/\lambda), A_{kd}^+ = O((\lambda\lambda_k)^{-1} \ln |\lambda_k|), A_{kd}^{s+} = O(\lambda_k^{-1/s} \lambda^{-1}) \\ \text{при } 1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2;$$

$$3) K_d^+ = O(\lambda/\lambda_k^2), A_{kd}^+ = O(|\lambda_k|^{-2} \ln \lambda), A_{kd}^{s+} = O(\lambda^{1-1/s} |\lambda_k|^{-2}) \\ \text{при } |\lambda_k| \geq 3\lambda/2;$$

$$4) K_d^+ = O(\lambda^{-1} \ln \lambda), A_{kd}^+ = O(\lambda^{-2} \ln \lambda), A_{kd}^{s+} = O(\lambda^{-1-1/s} \ln \lambda) \\ \text{при } |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2.$$

Лемма 1.9. *Пусть $0 < |\lambda_k| \leq \Lambda_0 < \infty$, $\lambda > 0, R \in G$. Равномерно по $\tau \in [0, R]$ справедлива оценка*

$$K_{T_d^+}(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_d^+(t) dt = O(1/\lambda), \quad d = \overline{0, n-1}. \quad (1.1.35)$$

Лемма 1.10. *Пусть $\tau \in [0, R_1]$, $0 < R \leq R_0 < R_1 < 1$, $1 < s < \infty$,*

$|Im \lambda_k| \leq \gamma_0$, $Re \lambda_k \geq 0$. Равномерно по $\tau, R, \lambda_k, \lambda$ имеют место следующие соотношения:

$$1) T_Y^+ = O(1/\lambda) \text{ при } |\lambda_k| \leq 1 \text{ (либо } |\lambda_k| \leq \Lambda_0);$$

$$2) T_Y^+ = O(1/\lambda), \|T_Y^+\|_1 = O((\ln |\lambda_k|)/(\lambda\lambda_k)), \|T_Y^+\|_s = O(1/(\lambda\lambda_k^{1/s})) \\ \text{при } 1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2;$$

$$3) T_Y^+ = O(\lambda/|\lambda_k|^2), \|T_Y^+\|_1 = O((\ln \lambda)/|\lambda_k|^2), \|T_Y^+\|_s = O(\lambda^{1-1/s}/\lambda_k^2) \\ \text{при } |\lambda_k| \geq 3\lambda/2;$$

$$4) T_Y^+ = O(1/\lambda), \|T_Y^+\|_1 = O((\ln \lambda)/\lambda^2), \|T_Y^+\|_s = O(1/\lambda^{1+1/s}) \\ \text{при } |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2.$$

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + A(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \{A_{ij}(x)\}, \quad A_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad i, j = \overline{1, h}, \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), \quad u_j(x) \in D, \quad j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной.

Сформулируем основные ограничения на корневые системы (на оператор L).

Определение 1.11. *Под собственной функцией оператора L , отвечающей спектральному параметру $\lambda \in \mathcal{C}$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x)$, все компоненты которой принадлежат классу D , удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u} - \omega \lambda \overset{\circ}{u}(x) = 0$ (в покомпонентной записи представляет собой систему), где $\omega = -i$ при $\text{Im} \lambda \geq 0$ и $\omega = +i$ при $\text{Im} \lambda < 0$.*

Определение 1.12. *Под присоединённой функцией порядка $m, m = 1, 2, \dots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}(x)$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет системе $l \overset{m}{u}(x) - \omega \lambda \overset{m}{u}(x) = \mu_m \overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_m = 1$ (задача 1), либо $\mu_m = \lambda$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2).*

В соответствии с произведёнными в леммах разбиениями множества $\{\lambda_k\}$ введём обозначения для сумм по рассматриваемым множествам значений λ_k : $\sum_1$ – сумма по тем λ_k , для которых справедливо неравенство $|\lambda_k| < 1$;

$$\sum_2 : 1 < |\lambda_k| \leq \lambda/2; \quad \sum_3 : |\lambda_k| \geq 3\lambda/2; \quad \sum_4 : |\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0;$$

$$\sum_5 : 2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2.$$

1.2. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \quad (1.2.1)$$

на классе функций D – абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной. Коэффициенты дифференциальной операции удовлетворяют условиям (1.1.2), корневые функции оператора L удовлетворяют Условиям А1.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$, $r \in [1, \infty)$, составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| < \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k = (f, v_k), \quad v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G), \quad r' = r/(r-1). \quad (1.2.2)$$

Пусть $\|\cdot\|_r$ – обозначение нормы в $\mathcal{L}^r(G)$, $\|\cdot\|_{r,K}$ – норма в $\mathcal{L}^r(K)$, $K \subset G$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице.

Выпишем условие на асимптотику коэффициентов f_k :

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| > 1, \quad (1.2.3)$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$. Предполагаем, что для оператора L_0 это условие выполняется.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$. Основная задача состоит в получении оценки малости для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для произвольного отрезка $K \subset G$.

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \rho(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G . Сформулируем основной результат. Будут рассмотрены

три ситуации. В каждой из них выписываются по две оценки скорости равномерности. Это связано с тем, что было установлено: если стремиться получить наилучшую оценку скорости равномерности по параметру λ , то загроубляется оценка по параметру η и наоборот, если оптимизировать оценку по η , при этом она улучшается на порядок, то ухудшается оценка по λ .

Теорема 1.1. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.1.2), (1.2.1), (1.2.3) и Условия A1. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$1) \quad \Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda} + \right. \\ \left. + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right], \\ \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1 \ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda} + \right. \\ \left. \|p_1\|_s \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right], \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае.

2) Если $s = \infty$, т.е. $p_1(x) \in \mathcal{L}^\infty(G)$, то

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + n_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \|p_1\|_\infty \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|p_1\|_\infty}{\lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right). \end{cases} \quad (1.2.5)$$

3) Пусть $lu = u''$ и дополнительно к условиям теоремы система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^\alpha(G)$ для какого-либо числа $\alpha \in [1, \infty)$ (то есть $\forall f(x) \in \mathcal{L}^\alpha(G), \forall K \subset G : \|\sigma_\lambda(x, f) - f(x)\|_{\alpha,K} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$), тогда можно записать равномерные оценки

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{C(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{n_1}{\lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right]. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Постоянные $c > 0$ в оценках (1.2.4) – (1.2.6) не зависят от λ и η .

Замечание 1. Оценки (1.2.4) теоремы 1.1 отражают зависимость скорости равносходимости разложений на отрезке K от параметров ν и β из условия (1.2.3) (т.е. от гладкости функции $f(x)$ и от свойств функций $v_k(x)$) и от параметров p и s . При этом, если $1/p - 1/s < 0$, т.е. $s < p$, то скорость равносходимости существенно зависит от s – степени суммируемости коэффициента $p_1(x)$. Явно указано, какой вклад в общую оценку вносит наличие коэффициентов $p_1(x), q_1(x)$ и бесконечного числа присоединённых функций. В частности, во второй оценке (1.2.4) наличие коэффициента $q_1(x)$ никак не влияет на итоговую оценку.

Замечание 2. Условия $p_1(x) \in \mathcal{L}^\infty(G)$, при котором справедливы оценки (1.2.5), недостаточно для того, чтобы коэффициент $p_1(x)$ можно было исключить подстановкой из уравнения для собственных и присоединённых функций.

Замечание 3. Равномерные оценки (1.2.6) выписаны для случая нулевых коэффициентов p_1 и q_1 потому, что при обосновании теоремы слагаемые, отвечающие случаю операции $lu = u''$, имеют равномерные по x оценки. В метрике $C(K)$ оценки можно записать и в случае, когда присутствуют коэффициенты p_1 и q_1 . Для этого следует в оценках (1.2.4) устремить $p \rightarrow \infty$ и положить $1/p = 0$.

Замечание 4. На всём отрезке $\overline{G}$ равномерной равносходимости $\sigma_\lambda(x, f)$ и $S_\lambda(x, f)$ может и не быть, поэтому мы устанавливаем в этом случае оценки в метрике $\mathcal{L}^p(G)$. Вывод оценок в $\mathcal{L}^p(K)$ – составная часть получения оценок в $\mathcal{L}^p(G)$, имеющая и самостоятельный интерес: во многих задачах функции разлагаются в ряды под знаком интеграла и бывает достаточно оценок в интегральной метрике.

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть $\Theta_\lambda(x, y) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_k(x) \bar{v}_k(y)$ – спектральная функция оператора L , $D_\lambda(x, y)$ – ядро Дирихле, спектральная функция оператора L_0 ; $\sigma_\lambda(x, f) = \int_{\overline{G}} \Theta_\lambda(x, y) f(y) dy$. Фиксируем произвольный отрезок $K \subset G$. Нас интересует оценка разности при

$\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\Delta_\lambda \equiv \int_K |\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)|^p dx = \int_K \left| \int_{\overline{G}} f(y) [\Theta_\lambda(x, y) - D_\lambda(x, y)] dy \right|^p dx. \quad (1.2.7)$$

Обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G)$, $R_0 = \eta/4$. Для любого числа $R \in [R_0/2, R_0]$ и любого $x \in K$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\omega_\lambda(\rho, R) = \begin{cases} (\sin \lambda \rho)/(\pi \rho), & |\rho| \leq R, \rho = x - y, \\ 0, & |\rho| > R. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Далее, как и в работах В.А. Ильина [19] и Т.А. Самарской [60], усредним функцию (1.2.8) по R :

$$S_0[\omega_\lambda(\rho, R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R \omega_\lambda(\rho, R) dR \quad (S_0[1] = 1), \quad (1.2.9)$$

добавим и вычтем под знаком модуля в правой части (1.2.7) выражение (1.2.9) и оценим модуль суммы через сумму модулей ($c_p = 2^{p-1}$, $v_0(x, y) = S_0[\omega_\lambda(\rho, R)]$) :

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\leq c_p \int_K \left| \int_{\overline{G}} f(y) [\Theta_\lambda(x, y) - v_0(x, y)] dy \right|^p dx + \\ &+ c_p \int_K \left| \int_{\overline{G}} f(y) [D_\lambda(x, y) - v_0(x, y)] dy \right|^p dx \equiv c_p(I + \widehat{I}). \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Оценим первый интеграл I в правой части (1.2.10); интеграл $\widehat{I}$ оценивается аналогично.

Заменим функцию $v_0(x, y)$ биортогональным рядом. При выполнении условия (1.1.2) и Условий А1 справедливо равенство [38] $\forall p \in [1, +\infty)$, $\forall f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\| \int_G f(y) \left[v_0(x, y) - \sum_{|\lambda_k| \leq \Lambda} (v_0, \bar{u}_k)(x) \bar{v}_k(y) \right] dy \right\|_{p,K} = 0, \quad (1.2.11)$$

которое может быть верно и в равномерной метрике. Действительно, пусть для некоторого $\alpha \in [1, \infty)$

$$f(y) \stackrel{\mathcal{L}^\alpha(K_0)}{=} \sum_k f_k u_k(y), \quad K_0 = [a - R_0, b + R_0]. \quad (1.2.12)$$

Здесь и далее обозначено через $\sum_k$ сумма $\sum_{k=1}^{\infty}$. Умножим обе части (1.2.12) скалярно на функцию $S_0[w_\lambda(\rho, R)]$. Так как ряд в (1.2.12) сходится в $\mathcal{L}^\alpha(K_0)$, то на K_0 его можно почленно интегрировать, а вне K_0 функция $S_0[w_\lambda(\rho, R)]$ как функция y при $x \in K$ равна нулю. Получаем равенство

$$\int_G f(y)v_0(x, y)dy = \sum_k f_k \int_G u_k(y)v_0(x, y)dy \quad \forall x \in K. \quad (1.2.13)$$

Для функций u_k имеет место формула среднего значения (легко получаемая интегрированием по частям после замены $A_1 u_k$ на $u_k'' + \lambda_k^2 u_k$). Обозначим

$$s_t(u_k(x)) = u_k(x+t) + u_k(x-t). \quad (1.2.14)$$

Тогда $\forall \lambda_k \in \mathcal{C}, \quad x \pm t \in G$:

$$s_t(u_k(x)) = 2u_k(x) \cos \lambda_k t - h_k(x, t), \quad (1.2.15)$$

где

$$h_k(x, t) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{x-t}^{x+t} A_1 u_k(\tau) \sin \lambda_k(|x - \tau| - t) d\tau, \quad \left. \frac{\sin \lambda_k(|x - \tau| - t)}{\lambda_k} \right|_{\lambda_k=0} = |x - \tau| - t, \quad (1.2.16)$$

а $A_1 u_k \equiv -p_1 u_k' - q_1 u_k$, если u_k – собственная функция, $A_1 u_k \equiv A_1^m u_k = \mu^{m-1} u_k - p_1^m u_k' - q_1^m u_k$, если $u_k = u_k^m$ – m -я присоединённая функция.

Исследуем в (1.2.11) и (1.2.13) структуру коэффициентов

$$\begin{aligned} \int_{\bar{G}} S_0[\omega_\lambda(\rho, R)] u_k(y) dy &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} u_k(y) dy \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} s_t(u_k(x)) dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[2u_k(x) \int_0^R \frac{\sin \lambda t \cos \lambda_k t}{t} dt - \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] = \\ &= u_k(x) \delta_k^\lambda + u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right]. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Здесь в проведённых преобразованиях мы сделали замены переменных $y - x = t$ при $y \geq x$ и $x - y = t$ при $y < x$, воспользовались формулой среднего (1.2.15) и леммой 1.1 о разрывном множителе Дирихле.

Подставим правую часть (1.2.17) в (1.2.11), (1.2.13) и соответственно в первый интеграл I в (1.2.10). Учитывая структуру δ_k^λ из (1.1.6), для интеграла I получаем выражение

$$I = \int_K \left| \sum_k f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] \right|^p dx. \quad (1.2.18)$$

Для исследования выражения (1.2.18) воспользуемся леммами 1.2 и 1.3 об оценках интегралов.

Рассмотрим выражение в правой части (1.2.18), содержащее $I_k^\lambda(R_0)$. Воспользовавшись оценками из леммы 1.3, соответствующими лучшей асимптотике по параметру λ и применив неравенство из работы [?]]

$$\exists c = const : \quad \|u_k\|_\infty \alpha_k^{-1} \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.2.19)$$

для достаточно больших λ получаем

$$\begin{aligned} \sum_k |f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0)| &\leq c \left[\frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2 \lambda} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{R_0} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-2} \right], \quad \widehat{f}_k \equiv \alpha_k f_k, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

равномерно по $x \in G$ (обозначение α_k введено в условии (1.2.3)).

Оценим слагаемые в правой части последнего неравенства. В первом слагаемом используем неравенство Гёльдера для $f_k = (f, v_k)$ и второе условие из Условий A1 (1.1.3), получаем $\frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_1 |\widehat{f}_k| \leq c_2 \|f\|_r \frac{1}{R_0^2 \lambda^2}$. Для остальных слагаемых используем оценку (1.2.3) и также второе условие из Условий A1 (1.1.3). Второе слагаемое $\sum_2$ оценим следующим образом: $\frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_2 |\widehat{f}_k| \leq \frac{c}{R_0^2 \lambda^2} \sum_{n=2}^{[\lambda/2]} n^{-\nu} \ln^{-\beta} n = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-2})$ при $\nu > 1$, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-2} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu-1})$ при $\nu < 1$. Для третьего слагаемого получаем $\frac{1}{R_0^2 \lambda} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \leq$

$\leq \frac{c}{R_0^2 \lambda} \sum_{n \geq [3\lambda/2]} n^{-\nu-1} \ln^{-\beta} n = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta} \lambda)$. Четвёртое слагаемое имеет, очевидно, оценку $\frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее $\frac{1}{R_0^2} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-2} \leq \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$. Объединяя установленные оценки, получаем равномерно по $x \in \overline{G}$

$$\sum_k |f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0)| \leq \frac{1}{R_0^2} O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.2.21)$$

Оценим эту же сумму, но уже с учётом оценок из леммы 1.3, соответствующих лучшей асимптотике по параметру R_0 (оценка по параметру λ загрубляется).

$$\begin{aligned} \sum_k |f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0)| &\leq c \left[\frac{1}{R_0 \lambda} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0 \lambda} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_0} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right], \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства (1.2.22). Для первого слагаемого $\frac{1}{R_0 \lambda} \sum_1 |\widehat{f}_k|$ имеем оценку $O(\frac{1}{R_0 \lambda})$. Вторую сумму оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0 \lambda} \sum_2 |\widehat{f}_k| &\leq \frac{c}{R_0 \lambda} \sum_2 |\lambda_k|^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k| = \varphi(\lambda, R_0), \text{ где } \varphi(\lambda, R_0) = O\left(\frac{1}{R_0 \lambda^\nu}\right) \text{ при} \\ \nu < 1, \varphi(\lambda, R_0) &= O\left(\frac{\ln \lambda}{R_0 \lambda \ln^\beta \lambda}\right) \text{ при } \nu = 1 \text{ и } \varphi(\lambda, R_0) = O\left(\frac{1}{R_0 \lambda}\right) \text{ при } \nu > 1. \end{aligned}$$

Для третьей суммы справедлива оценка $\frac{1}{R_0} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \leq \frac{c}{R_0} \sum_{n \geq [3\lambda/2]} \frac{1}{n^{\nu+1} \ln^\beta n} = O\left(\frac{1}{R_0 \lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)$. Сумма $\sum_4 |\widehat{f}_k|$ имеет, очевидно, оценку $O\left(\frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)$, а сумма $\sum_5$:

$$\frac{1}{R_0} \sum_5 \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda - |\lambda_k||} = O\left(\frac{\ln \lambda}{R_0 \lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right).$$

Объединяя полученные оценки, получаем

$$\sum_k |f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0)| \leq \frac{1}{R_0} O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.2.23)$$

Будем считать далее, не ограничивая общности, что $\lambda_k \neq 0$ (если $0 \in \{\lambda_k\}$, то в силу второго условия из Условий А1 (1.1.3) можем изменить $q_1(x)$ так, что $0 \notin \{\lambda_k\}$).

Преобразуем оставшуюся часть под знаком интеграла в (1.2.18). Сделаем замены переменных $x - r = \tau$ для $x > r$ и $r - x = \tau$ для $x < r$, а затем поменяем местами интегралы:

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv -\frac{1}{\pi} \sum_k \frac{f_k}{\lambda_k} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_{x-t}^{x+t} A_1 u_k(r) \sin \lambda_k(|x-r|-t) dr dt \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_k \frac{f_k}{\lambda_k} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t s_\tau(A_1 u_k(x)) \sin \lambda_k(\tau - t) d\tau dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) s_\tau(A_1 u_k(x)) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Обозначение $s_\tau(\cdot)$ введено в (1.2.14).

Расщепим в (1.2.24) $A_1 u_k$ на три слагаемых в соответствии с обозначением после формулы (1.2.16) и запишем (1.2.24) в виде $S = S_1 + S_2 + S_3$, где $S_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, получается из $S(x)$ в (1.2.24) после замены $A_1 u_k$ на $(-q_1 u_k)$, $\mu_k^{m-1} u_k$ и $(-p_1 u'_k)$ соответственно (считаем, что $u_k = \overset{m}{u}_k$ – присоединённая функция). Применяя обобщённое неравенство Минковского [14], покажем, что операция усреднения (1.2.9) не влияет на последующие преобразования:

$$\|S_0[K_0]\|_p \leq S_0[\|K_0\|_p] = S_0[A_k^p(\lambda, 0, 1, R)] \quad \forall p \geq 1. \quad (1.2.25)$$

Поскольку оценки леммы для интегралов A_k^s , A_k равномерны по R , а операция усреднения введена так, что $S_0[1] = 1$, то на последующие оценки эта операция не оказывает влияния. Указанная операция существенно использована лишь при рассмотрении (1.1.5).

Для получения оценки суммы $S_1(x)$ применим неравенство Юнга, соотношения (1.2.19), (1.2.25) и оценки из леммы 1.2 для A_k^p (используем обозначение $\|\cdot\|_{p,K}$ для нормы в $\mathcal{L}^p(k)$):

$$\begin{aligned} \|S_1\|_{p,K} &\leq c \|q_1\|_1 \sum_k |\widehat{f}_k| S_0[\|K_0\|_{p,(0,R_0)}] \leq \\ &\leq c \|q_1\|_1 \sum_k |\widehat{f}_k| S_0[A_k^p(\lambda, 0, R_0, R)] \leq c_0 (\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-\frac{1}{p}}| + \\ &+ \lambda^{\frac{1}{q}} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| + \lambda^{-\frac{1}{p}} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{\frac{1}{q}} \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| |\lambda - |\lambda_k||^{-1}), \\ p &\neq 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Установим общую оценку для правой части (1.2.26). Как и выше, получаем $\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| = O(\lambda^{-1})$. Далее имеем $\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1/p}| \leq c \lambda^{-1} \sum_{n=2}^{[\lambda/2]} n^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta} n = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1/q$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1/q$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p})$ при $\nu < 1/q$. Для третьего слагаемого $\sum_3$ находим, что

$$\lambda^{1/q} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| \leq c \lambda^{1/q} \sum_{n \geq 3\lambda/2} n^{-\nu-2} \ln^{-\beta} n = O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta} \lambda).$$

Оценка для четвёртого слагаемого $\sum_4$ имеет вид $\lambda^{-1/q} \sum_4 |\widehat{f}_k| = O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta} \lambda)$.

Наконец, оцениваем последнее слагаемое $\sum_5$:

$$\begin{aligned} \lambda^{1/q} \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} &\leq c \lambda^{-\nu+1/q-1} \ln^{-\beta} \lambda \sum_5 |\lambda - |\lambda_k||^{-1} = \\ &= O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta+1} \lambda). \end{aligned}$$

При $p = 1$ преобразуем S_1 по той же схеме:

$$\begin{aligned} \|S_1\|_{p,K} &\leq c \|q_1\|_1 \sum_k |\widehat{f}_k| S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)] \leq c_0 (\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \\ &+ \lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \ln |\lambda_k| + \ln \lambda \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| + \lambda^{-1} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \\ &+ \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| |\lambda - |\lambda_k||^{-1}) \leq c_2 \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Объединяя установленные оценки, получаем

$$\|S_1\|_{p,K} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}} \ln^{\beta} \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}}}\right)\right). \quad (1.2.27)$$

Рассмотрим выражение из $S_2(x)$, полученное применением формулы среднего (1.2.15):

$$I_\lambda \equiv \frac{1}{\lambda_k} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t s_\tau(\mu_m^{m-1} u_k(x)) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau dt \right]. \quad (1.2.28)$$

Используем модифицированную формулу среднего ($x \pm t \in \overline{G}$, $\lambda_k \in \mathcal{C}$), полученную в работе [38]

$$s_t(u_k^m(x)) = 2 \sum_{l=0}^m \mu_m^l u_k^{m-1}(x) B_t^l(\cos \lambda_k t_l) - \sum_{l=0}^m \mu_m^l B_t^{l+1} [s_{t_{l+1}}(p_1(x) u_k'^{m-l}(x) + q_1(x) u_k^{m-l}(x))], \quad (1.2.29)$$

где $B_t^0(g(t_0)) \equiv g(t)$, $B_t^1(g(t_1)) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t g(t_1) \sin \lambda_k(t - t_1) dt_1$,

$$B_{t_0}^l(g(t_l)) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{l-1}} \left[g(t_1) \prod_{j=1}^l \sin \lambda_k(t_{j-1} - t_j) \right] dt_l \dots dt_1, \quad l = \overline{1, m_k};$$

при $\lambda_k = 0$ следует положить $\lambda_k^{-1} \sin \lambda_k(t_{j-1} - t_j) \equiv t_{j-1} - t_j$. Формула для $s_\tau(\mu_m^{m-1} u_k'(x))$ получается из (1.2.29) умножением на μ_m , заменой t на τ и m на $m-1$; обозначим $n = m-1$. Подставим полученное выражение в интеграл (1.2.28):

$$\begin{aligned} I_\lambda = & \frac{2}{\lambda_k} \sum_{l=0}^n \mu_m^{l+1} u_k^{n-1}(x) S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t B_\tau^l(\cos \lambda_k t_l) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau dt \right] - \\ & - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=0}^n \mu_m^{l+1} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t B_\tau^{l+1} [s_{t_{l+1}}(p_1(x) u_k^{n-l}(x) + \right. \\ & \left. + q_1(x) u_k^{n-l}(x))] \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau dt \right] \equiv I_{\lambda 1}(x) - I_{\lambda 2}(x), \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

где через $I_{\lambda 1}$ обозначена первая сумма по l , через $I_{\lambda 2}$ – вторая.

В $I_{\lambda 2}$ поменяем местами интегралы и воспользуемся для u_k оценками для производных и оценками антиаприорного типа:

$$\begin{aligned} |I_{\lambda 2}| = & \left| \sum_{l=0}^n \mu_m^{l+1} S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) B_\tau^{l+1} [s_{t_{l+1}}(p_1(x) u_k^{n-l}(x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_1(x) u_k^{n-l}(x))] d\tau \right] \right| \leq c \alpha_k(|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \|q_1\|_1) S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)] \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

равномерно по $x \in K$. В сумме $I_{\lambda 1}$ рассмотрим интегралы

$$I_{\lambda 1}^l \equiv 2S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t B_\tau^l(\cos \lambda_k t_l) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau dt \right]. \quad (1.2.32)$$

Если $|\lambda_k| \leq 1$, то, проинтегрировав по t по частям ($\sin \lambda t$ интегрируем) и используя первую из оценок второго пункта Условий А1, получаем

$$I_{\lambda 1}^l = O\left(\frac{1}{R_0 \lambda}\right), \quad |\lambda_k| \leq 1, \lambda > 1, l = \overline{0, n}. \quad (1.2.33)$$

Пусть $|\lambda_k| > 1$. Тогда

$$B_t^l(\cos \lambda_k t_l) = \frac{1}{2^{l+1}} \frac{1}{\lambda_k^l} [P_{1l}(t) \sin \lambda_k t + P_{2l}(t) \cos \lambda_k t], \quad (1.2.34)$$

где $P_{1l}(t)$ – многочлен относительно t нечётной степени, $P_{1l}(-t) = -P_{1l}(t)$, с коэффициентами порядка $O(1)$ при $|\lambda_k| \geq 1$, $P_{1l}(0) = 0$; $P_{2l}(t)$ – многочлен чётной степени, $P_{2l}(-t) = P_{2l}(t)$, с коэффициентами порядка $O(1)$ при $|\lambda_k| \geq 1$, $P_{2l}(0) = 0$.

Поскольку интеграл по τ в (1.2.32) есть $\lambda_k B_t^{l+1}(\cos \lambda_k t_{l+1})$, то из (1.2.34) получаем

$$\int_0^t B_\tau^l(\cos \lambda_k t_l) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2^{l+2}} \frac{1}{\lambda_k^l} [P_{1l+1}(t) \sin \lambda_k t + P_{2l}(t) \cos \lambda_k t].$$

Подставим это выражение в (1.2.32), сократим на t и преобразуем произведения тригонометрических функций в суммы. Тогда если $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 1$, то

$$I_{\lambda 1}^l = O\left(\frac{1}{R_0 |\lambda_k|^l}\right), \quad |\lambda - |\lambda_k|| \leq 1, l = \overline{0, n}. \quad (1.2.35)$$

Если $|\lambda - |\lambda_k|| > 1$, то проинтегрируем (1.2.32) по t и учтём, что подстановки при $t = 0$ обратятся в нуль ($P_{2l+1}(t)/t = 0$ при $t = 0$ и либо $P_{1l+1}(t)/t = 0$ при $t = 0$, либо $\sin(\lambda \pm \lambda_k)t = 0$ при $t = 0$). В результате получаем сумму синусов и косинусов с аргументами $(\lambda \pm \lambda_k)R$ с коэффициентами, зависящими от R и имеющими порядок $O(\lambda_k^{-l} |\lambda - |\lambda_k||^{-1})$. Операция усреднения по R приводит к оценке

$$I_{\lambda 1}^l = O\left(\frac{1}{R_0 \lambda_k^l |\lambda - |\lambda_k||^2}\right), \quad |\lambda - |\lambda_k|| \geq 1, |\lambda_k| > 1, l = \overline{0, n}. \quad (1.2.36)$$

Таким образом, интегралы $I_{\lambda 1}^l$ удовлетворяют соотношениям (1.2.33), (1.2.35) и (1.2.36). Подставляя эти оценки в первую сумму (1.2.30), получаем при $|\lambda| > 1$

$$\begin{aligned} I_{\lambda 1} &= \alpha_k O\left(\frac{1}{R_0 \lambda}\right), |\lambda_k| \leq 1; \quad I_{\lambda 1} = \alpha_k O\left(\frac{1}{R_0}\right), |\lambda - |\lambda_k|| \leq 1; \\ I_{\lambda 1} &= \alpha_k O\left(\frac{1}{R_0 |\lambda - |\lambda_k||^2}\right), |\lambda - |\lambda_k|| > 1, |\lambda_k| > 1. \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

Оценки не изменятся, если сравнивать $|\lambda - |\lambda_k||$ с числом $2/R_0$ вместо 1. Этим завершено исследование интеграла I_λ (1.2.28).

Подставляя в сумму $S_2(x)$ оценки (1.2.31), (1.2.37) интеграла I_λ и используя

лемму 1.2, получаем

$$\begin{aligned}
|S_2(x)| &\leq c \sum_k |\widehat{f}_k| [I_{\lambda 1} + (|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \|q_1\|_1) S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)]] \leq \\
&\leq \frac{c_0}{R_0} \left[\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-2} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \sum_4 |\widehat{f}_k| + \right. \\
&+ \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-2} \left. \right] + c_0 \left[\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \sum_2 (|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \right. \\
&+ \|q_1\|_1) |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \ln |\lambda_k| + \ln \lambda \sum_3 (|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \|q_1\|_1) |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| + \\
&+ \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 (|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \|q_1\|_1) |\widehat{f}_k| + \ln \lambda \sum_5 (|\lambda_k| \|p_1\|_1 + \\
&+ \|q_1\|_1) |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \left. \right]. \tag{1.2.38}
\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение, стоящее в первой квадратной скобке в правой части последнего неравенства, при Условиях А1 и условии (1.2.3). Для первого слагаемого $\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k|$ получаем оценку $O(\lambda^{-1})$. Второе слагаемое оценим следующим образом: $\lambda^{-2} \sum_2 |\widehat{f}_k| = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-2})$ при $\nu > 1$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-2} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1})$ при $\nu < 1$. Третье слагаемое $\lambda^{-1} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}|$ имеет, очевидно, оценку $O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta} \lambda)$. Последние два слагаемых $\sum_4$ и $\sum_5$ имеют оценку $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$. Таким образом, для первой квадратной скобки в (1.2.38) справедлива оценка

$$O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \tag{1.2.39}$$

Для оценки выражения, стоящего во второй квадратной скобке в правой части неравенства (1.2.38), обозначим его $\widetilde{S}$, воспользуемся Условиями А1 и (1.2.3) и рассмотрим два случая.

І) В случае $\|p_1\|_1 = 0$ слагаемые, входящие в $\widetilde{S}$, оцениваются следующим образом: оценка первого и второго слагаемых не превосходит величины $O(\lambda^{-1})$, третье и четвёртое слагаемые имеют оценку $O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$, а последнее слагаемое – оценку $O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta+2} \lambda)$. Таким образом, при $\|p_1\|_1 = 0$ справедлива оценка

$$\widetilde{S} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{1.2.40}$$

II) В случае $\|p_1\|_1 \neq 0$ для первого слагаемого выводим оценку $O(\lambda^{-1})$; второе слагаемое имеет оценки $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu < 1$, $O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+2} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu > 1$, третье и четвёртое слагаемые – оценку $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$, а последнее слагаемое – оценку $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+2} \lambda)$.

Таким образом, для выражения во второй квадратной скобки в случае $\|p_1\|_1 \neq 0$ справедлива оценка

$$\tilde{S} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.2.41)$$

Объединяя попарно оценки (1.2.39), (1.2.40) и (1.2.39), (1.2.41), получаем оценку суммы $S_2(x)$ при $\|p_1\|_1 = 0$ и при $\|p_1\|_1 \neq 0$ в виде

$$S_2(x) = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \|p_1\|_1 \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.2.42)$$

Оценивая сумму $S_3(x)$, содержащую коэффициент $p_1(x)$, будем использовать полученное в работах [?] , [34] неравенство $\|u'_k\|_\infty \leq c(1 + |\lambda_k|)\|u_k\|_\infty$, справедливое при Условиях A1. По условию $p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G)$. Рассмотрим сначала случай $s \geq p$, тогда $p_1 \in \mathcal{L}^p(G)$. Используя под знаком интеграла указанное неравенство, переходя от нормы суммы к сумме норм и применяя обобщённое неравенство Минковского к $\mathcal{L}^p$ –норме следующего интеграла

$$J(x) = \int_0^R S_0[|K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|] s_\tau(|p_1(x)|) d\tau, \quad (1.2.43)$$

получаем оценку $\|S_3\|_{p,K} \leq c_1 \|p_1\|_p \sum_k |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)]$, $p \geq 1$, где также на последнем шаге воспользовались соотношением (1.2.25). Сравнивая правую часть последнего неравенства с формулой (1.2.38), заключаем, что для $\|S_3\|_{p,K}$ в случае $s \geq p$ имеет место оценка (1.2.42).

Пусть $s < p$. Проведём те же преобразования, что и в случае $s \geq p$, но к интегралу (1.2.43) применим неравенство Юнга: $\|J\|_{p,K} \leq 2\|p_1\|_s \|S_0[|K_0|]\|_{\kappa,(0,R_0)} \leq 2\|p_1\|_s S_0[A_k^\kappa(\lambda, 0, R_0, R)]$, где также использовали соотношение (1.2.25). Параметр κ

связан с параметрами задачи следующим образом: $1/\kappa = 1 + 1/p - 1/s < 1$, ($s < p$).

Учитывая оценки из леммы 1.2 для A_k^κ , для S_3 имеем

$$\begin{aligned} \|S_3\|_{p,K} &\leq c \|p_1\|_s \sum_k |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_k^\kappa(\lambda, 0, R_0, R)] \leq c_0 \|p_1\|_s \left[\lambda^{-1} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \right. \\ &+ \lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{1-\frac{1}{\kappa}}| + \lambda^{1-\frac{1}{\kappa}} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \lambda^{-\frac{1}{\kappa}} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \\ &\left. + \lambda^{1-\frac{1}{\kappa}} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

Оценим правую часть последнего неравенства по прежней схеме: первое слагаемое в квадратных скобках имеет оценку $O(\lambda^{-1})$; второе – оценку $\varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 2 - 1/\kappa$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 2 - 1/\kappa$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/\kappa+1}) = O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s})$ при $\nu < 2 - 1/\kappa$; третье – оценку $O(\lambda^{-\nu-1/\kappa+1} \ln^{-\beta} \lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta} \lambda)$; такая же оценка имеет место для четвёртого слагаемого. Последнее слагаемое оценим следующим образом: $\lambda^{1-1/\kappa} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} = O(\lambda^{-\nu-1/\kappa+1} \ln^{-\beta+1} \lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta+1} \lambda)$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|S_3\|_{p,K} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}}\right)\right). \quad (1.2.45)$$

Объединяя оценки (1.2.21), (1.2.27), (1.2.42), (1.2.45), получаем первую из оценок (1.2.4) теоремы 1.1, а объединяя оценки (1.2.23), (1.2.27), (1.2.42), (1.2.45) – вторую из оценок (1.2.4).

В работе [38] показано, что для оценки сумм S_2 и S_3 в случае $p_1 \in \mathcal{L}^\infty(G)$ можно немного улучшить оценку, заменив в числителе $\ln^2 \lambda$ на $\ln \lambda$. Для этого дополнительно исследуются слагаемые $\sum_2$ (при $\nu = 1$) и $\sum_5$, в результате это приводит к оценке двух новых выражений U_{23} и U_{51} вместо упомянутых сумм. После подстановки асимптотики для $\widehat{f}_k$ получаем:

$$U_{23} \leq \|p_1\|_\infty S_0 \left[\left\| \int_{1/\lambda}^R \left| \sum_2 f_k \Psi_3 \lambda_k^{-1} u'_k(x + \tau) \right| d\tau \right\|_{p,K} \right] \leq O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda), \quad (1.2.46)$$

где

$$\Psi_3 \equiv \lambda_k K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R),$$

а последнее выражение

$$U_{51} \leq c \|p_1\|_p \lambda^{-(\nu-1/p)} \ln^{-\beta} \lambda \left(\sum_5 |\lambda_k|^{-q} \right)^{1/q}, \quad (1.2.47)$$

имеет оценку $U_{51} = O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $p = \infty$.

Теорема доказана.

1.3. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} p_l(x) \frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1; \quad (1.3.1)$$

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad p_l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad l = \overline{2, 2n},$$

на классе функций D_{2n} , абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ вместе со своими производными до $(2n-1)$ -го порядка. Корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) введены в определениях 1.3 и 1.4.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условию А2. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u_k^{m-1}\|_{r_0} \leq c \alpha_\lambda \|u_k^m\|_{r_0}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (1.3.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n = 1$ эта оценка всегда выполняется при условии (1.1.11) из Условий А2. Пусть также

$$\|u_k\|_\infty \leq c \|u_k\|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.3.3)$$

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^{r_0}(G)$ составим частичные суммы биортонормального разложения $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x)$, $\lambda > 0$, $f_k \equiv (f, v_k)$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 : L_0 u = u''$, $u \in D_2$, с условиями периодичности для u и u' в нуле и единице.

Будем также предполагать, что для $\{u_k, v_k\}$ и $f(x)$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v_k\|_{r'_0}^{-1}; \quad (1.3.4)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \widehat{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (1.3.5)$$

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G . Сформулируем основные результаты в каждом из случаев (1.3.4) и (1.3.5). Выписываются по две оценки скорости равносходимости. Это связано с тем, что было установлено: если стремиться получить наилучшую оценку скорости равносходимости по параметру λ , то загроубляется оценка по параметру η и наоборот, если оптимизировать оценку по η , при этом она улучшается на порядок, то ухудшается оценка по λ (см. [43]).

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 1.2. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.3.1) – (1.3.4) и Условия А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} \leq & \left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu} \right], \\ & \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max t_k$; если при этом $p_1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\infty, K} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0}{\lambda^\nu} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right]. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Теорема 1.3. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.3.1) – (1.3.3), (1.3.5) и Условия А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right] \end{cases} \quad (1.3.8)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max t_k$; если при этом $p_1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\infty, K} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right]. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Замечание. При $\beta = 0$ оценки (1.3.8), (1.3.9) переходят в оценки (1.3.6), (1.3.7), поэтому доказывать будем сразу теорему 1.3.

Доказательство теоремы 1.3. Зафиксируем произвольный отрезок $K \subset G$. Обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G)$, $R_0 = \eta/4$. Введём операцию усреднения функции

$\varphi(R)$, $R \in [R_0/2, R_0]$:

$$S_0[\varphi(R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R\varphi(R) dR \quad (S_0[1] = 1). \quad (1.3.10)$$

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – система спектральных параметров, удовлетворяющая второму Условию А2 (1.1.11): $\lambda_k \in S_1$; $\lambda > 0$ – фиксированное достаточно большое вещественное число. При условиях теоремы справедливы леммы 1.1 и 1.3.

Выпишем оценки Δ_λ , полученные в [41] при условиях теоремы 1.2. Для этого нам потребуются следующие обозначения:

$$H_1 = \|p_1\|_p \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \ln |\lambda_k| + \ln \lambda \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right]; \quad (1.3.11)$$

$$H_2 = \|p_1\|_s \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{1-1/\varkappa}| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1/\varkappa} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \right]; \quad (1.3.12)$$

$$H_3 = \|p_l\|_1 \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1/p}| + \lambda^{1-1/p} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-2}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1/p} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1/p} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \right]; \quad (1.3.13)$$

$$H_4 = \|p_l\|_1 \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1} \ln |\lambda_k|| + \ln \lambda \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-2}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k| + \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| ((|\lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||)^{-1} + \lambda^{-2}) \right]; \quad (1.3.14)$$

$$H_5 = \left(\sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \right) \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \lambda \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| \right]. \quad (1.3.15)$$

Для Δ_λ справедлива оценка

$$\Delta_\lambda \leq c \left[\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| + \widehat{S} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (1.3.16)$$

где $c = \text{const} > 0$, не зависящая от λ и R_0 , и все оценки равномерны по R_0 .

Для $\widehat{S}$ получены оценки через коэффициенты $\widehat{f}_k$ в зависимости от соотношений между параметрами s и p :

$$\text{при } p = 1 : \quad \widehat{S} = H_1 + H_4,$$

$$\text{при } p > 1 :$$

$$\text{если } s \geq p : \quad \widehat{S} = H_1 + H_3,$$

$$\text{если } s < p : \quad \widehat{S} = H_2 + H_3,$$

$$\text{при } p_1 \equiv 0 : \quad \widehat{S} = H_5.$$

Приступим к оценке выражения (1.3.16). Оценим выражение $\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)|$, используя оценки леммы 1.3, соответствующие лучшей асимптотике по параметру λ :

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| &\leq \left[\frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2 \lambda} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{R_0} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0^2} \sum_5 \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda - |\lambda_k||^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Первое слагаемое имеет оценку $\frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-2})$. Второе слагаемое оценим следующим образом: $\frac{1}{R_0^2 \lambda^2} \sum_2 |\widehat{f}_k| \leq \frac{c}{R_0^2 \lambda^2} \sum_{n=\Lambda_0}^{[\lambda/2]} n^{-\nu} \ln^{-\beta} n = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-2})$ при $\nu > 1$,

т.к. сходится соответствующий интеграл $\int_{\Lambda_0}^{[\lambda/2]} x^{-\nu} \ln^{-\beta} x \, dx$, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-2} \ln^{-\beta+1} \lambda)$

при $\nu = 1$ и $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu-1})$ при $\nu < 1$ в силу того, что $\frac{c}{R_0^2 \lambda^2} \int_{\Lambda_0}^{[\lambda/2]} x^{-\nu} \ln^{-\beta} x \, dx \leq$

$$\frac{c_1}{R_0^2 \lambda^2} \int_{\Lambda_0}^{[\lambda/2]} x^{-\nu} \, dx. \text{ Для третьего слагаемого получаем } \frac{1}{R_0^2 \lambda} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \leq$$

$$\leq \frac{c}{R_0^2 \lambda} \sum_{n \geq [3\lambda/2]} n^{-\nu-1} \ln^{-\beta} n \sim \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta} \lambda). \text{ Слагаемое с } \sum_4 \text{ имеет оценку}$$

$$\frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda), \text{ а последнее слагаемое } \frac{1}{R_0^2} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-2} \leq \frac{1}{R_0^2} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda).$$

Объединяя установленные оценки, соответствующие лучшей асимптотике по параметру λ , получаем

$$\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| \leq \frac{1}{R_0^2} O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.18)$$

Теперь оценим $\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)|$ с учётом оценок из леммы 1.3, соответствующих лучшей асимптотике по параметру R_0 (оценка по параметру λ загрубляется):

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| &\leq \left[\frac{1}{R_0 \lambda} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0 \lambda} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{R_0} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{R_0} \sum_5 \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda - |\lambda_k||} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Первое слагаемое имеет оценку $\frac{1}{R_0} O(\lambda^{-1})$. Второе слагаемое оценим следующим образом: $\frac{1}{R_0 \lambda} \sum_2 |\widehat{f}_k| \leq \frac{c}{R_0 \lambda} \sum_{n=2}^{[\lambda/2]} n^{-\nu} \ln^{-\beta} n = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0} O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1$, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0} O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $\varphi(\lambda) = \frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu})$ при $\nu < 1$. Для третьего слагаемого получаем $\frac{1}{R_0} \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1}| \leq \frac{c}{R_0} \sum_{n \geq [3\lambda/2]} n^{-\nu-1} \ln^{-\beta} n \sim \frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$. Слагаемое с $\sum_4$ имеет оценку $\frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее слагаемое $\frac{1}{R_0} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k|| \leq \frac{1}{R_0} O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$.

Объединяем полученные оценки:

$$\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| \leq \frac{1}{R_0} O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.20)$$

Оценим выражение для H_1 из (1.3.11). Первое слагаемое оценим следующим образом: $\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \ln |\lambda_k| = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+2} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu})$ при $\nu < 1$. Второе слагаемое $\ln \lambda \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda = O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$. Третье слагаемое имеет оценку $\lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| \leq O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$, а последнее – $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+2} \lambda)$. Таким образом,

$$H_1 = \|p_1\|_p O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.21)$$

Оценим H_2 из (1.3.12). Первое слагаемое оценим следующим образом:

$\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{1-1/\kappa}| = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 2 - 1/\kappa$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 2 - 1/\kappa$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s})$ при $\nu < 2 - 1/\kappa$. Второе слагаемое $\lambda^{1-1/\kappa} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda \sim O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta} \lambda)$. Третье слагаемое имеет оценку $\lambda^{-1/\kappa} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| \leq O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее – $O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta+1} \lambda)$. Таким образом,

$$H_2 = \|p_1\|_s O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.22)$$

Оценим выражение H_3 из (1.3.13). Первое слагаемое оценим следующим образом: $\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1/p}| = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1 - 1/p$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1 - 1/p$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p})$ при $\nu < 1 - 1/p$. Второе слагаемое $\lambda^{1-1/p} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-2}| \ln^{-\beta} \lambda \sim O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta} \lambda)$. Третье слагаемое имеет оценку $\lambda^{-1/p} \sum_4 |\widehat{f}_k| \leq O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее – $O(\lambda^{-\nu-1/p} \ln^{-\beta+1} \lambda)$. Таким образом,

$$H_3 = \|p_l\|_1 O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.23)$$

Выражение H_4 из (1.3.14) имеет оценку

$$H_4 = \|p_l\|_1 O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.24)$$

Выражение H_5 из (1.3.15) имеет оценку

$$H_5 = \left(\sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1\right) O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (1.3.25)$$

Подставляя установленные оценки для $\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)|$ и $H_1 - H_5$ в (1.3.16), получаем оценки теоремы.

Теорема доказана.

1.4. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка с матричными коэффициентами

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + P(x)u' + Q(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} P(x) &= \{P_{ij}(x)\}, \quad P_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad i, j = \overline{1, h}, \\ Q(x) &= \{Q_{ij}(x)\}, \quad Q_{ij}(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), \quad u_j(x) \in D, \quad j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$, произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и систему $\{u^k(x)\}$, $u^j(x) = (u_1^j(x), u_2^j(x), \dots, u_h^j(x))$ корневых вектор-функций оператора L , отвечающую этим собственным значениям, ограничения на которые были наложены ранее в п.1 (определения 1.5 и 1.6). Пусть существует $\{v^k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций. Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_p^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (1.4.2)$$

$u^k \in \mathcal{L}_p^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_q^h(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (1.4.3)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (1.4.4)$$

Выпишем условия на асимптотику коэффициентов $f^k = \langle f, v^k \rangle$:

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| > 1; \quad (1.4.5)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad (1.4.6)$$

где $\alpha^k = \|v^k\|_{\mathcal{L}_q^h(G)}^{-1}$.

Необходимо получить оценки малости при $\lambda \rightarrow +\infty$ для величин $\|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)}$ для всех $j = \overline{1, h}$, где $K \subset G$ – произвольный компакт. Нас интересует также зависимость этих величин от параметра $\eta = \rho(K, \partial G)$ – расстояния компакта до границы отрезка $\overline{G}$.

Теорема 1.4. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.4.1), (1.4.5) и Условия АЗ. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} 1). \quad \Delta_j^\lambda &\equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda} + \right. \\ \left. + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1 \ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda} + \right. \\ \left. + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right], \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае;

2). Если $s = \infty$, то

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + n_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \|P(x)\|_\infty \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|P(x)\|_\infty}{\lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right), \end{cases} \quad (1.4.8)$$

для всех $j = \overline{1, m}$. Постоянные $c > 0$ в оценках (1.4.7) и (1.4.8) не зависят от λ и η .

Теорема 1.5. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.4.1), (1.4.6) и Условия АЗ. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$1). \quad \Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda} + \|Q(x)\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}\right) + \right. \\ \left. + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda^\nu} + \|Q(x)\|_1 \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}} + \right. \\ \left. + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \end{cases} \quad (1.4.9)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае;

2). Если $s = \infty$, то

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \frac{n_1}{\lambda} + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + \|P(x)\|_\infty \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right), \end{cases} \quad (1.4.10)$$

для всех $j = \overline{1, m}$. Постоянные $c > 0$ в оценках (1.4.9) и (1.4.10) не зависят от λ и η .

Доказательство теоремы 1.4.

Доказательство равномерной на каждом компакте $K \subset G$ равносходимости каждой j -ой компоненты разложения функции $f(x) \in \mathcal{L}_p^h(G)$ в биортогональный

ряд по системе $u^k(x)$ с разложением в тригонометрический ряд соответствующей j -ой компонентой $f_j(x)$ при Условиях АЗ приведено в работе [20].

Нас интересует оценка разности при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda &= \int_K \left| \sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j) \right|^p dx = \int_K \left| \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^h f_i(y) \overline{v_i^k(y)} dy \right) u_j^k(x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} f_j(y) dy \right|^p dx = \\ &= \int_K \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^h f_i(y) \left[\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_j^k(x) \overline{v_i^k(y)} - \Theta_i(x, y, \lambda) \right] dy \right|^p dx, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

где через $\Theta_i(x, y, \lambda)$ обозначена функция, которая равна $\frac{1}{\pi} \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y}$ при $i = j$ и нулю во всех остальных случаях.

Далее будем следовать доказательству теоремы 1.1. Обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G)$, $R_0 = \eta/4$. Для любого числа $R \in [R_0/2, R_0]$ и любого $x \in K$ рассмотрим вспомогательную функцию $\omega^\lambda(\rho, R)$:

$$\omega^\lambda(\rho, R) = \begin{cases} (\sin \lambda \rho)/(\pi \rho), & |\rho| \leq R, \rho = x - y, y \in G; \\ 0, & |\rho| > R. \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Далее усредним функцию (1.4.12) по R :

$$S_0[\omega^\lambda(\rho, R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R \omega^\lambda(\rho, R) dR \quad (S_0[1] = 1), \quad (1.4.13)$$

добавим и вычтем под знаком модуля в правой части (1.4.11) выражение (1.4.13) и оценим модуль суммы через сумму модулей ($c_p = 2^{p-1}$, $v_0(x, y) = S_0[\omega^\lambda(\rho, R)]$) :

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda &\leq c_p \int_K \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^h f_i(y) \left[\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_j^k(x) \overline{v_i^k(y)} - v_0(x, y) \right] dy \right|^p dx + \\ &+ c_p \int_K \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^h f_i(y) \left[\Theta_i(x, y, \lambda) - v_0(x, y) \right] dy \right|^p dx \equiv c_p(I + \widehat{I}). \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Заметим, что интеграл $\widehat{I}$ в правой части (1.4.14) совпадает с интегралом $\widehat{I}$ из формулы (1.2.10):

$$\begin{aligned} & \int_K \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^h f_i(y) \left[\Theta_i(x, y, \lambda) - v_0(x, y) \right] dy \right|^p dx = \\ & = \int_K \left| \int_0^1 f_j(y) \left[\frac{1}{\pi} \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} - v_0(x, y) \right] dy \right|^p dx, \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

следовательно, для него будут верны те же оценки. Оценим интеграл I в правой части (1.4.14).

Пусть для некоторого $\alpha \in [1, \infty)$

$$\sum_{i=1}^h f_i(y) \stackrel{\mathcal{L}^\alpha(K_0)}{=} \sum_{i=1}^h \sum_k f_i^k(y) u_j^k(y), \quad K_0 = [a - R_0, b + R_0]. \quad (1.4.16)$$

Здесь и далее обозначено через $\sum_k$ сумма $\sum_{k=1}^\infty$. Умножим обе части (1.4.16) скалярно на функцию $S_0[\omega^\lambda(\rho, R)]$. Так как ряд в (1.4.16) сходится в $\mathcal{L}^\alpha(K_0)$, то на K_0 его можно почленно интегрировать, а вне K_0 функция $S_0[\omega^\lambda(\rho, R)]$ как функция y при $x \in K$ равна нулю. Получаем равенство

$$\int_G \sum_{i=1}^h f_i(y) v_0(x, y) dy = \sum_{i=1}^h \sum_k f_i^k(y) \int_G u_j^k(y) v_0(x, y) dy \quad \forall x \in K. \quad (1.4.17)$$

Для функций u^k имеет место формула среднего значения (легко получаемая интегрированием по частям после замены $A_1 u^k$ на $(u^k)'' + \lambda_k^2 u^k$). Обозначим

$$s_t(u^k(x)) = u^k(x+t) + u^k(x-t). \quad (1.4.18)$$

Тогда $\forall \lambda_k \in \mathcal{C}, \quad x \pm t \in G$:

$$s_t(u^k(x)) = 2u^k(x) \cos \lambda_k t - h_k(x, t), \quad (1.4.19)$$

где

$$h_k(x, t) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{x-t}^{x+t} A_1 u^k(\tau) \sin \lambda_k(|x - \tau| - t) d\tau,$$

$$\left. \frac{\sin \lambda_k(|x - \tau| - t)}{\lambda_k} \right|_{\lambda_k=0} = |x - \tau| - t,$$

а $A_1 u^k \equiv -P(x)(u^k)' - Q(x)u^k$, если u^k – собственная функция, $A_1 u^k \equiv A_1 \bar{u}^k = \mu \bar{u}^{m-1k} - P(x)(\bar{u}^k)' - Q(x)\bar{u}^k$, если $u^k = \bar{u}^k$ – m -я присоединённая функция.

Исследуем в (1.4.17) структуру коэффициентов

$$\begin{aligned} \int_{\bar{G}} v_0(x, y) u_j^k(y) dy &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} u_j^k(y) dy \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} s_t(u_j^k(x)) dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[2u_j^k(x) \int_0^R \frac{\sin \lambda t \cos \lambda_k t}{t} dt - \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] = \\ &= u_j^k(x) \delta_k^\lambda + u_j^k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right]. \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Здесь в проведённых преобразованиях мы сделали замены переменных $y - x = t$ при $y \geq x$ и $x - y = t$ при $y < x$, воспользовались формулой среднего (1.4.19) и леммой 1.1 о разрывном множителе Дирихле в $\mathcal{C}$.

Подставим правую часть (1.4.20) в (1.4.17) и, соответственно, в первый интеграл I в (1.4.14). Учитывая структуру δ_k^λ из (1.1.6), для интеграла I получаем выражение

$$I = \int_K \left| \sum_{i=1}^h \sum_k f_i^k \left\{ u_j^k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] \right\} \right|^p dx. \quad (1.4.21)$$

Оценка первой части выражения (1.4.21), содержащей $I_k^\lambda(R_0)$, совпадает с оценками (1.2.21) и (1.2.23):

$$\sum_k |f^k u^k(x) I_k^\lambda(R_0)| \leq \begin{cases} \frac{1}{R_0^2} O \left(\max \left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) \right), \\ \frac{1}{R_0} O \left(\max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) \right). \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Оставшуюся часть под знаком интеграла в (1.4.21) обозначим

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \sum_k f^k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) s_\tau(A_1 u^k(x)) d\tau \right], \quad (1.4.23)$$

здесь

$$K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau}^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k(r - \tau)}{r} dr, \quad \lambda_k \neq 0.$$

Расщепим в (1.4.23) $A_1 u^k$ на три слагаемых в соответствии с обозначением после формулы (1.4.19) и запишем (1.4.23) в виде $S = S_1 + S_2 + S_3$, где $S_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, получается из $S(x)$ после замены $A_1 u^k$ на $(-Q(x)u^k)$, $\mu_k^{m-1} u^k$ и $(-P(x)(u^k)')$ соответственно (считаем, что $u^k = \tilde{u}^k$ – присоединённая функция).

Для $S_1(x)$ имеем

$$\|S_1\|_{p,K} \leq c \|Q(x)\|_1 \sum_k |\hat{f}^k| S_0[\|K_0\|_{p,(0,R_0)}], \quad (1.4.24)$$

где норму определим как $\|Q(x)\|_1 = \max_i \sum_j \|Q_{ij}(x)\|_1$. Таким образом, в соответствии с (1.2.27) для выражения (1.4.24) верна оценка

$$\|S_1\|_{p,K} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}} \ln^{\beta} \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}}}\right)\right). \quad (1.4.25)$$

Используя для коэффициентов $P(x)$ ту же норму, получим, что для слагаемого $S_2(x)$ верна оценка работы (1.2.42):

$$S_2(x) = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu} \ln^{\beta} \lambda}, \|P(x)\|_1 \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu} \ln^{\beta} \lambda}\right)\right). \quad (1.4.26)$$

Для оставшегося слагаемого $S_3(x)$ справедливы те же рассуждения, поэтому оценка имеет вид

$$\|S_3\|_{p,K} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \ln^{\beta} \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}}\right)\right). \quad (1.4.27)$$

Объединяя оценки (1.4.22), (1.4.25), (1.4.26) и (1.4.27), получаем оценки теоремы 1.4.

Доказательство теоремы 1.5 аналогично приведённым выше рассуждениям. Разница только в итоговых оценках соответствующих выражений из (1.4.22), (1.4.25), (1.4.26) и (1.4.27), которые содержатся в работе [43]. Те же результаты можно получить, положив в указанных оценках $\beta = 0$. Теорема доказана.

1.5. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка с матричными коэффициентами

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$L \equiv lu, \quad l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} P^l(x) \frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1; \quad (1.5.1)$$

$$P^1(x) = \{P_{ij}^1(x)\}, \quad P_{ij}^1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad \forall i, j = \overline{1, h}, \quad s > 1,$$

$$P^l(x) = \{P_{ij}^l(x)\}, \quad P_{ij}^l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad \forall i, j = \overline{1, h}, \quad \forall l = \overline{2, 2n},$$

где $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x))$, $u_j(x) \in D_{2n}$, $j = \overline{1, h}$, а класс D_{2n} — абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка включительно функции. Корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) введены в определениях 1.7 и 1.8.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u^k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условию А4. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u^{m-1}\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \leq c\alpha_\lambda \|u^m\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (1.5.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n = 1$ эта оценка всегда выполняется при условии (1.1.19) из Условий А4. Пусть также

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}_\infty^h(G)} \leq c \|u^k\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.5.3)$$

Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (1.5.4)$$

$u^k \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_{r'_0}^h(G)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (1.5.5)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (1.5.6)$$

Будем также предполагать, что для $\{u^k, v^k\}$ и $f(x)$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v^k\|_{\mathcal{L}_{r'_0}^h(G)}^{-1}, \quad (1.5.7)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \widehat{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (1.5.8)$$

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G . Сформулируем основные результаты в каждом из случаев (1.5.7) и (1.5.8).

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 1.6. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.5.1) – (1.5.3), (1.5.7) и Условия A_4 . Тогда для всех достаточно больших чисел λ и лю-

бого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda &\equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \|P^1\|_{\mathcal{L}_s^h(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1^h(K)} \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \|P^1\|_{\mathcal{L}_s^h(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1^h(K)} \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right] \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max t_k$; если при этом $P^1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_\infty(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0}{\lambda^\nu} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right]. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Теорема 1.7. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1.5.1) – (1.5.3), (1.5.8) и Условия А4. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки.

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|P^1\|_{\mathcal{L}_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|P^1\|_{\mathcal{L}_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right] \end{cases} \quad (1.5.11)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max m_k$; если при этом $P^1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_\infty(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right]. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

Замечание. При $\beta = 0$ оценки (1.5.11), (1.5.12) переходят в оценки (1.5.9), (1.5.10), поэтому доказывать будем сразу теорему 1.7.

Доказательство теоремы 1.7.

Следуя доказательствам теорем 1.4 и 1.3, получим, что для Δ_j^λ верна оценка (1.3.16)

$$\Delta_j^\lambda \leq c \left[\sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)| + \widehat{S} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (1.5.13)$$

где для $\widehat{S}$ получены оценки через коэффициенты $\widehat{f}_k$ в зависимости от соотношений между параметрами s и p :

$$\text{при } p = 1 : \quad \widehat{S} = H_1 + H_4,$$

$$\text{при } p > 1 :$$

$$\text{если } s \geq p : \quad \widehat{S} = H_1 + H_3,$$

$$\text{если } s < p : \quad \widehat{S} = H_2 + H_3,$$

$$\text{при } P^1 \equiv 0 : \quad \widehat{S} = H_5.$$

Выражения $H_1, \dots, H_5$ совпадают с выражениями из теоремы 1.3, но с поправкой на коэффициенты дифференциального оператора:

$$\begin{aligned} H_1 = \|P^1\|_{\mathcal{L}_p(K)} & \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \ln |\lambda_k| + \ln \lambda \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ & \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right]; \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

$$H_2 = \|P^1\|_{\mathcal{L}_s(K)} \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{1-1/\varkappa}| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-1}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1/\varkappa} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \right]; \quad (1.5.15)$$

$$H_3 = \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1/p}| + \lambda^{1-1/p} \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-2}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1/p} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1/p} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \right]; \quad (1.5.16)$$

$$H_4 = \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-1} \ln |\lambda_k|| + \ln \lambda \sum_3 |\lambda_k^{-\nu-2}| \ln^{-\beta} \lambda + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k| + \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| ((|\lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||)^{-1} + \lambda^{-2}) \right]; \quad (1.5.17)$$

$$H_5 = \left(\sum_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \right) \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \lambda \sum_3 |\widehat{f}_k \lambda_k^{-2}| + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| \right]. \quad (1.5.18)$$

В соответствии с разбиением $\{\lambda_k\}$ в лемме 1.3 $\sum_1$ – сумма по λ_k , $|\lambda_k| \leq \Lambda_0$, $\sum_2$ – по λ_k , $\Lambda_0 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$, $\sum_3$ – по λ_k , $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$, $\sum_4$ – по λ_k , $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$, $\sum_5$ – по λ_k , $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$, где $\Lambda_0 \gg 1$ ($\Lambda_0 > 2/R_0$).

Определив нормы также, как и после формулы (1.4.24), т.е., например, $\|P^1\|_{\mathcal{L}_p(K)} = \max_i \sum_j \|P_{ij}^1(x)\|_{\mathcal{L}_p(K)}$, получим, что для выражений $H_1, \dots, H_5$ из (1.5.14) – (1.5.18) верны те же оценки, что и в разделе 1.3 (формулы (1.3.21) – (1.3.25)).

Теорема доказана.

Глава 2

Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного нечётного порядка

Данная глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов первого и произвольного нечётного порядков на любом внутреннем отрезке. Рассматриваются случаи одномерного оператора, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами.

2.1. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора первого порядка

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + a_0(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \quad a_0(x) \in L^s(G), \quad s > 1 \quad (2.1.1)$$

на классе функций D , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$.

Следуя определению корневых функций (понятия собственных и присоединённых функций введены в определениях 1.9 и 1.10), данному в предыдущих главах, выпишем конкретный вид уравнений в случае дифференциальных операторов первого порядка. Рассмотрим два типа спектральных задач (отличающихся нормировкой присоединённых функций).

Приведём основные ограничения на рассматриваемые системы корневых функций. В случае конкретных краевых задач эти условия достаточно легко проверяются.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую этим собственным значениям, удовлетворяющие трём Условиям A1.

Для произвольной функции $f(x) \in L^r(G)$ составим частичные суммы биортogonalного разложения

$$\sigma_{\lambda}(x, f) = \sum_{|\lambda_k| < \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k = (f, v_k), v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G).$$

Через $S_{\lambda}(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице.

Наложим дополнительно одно из ограничений на систему $\{u_k, v_k\}$ и функцию $f(x)$:

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v_k\|_{r'_0}^{-1}, \quad (2.1.2)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \widehat{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (2.1.3)$$

Предположим далее, что для оператора L_0 в условиях (2.1.2) и (2.1.3) показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. коэффициенты тригонометрического ряда Фурье удовлетворяют асимптотическим соотношениям (2.1.2) и (2.1.3).

Замечание 1. Следуя традициям теории функций и теории рядов Фурье, условия (2.1.2) и (2.1.3) нужно было бы записать в терминах требований гладкости на функцию $f(x)$. Но специфика рассматриваемых задач такова, что в ряде случаев существенную роль на параметр ν в (2.1.2) и (2.1.3) оказывают функции $v_k(x)$. В примере, приведенном в [38], показано, что даже для функции $f(x) \in C^{\infty}(G)$, $f \equiv 1$, показатель ν может меняться в пределах $(1 - 1/r, 1]$, $r \in (1, \infty)$, в зависимости

от выбора системы u_k, v_k . Поэтому в терминах только функций $f(x)$ условия (2.1.2) и (2.1.3) записать нельзя.

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \text{dist}(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G . Сформулируем основные результаты в каждом из случаев (2.1.2) и (2.1.3). Выписываются по две оценки скорости равносходимости. Это связано с тем, что было установлено: если стремиться получить наилучшую оценку скорости равносходимости по параметру λ , то загроубляется оценка по параметру η и наоборот, если оптимизировать оценку по η , при этом она улучшается на порядок, то ухудшается оценка по λ .

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2.1. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.1.1), (2.1.2) и Условия A1. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η .

Теорема 2.2. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.1.1), (2.1.3) и Условия A1. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка

$K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max \left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + (n_1 + \|a_0\|_p) \max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + \right. \\ \left. + \|a_0\|_s \max \left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda} \right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + (n_1 + \|a_0\|_p) \max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + \right. \\ \left. + \|a_0\|_s \max \left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda} \right) \right], \end{cases} \quad (2.1.5)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η .

Замечание. При $\beta = 0$ оценки (2.1.5) переходят в оценки (2.1.4), поэтому доказывать будем сразу теорему 2.2.

Доказательство теоремы 2.2.

Повторим шаги доказательства теоремы 1.1 до (1.2.14), но перепишем формулу среднего применительно к оператору (2.1.1).

Для функции u_k имеет место формула среднего значения [4] (легко получаемая интегрированием по частям после замены $A_1 u_k$ на $u'_k - \omega \lambda u_k$). Обозначим

$$s_t(u_k(x)) = u_k(x+t) + u_k(x-t). \quad (2.1.6)$$

Тогда $\forall \lambda_k \in \mathcal{C}, \quad x \pm t \in G$:

$$s_t(u_k(x)) = 2u_k(x) \cos \lambda_k t - h_k(x, t), \quad (2.1.7)$$

где

$$h_k(x, t) = \int_0^t \exp \{ \omega \lambda_k (\tau - t) \} A_1 u_k(x - \tau) - \exp \{ -\omega \lambda_k (\tau - t) \} A_1 u_k(x + \tau)] d\tau, \quad (2.1.8)$$

а $A_1 u_k \equiv -a_0 u_k$, если u_k – собственная функция, $A_1 u_k \equiv \mu_m^{m-1} u_k - a_0 u_k$, если $u_k = u_k^m$ – m -я присоединённая функция.

Далее, следуя [4] и применив лемму 1.1 о разрывном множителе Дирихле, для интеграла I получим:

$$\begin{aligned}
I &= \int_K \left| \int_{\overline{G}} f(y) [\Theta_\lambda(x, y) - v_0(x, y)] dy \right|^p dx = \\
&= \int_K \left| \int_{\overline{G}} f(y) v_0(x, y) dy - \int_{\overline{G}} f(y) \Theta_\lambda(x, y) dy \right|^p dx = \\
&= \int_K \left| \sum_k f_k \int_{\overline{G}} u_k(y) v_0(x, y) dy - \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \int_{\overline{G}} f(y) u_k(x) \bar{v}_k(y) dy \right|^p dx = \\
&= \int_K \left| \sum_k f_k \int_{\overline{G}} u_k(y) v_0(x, y) dy - \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x) \right|^p dx = \\
&= \int_K \left| \sum_k f_k \left\{ u_k(x) \delta_k^\lambda + u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] \right\} - \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x) \right|^p dx = \\
&= \int_K \left| \sum_k f_k \left\{ u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] \right\} \right|^p dx.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Для исследования выражения (2.1.9) воспользуемся леммами 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6.

Выражение в правой части (2.1.9), содержащее $I_k^\lambda(R_0)$, совпадает с (1.2.20), поэтому для него верны оценки (1.2.21) и (1.2.23).

Будем считать далее, не ограничивая общности, что $\lambda_k \neq 0$. Преобразуем оставшуюся часть под знаком интеграла в (2.1.9), подставив в неё формулу для $h_k(x, t)$

и поменяв местами пределы интегрирования. Получим

$$\begin{aligned}
S(x) &\equiv -\frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x, t) dt \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left(\int_0^t A_1 u_k(x - \tau) \exp(\omega \lambda_k(\tau - t)) d\tau - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^t A_1 u_k(x + \tau) \exp(\omega \lambda_k(t - \tau)) d\tau \right) dt \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R \int_\tau^R \frac{\sin \lambda t \exp(\omega \lambda_k(\tau - t))}{t} A_1 u_k(x - \tau) dt d\tau - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^R \int_\tau^R \frac{\sin \lambda t \exp(-\omega \lambda_k(\tau - t))}{t} A_1 u_k(x + \tau) dt d\tau \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, -\lambda_k, \tau, R) A_1 u_k(x - \tau) d\tau - \int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) A_1 u_k(x + \tau) d\tau \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) A_1 u_k(x + \tau) d\tau \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, -\lambda_k, \tau, R) A_1 u_k(x - \tau) d\tau \right] = S' - S''.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Оценим S' ; S'' оценивается аналогично. В S' расцепим $A_1 u_k$ на два слагаемых в соответствии с обозначением после формулы (2.1.8) и представим S' в виде суммы $S'_1 + S'_2$ (считаем, что $u_k = \overset{m}{u}_k$ – присоединённая функция), где

$$S'_1(x) = \frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) (-a_0(x + \tau) \overset{m}{u}_k(x + \tau)) d\tau \right], \tag{2.1.11}$$

$$S'_2(x) = \frac{1}{\pi} \sum_k f_k S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) (\mu^{\overset{m-1}{u}_k}(x + \tau)) d\tau \right]. \tag{2.1.12}$$

Покажем, что операция усреднения не влияет на последующие преобразования. Будем использовать обобщённое неравенство Минковского (см. [14] с.38):

$$\left\| \int_R f(t, \tau) dt \right\|_p \leq \int_R \left\| f(t, \tau) \right\|_p d\tau.$$

Обозначим $\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) A_1 u_k(x + \tau) d\tau = F(x, R)$. Справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \left\| S_0[F(x, R)] \right\|_p &= \frac{8}{3R_0^2} \left\| \int_{R_0/2}^{R_0} R F(x, R) dR \right\|_p \leq \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R \left\| F(x, R) \right\|_p dR = \\ &= S_0 \left[\left\| F(x, R) \right\|_p \right]. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Поскольку оценки леммы 1.6 для интегралов A_k^s , A_k равномерны по R , а операция усреднения введена так, что $S[1] = 1$, то на последующие оценки эта операция не оказывает влияния.

Рассмотрим сначала сумму $S'_2(x)$. С помощью так называемой [17] *оценки антиаприорного типа* $\|\mu_m^{m-1} u_k\|_\infty \leq c \|u_k^m\|_\infty$ (в общем случае в правой части стоит коэффициент $(1 + |\lambda_k|)^{n-1}$, где n – порядок оператора), справедливой при условиях (1.1.3) (см. [31]), соотношений (1.2.19), (2.1.13) и оценок леммы 1.6 для A_k имеем

$$\begin{aligned} \|S'_2(x)\| &\leq c \sum_k |\widehat{f}_k| |S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)]| \leq c_0 \left[\lambda^{-1} \ln \lambda \sum_1 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \ln |\lambda_k| + \right. \\ &\left. + \ln \lambda \sum_3 |\widehat{f}_k| |\lambda_k|^{-1} + \sum_4 |\widehat{f}_k| + \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Оценим правую часть при условиях (1.1.3), (2.1.3). В первом слагаемом получаем $\lambda^{-1} \ln \lambda \sum_1 |\widehat{f}_k| \leq c_2 \|f\|_r \lambda^{-1} \ln \lambda$. Второе слагаемое $\sum_2$ оценим следующим образом: $\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \ln |\lambda_k| \leq c \lambda^{-1} \sum_{n=2}^{[\lambda/2]} n^{-\nu} \ln^{-\beta+1} n = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+2} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu} \ln \lambda)$ при $\nu < 1$. Для третьего слагаемого получаем $\ln \lambda \sum_3 |\widehat{f}_k| |\lambda_k|^{-1} \leq c \ln \lambda \sum_{n \geq [3\lambda/2]} n^{-\nu-1} \ln^{-\beta} n = O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$.

Четвёртое слагаемое имеет, очевидно, оценку $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+1} \lambda)$, а последнее

$\ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \leq O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta+2} \lambda)$. Объединяя установленные оценки, получаем

$$S'_2(x) = O \left(\max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) \right) \quad (2.1.15)$$

равномерно по $x \in K$.

Оценим сумму $S'_1(x)$, содержащую коэффициент $a_0(x)$. По условию $a_0(x) \in L^s(G)$. Рассмотрим сначала случай $s \geq p$, тогда $a_0(x) \in L^p$. Применим под знаком интеграла указанную оценку производной, перейдём от нормы суммы к сумме норм и применим обобщённое неравенство Минковского к L^p -норме следующего интеграла:

$$J(x) = \int_0^R S_0[|K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|] |a_0(x + \tau)| d\tau, \quad (2.1.16)$$

получим

$$\|S_1\|_{p,K} \leq c_1 \|a_0\|_p \sum_k |\widehat{f}_k| |S_0[A_k^1(\lambda, 0, R_0, R)]|, \quad p \geq 1, \quad (2.1.17)$$

где при последнем переходе мы также использовали соотношение (2.1.13). Сравнивая правую часть последнего неравенства и левую часть (2.1.14), получаем, что для $\|S_1\|_{p,K}$ в случае $s \geq p$ имеет место оценка (2.1.15).

Пусть $s < p$. Проведём те же преобразования, что и в случае $s \geq p$, но к интегралу (2.1.16) применим неравенство Юнга [58]: $\|J\|_{p,K} \leq 2\|a_0\|_s \|S_0[|K_0|]\|_{\zeta,(0,R_0)} \leq 2\|a_0\|_s S_0[A_k^\zeta(\lambda, 0, R_0, R)]$, где также воспользовались на последнем шаге соотношением (2.1.13). Параметр ζ связан с параметрами задачи следующим образом:

$$1/\zeta = 1 + 1/p - 1/s < 1, \quad \zeta = ps'/(p+s') < s' \quad (s < p, \quad s' = s/(s-1)). \quad (2.1.18)$$

Учитывая оценки леммы 1.6 для A_k^ζ для S_1 получаем:

$$\begin{aligned} \|S_1\|_{p,K} \leq c \|a_0\|_s \sum_k |\widehat{f}_k| S_0[A_k^\zeta(\lambda, 0, R_0, R)] &\leq c_0 \|a_0\|_s \left[\lambda^{-1/\zeta} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1/\zeta} \sum_2 |\widehat{f}_k| + \right. \\ &\left. + \lambda^{1-1/\zeta} \sum_3 |\widehat{f}_k| |\lambda_k|^{-1} + \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{1-1/\zeta} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Оценим правую часть последнего неравенства при условиях (1.1.3) и (2.1.3) по прежней схеме. В первом слагаемом получаем оценку $O(\lambda^{-1-1/p+1/s})$. Второе слагаемое имеет следующие оценки: $O(\lambda^{-1-1/p+1/s})$ при $\nu > 1$, $O(\lambda^{-1-1/p+1/s} \ln^{-\beta+1} \lambda)$ при $\nu = 1$ и $O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s})$ при $\nu < 1$. Для третьего слагаемого получаем $\lambda^{1-1/\zeta} \sum_3 |\widehat{f}_k| |\lambda_k|^{-1} \leq O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta} \lambda)$. Четвёртое слагаемое имеет, очевидно,

оценку $O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее $\lambda^{1-1/\zeta} \sum_5 |\widehat{f}_k| |\lambda - |\lambda_k||^{-1} \leq O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{-\beta+1} \lambda)$.

Объединяя установленные оценки, получаем оценку для $\|S'_1\|_{p,k}$ в случае $s < p$:

$$\|S'_1\|_{p,k} = O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right)\right). \quad (2.1.20)$$

Объединяя оценки (1.2.21), (1.2.23), (2.1.15) и (2.1.20), получаем оценку (2.1.5) теоремы. Обоснование теоремы завершено.

Теорема доказана.

2.2. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq 0;$$

$$a_{n-1}(x) \in L^s(G), \quad s > 1, \quad a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-2}, \quad (2.2.1)$$

на классе функций D_n , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А2.

Будем также обозначать через $\|f\|_{r,E}$ норму функции $f(x) \in L^r(E)$, $r \in [1, \infty]$. Если $E = G$, то будем писать $\|f\|_r$.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная" оценка

$$\| u_k^{m-1} \|_{r_0} \leq c \alpha_\lambda \| u_k^m \|_{r_0}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (2.2.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n \geq 3$ такую систему всегда можно построить [8]. Пусть, кроме того,

$$\| u_k \|_\infty \leq c \| u_k \|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (2.2.3)$$

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^{r_0}(G)$ составим частичные суммы биортонального разложения $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x)$, $\lambda > 0$, $f_k \equiv (f, v_k)$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 : L_0 u = u''$, с условиями периодичности в нуле и единице.

Будем также предполагать, что для $\{u_k, v_k\}$ и $f(x)$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \| v_k \|_{r'_0}^{-1}, \quad (2.2.4)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \widehat{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (2.2.5)$$

Предположим далее, что для оператора L_0 в условиях (2.2.4) и (2.2.5) показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. коэффициенты тригонометрического ряда Фурье удовлетворяют этим асимптотическим соотношениям.

Фиксируем произвольное $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2.3. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.2.1) – (2.2.4) и Условия A2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого от-

резка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda &\equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max m_k$.

Теорема 2.4. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.2.1) – (2.2.3), (2.2.5) и Условия А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ \left. + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \right. \\ \left. + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) \right] \end{cases} \quad (2.2.7)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max m_k$.

Замечание. При $\beta = 0$ оценки (2.2.7) переходят в оценки (2.2.6), поэтому доказывать будем сразу теорему 2.4.

Доказательство теоремы 2.4.

Пусть $\Theta_\lambda(x, y) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_k(x) \bar{v}_k(y)$ – спектральная функция оператора L .
 $D_\lambda(x, y)$ – ядро Дирихле, спектральная функция оператора L_0 ;
 $\sigma_\lambda(x, f) = \int_{\bar{G}} \Theta_\lambda(x, y) f(y) dy$. Фиксируем любой отрезок $K = [a, b] \in G$. Будем искать оценку для разности $\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p, K}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\Delta_\lambda = \left(\int_K \left| \int_{\bar{G}} f(y) [\Theta_\lambda(x, y) - D_\lambda(x, y)] dy \right|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.2.8)$$

Фиксируем произвольные достаточно малые числа $R_0, R_1 : R_1 \in (0, \text{dist}(K, \partial G))$, $0 < R_0 < (1/c_0)R_1$, $c_0 > 2$ – универсальная постоянная, зависящая от n и связанная с формулой среднего (см. [39]). Для любого числа $R \in [R_0/2, R_0]$ и любого $x \in K$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\omega_\lambda(\rho, R) = \begin{cases} (\sin \lambda \rho)/(\pi \rho), & |\rho| \leq R, \rho = x - y, \\ 0, & |\rho| > R. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

и её усреднение по R :

$$v_0(x, y) = S_0[\omega_\lambda(\rho, R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int_{R_0/2}^{R_0} R \omega_\lambda(\rho, R) dR \quad (S_0[1] = 1), \quad (2.2.10)$$

Добавим и вычтем это усреднение в квадратных скобках в (2.2.8) и применим неравенство треугольника для норм:

$$\Delta_\lambda \leq \left\| \int_{\bar{G}} f(y) [\Theta_\lambda(x, y) - v_0(x, y)] dy \right\|_{p, K} + \left\| \int_{\bar{G}} f(y) [D_\lambda(x, y) - v_0(x, y)] dy \right\|_{p, K} \equiv I + \hat{I}. \quad (2.2.11)$$

Оценим выражение I в (2.2.11); $\hat{I}$ оценивается аналогично.

Заменим функцию $v_0(x, y)$ ее биортогональным рядом. При выполнении условий (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), а также Условий А1 справедливо равенство (см. [40] теорема 4): $\forall p \in [1, \infty)$, $\forall f(x) \in L^{r_0}(G) \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\| \int_{\bar{G}} f(y) [v_0(x, y) - \sum^\Lambda (v_0, \bar{u}_k)(x) \bar{v}_k(y)] dy \right\|_{p, K} = 0$. Фиксируем некоторое число $\Lambda_0 \gg 1$ ($\Lambda_0 > 2/R_0$), пусть $\lambda > \Lambda_0$. Подставим в I

вместо функции $v_0(x, y)$ ее биортогональное разложение и разобьём его на две части:

$$\begin{aligned} I &\leq \left\| \int_{\bar{G}} f(y) \left[\Theta_\lambda(x, y) - \sum^\lambda (v_0, \bar{u}_k) \bar{v}_k(y) \right] dy \right\|_{p,K} + \left\| \int_{\bar{G}} f(y) \sum_{|\lambda_k| > \lambda} (v_0, \bar{u}_k) \bar{v}_k(y) dy \right\|_{p,K} = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Исследуем структуру коэффициентов $(v_0, \bar{u}_k)$ в выражениях I_1, I_2 . Обозначим $s_t(u_k(x)) = u_k(x+t) + u_k(x-t)$ и используем определение функции ω_λ :

$$\int_{\bar{G}} S_0[\omega_\lambda(\rho, R)] u_k(y) dy = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} u_k(y) dy \right] = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} s_t(u_k(x)) dt \right]. \quad (2.2.13)$$

В последнем интеграле применим формулы среднего (см. Главу 1 [4]) для малых $\lambda_k, |\lambda_k| \leq \Lambda_0$, и для больших λ_k .

Пусть $0 < |\lambda_k| \leq \Lambda_0$ и $u_k = \bar{u}_k^m$, $0 \leq m \leq m_k$ (если $\lambda_k = 0$, то сдвигом коэффициента a_0 при условии (1.1.3) (из Условия А1) можем добиться, чтобы $\lambda_k \neq 0 \forall k$). Применим следующую формулу среднего для малых $|\lambda_k|$ (см. Главу 1 [4]):

$$\begin{aligned} s_r(u(y)) &= \sum_{i=0}^m \bar{u}^{m-i}(y) \left[B_{1r}^i(\cos \lambda t_i) + (-1)^i B_{2r}^i(\cos \lambda t_i) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m \left\{ B_{1r}^i \left[T_j^+(t_i) X_j^+(\bar{u}^{m-i}, y, t_i) \right] + (-1)^i B_{2r}^i \left[T_j^-(t_i) X_j^-(\bar{u}^{m-i}, y, t_i) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=0}^m \left\{ (-1)^i B_{2r}^{i+1} \left[\tilde{A} \bar{u}^{m-i}(y - t_{i+1}) \right] - B_{1r}^{i+1} \left[\tilde{A} \bar{u}^{m-i}(y + t_{i+1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где

$$B_{sr}^i(f(t_i)) = \left(\frac{\mu_0}{n\lambda^{n-1}} \right)^i \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{i-1}} f(t_i) \prod_{k=1}^i Q'_s(\lambda, t_k, t_{k-1}) dt_i \dots dt_1, \quad t_0 \equiv r, s = 1, 2, i \in \mathbb{N},$$

$$Q'_s = (-1)^{l+1} Q_s,$$

$$Q_1(\lambda, t, r) = \sum_{j=0}^{l-1} \left[\omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda (t-r)} - \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda t} T_j^+(r) \right] + \sum_{j=l}^{n-1} \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda (t-r)},$$

$$Q_2(\lambda, t, r) = \sum_{j=l+1}^{n-1} \left[\omega_j e^{\omega_j \omega \lambda (t-r)} - \omega_j e^{\omega_j \omega \lambda t} T_j^-(r) \right] + \sum_{j=0}^l \omega_j e^{\omega_j \omega \lambda (t-r)},$$

величина $T_j^+(r)$ введена в (1.1.31), а $T_j^-(r) = \exp(-\omega_j \omega \lambda r) - \cos \lambda r$,

$$X_j^+(u, y, r) = \begin{cases} P_j(u, y) + \frac{(-1)^{l+1}}{n\lambda^{n-1}} \int_0^r \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda t} [Au(y+t)] dt, & j = \overline{(0, l-1)}, \\ P_j(u, y), & j = \overline{(l, n-1)}, \end{cases}$$

$$X_j^-(u, y, r) = \begin{cases} P_j(u, y), & j = \overline{(0, l)}, \\ P_j(u, y) - \frac{(-1)^{l+1}}{n\lambda^{n-1}} \int_0^r \omega_j e^{\omega_j \omega \lambda t} [Au(y-t)] dt, & j = \overline{(l+1, n-1)}, \end{cases}$$

$$P_j(u, y) = \frac{(-1)^{l+1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(y) \omega^{n-1-k}}{\lambda^k} \omega_j^{n-k},$$

$$\tilde{A}u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad A \overset{m}{u} = \binom{m}{u}^{(n)} - \omega \lambda^n \overset{m}{u} = \mu_0 \overset{m-1}{u} - \tilde{A} \overset{m}{u},$$

где если $m = 0$, то $\overset{-1}{u} \equiv 0$.

Итак, посчитаем коэффициент $(v_0, \bar{u}_k)$:

$$\begin{aligned} (v_0, \bar{u}_k) &= \int_{\bar{G}} S_0[\omega_\lambda(\rho, R)] u_k(y) dy = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} s_t(u_k(x)) dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^m \overset{m-i}{u}_k(x) [B_{1r}^i(\cos \lambda_k t_i) + (-1)^i B_{2r}^i(\cos \lambda_k t_i)] + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ B_{1r}^i [T_j^+(t_i) X_j^+(\overset{m-i}{u}_k, x, t_i)] + (-1)^i B_{2r}^i [T_j^-(t_i) X_j^-(\overset{m-i}{u}_k, x, t_i)] \right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=0}^m \left\{ (-1)^i B_{2r}^{i+1} [\tilde{A} \overset{m-i}{u}_k(x - t_{i+1})] - B_{1r}^{i+1} [\tilde{A} \overset{m-i}{u}_k(x + t_{i+1})] \right\} \right) dt \Big] \equiv \\ &\equiv (v_0, u_k)_0 + (v_0, u_k)_1. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Через $(v_0, u_k)_0$ обозначена часть выражения (2.2.15), отвечающая $i = 0$. В $(v_0, u_k)_1$ входят оставшиеся слагаемые. Отметим, что $B_{1r}^0(\cos \lambda_k t_0) = B_{2r}^0(\cos \lambda_k t_0) = \cos \lambda_k t$.

$$\begin{aligned} (v_0, u_k)_0 &= \frac{2}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t \cos \lambda_k t}{t} dt \right] \overset{m}{u}_k(x) + \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} [T_j^+(t) X_j^+(\overset{m}{u}_k, x, t) + \right. \right. \\ &+ \left. T_j^-(t) X_j^-(\overset{m}{u}_k, x, t)] + \frac{1}{\mu_0} [B_{2r}^1[\tilde{A} \overset{m}{u}_k(x - t_1)] - B_{1r}^1[\tilde{A} \overset{m}{u}_k(x + t_1)]] \right\} dt \Big] \equiv \\ &\equiv (v_0, u_k)_{00} + (v_0, u_k)_{01}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Через $(v_0, u_k)_{00}$ обозначено первое слагаемое в (2.2.16), через $(v_0, u_k)_{01}$ – все остальные. Для оценки $(v_0, u_k)_{00}$ воспользуемся леммой 1.1 о разрывном множителе Дирихле в C [19]. По этой лемме справедливы соотношения (1.1.5), (1.1.6) и (1.1.7).

Учитывая структуру δ_k^λ и Θ_λ , а также то, что $|\lambda_k| \leq \Lambda_0 < \lambda$, получим

$$\begin{aligned}
& \Theta_{\Lambda_0}(x, y) - \sum^{\Lambda_0} (v_0, u_k)_0 \bar{v}_k(y) = \\
& = \sum_{|\lambda_k| \leq \Lambda_0} \bar{u}_k^m(x) \bar{v}_k(y) - \sum_{|\lambda_k| \leq \Lambda_0} (\delta_k^\lambda + I_k^\lambda(R_0)) \bar{u}_k^m(x) \bar{v}_k(y) - \sum_{|\lambda_k| \leq \Lambda_0} \bar{v}_k(y) (v_0, u_k)_{01} = \\
& = - \sum^{\Lambda_0} I_k^\lambda(R_0) \bar{u}_k^m(x) \bar{v}_k(y) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} \bar{v}_k(y) \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} [T_j^+(t) X_j^+(\bar{u}_k^m, x, t) + \right. \right. \\
& \left. \left. + T_j^-(t) X_j^-(\bar{u}_k^m, x, t)] + \frac{1}{\mu_0} [B_{2r}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x - t_1)] - B_{1r}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x + t_1)]] \sum_{j=0}^{n-1} \right\} dt \right].
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Выделим в I_1 слагаемые, отвечающие $\lambda_k : |\lambda_k| \leq \Lambda_0$. Т.е. получим $I_1 \leq I_{10} + I_{11}$,

где

$$I_{10} = \left\| \int_{\bar{G}} f(y) [\Theta_{\Lambda_0}(x, y) - \sum^{\Lambda_0} (v_0, \bar{u}_k) \bar{v}_k(y)] dy \right\|_{p, K}, \tag{2.2.18}$$

а в I_{11} входят оставшиеся слагаемые. Подставим (2.2.15), (2.2.17) в выражение для I_{10} и проинтегрируем почленно по y . Получим

$$\begin{aligned}
I_{10} = & \left\| \sum^{\Lambda_0} I_k^\lambda(R_0) \bar{u}_k^m(x) f_k + \frac{1}{\pi} S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} [T_j^+(t) X_j^+(\bar{u}_k^m, x, t) + \right. \right. \right. \\
& + T_j^-(t) X_j^-(\bar{u}_k^m, x, t)] + \frac{1}{\mu_0} [B_{2t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x - t_1)] - B_{1t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x + t_1)]] + \\
& + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{i=0}^m \bar{u}_k^{m-i}(x) [B_{1t}^i(\cos \lambda_k t_i) + (-1)^i B_{2t}^i(\cos \lambda_k t_i)] + \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} \{ B_{1t}^i [T_j^+(t_i) X_j^+(\bar{u}_k^{m-i}, x, t_i)] + (-1)^i B_{2t}^i [T_j^-(t_i) X_j^-(\bar{u}_k^{m-i}, x, t_i)] \} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=0}^m \left\{ (-1)^i B_{2t}^{i+1} [\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(x - t_{i+1})] - B_{1t}^{i+1} [\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(x + t_{i+1})] \right\} \right\} dt \right] \right\|_{p, K}.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Пусть теперь $|\lambda_k| > \Lambda_0$. Применим соответствующую формулу среднего (см.

Главу 1 [4]):

$$\begin{aligned}
s_r(u(y)) = & \sum_{i=0}^m \left\{ \tilde{u}^{m-i}(y) [B_{1r}^i(\cos \lambda t_i) + (-1)^i B_{2r}^i(\cos \lambda t_i)] + \right. \\
& + \sum_{j=l}^{n-1} B_{1r}^i [T_j^+(t_i) X_j^+(\tilde{u}^{m-i}, y, t_i)] + (-1)^i \sum_{j=0}^l B_{2r}^i [T_j^-(t_i) X_j^-(\tilde{u}^{m-i}, y, t_i)] + \\
& + \frac{1}{\mu_0} (-1)^i B_{2r}^{i+1} [\tilde{A} \tilde{u}^{m-i}(y - t_{i+1})] - \frac{1}{\mu_0} B_{1r}^{i+1} [\tilde{A} \tilde{u}^{m-i}(y + t_{i+1})] + \\
& \left. + \sum_{j=0}^{l-1} B_{1r}^i [E_j^+(\tilde{u}^{m-i}, R, t_i)] + \sum_{j=l+1}^{n-1} B_{2r}^i [E_j^-(\tilde{u}^{m-i}, R, t_i)] \right\}. \tag{2.2.20}
\end{aligned}$$

Посчитаем $(v_0, \bar{u}_k)$:

$$\begin{aligned}
(v_0, \bar{u}_k) = & \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} s_t(\tilde{u}_k(x)) dt \right] = \\
= & \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \sum_{i=0}^m \left\{ \tilde{u}_k^{m-i}(x) [B_{1t}^i(\cos \lambda t_i) + (-1)^i B_{2t}^i(\cos \lambda t_i)] + \right. \right. \\
& + \sum_{j=l}^{n-1} B_{1t}^i [T_j^+(t_i) X_j^+(\tilde{u}_k^{m-i}, y, t_i)] + (-1)^i \sum_{j=0}^l B_{2t}^i [T_j^-(t_i) X_j^-(\tilde{u}_k^{m-i}, y, t_i)] + \\
& + \frac{1}{\mu_0} (-1)^i B_{2t}^{i+1} [\tilde{A} \tilde{u}_k^{m-i}(y - t_{i+1})] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^{i+1} [\tilde{A} \tilde{u}_k^{m-i}(y + t_{i+1})] + \\
& \left. \left. + \sum_{j=0}^{l-1} B_{1t}^i [E_j^+(\tilde{u}_k^{m-i}, R, t_i)] + \sum_{j=l+1}^{n-1} B_{2t}^i [E_j^-(\tilde{u}_k^{m-i}, R, t_i)] \right\} dt \right] \equiv (v_0, u_k)_0 + (v_0, u_k)_1. \tag{2.2.21}
\end{aligned}$$

В последнем соотношении использованы те же обозначения, что и в (2.2.15). Запишем $(v_0, u_k)_0$.

$$\begin{aligned}
(v_0, u_k)_0 = & \frac{2}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t \cos \lambda_k t}{t} \right] \tilde{u}_k^m(x) + \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=l}^{n-1} T_j^+(t) X_j^+(\tilde{u}_k^m, x, t) + \right. \right. \\
& + \sum_{j=0}^l T_j^-(t) X_j^-(\tilde{u}_k^m, x, t) + \frac{1}{\mu_0} B_{2t}^1 [\tilde{A} \tilde{u}_k^m(x - t_1)] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^1 [\tilde{A} \tilde{u}_k^m(x + t_1)] + \\
& \left. \left. + \sum_{j=0}^{l-1} E_j^+(\tilde{u}_k^m, R, t) + \sum_{j=l+1}^{n-1} E_j^-(\tilde{u}_k^m, R, t) \right\} dt \right] \equiv (v_0, u_k)_{00} + (v_0, u_k)_{01}. \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

В последнем соотношении обозначения те же, что и в (2.2.16). Применяя соотношения леммы 1.1 Дирихле (1.1.6) и (1.1.7), получим

$$\begin{aligned}
I_{11} = & \left\| \int_{\bar{G}} f(y) \left[\Theta_{\Lambda_0 < |\lambda_k| \leq \lambda}(x, y) - \sum_{\Lambda_0 < |\lambda_k| \leq \lambda}^{\{ } (v_0, \bar{u}_k)_{00} + (v_0, \bar{u}_k)_{01} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (v_0, \bar{u}_k)_1 \} \bar{v}_k(y) \right] dy \right\|_{p,K} = \left\| \sum_{\Lambda_0 < |\lambda_k| \leq \lambda} I_k^\lambda(R_0) \bar{u}_k^m(x) f_k - \right. \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{\Lambda_0 < |\lambda_k| \leq \lambda} f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=l}^{n-1} T_j^+(t) X_j^+(\bar{u}_k, x, t) + \sum_{j=0}^l T_j^-(t) X_j^-(\bar{u}_k, x, t) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\mu_0} B_{2t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x - t_1)] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x + t_1)] + \sum_{j=0}^{l-1} E_j^+(\bar{u}_k, R, t) + \\
& + \sum_{j=l+1}^{n-1} E_j^-(\bar{u}_k, R, t) + \sum_{i=1}^m \left(\bar{u}_k^{m-i}(y) [B_{1t}^i(\cos \lambda_k t_i) + (-1)^i B_{2t}^i(\cos \lambda_k t_i)] + \right. \\
& + \sum_{j=l}^{n-1} B_{1t}^i[T_j^+(t_i) X_j^+(\bar{u}_k, y, t_i)] + (-1)^i \sum_{j=0}^l B_{2t}^i[T_j^-(t_i) X_j^-(\bar{u}_k, y, t_i)] + \\
& + \frac{1}{\mu_0} (-1)^i B_{2t}^{i+1}[\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(y - t_{i+1})] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^{i+1}[\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(y + t_{i+1})] + \\
& \left. \left. + \sum_{j=0}^{l-1} B_{1t}^i[E_j^+(\bar{u}_k, R, t_i)] + \sum_{j=l+1}^{n-1} B_{2t}^i[E_j^-(\bar{u}_k, R, t_i)] \right\} dt \right] \left. \right\|_{p,K}. \tag{2.2.23}
\end{aligned}$$

Подставив формулу (2.2.21) в I_2 в (2.2.12) и используя соотношения леммы 1.1 Дирихле (1.1.6) и (1.1.7), получим

$$\begin{aligned}
I_2 = & \left\| \int_{\bar{G}} f(y) \sum_{|\lambda_k| > \lambda} (v_0, \bar{u}_k) \bar{v}_k(y) dy \right\|_{p,K} = \left\| \sum_{|\lambda_k| > \lambda} I_k^\lambda(R_0) \bar{u}_k^m(x) f_k + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{|\lambda_k| > \lambda} f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \left\{ \sum_{j=l}^{n-1} T_j^+(t) X_j^+(\bar{u}_k, x, t) + \sum_{j=0}^l T_j^-(t) X_j^-(\bar{u}_k, x, t) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\mu_0} B_{2t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x - t_1)] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^1[\tilde{A} \bar{u}_k^m(x + t_1)] + \sum_{j=0}^{l-1} E_j^+(\bar{u}_k, R, t) + \sum_{j=l+1}^{n-1} E_j^-(\bar{u}_k, R, t) + \\
& + \sum_{i=1}^m \left(\bar{u}_k^{m-i}(y) [B_{1t}^i(\cos \lambda_k t_i) + (-1)^i B_{2t}^i(\cos \lambda_k t_i)] + \sum_{j=l}^{n-1} B_{1t}^i[T_j^+(t_i) X_j^+(\bar{u}_k, y, t_i)] + \right. \\
& + (-1)^i \sum_{j=0}^l B_{2t}^i[T_j^-(t_i) X_j^-(\bar{u}_k, y, t_i)] + \frac{1}{\mu_0} (-1)^i B_{2t}^{i+1}[\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(y - t_{i+1})] - \\
& - \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^{i+1}[\tilde{A} \bar{u}_k^{m-i}(y + t_{i+1})] + \sum_{j=0}^{l-1} B_{1t}^i[E_j^+(\bar{u}_k, R, t_i)] + \\
& \left. \left. + \sum_{j=l+1}^{n-1} B_{2t}^i[E_j^-(\bar{u}_k, R, t_i)] \right\} dt \right] \left. \right\|_{p,K}. \tag{2.2.24}
\end{aligned}$$

Считаем, что $\lambda > 0$ – достаточно большое число. Нам нужно оценить интеграл I из (2.2.8). Для I справедливо неравенство (2.2.12). I_1 в свою очередь оценён сверху через I_{10} и I_{11} . Для выражений I_{10}, I_{11}, I_2 мы установили неравенства (2.2.19), (2.2.23), (2.2.24). Оценим эти интегралы через f_k и применим оценку (2.2.5).

Замечание. Формула среднего значения для корневых функций дифференциальных операторов нечётного порядка представлена в виде суммы двух формул сдвига – значений корневых функций на краях отрезка. Соответствующие слагаемые двух формул сдвига (формулы (1.31) и (1.32) Главы 1 [4]) имеют одинаковую структуру и вносят одинаковый вклад в итоговую оценку для выражений I_{10}, I_{11}, I_2 . Поэтому далее при вычислении этих выражений мы будем оценивать слагаемые, которые "достались в наследство" от формулы сдвига для значения $\overset{m}{u}_k(y+t)$. Т.е. мы будем оценивать слагаемые, содержащие величины T_j^+, B_{1t}^i, E_j^+ (слагаемые, содержащие величины T_j^-, B_{2t}^i, E_j^- оцениваются аналогично).

Используя соотношения лемм 1.7, 1.8 при $|\lambda_k| \leq \Lambda_0$ и леммы 1.9, оценим выражение I_{10} из формулы (2.2.19). Для первого слагаемого, содержащего I_k^λ , применим оценку (2.2.3), Условия Ильина (пункты 2 и 3) и соотношение $|\widehat{f}_k| \leq c$, что следует из условия (2.2.5). Учтём, что $f_k = \widehat{f}_k/\alpha_k = \widehat{f}_k \|\overset{m}{v}_k\|_{r'_0}$, $I_k^\lambda = 1/R_0^2 O(\lambda^{-2})$ или $I_k^\lambda = 1/R_0 O(\lambda^{-1})$. Получаем (c^*, c^{**} – некоторые положительные константы)

$$\begin{aligned} \left\| \sum^{\Lambda_0} I_k^\lambda(R_0) \overset{m}{u}_k(x) f_k \right\|_\infty &\leq \frac{c^*}{R_0^2} \sum^{\Lambda_0} \frac{1}{\lambda^2} |\widehat{f}_k| \|\overset{m}{u}_k\|_{r_0} \|\overset{m}{v}_k\|_{r'_0} \leq \frac{c^* c^{**}}{R_0^2} \sum^{\Lambda_0} \frac{1}{\lambda^2} = \\ &= O\left(\frac{1}{R_0^2 \lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

а в случае лучшей оценки по параметру R

$$\begin{aligned} \left\| \sum^{\Lambda_0} I_k^\lambda(R_0) \overset{m}{u}_k(x) f_k \right\|_\infty &\leq \frac{c^*}{R_0} \sum^{\Lambda_0} \frac{1}{\lambda} |\widehat{f}_k| \|\overset{m}{u}_k\|_{r_0} \|\overset{m}{v}_k\|_{r'_0} \leq \frac{c^* c^{**}}{R_0} \sum^{\Lambda_0} \frac{1}{\lambda} = \\ &= O\left(\frac{1}{R_0 \lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Для оценки слагаемого, содержащего $X_d^+(u_k, x, t)$, используем оценки [33]

$$|\lambda_k|^{-j} \|u_k^{(j)}\|_\infty \leq c \|u_k\|_\infty, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (2.2.27)$$

оценки (2.2.2), (2.2.3), условия Ильина (пункт 3), формулу 1.10 [4], а также оценки

леммы 1.9:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum^{\Lambda_0} f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_d^+(t) X_d^+(u_k^m, x, t) dt \right\|_{\infty, K} = \\
& = \left\| \sum^{\Lambda_0} f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_d^+(t) \left[P_d(u_k^m, x) + \frac{(-1)^{l+1}}{n \lambda_k^{n-1}} \int_0^t \omega_d e^{-\omega_d \omega \lambda_k \tau} [Au(x + \tau)] d\tau \right] dt \right\|_{\infty, K} \leq \\
& \leq \sum^{\Lambda_0} \left[c |\widehat{f_k} K_{T_d^+}(\lambda, \lambda_k, 0, R)| + \frac{c}{\lambda_k^{n-1}} \left| f_k \int_0^R [Au_k(x + \tau)] e^{-\omega_d \omega \lambda_k \tau} K_{T_d^+}(\lambda, \lambda_k, \tau, R) d\tau \right| \right] \leq \\
& \leq O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sum^{\Lambda_0} c |\widehat{f_k}| \sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_1 O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad d = \overline{0, n-1},
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

равномерно по $R \in \overline{G}$.

Оценим слагаемое в (2.2.19), содержащее B_{1t}^1 :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\pi} \sum^{\Lambda_0} f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \frac{1}{\mu_0} B_{1t}^1 [\tilde{A} u_k^m(x + t_1)] dt \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \sum^{\Lambda_0} f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0}{n \lambda_k^{n-1}} \int_0^t [\tilde{A} u_k^m(x + t_1)] (-1)^{l+1} Q_1(\lambda, t_1, t) dt_1 dt \right] = \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{\pi n} \sum^{\Lambda_0} \frac{f_k}{\lambda_k^{n-1}} S_0 \left[\int_0^R [\tilde{A} u_k^m(x + t)] \int_t^R \frac{\sin \lambda r}{r} Q_1(\lambda_k, t, r) dr dt \right].
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Здесь мы изменили порядок интегрирования. Из условий (2.2.3), (2.2.27) следует, что $|u_k^{(q)}(x + t)| \leq c_1 |\lambda_k^q| \|u_k^m\|_\infty \leq c_1 c_2 |\lambda_k|^q \|u_k^m\|_{r_0}$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$. Воспользуемся

Условием Ильина (пункт 3), также вспомним (см. Главу 1 [4]), что

$\tilde{A} u_k^m(x) = \sum_{q=0}^{n-1} a_q(x) u_k^{(q)}(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f_k}{\lambda_k^{n-1}} \tilde{A} u_k^m(x + t) \right| \leq \frac{\widehat{f_k}}{|\lambda_k|^{n-1}} \|u_k^m\|_{r'_0} c_1 c_2 \|u_k^m\|_{r_0} \sum_{q=0}^{n-1} |a_q(x + t)| |\lambda_k|^q \leq \\
& \leq c_3 \widehat{f_k} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{|\lambda_k|^q} |a_{n-1-q}(x + t)|,
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

где $c_3 = \text{const} > 0$. Теперь мы можем посчитать $\|S\|_{p,K}$:

$$\begin{aligned}
\|S\|_{p,K} &\leq c_4 \sum_{q=0}^{n-1} \left\| \sum^{\Lambda_0} \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda_k|^q} S_0 \left[\int_0^R |a_{n-1-q}(x+t)| \left| \int_t^R \frac{\sin \lambda r}{r} Q_1(\lambda_k, t, r) dr \right| dt \right] \right\|_{p,K} \leq \\
&\leq c_5 \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \left\| \sum^{\Lambda_0} \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda_k|^{q-1}} S_0 \left[\int_0^R |a_{n-1-q}(x+t)| \frac{1}{|\lambda_k|} \int_t^R \frac{\sin \lambda r}{r} Q_d^+(\lambda_k, t, r) dr \right] \right\|_{p,K} = \\
&= c_5 \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \left\| \sum^{\Lambda_0} \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda_k|^{q-1}} S_0 \left[\int_0^R |a_{n-1-q}(x+t)| K_d^+(\lambda, \lambda_k, t, R) dt \right] \right\|_{p,K} = c_5 \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} (S_{dq}).
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Рассмотрим слагаемые S_{d0} в (2.2.31), содержащие $a_{n-1}(x+t) \in L^s$. Пусть $s \geq p$, тогда $a_{n-1} \in L^p$. Применим обобщённое неравенство Минковского [14]

$$\left\| \int_R f(t, \tau) dt \right\|_p \leq \int_R \|f(t, \tau)\|_p d\tau. \text{ Получим}$$

$S_{d0} \leq \|a_{n-1}\|_p \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^+(\lambda, 0, R, R)]$. Если $s < p$, то воспользуемся обобщённым неравенством Юнга [7] $\left\| \int f(y)g(x, y)dy \right\|_p \leq \|f\|_s \|g\|_\zeta, 1 - 1/s + 1/p = 1/\zeta$. Тогда $S_{d0} \leq \|a_{n-1}\|_s \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^{\zeta+}(\lambda, 0, R, R)]$. Для оценки слагаемых $S_{dq}, q > 0$, воспользуемся неравенством Юнга (частный случай обобщённого неравенства Юнга, $\zeta = p, s = 1$). Получим $S_{dq} \leq c \|a_{n-1-q}\|_1 \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k| S_0[A_{kd}^{p+}(\lambda, 0, R, R)]$. Используя оценки лемм 1.7, 1.8, мы можем посчитать итоговую оценку для S : $q = 0, \quad s \geq p, \quad d \neq l$:

$$\begin{aligned}
S_{d0} &\leq \|a_{n-1}\|_p \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^+(\lambda, 0, R, R)] \leq c \|a_{n-1}\|_p \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda} \leq \\
&\leq \|a_{n-1}\|_p O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \|f\|_r \sum^{\Lambda_0} |\lambda_k| = \|a_{n-1}\|_p O\left(\frac{1}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

$$q = 0, \quad s \geq p, \quad d = l:$$

$$S_{l0} \leq \|a_{n-1}\|_p \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kl}^+(\lambda, 0, R, R)] \leq c \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{\ln \lambda}{\lambda} = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right),$$

$$q = 0, \quad s < p, \quad d \neq l:$$

$$S_{d0} \leq \|a_{n-1}\|_s \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^{\zeta+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$q = 0, \quad s < p, \quad d = l:$$

$$S_{l0} \leq \|a_{n-1}\|_s \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kl}^{\zeta+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda^{1/\zeta}} = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/\zeta}}\right),$$

$$q > 0, \quad d \neq l:$$

$$S_{dq} \leq \|a_{n-1-q}\|_1 \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^{p+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$q > 0, \quad d = l:$$

$$S_{lq} \leq \|a_{n-1-q}\|_1 \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kl}^{p+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda^{1/p}} = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right).$$

Объединяя все случаи, получаем:

$$\|S\|_{p,K} = O\left(\max\left[\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}\right]\right). \quad (2.2.32)$$

Теперь оценим слагаемые с $i \geq 1$ в (2.2.19). Обозначим через S_1 – слагаемое, содержащее $B_{1t}^i(\cos \lambda_k t_i)$, через S_2 – слагаемое, содержащее $B_{1t}^i[T_j^+ X_j^+]$, через S_3 – слагаемое, содержащее $B_{1t}^{i+1}[\tilde{A}^{m-i} u_k(x+t_{i+1})]$. Для S_1 поменяем местами два первых интеграла и используем оценки (2.2.2), (2.2.3), Условия Ильина (пункт 3), лемм 1.8 и 1.9:

$$S_1 = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} \left(\frac{\mu_0}{n \lambda_k^{n-1}} \right)^i \tilde{u}_k^{m-i}(x) f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{i-1}} \cos \lambda_k t_i \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^i (-1)^{l+1} Q_1(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_1 dt_0 \right], \quad (2.2.33)$$

$$\|S_1\|_{\infty,K} \leq c S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} \left| \widehat{f}_k \int_0^R dt_1 \int_{t_1}^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} Q_1(\lambda_k, t_1, t_0) dt_0 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{i-1}} \cos \lambda_k t_i \times \right. \right. \\ \left. \times \prod_{j=2}^i Q_1(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_2 \right| \leq c_1 S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \int_0^R \sum_{d=0}^{n-1} |K_d^+(\lambda, \lambda_k, t_1, R)| dt_1 \times \right. \\ \left. \times \left| \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{i-1}} \cos \lambda_k t_i \prod_{j=2}^i Q_1(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_1 \right| \right] \leq c_2 S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} |\widehat{f}_k \lambda_k| \{ A_{kl}^+(\lambda, R) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{0 \leq d \leq n-1 \\ d \neq l}} A_{kd}^+(\lambda, R) \} \right] = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.2.34)$$

Оценивая величину

$$S_2 = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\sum^{\Lambda_0} \left(\frac{\mu_0}{n\lambda_k^{n-1}} \right)^i f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{i-1}} T_d^+(t_i) X_d^+({}^m u_k, x, t_i) \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^i (-1)^{l+1} Q_1(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_0 \right], \quad (2.2.35)$$

так же, как и для S_1 , меняем местами первые два интеграла. Будем иметь

$$\int_0^R dt_1 \int_{t_1}^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} Q_1(\lambda_k, t_1, t_0) dt_0 = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right), \quad |\lambda_k| \leq \Lambda_0, \quad (2.2.36)$$

все остальные величины в S_2 ограничены при $|\lambda_k| \leq \Lambda_0$, $x \in K$. Следовательно, получаем оценку $\|S_2\|_{\infty, K} = O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$. Аналогично оценивается S_3 .

$$S_3 = \frac{1}{\pi} S_0 \left[\frac{(-1)^i}{\mu_0} \sum^{\Lambda_0} \left(\frac{\mu_0}{n\lambda_k^{n-1}} \right)^{i+1} f_k \int_0^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{i-1}} \tilde{A} {}^m u_k (x + t_{i+1}) \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^i (-1)^{l+1} Q_1(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_0 \right]. \quad (2.2.37)$$

Первые два интеграла дают оценку $O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$, все остальные величины ограничены при $|\lambda_k| \leq \Lambda_0$, $x \in K$. При этом не требуется рассматривать два случая: $s \geq p$, $s < p$, как мы делали для величины S . Поскольку $Q(\lambda_k, t_j, t_{j-1}) = O(1)$, то мы получим оценку через $\|a_{n-q-1}\|_1$ для любых p, s . Итак, $\|S_3\|_{\infty, K} = O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$.

Собирая вместе все оценки для (2.2.19), получим

$$I_{10} = O\left(\max \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}} \right]\right). \quad (2.2.38)$$

Если $a_{n-1} \equiv 0$, то выражение $I_{10\infty}(x)$ под знаком интеграла по x в (2.2.19) есть величина $O(\lambda^{-1} \ln \lambda)$ равномерно по $x \in K$.

Теперь оценим величину I_{11} в (2.2.23). Для удобства записи обозначим сумму по λ_k , $\Lambda_0 \leq |\lambda_k| \leq \lambda$, через $\sum_0$. Рассмотрим слагаемое, содержащее $I_k^\lambda(R_0)$:

$$S_1 = \left| \sum_0 I_k^\lambda(R_0) {}^m u_k(x) f_k \right| \leq c \sum^\lambda |\widehat{f}_k I_k^\lambda(R_0)|. \quad (2.2.39)$$

Выражение (2.2.39) совпадает с первым слагаемым в формуле (1.2.18) (сумма $\sum_k$) с той лишь разницей, что в (2.2.39) не входит сумма $\sum_3 : |\lambda_k| \geq 3\lambda/2$. Таким образом, для S_1 справедливы оценки (1.2.21) и (1.2.23).

Следующее слагаемое в (2.2.23), содержащее $T_j^+(t)X_j^+(u_k^m, x, t)$, имеет оценку заведомо не хуже, чем слагаемое, содержащее $E_j^+(u_k^m, R, t)$, так как E_j^+ – это как раз "исключённые" члены $T_j^+X_j^+$, растущие при $t \rightarrow \infty$ (см. Главу 1 [4]). Оценку выражения с E_j^+ мы получим позже.

Перейдём к оценке слагаемого в (2.2.23), содержащего $B_{1t}^1[\tilde{A} u_k^m(x + t_1)]$. Повторяем те же преобразования, что и для S в I_{10} :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{\pi} \sum_0 \frac{f_k}{\mu_0} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} B_{1t}^1[\tilde{A} u_k^m(x + t_1)] dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_0 \frac{f_k}{n|\lambda_k|^{n-1}} S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \int_0^t [\tilde{A} u_k^m(x + t_1)] (-1)^{l+1} Q_1(\lambda_k, t_1, t) dt_1 dt \right], \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

$$\begin{aligned} \|S_2\|_{p,K} &\leq c \sum_{q=0}^{n-1} \left\| \sum_0 \frac{|\hat{f}_k|}{|\lambda_k|^q} S_0 \left[\int_0^R |a_{n-1-q}(x + t)| \left| \int_t^R \frac{\sin \lambda r}{r} Q_1(\lambda_k, t, r) dr \right| dt \right] \right\|_{p,K} \leq \\ &\leq c^* \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \left\| \sum_0 \frac{|\hat{f}_k|}{|\lambda_k|^q} S_0 \left[\int_0^R |a_{n-1-q}(x + t)| K_d^+(\lambda, \lambda_k, t, R) dt \right] \right\|_{p,K} = c^* \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} (S_{dq}). \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Рассмотрим сначала случай $q = 0$. Пусть $s \geq p$. Тогда $a_{n-1} \in L^p$ (здесь и всюду далее для величины A_{kd}^+ , $0 \leq d \leq n-1$, мы будем брать худшую из двух соответствующих оценок леммы 1.7 ($d = l$) и леммы 1.8 ($d \neq l$)):

$$\begin{aligned} S_{d0} &\leq \|a_{n-1}\|_p \sum_0 |f_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^+(\lambda, 0, R, R)] \leq \\ &\leq c \|a_{n-1}\|_p \left[\frac{1}{\lambda} \sum_2 |\hat{f}_k| \ln |\lambda_k| + \frac{1}{\lambda_k} \sum_4 |\hat{f}_k \lambda_k| + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_5 |\hat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{|\lambda - |\lambda_k||} \right] \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Проведя вычисления по обычной схеме, получим

$$S_{d0} = \|a_{n-1}\|_p O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right]\right), \quad d = \overline{0, n-1}. \quad (2.2.43)$$

Пусть $s < p$. Используем обобщённое неравенство Юнга:

$$S_{d0} \leq c \|a_{n-1}\|_s \sum_0 |\widehat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^{\zeta+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \|a_{n-1}\|_s \left[\sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{|\lambda_k| \lambda^{1/\zeta}} + \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| \frac{1}{\lambda} + \sum_5 |\widehat{f}_k \lambda_k| \left(\frac{\lambda^{1-1/\zeta}}{|\lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||} + \frac{\ln \lambda}{\lambda^{1+1/\zeta}} \right) \right]. \quad (2.2.44)$$

Здесь мы применили леммы 1.7, 1.8. В слагаемом $\sum_5$ мы оставили сумму $A_{kl}^{\zeta+}$ и $A_{kd}^{\zeta+}$, $d \neq l$. Приведём оценки всех сумм в S_{d0} :

$$\frac{1}{\lambda^{1/\zeta}} \sum_2 |\widehat{f}_k| \leq \frac{c}{\lambda^{1/\zeta}} \sum_2 \lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda_k \leq c^* \lambda^{-1/\zeta} \sum_{n=1}^{[\lambda/2]} n^{-\nu} \ln^{-\beta} n = \varphi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s})$, при $\nu < 1$; $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1-1/p+1/s} \ln^{1-\beta} \lambda)$, при $\nu = 1$; $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1-1/p+1/s})$, при $\nu > 1$.

$$\frac{1}{\lambda} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| \leq O(\lambda^{-\nu} \ln^{-\beta} \lambda),$$

$$\lambda^{1-1/\zeta} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \leq O(\lambda^{-\nu-1/p+1/s} \ln^{1-\beta} \lambda).$$

Итак, в случае $s < p$ получаем оценку

$$S_{d0} = \|a_{n-1}\|_s O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right]\right). \quad (2.2.45)$$

Общая оценка для S_{d0} будет иметь вид

$$S_{d0} = \|a_{n-1}\|_s O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right). \quad (2.2.46)$$

Оценим S_{dq} с $q > 0$ (используем леммы 1.7, 1.8). Рассмотрим сначала случай $p > 1$.

$$S_{dq} \leq c \|a_{n-1-q}\|_1 \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0[A_{kd}^{p+}(\lambda, 0, R, R)] \leq c \|a_{n-1-q}\|_1 \left[\lambda^{-1/p} \sum_2 |\widehat{f}_k| |\lambda_k|^{-1} + \lambda^{-1} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \lambda^{-1/p} \sum_5 |\widehat{f}_k| (|\lambda - |\lambda_k||^{-1} + \lambda^{-1} \ln \lambda) \right]. \quad (2.2.47)$$

Оценив все входящие в (2.2.47) слагаемые, используя условие (2.2.5), получим, что для S_{dq} справедлива оценка $O(\lambda^{-1/p})$.

При $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned} S_{dq} &\leq c \|a_{n-1-q}\|_1 \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0[A_{kd}^+(\lambda, 0, R, R)] \leq \\ &\leq c \|a_{n-1-q}\|_1 \left[\lambda^{-1} \sum_2 |\widehat{f}_k| \frac{\ln |\lambda_k|}{|\lambda_k|} + \lambda^{-1} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \ln \lambda \sum_5 |\widehat{f}_k| \left\{ \frac{1}{\lambda |\lambda - |\lambda_k||} + \frac{1}{\lambda^2} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

Слагаемое с $\sum_2$ в (2.2.48) имеет оценку $O(\lambda^{-1})$, $\sum_4 \sim O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{-\beta} \lambda)$, а последнее слагаемое – оценку $O(\lambda^{-\nu-1} \ln^{2-\beta} \lambda)$. Таким образом общая оценка

$$S_{dq} = \|a_{n-1-q}\|_1 O(\lambda^{-1/p}), \quad d = \overline{0, n-1}, \quad q = \overline{1, n-1}, \quad p \geq 1. \quad (2.2.49)$$

Тогда оценка для S_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} \|S_2\|_{p,K} &= \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right]\right) + \\ &+ \left(\sum_{q=1}^{n-1} \|a_q\|_1 \right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right). \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

Если $a_{n-1} \equiv 0$, то получим равномерную по x оценку (используем оценки лемм 1.7, 1.8, а также тот факт, что $K_l^+ = \lim_{s \rightarrow \infty} A_{kl}^{s+}$):

$$\begin{aligned} \|S_2\|_{\infty,K} &\leq c \sum_{q=1}^{n-1} \|a_{n-1-q}\|_1 \sum_{d=0}^{n-1} \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0[\|K_d^+(\lambda, \lambda_k, t, R)\|_{\infty, [0, R]}] \leq \\ &\leq c_1 \left(\sum_{q=1}^{n-1} \|a_q\|_1 \right) \sum_{d=0}^{n-1} \left[\sum_2 \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda_k|} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_4 |\widehat{f}_k| + \sum_5 |\widehat{f}_k| \left\{ \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{1}{|\lambda - |\lambda_k||} \right\} \right] \leq \\ &\leq \left(\sum_{q=1}^{n-1} \|a_q\|_1 \right) O(1). \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

Оценим сумму в (2.2.23), содержащую E_d^+ . Напомним, что $n = 2l + 1$. Введём $q = [l/2]$ (см. Главу 1 [4], формула сдвига для больших λ). Рассмотрим сначала случай $m = 0$. Оцениваем слагаемое с E_q^+ (остальные E_d^+ , $d \neq q$, имеют ту же структуру и оценки для них те же):

$$E_q^+(u, R, r) = \frac{T_q^+(r)}{T_q^+(R)} \Psi_0(u, y, R) - \sum_{\substack{0 \leq j \leq l-1 \\ j \neq q}} \frac{T_j^+(R) T_q^+(r)}{T_q^+(R)} X_j^+(R) - T_q^+(r) Y_q^+(R, r); \quad (2.2.52)$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_0 f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} E_q^+(u_k, R, t) dt \right] = \\
&= \left\{ \sum_0 f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} \frac{T_q^+(t)}{T_q^+(R_1)} dt \left(\Psi_0(u_k, x, R_1) - \sum_{j=0}^{l-1} T_j^+(R_1) X_j^+(u_k, x, R_1) \right) \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \sum_0 f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) Y_q^+(u_k, R_1, t) dt \right] \right\} \equiv S_{30} + S_{31},
\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

где мы обозначили выражения в фигурных скобках S_{30} и S_{31} . Учитывая (см. Главу 1 [4]), что

$$\begin{aligned}
\Psi_0(u_k, x, R_1) &= u_k(x + R_1) - u_k(x) B_{1R_1}^0(\cos \lambda t_0) - \sum_{j=l}^{n-1} T_j^+(R_1) X_j^+(u_k, x, R_1) + \\
&+ \frac{1}{\mu_0} B_{1R_1}^1[\tilde{A}u_k(x + t_1)],
\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

будем иметь (используем условие (2.2.3), Условия Ильина (пункт 3)):

$$\|\Psi_0\|_{\infty, K} \leq c_1 \|u_k\|_{\infty} \leq c_2 \|u_k\|_{r_0} \leq c_3 \|v_k\|_{r'_0}^{-1} = c\alpha_k. \tag{2.2.55}$$

Аналогично оцениваются величины $X_j^+(u_k, x, R_1)$, $(0 \leq j \leq l-1, j \neq q)$ и $Y_q^+(u_k, R_1, t)$ (используем помимо вышеназванных также условие (2.2.27)):

$$X_j^+(u_k, x, R_1) = \frac{(-1)^{l+1}}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(x) \omega^{n-1-k}}{\lambda^k} \omega_j^{n-k} + \frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_0^r \omega_j e^{-\omega_j \omega \lambda t} [Au(x+t)] dt \right\}, \tag{2.2.56}$$

$$\|X_j(u_k, x, R_1)\|_{\infty, K} \leq c\alpha_k. \tag{2.2.57}$$

$$Y_q^+(u_k, R_1, t) = \frac{(-1)^{l+1}}{n\lambda^{n-1}} \int_r^R \omega_q e^{-\omega_q \omega \lambda t} [Au_k(y+t)] dt, \tag{2.2.58}$$

$$\|Y_q^+(u_k, R_1, t)\|_{\infty, K} \leq c\alpha_k \left\| \int_t^R U_k(x+\tau) e^{-\omega_q \omega \lambda_k \tau} d\tau \right\|_{\infty, K}, \tag{2.2.59}$$

$$U_k(x) = |a_{n-1}(x)| + |\lambda_k|^{-1} \sum_{j=0}^{n-2} |a_j(x)|, \quad t \in [0, R], \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{2.2.60}$$

Применим эти оценки к S_{30}, S_{31} (в S_{31} поменяем местами интегралы по t и τ):

$$|S_{30}| \leq c \sum_0 |\widehat{f}_k| e_q^+ S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt \right], \quad e_q^+(R_1) = \frac{1}{|T_q^+(R_1)|} - \sum_{\substack{0 \leq j \leq l-1 \\ j \neq q}} \left| \frac{T_j^+(R_1)}{T_q^+(R_1)} \right|, \quad (2.2.61)$$

$$\begin{aligned} |S_{31}| &= \left| \sum_0 \frac{(-1)^{l+2}}{n \lambda_k^{n-1}} f_k S_0 \left[\int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) \int_t^{R_1} \omega_q e^{-\omega_q \omega \lambda \tau} [\tilde{A} u_k(x + \tau)] d\tau dt \right] \right| = \\ &= \left| \sum_0 \frac{\omega_q (-1)^{l+2}}{n \lambda_k^{n-1}} f_k S_0 \left[\int_0^{R_1} [\tilde{A} u_k(x + \tau)] e^{-\omega_q \omega \lambda_k \tau} d\tau \int_0^{\min(\tau, R)} \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt \right] \right| \leq \quad (2.2.62) \\ &\leq c \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0 \left[\int_0^{R_1} |U_k(x + \tau)| e^{-\omega_q \omega \lambda_k \tau} \int_0^{\min(\tau, R)} \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt d\tau \right]. \end{aligned}$$

Оценим интегралы в правых частях неравенств (2.2.61) и (2.2.62), обозначив их

$$T_{\Psi X}^+ = e_q^+(R_1) \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt, \quad (2.2.63)$$

$$T_Y^+ \equiv T_Y^+(\lambda, \lambda_k, q, \tau, R) = \lambda_k^{-1} e^{-\omega_q \omega \lambda_k \tau} \int_0^{\min(\tau, R)} \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt, \quad \tau \in [0, R_1), \quad R_1 > R. \quad (2.2.64)$$

При $t \leq R$ имеют место оценки (см. Главу 1 [4], оценка 1.21):

$$\left| \frac{T_q^+(t)}{T_q^+(R_1)} \right| \leq c m_k(t) e^{-2a|\lambda_k|R_1}, \quad \left| d^\pm \frac{T_q^+(t)}{T_q^+(R_1)} \right| \leq c |\lambda_k|^{\pm 1} m_k^{1 \mp 1}(t) e^{-2a|\lambda_k|R_1}, \quad (2.2.65)$$

где $m_k(t) = \min[1, |\lambda_k|t]$, $d^+ = d/dt$, $d^- \cdot = \int \cdot dt$. Эти же оценки верны и для $T_j^+(R_1)T_q^+(t)/T_q^+(R_1)$, а значит и для $e_q^+(R_1)T_q^+(t)$.

Пусть $|\lambda_k| \geq \Lambda_0 > 0$. Оценим $T_{\Psi X}^+$ (используем (2.2.65), а также вторую формулу

среднего – формулу Боннэ; $t^* \in [1/|\lambda_k|, R]$):

$$\begin{aligned}
T_{\Psi X}^+ &= e_q^+(R_1) \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} T_q^+(t) dt = \int_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} [e_q^+(R_1) T_q^+(t)] dt = \\
&= \int_0^{1/|\lambda_k|} \frac{\sin \lambda t}{t} O(1) |\lambda_k| t e^{-2a|\lambda_k|R_1} dt + \int_{1/|\lambda_k|}^R \frac{\sin \lambda t}{t} O(1) e^{-2a|\lambda_k|R_1} dt = \\
&= O(1) |\lambda_k| e^{-2a|\lambda_k|R_1} \int_0^{1/|\lambda_k|} \sin \lambda t dt + O(1) e^{-2a|\lambda_k|R_1} \int_{1/|\lambda_k|}^R \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \\
&= e^{-2a|\lambda_k|R_1} \left[O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) + |\lambda_k| \int_{1/|\lambda_k|}^{t^*} \sin \lambda t dt + \frac{1}{R} \int_{t^*}^R \sin \lambda t dt \right] = e^{-2a|\lambda_k|R_1} O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.66}$$

Учитывая, что $e^{-a|\lambda_k|R_1} \leq c/|\lambda_k|^3 \quad \forall \lambda_k \neq 0$, получаем равномерную по $x \in K$ оценку

$$T_{\Psi X}^+ = O\left(\frac{1}{\lambda |\lambda_k|^2}\right) \quad \forall \lambda_k \neq 0. \tag{2.2.67}$$

Из (2.2.61) и (2.2.67) получаем, что $S_{30} = c \sum_0 \frac{1}{\lambda |\lambda_k|^2} = O(\frac{1}{\lambda})$ равномерно по $x \in K$.

Оценки для $T_Y^+(\lambda, \lambda_k, q, \tau, R)$ приведены в лемме 1.10. Оценки леммы 1.10 не хуже соответствующих оценок леммы 1.8, а значит для S_{31} справедливы те же оценки, что и для S_2 :

$$\begin{aligned}
|S_{31}| &\leq c \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0 \left[\int_0^{R_1} U_k(x + \tau) \left| e^{-\omega_q \omega \lambda_k \tau} \int_0^{\min[\tau, R]} \frac{\sin \lambda t}{t} T^+(t) dt \right| d\tau \right] = \\
&= c \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0 \left[\int_0^{R_1} U_k(x + \tau) |\lambda_k| |T_Y^+(\lambda, \lambda_k, q, \tau, R)| d\tau \right] \leq \\
&\leq c \left\{ \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0 \left[\int_0^{R_1} |\lambda_k| a_{n-1}(x + \tau) |T_Y^+| d\tau \right] \right\} + c \left\{ \sum_0 |\widehat{f}_k| S_0 \left[\int_0^{R_1} \sum_{d=0}^{n-2} a_d(x + \tau) |T_Y^+| d\tau \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.68}$$

Выражение в первых фигурных скобках оценивается, как $S_{d0}, d \neq l$, из S_2 , во вторых – как $S_{dq}, q > 0, d \neq l$ из S_2 . Итоговая оценка для S_{31} совпадает с оценкой для S_2 . Объединяя её с оценкой S_{30} , получим

$$\begin{aligned}
\|S_3\|_{p,K} &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \\
&+ \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right] \right) + \\
&+ \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1 \right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right),
\end{aligned} \tag{2.2.69}$$

если же $a_{n-1} \equiv 0$, то

$$\|S_3\|_{\infty, K} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O(1) = O(1). \quad (2.2.70)$$

Аналогично оценкам для $\|X_j(u_k, x, R_1)\|_{\infty, K}$ и $\|Y_q^+(u_k, R_1, t)\|_{\infty, K}$ легко установить, что $\|E_q^+(u, R, t)\|_{\infty, K} \leq c\alpha_k$ равномерно по $t \in [0, R]$, $R \leq R_1$. Аналогично оцениваются $E_d^+(u, R, t)$, $d \neq q$, а значит и суммы S_3 с $E_d^+(u, R, t)$. То же верно и для оценок $E_d^+(u, R, t)$, где $m > 0$.

Рассмотрим слагаемые в (2.2.23) с $i \geq 1$. Будем их оценивать так же, как в I_{10} . Обозначим аргумент оператора $B_{1t_0}^i$ как

$$\begin{aligned} f_i(t_i) = & u_k^{m-i}(y)(\cos \lambda_k t_i) + \sum_{j=l}^{n-1} [T_j^+(t_i) X_j^+(u_k^{m-i}, y, t_i)] - \frac{1}{\mu_0} B_{1t_0}^1 [\tilde{A} u_k^{m-i}(y + t_{i+1})] + \\ & + \sum_{j=0}^{l-1} [E_j^+(u_k^{m-i}, R, t_i)]. \end{aligned} \quad (2.2.71)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} B_{1t_0}^i [f_i(t_i)] dt_0 \right| &= \left| \int_0^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} \left(\frac{\mu_0}{n\lambda_k^{n-1}} \right)^i \int_0^{t_0} \dots \int_0^{t_{i-1}} f_i(t_i) (-1)^{l+1} \times \right. \\ &\times \prod_{j=1}^i Q_1(\lambda, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_1 dt_0 \left. \right| = \left| \left(\frac{\mu_0}{n\lambda_k^{n-1}} \right)^i \int_0^R dt_1 \left[\int_{t_1}^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} Q_1(\lambda_k, t_1, t_0) dt_0 \right] \int_0^{t_1} \dots \times \right. \\ &\times \int_0^{t_{i-1}} f_i(t_i) \prod_{j=2}^i Q_1(\lambda, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_2 \left. \right| \leq \left\| \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_1}^R \frac{\sin \lambda t_0}{t_0} Q_1(\lambda_k, t_1, t_0) \right\|_{1, [0, R]} \cdot \\ &\cdot \left\| \left(\frac{\mu_0}{n\lambda_k^{n-1}} \right)^i \lambda_k \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{i-1}} f_i(t_i) \prod_{j=2}^i Q_1(\lambda, t_j, t_{j-1}) dt_i \dots dt_2 \right\|_{\infty, t_1 \in [0, R]}. \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

Если $i = 1$, то второй сомножитель есть $\|n^{-1} \mu_0 \lambda_k^{2-n} f_1(t_1)\|_{\infty, t_1 \in [0, R]}$. Слагаемые, аналогичные S_2, S_3 , имеют оценки, как минимум, не хуже, так как интегралы A_{kd}^{s+} , $s > 1$ заменяются на интегралы A_{kd}^+ , имеющие лучшие оценки. Слагаемое с $u_k^{m-i}(x) \cos \lambda_k t_i$ после применения оценок (2.2.2), (2.2.3) приводит к выражению $\sum_0 |\hat{f}_k \lambda_k| S_0[A_{kd}^+(\lambda, 0, R, R)]$, что даёт ту же оценку, что и S_2 при $s \geq p$ (равномерную по $x \in K$): $O(\max[\lambda^{-1}, \lambda^{-\nu} \ln^2 \lambda])$.

Собирая вместе оценки S_1, S_2, S_3 для $i \geq 0$, получим в случае лучшей асимптотики по параметру λ :

$$\begin{aligned} I_{11} = & \frac{1}{R_0^2} \left[O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ & + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right) + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \quad m_0 = \max m_k, \end{aligned} \quad (2.2.73)$$

если $a_{n-1} \equiv 0$, то для выражения в (2.2.23) под знаком нормы (обозначим его через $I_{11\infty}(x)$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|I_{11\infty}\|_{\infty, K} = & \frac{1}{R_0^2} \left[O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O(1) + \right. \\ & \left. + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.74)$$

В случае лучшей асимптотики по параметру R_0 верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} I_{11} = & \frac{1}{R_0} \left[O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ & + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right) + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

$$\begin{aligned} \|I_{11\infty}\|_{\infty, K} = & \frac{1}{R_0} \left[O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O(1) + \right. \\ & \left. + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.76)$$

Объединяя оценки I_{10} и I_{11} , получим итоговые оценки для всего интеграла I_1 в (2.2.12):

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{R_0^2} \left[O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ & + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right) + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

$$\begin{aligned} \|I_{1\infty}\|_{\infty,K} &= \frac{1}{R_0^2} \left[O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O(1) + m_0 O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.78)$$

В случае лучшей асимптотики по параметру R_0 верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{R_0} \left[O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ &\quad + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ &\quad \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right) + m_0 O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

$$\begin{aligned} \|I_{1\infty}\|_{\infty,K} &= \frac{1}{R_0} \left[O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{1+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O(1) + m_0 O\left(\max\left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.80)$$

Оценим I_2 в (2.2.24). Повторим всю схему работы с S_1, S_2, S_3 из I_{11} в (2.2.23).

Обозначим эти суммы в I_2 волной. Единственное отличие – это появление суммы $\sum_3$ вместо $\sum_2$. Таким образом, для $\tilde{S}_1$ общие оценки равны, соответственно,

$$\tilde{S}_1 = \frac{1}{R_0^2} O\left(\frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right), \quad (2.2.81)$$

$$\tilde{S}_1 = \frac{1}{R_0} O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right). \quad (2.2.82)$$

Для $\tilde{S}_2$ оценки имеют вид

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_2\|_{p,K} &= \|a_{n-1}\|_s O\left(\max\left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ &\quad + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\max\left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right]\right). \end{aligned} \quad (2.2.83)$$

Если $a_{n-1} \equiv 0$, то

$$\|\tilde{S}_2\|_{\infty,K} = \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right). \quad (2.2.84)$$

Выпишем оценки для $\tilde{S}_3$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_3\|_{p,K} &= O\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+2} \ln^\beta \lambda}\right) + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max\left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \\ &\quad + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\max\left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right]\right), \end{aligned} \quad (2.2.85)$$

$$\|\tilde{S}_3\|_{\infty, K} = O\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+2} \ln^\beta \lambda}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right). \quad (2.2.86)$$

Собирая вместе все оценки для (2.2.24), получаем

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{R_0^2} & \left[O\left(\frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\max \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right]\right) + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.87)$$

$$\begin{aligned} \|I_{2\infty}\|_{\infty, K} = \frac{1}{R_0^2} & \left[O\left(\frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ & \left. + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

В случае лучшей асимптотики по параметру R_0 верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{R_0} & \left[O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \|a_{n-1}\|_s O\left(\max \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\max \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\right]\right) + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.89)$$

$$\begin{aligned} \|I_{2\infty}\|_{\infty, K} = \frac{1}{R_0} & \left[O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-2} \|a_q\|_1\right) O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ & \left. + m_0 O\left(\max \left[\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right]\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.90)$$

Подставляя в (2.2.12) последние оценки, а также оценки (2.2.77) – (2.2.80) для I_1 , получим оценки теоремы.

Теорема 2.4 доказана.

2.3. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора первого порядка с матричными коэффициентами

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + A(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \{A_{ij}(x)\}, \quad A_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad i, j = \overline{1, h}, \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), \quad u_j(x) \in D, \quad j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$, произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и систему $\{u^k(x)\}$, $u^j(x) = (u_1^j(x), u_2^j(x), \dots, u_h^j(x))$ корневых вектор-функций оператора L , отвечающую этим собственным значениям. Пусть существует $\{v^k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций. Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_p^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (2.3.2)$$

$u^k \in \mathcal{L}_p^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_q^h(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (2.3.3)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями

периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (2.3.4)$$

Выпишем условия на асимптотику коэффициентов $f^k = \langle f, v^k \rangle$:

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| > 1; \quad (2.3.5)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad (2.3.6)$$

где $\alpha^k = \|v^k\|_{\mathcal{L}_q^h(G)}^{-1}$. Предположим далее, что для оператора L_0 в условиях (2.3.5) и (2.3.6) показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. коэффициенты тригонометрического ряда Фурье удовлетворяют асимптотическим соотношениям (2.1.2) и (2.1.6).

Необходимо получить оценки малости при $\lambda \rightarrow +\infty$ для величин $\|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)}$ для всех $j = \overline{1, h}$, где $K \subset G$ – произвольный компакт. Нас интересует также зависимость этих величин от параметра $\eta = \rho(K, \partial G)$ – расстояния компакта до границы отрезка $\overline{G}$.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2.5. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.3.1), (2.3.5) и Условия АЗ. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda &\equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{n_u}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{n_u}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \right. \\ \left. + \|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) \right], \end{cases} \quad (2.3.7) \end{aligned}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η .

Теорема 2.6. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.3.1), (2.3.6) и Условия АЗ. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p) \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) \right], \end{cases} \quad (2.3.8)$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η .

Замечание. Схема доказательства теорем 2.5 и 2.6 повторяет рассуждения главы 1 в части теорем 1.4 и 1.5.

2.4. Оценки скорости локальной равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка с матричными коэффициентами

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} A^k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq 0;$$

$$A^{n-1}(x) = \{A_{ij}^{n-1}(x)\}, \quad A_{ij}^{n-1}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad \forall i, j = \overline{1, h},$$

$$A^k(x) = \{A_{ij}^k(x)\}, \quad A_{ij}^k(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad k = \overline{0, n-2},$$

$$(2.4.1)$$

где $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x))$, $u_j(x) \in D_n$, $j = \overline{1, h}$, а класс D_n – абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Собственные и присоединённые функции те же, что и в определениях 1.11 и 1.12.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u^k\}$ корневых вектор-функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А4.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u_k^{m-1}\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \leq c\alpha_\lambda \|u_k^m\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (2.4.2)$$

с не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}_\infty^h(G)} \leq c \|u_k\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (2.4.3)$$

Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (2.4.4)$$

$u^k \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_{r'_0}^h(G)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (2.4.5)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями

периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (2.4.6)$$

Будем также предполагать, что для $\{u^k, v^k\}$ и $f(x)$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$\exists \nu = \text{const} > 0 : \quad \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v_k\|_{r'_0}^{-1}, \quad (2.4.7)$$

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \widehat{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (2.4.8)$$

Предположим далее, что для оператора L_0 условия (2.4.7) и (2.4.8) также выполняются.

Фиксируем произвольное $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2.7. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.4.1) – (2.4.3), (2.4.7) и Условия А4. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda &\equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|A^{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|A^q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|A^{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|A^q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}\right) \right] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ , $m_0 = \max m_k$.

Теорема 2.8. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2.4.1) – (2.4.3), (2.4.8) и Условия А4. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и лю-

бого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2} \left[\max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}} \right) + \right. \\ \left. + \|A^{n-1}\|_s \max \left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|A^q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) \right], \\ \frac{c}{\eta} \left[\max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}} \right) + \right. \\ \left. + \|A^{n-1}\|_s \max \left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} \|A^q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \right) \right] \end{cases} \quad (2.4.10)$$

с постоянной c , не зависящей от η и λ .

Замечание. При $\beta = 0$ оценки (2.4.10) переходят в (2.4.9), а схема доказательства теоремы 2.8 повторяет схему доказательства теоремы 1.7.

Глава 3

Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного чётного порядка на всём интервале

Данная глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов второго и произвольного чётного порядков на основном интервале. Рассматриваются случаи одномерного оператора, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами.

3.1. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка на всём интервале

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \quad (3.1.1)$$

на классе функций D – абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной. Коэффициенты дифференциальной операции удовлетворяют условиям (1.1.2), корневые функции оператора L удовлетворяют Условиям A1.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$, $r \in [1, \infty)$, составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| < \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k = (f, v_k), \quad v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G), \quad r' = r/(r-1). \quad (3.1.2)$$

Пусть $\|\cdot\|_r$ – обозначение нормы в $\mathcal{L}^r(G)$, $\|\cdot\|_{r,K}$ – норма в $\mathcal{L}^r(K)$, $K \subset G$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице.

Выпишем условие на асимптотику коэффициентов f_k :

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| > 1, \quad (3.1.3)$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$. Предполагаем, что для оператора L_0 это условие выполняется.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$. Основная задача состоит в получении оценки малости для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p$ при $\lambda \rightarrow \infty$ на всём интервале G .

Теорема 3.1. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3.1.1), (1.1.2), (3.1.3) и Условия A1. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p &\leq \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + \\ &+ \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где $m_0 = \max m_k$, $\rho = \max(2, p, s')$ постоянная $s > 0$ не зависит от λ .

Следствие 1. Пусть $p \in [1, \infty)$, $f \in V(G)$ и выполняются условия Теоремы 3.1. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_\lambda(x, f)\|_p &= O\left[\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + \right. \\ &\left. + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Оценку (3.1.5) можно получить, если добавить к результатам Теоремы 3.1 известную оценку

$$\|f - S_\lambda(x, f)\|_p = O(\lambda^{-1/p}).$$

Доказательство теоремы 3.1.

Пусть $\Theta_\lambda(x, y) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_k(x) \bar{v}_k(y)$ – спектральная функция оператора L , $D_\lambda(x, y)$ – ядро Дирихле, спектральная функция оператора L_0 ;
 $\sigma_\lambda(x, f) = \int_{\bar{G}} \Theta_\lambda(x, y) f(y) dy$. Фиксируем произвольный отрезок $K = [a, b] \subset G$. В работах [36], [72] показано, что

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p \equiv \Delta_\lambda^a + \Delta_\lambda + \Delta_\lambda^b. \quad (3.1.6)$$

Оценка слагаемого Δ_λ приведена в Главе 1, теорема 1.1, оценки слагаемых Δ_λ^a и Δ_λ^b совпадают.

Получим оценки первого слагаемого из (3.1.6). Обозначим

$$\frac{1}{\varkappa} = 1 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{s} < 1. \quad (3.1.7)$$

Для Δ_λ^a верна следующая оценка:

$$\Delta_\lambda^a \leq H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5, \quad (3.1.8)$$

где

$$H_1 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_1 |\hat{f}_k| + \frac{1}{\lambda^2} \sum_2 |\hat{f}_k| + \frac{1}{\lambda} \sum_3 \left| \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k} \right| + \sum_4 |\hat{f}_k| + \sum_5 \frac{|\hat{f}_k|}{|\lambda - |\lambda_k||^2}; \quad (3.1.9)$$

$$H_2 = \left[\frac{1}{\lambda^{\rho'}} \sum_1 |\hat{f}_k|^{\rho'} + \frac{1}{\lambda^{\rho'}} \sum_2 |\hat{f}_k \lambda_k|^{\rho'} + \lambda^{\rho'} \sum_3 \left| \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k} \right|^{\rho'} + \ln^{\rho'} \lambda \sum_4 |\hat{f}_k|^{\rho'} + \right. \\ \left. + \sum_5 \|\hat{f}_k|^{\rho'} \ln^{\rho'} \frac{\lambda}{|\lambda - |\lambda_k||} \right]^{1/\rho'}; \quad (3.1.10)$$

$$H_3 = \frac{1}{\lambda} \sum_1 |\hat{f}_k| + \frac{1}{\lambda} \sum_2 \left| \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k^{1/\rho}} \right| + \lambda^{1/\rho'} \sum_3 \left| \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k^2} \right| + \frac{1}{\lambda^{1/\rho}} \sum_4 |\hat{f}_k| + \\ + \lambda^{1/\rho'} \sum_5 \frac{|\hat{f}_k|}{|\lambda_k| |\lambda - |\lambda_k||}; \quad (3.1.11)$$

$$H_4 = \frac{1}{\lambda} \sum_1 |\hat{f}_k| + \frac{1}{\lambda} \sum_2 |\hat{f}_k| \ln |\lambda_k| + \ln \lambda \sum_3 \left| \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k} \right| + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_4 |\hat{f}_k \lambda_k| + \\ + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_5 \frac{|\hat{f}_k \lambda_k|}{|\lambda - |\lambda_k||}; \quad (3.1.12)$$

$$H_5 = \frac{1}{\lambda} \sum_1 |\widehat{f}_k| + \frac{1}{\lambda} \sum_2 |\widehat{f}_k \lambda_k^{1-1/\varkappa}| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_3 \left| \frac{\widehat{f}_k}{\lambda_k} \right| + \frac{1}{\lambda^{1/\varkappa}} \sum_4 |\widehat{f}_k \lambda_k| + \lambda^{1-1/\varkappa} \sum_5 \frac{|\widehat{f}_k|}{|\lambda - |\lambda_k||}. \quad (3.1.13)$$

Оценивая выражения H_1 – H_5 по обычной схеме, получим следующие оценки:

$$H_1 : O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right); \quad (3.1.14)$$

$$H_2 : O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}\right)\right); \quad (3.1.15)$$

$$H_3 : O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho} \ln^\beta \lambda}\right)\right); \quad (3.1.16)$$

$$H_4 : O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\right); \quad (3.1.17)$$

$$H_5 : O\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/\varkappa-1} \ln^\beta \lambda}\right)\right), \quad (3.1.18)$$

причём слагаемое H_3 отвечает множителю $\|q_1\|_1$, H_4 – множителю m_0 , а H_5 – норме $\|p_1\|_s$.

Объединяя оценки (3.1.14)–(3.1.18) и первую из оценок (1.2.4) (оценка слагаемого Δ_λ), получим оценки (3.1.4) теоремы.

Теорема доказана.

3.2. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка на всём интервале

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} p_l(x) \frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1; \quad (3.2.1)$$

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad p_l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad l = \overline{2, 2n},$$

на классе функций D_{2n} , абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка. Корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) введены в определениях 1.3 и 1.4.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условию А2. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная" оценка

$$\| u_k^{m-1} \|_{r_0} \leq c \alpha_\lambda \| u_k^m \|_{r_0}, \quad c = const > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (3.2.2)$$

с не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Пусть также

$$\| u_k \|_{\infty} \leq c \| u_k \|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = const > 0. \quad (3.2.3)$$

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^{r_0}(G)$ составим частичные суммы биортонormalного разложения $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x)$, $\lambda > 0$, $f_k \equiv (f, v_k)$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 : L_0 u = u''$, $u \in D_2$, с условиями периодичности для u и u' в нуле и единице.

Будем также предполагать, что для $\{u_k, v_k\}$ и $f(x)$ выполняется условие:

$$\exists \nu = const > 0, \beta = const : \widehat{f_k} = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \| v_k \|_{r'_0}^{-1}. \quad (3.2.4)$$

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 3.2. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3.2.1) – (3.2.4) и Условие А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива

следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p &\leq \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \\ &+ \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/s'}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/Q} \lambda}{\lambda^{1/s'} \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1/Q}, \right. \\ &\left. \frac{\ln^{1+1/Q} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1-1/p}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

с постоянной c , не зависящей от λ , $m_0 = \max m_k$, $\rho = \max(2, p, s')$, $Q = \min(\rho', s') = \min(q, s, s')$.

Следствие 2. Пусть $p \in [1, \infty)$, $f \in V(G)$ и выполняются условия Теоремы 3.2. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_\lambda(x, f)\|_p &= O\left[\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \right. \\ &+ \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/s'}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/Q} \lambda}{\lambda^{1/s'} \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1/Q}, \right. \\ &\left. \frac{\ln^{1+1/Q} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1-1/p}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \Big]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Доказательство теоремы 3.2.

Следуя работам [41], [42] искомая норма разности складывается из уже известных оценок скорости сходимости на внутреннем компакте и двух новых слагаемых

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p \equiv \Delta_\lambda^a + \Delta_\lambda + \Delta_\lambda^b. \quad (3.2.7)$$

Оценка слагаемого Δ_λ приведена в Главе 1, теорема 1.3, оценки слагаемых Δ_λ^a и Δ_λ^b совпадают.

Фиксируем $\Lambda_0 \gg 1$ ($\Lambda_0 > 1/R_0$), через $\sum_{\Lambda_0}^\lambda$ сумму для тех λ_k , для которых верно неравенство $\Lambda_0 < |\lambda_k| \leq \lambda$. В упомянутых выше работах показано, что для первого слагаемого из (3.2.7) верно

$$\Delta_\lambda^a \leq I'_{q_1} + I'_{q_2} + I''_{q_1} + \|p_1\|_s [A_1 + A_2 + A_3] + I''_{q_2} + A + T_{q_1} + T_{q_2} + \Delta_2, \quad (3.2.8)$$

где после подстановки асимптотики

$$I'_{q1} = c_1 \|p_1\|_s \|1\|_{s', (t-\frac{1}{\lambda}, t)} \left[\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu Q} \ln^{\beta Q} \lambda_k} \right]^{1/Q}; \quad (3.2.9)$$

$$I'_{q2} = \frac{\|p_2\|_1}{\lambda^{1/p}} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu+1} \ln^{\beta} \lambda_k}; \quad (3.2.10)$$

$$I''_{q1} = \|p_1\|_s \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} f_k O\left(\frac{\alpha_k}{\lambda}\right); \quad (3.2.11)$$

$$A_1 = \frac{c_1}{\lambda} \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{1/s'}} \left(\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{(\nu-1)Q} \ln^{\beta Q} \lambda_k} \right)^{1/Q} + \frac{\lambda}{\lambda^{1/s'}} \left(\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu Q} \ln^{\beta Q} \lambda_k} \right)^{1/Q} \right]; \quad (3.2.12)$$

$$A_2 = \frac{c}{\lambda^{1/s'}} \left(\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} [\alpha_k |f_k|]^Q \right)^{1/Q} + \frac{c \ln \lambda}{\lambda} \left(\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} [\alpha_k |f_k| |\lambda_k|^{1-1/s'}]^Q \right)^{1/Q}; \quad (3.2.13)$$

$$A_3 = \frac{c_1 \lambda^{1-1/s'}}{\lambda} \left(\sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu Q} \ln^{\beta Q} \lambda_k} \right)^{1/Q}; \quad (3.2.14)$$

$$I''_{q2} = \|p_2\|_1 \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} f_k O\left(\frac{\alpha_k}{\lambda \lambda_k}\right); \quad (3.2.15)$$

$$A = \|p_2\|_1 \left[\frac{1}{\lambda^{1/p}} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{\alpha_k f_k}{\lambda_k} \right| + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{\alpha_k f_k}{\lambda_k^{1/p}} \right| \right]; \quad (3.2.16)$$

$$T_{q1} = \|p_1\|_s \left(\sum_3 \left\| O\left(\frac{\lambda}{\lambda_k^{\nu+1} \ln^{\beta} \lambda_k}\right) \right\|_{s', (0, 1/\lambda)}^Q \right)^{1/Q}; \quad (3.2.17)$$

$$T_{q2} = \|p_2\|_1 \lambda \ln \lambda \sum_3 \frac{\alpha_k |f_k|}{|\lambda_k|^{2+1/p}}; \quad (3.2.18)$$

а последнее слагаемое Δ_2 – оценка скорости равномерности для оператора второго порядка на всём интервале G (теорема 3.1).

Выпишем оценки для выражений (3.2.9)–(3.2.18). Для I'_{q1} справедлива оценка

$$I'_{q1} \leq c_2 \frac{\|p_1\|_s}{\lambda^{1/s'}} \varphi_{\nu}(\lambda), \quad \text{где } \varphi_{\nu}(\lambda) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu+1/Q}), \nu < 1/Q; \\ O(\ln^{-\beta+1/Q} \lambda), \nu = 1/Q; \\ O(1), \nu > 1/Q. \end{cases} \quad (3.2.19)$$

$$I'_{q2} \leq c_1 \frac{\|p_2\|_1}{\lambda^{1/p}}. \quad (3.2.20)$$

$$I''_{q1} \leq \|p_1\|_s \frac{1}{\lambda} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu} \ln^{\beta} \lambda_k} = \|p_1\|_s \begin{cases} O(\lambda^{-1}), \nu > 1; \\ O(\lambda^{-1} \ln^{-\beta+1} \lambda), \nu = 1; \\ O(\lambda^{-\nu}), \nu < 1. \end{cases} \quad (3.2.21)$$

$$A_1 \leq c_2 \left[\frac{\ln \lambda}{\lambda^{1+1/s'}} \varphi_{1\nu}(\lambda) + \frac{1}{\lambda^{1/s'}} \varphi_{\nu}(\lambda) \right], \quad \text{где } \varphi_{1\nu}(\lambda) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu+1+1/Q}), \nu < 1 + \frac{1}{Q}; \\ O(\ln^{-\beta+1/Q} \lambda), \nu = 1 + \frac{1}{Q}; \\ O(1), \nu > 1 + \frac{1}{Q}. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

$$A_2 \leq c \left[\frac{\varphi_{\nu}(\lambda)}{\lambda^{1/s'}} + \frac{\ln \lambda \varphi_{2\nu}(\lambda)}{\lambda} \right], \quad \text{где } \varphi_{2\nu}(\lambda) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu-1/s'+1+1/Q}), \nu < 1 - \frac{1}{s'} + \frac{1}{Q}; \\ O(\ln^{-\beta+1/Q} \lambda), \nu = 1 - \frac{1}{s'} + \frac{1}{Q}; \\ O(1), \nu > 1 - \frac{1}{s'} + \frac{1}{Q}. \end{cases} \quad (3.2.23)$$

$$A_3 \leq \frac{c}{\lambda^{1/s'}} \varphi_{\nu}(\lambda). \quad (3.2.24)$$

$$I''_{q2} \leq \|p_2\|_1 O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} A &\leq \|p_2\|_1 \left[\frac{1}{\lambda^{1/p}} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda_k^{\nu+1} \ln^{\beta} \lambda_k} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} \sum_{\Lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda_k^{\nu+1/p} \ln^{\beta} \lambda_k} \right] \leq \\ &\leq \|p_2\|_1 \left[O\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}\right) + \begin{cases} O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}\right), \nu < 1 - 1/p; \\ O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda \ln^{\beta} \lambda}\right), \nu = 1 - 1/p; \\ O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right), \nu > 1 - 1/p; \end{cases} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$T_{q1} \leq \frac{c \|p_1\|_s}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q} \ln^{\beta} \lambda}. \quad (3.2.27)$$

$$T_{q2} \leq \frac{\|p_2\|_1 \ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^{\beta} \lambda}. \quad (3.2.28)$$

Объединяя установленные оценки (3.2.19)–(3.2.28), получаем оценки теоремы.

Теорема доказана.

3.3. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора второго порядка с матричными коэффициентами на всём интервале

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + P(x)u' + Q(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

где

$$\begin{aligned} P(x) &= \{P_{ij}(x)\}, \quad P_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad i, j = \overline{1, h}, \\ Q(x) &= \{Q_{ij}(x)\}, \quad Q_{ij}(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \\ u &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x)), \quad u_j(x) \in D, \quad j = \overline{1, h}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$, произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и систему $\{u^k(x)\}$, $u^j(x) = (u_1^j(x), u_2^j(x), \dots, u_h^j(x))$ корневых вектор-функций оператора L , отвечающую этим собственным значениям, ограничения на которые были сформулированы ранее (определения 1.5 и 1.6). Пусть существует $\{v^k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций. Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_p^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (3.3.2)$$

$u^k \in \mathcal{L}_p^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_q^h(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (3.3.3)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (3.3.4)$$

Выпишем условие на асимптотику коэффициентов $f^k = \langle f, v^k \rangle$:

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \quad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| > 1, \quad (3.3.5)$$

где $\alpha^k = \|v^k\|_{\mathcal{L}_q^h(G)}^{-1}$.

Теорема 3.3. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3.3.1), (3.3.5) и Условия АЗ. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} &\leq \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + \\ &+ \|P(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s} \ln^\beta \lambda}\right) + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right), \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где $m_0 = \max m_k$, $\rho = \max(2, p, s')$ постоянная $s > 0$ не зависит от λ .

Доказательство теоремы 3.3.

Схема доказательства следует доказательствам теорем 1.4 и 3.1.

3.4. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного чётного порядка с матричными коэффициентами на всём интервале

Рассмотрим оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$L \equiv lu, \quad l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} P^l(x) \frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0, 1), \quad n > 1; \quad (3.4.1)$$

$$P^1(x) = \{P_{ij}^1(x)\}, \quad P_{ij}^1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad \forall i, j = \overline{1, h}, \quad s > 1,$$

$$P^l(x) = \{P_{ij}^l(x)\}, \quad P_{ij}^l(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad \forall i, j = \overline{1, h}, \quad \forall l = \overline{2, 2n},$$

где $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x))$, $u_j(x) \in D_{2n}$, $j = \overline{1, h}$, а класс D_{2n} – абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка включительно функции. Корневые функции оператора L (собственные и присоединённые функции) введены в определениях 1.7 и 1.8.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u^k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условию А4. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u^{m-1}\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \leq c\alpha_\lambda \|u^m\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (3.4.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n = 1$ эта оценка всегда выполняется при условии (1.1.19) из Условий А4. Пусть также

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}_{\infty}^h(G)} \leq c \|u^k\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (3.4.3)$$

Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$ составим частичные суммы

биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (3.4.4)$$

$u^k \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_{r'_0}^h(G)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (3.4.5)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (3.4.6)$$

Будем также предполагать, что для $\{u^k, v^k\}$ и $f(x)$ выполняется условие:

$$\begin{aligned} \exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \widehat{f}_k = \alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1, \\ \alpha_k = \|v^k\|_{\mathcal{L}_{r'_0}^h(G)}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 3.4. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3.4.1) – (3.4.3), (3.4.7) и Условия A4. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} &\leq \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right) + \\ &+ \|P_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/s'}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^{1/Q} \lambda}{\lambda^{1/s'} \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1/Q}, \right. \\ &\left. \frac{\ln^{1+1/Q} \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right) + \sum_{l=2}^{2n} \|P_l\|_1 \max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda \ln^\beta \lambda} \Big|_{\nu=1-1/p}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

с постоянной c , не зависящей λ , $m_0 = \max m_k$, $\rho = \max(2, p, s')$, $Q = \min(\rho', s') = \min(q, s, s')$.

Доказательство теоремы 3.4.

Схема доказательства следует доказательству теоремы 3.2.

Глава 4

Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для операторов произвольного нечётного порядка на всём интервале

Данная глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов произвольного нечётного порядков на основном интервале. Рассматриваются случаи одномерного оператора, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами.

4.1. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка на всём интервале

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq 0;$$
$$a_{n-1}(x) \in L^s(G), \quad s > 1, \quad a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-2},$$
(4.1.1)

на классе функций D_n , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(n - 1)$ -го порядка включительно.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А2.

Будем также обозначать через $\|f\|_{r,E}$ норму функции $f(x) \in L^r(E)$, $r \in [1, \infty]$. Если $E = G$, то будем писать $\|f\|_r$.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u_k^{m-1}\|_{r_0} \leq c\alpha_\lambda \|u_k^m\|_{r_0}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (4.1.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n \geq 3$ такую систему всегда можно построить [61]. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_\infty \leq c\|u_k\|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (4.1.3)$$

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^{r_0}(G)$ составим частичные суммы биортонормального разложения $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x)$, $\lambda > 0$, $f_k \equiv (f, v_k)$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 : L_0 u = u''$, с условиями периодичности в нуле и единице.

Будем также предполагать, что для $\{u_k, v_k\}$ и $f(x)$ выполняется условие:

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \widehat{f_k} = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v_k\|_{r'_0}^{-1}. \quad (4.1.4)$$

Предположим далее, что для оператора L_0 в условии (4.1.4) показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. коэффициенты тригонометрического ряда Фурье удовлетворяют этому асимптотическому соотношению.

Фиксируем произвольное $p \in [1, \infty)$.

Теорема 4.1. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4.1.1) – (4.1.4) и Условия А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива

следующая оценка:

$$\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p \leq c \max \left[\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta} \ln^\beta \lambda} \right] \quad (4.1.5)$$

с постоянной c , не зависящей от λ , $\delta = \min(2, q, s)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Замечание. При $\beta = 0$ оценка (4.1.5) совпадает с результатом теоремы 4.1 из работы [4], схема доказательства аналогична, вспомогательные оценки получены в предыдущих главах.

4.2. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений для оператора произвольного нечётного порядка с матричными коэффициентами на всём интервале

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} A^k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geq 0;$$

$$A^{n-1}(x) = \{A_{ij}^{n-1}(x)\}, \quad A_{ij}^{n-1}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \forall i, j = \overline{1, h},$$

$$A^k(x) = \{A_{ij}^k(x)\}, \quad A_{ij}^k(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \quad k = \overline{0, n-2},$$
(4.2.1)

где $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_h(x))$, $u_j(x) \in D_n$, $j = \overline{1, h}$, а класс D_n – абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Собственные и присоединённые функции те же, что и в определениях 1.11 и 1.12.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u^k\}$ корневых вектор-функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А4.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная" оценка

$$\|u_k^{m-1}\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \leq c\alpha_\lambda \|u_k^m\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)}, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \quad (4.2.2)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}_\infty^h(G)} \leq c\|u_k\|_{\mathcal{L}_{r_0}^h(G)} \quad \forall k; \quad c = \text{const} > 0. \quad (4.2.3)$$

Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \quad \lambda > 0, \quad (4.2.4)$$

$u^k \in \mathcal{L}_{r_0}^h(G)$, $v^k \in \mathcal{L}_{r'_0}^h(G)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, h$ рассмотрим j -ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x). \quad (4.2.5)$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей j -ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f_j(y) dy. \quad (4.2.6)$$

Будем также предполагать, что для $\{u^k, v^k\}$ и $f(x)$ выполнено:

$$\exists \nu = \text{const} > 0, \beta = \text{const} : \widehat{f_k} = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|), \quad |\lambda_k| \geq 1, \quad \alpha_k = \|v_k\|_{r'_0}^{-1}. \quad (4.2.7)$$

Предположим далее, что для оператора L_0 условие (4.2.7) также выполняется.

Фиксируем произвольное $p \in [1, \infty)$.

Теорема 4.2. Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4.2.1) – (4.2.3), (4.2.7) и Условия А2. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_p \leq c \max \left[\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta} \ln^\beta \lambda} \right] \quad (4.2.8)$$

с постоянной c , не зависящей от λ , $\delta = \min(2, q, s)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Замечание. Оценка теоремы совпадает с результатом (4.1.5), схема доказательства повторяет схему доказательства теоремы 4.1 из работы [4] с учётом подхода теоремы 1.7.

Заключение

В заключение сформулируем основные результаты работы:

1. Получены оценки скорости равномерности спектральных разложений функций для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с разложением этих функций в тригонометрический ряд Фурье на произвольном внутреннем компакте основного интервала как в скалярном, так и в матричном случае. При этом установлена зависимость оценки скорости локальной равномерности от расстояния внутреннего компакта до границы интервала.

2. Получены оценки скорости сходимости и оценки скорости равномерности спектральных разложений функций для дифференциального оператора произвольного порядка с разложением этих функций в тригонометрический ряд Фурье на всём основном интервале как в скалярном, так и в матричном случае.

Список литературы

- [1] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ. 1963.
- [2] *Афонин С.В.* О скорости сходимости биортогональных рядов для дифференциальных операторов первого порядка // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. 2006. Вып. 3. С. 8-31.
- [3] *Афонин С.В.* Формулы сдвига для корневых функций дифференциальных операторов нечётного порядка с негладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 6. С. 723-737.
- [4] *Афонин С.В.* Сходимость в $\mathcal{L}^p$ спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов нечётного порядка с негладкими коэффициентами // Дисс. канд. физ.-мат. наук. М. МГУ, ВМиК. 2009.
- [5] *Афонин С.В., Ломов И.С.* О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечётного порядка с негладкими коэффициентами // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 151-153.
- [6] *Белянцев О.В.* Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1011-1020.
- [7] *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука. 1975.
- [8] *Будаев В.Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. М. 1993.
- [9] *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций для потенциала, содержащего δ -функции // ДАН. 2001. Т. 376, № 4. С. 445-448.

- [10] Волков В.Е., Йо И. Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1865-1876.
- [11] Гольдман М.Л. Ряды Фурье-Бесселя для функций, интегрируемых с весом // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 9. С. 1617-1928.
- [12] Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 2. С. 265-270.
- [13] Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Эквивалентность в $L^p(0, 1)$ системы $e^{i2\pi kx}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) и системы собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Матем. заметки. 1991. Т. 49, Вып. 1. С. 47-55.
- [14] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т. 1,2.
- [15] Ильин В.А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединённым функциям несамосопряжённого обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 548-551.
- [16] Ильин В.А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М.В. Келдыша обыкновенных несамосопряжённых дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1975. Т. 225, № 3. С. 297-299.
- [17] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I, II // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771-794. № 6. С. 980-1009.

- [18] Ильин В.А. О необходимом условии равносходимости с тригонометрическим рядом спектрального разложения произвольной суммируемой функции // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 3. С. 371-379.
- [19] Ильин В.А. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом из класса $\mathcal{L}^1$ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 577-597.
- [20] Ильин В.А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шрёдингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862-1879.
- [21] Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука. 1991.
- [22] Ильин В.А. Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряжённому расширению оператора Шрёдингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 1957-1967.
- [23] Ильин В.А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряжённым расширениям двух операторов Штурма-Лиувилля для абсолютно непрерывной функции // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1381-1383. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1175-1193.
- [24] Ильин В.А., Крицков Л.В. Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ оценка скорости сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору Шрёдингера с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 32-36.

- [25] *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11-14.
- [26] *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 1. С. 11-14.
- [27] *Курбанов В.М.* О скорости равносходимости спектральных разложений // ДАН. 1999. Т. 365, № 4. С. 444-449.
- [28] *Курбанов В.М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов I, II // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1597-1609. 2000. Т. 36, № 3. С. 319-335.
- [29] *Курбанов В.М.* Распределение собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов // Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. М. МГУ, ВМиК. 2000.
- [30] *Левитан Б.М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряжённого дифференциального уравнения второго порядка // Изв. АН СССР. Матем. 1955. Т. 19, № 1. С. 33-58.
- [31] *Ломов И.С.* Некоторые свойства спектральных разложений, связанных с операторами типа Штурма-Лиувилля // ДАН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1063-1065.
- [32] *Ломов И.С.* О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля в интегральной метрике // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1480-1493.
- [33] *Ломов И.С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. механ. 1992. № 5. С. 33-43.

- [34] Ломов И.С. О базисности систем нерегулярных корневых векторов дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 74-86.
- [35] Ломов И.С. О скорости сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами второго порядка // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 58-69.
- [36] Ломов И.С. О скорости сходимости биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 12. С. 1618-1629.
- [37] Ломов И.С. Коэффициентное условие сходимости в $\mathcal{L}^p(0, 1)$ биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 31-39.
- [38] Ломов И.С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений I, II // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 5. С. 619-628. № 8. С. 1066-1077.
- [39] Ломов И.С. Формула среднего значения Е.И. Моисеева для дифференциальных операторов чётного порядка с негладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1046-1057.
- [40] Ломов И.С. Обобщённое неравенство Бесселя для обыкновенных дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами и обобщение теоремы Рисса // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1621-1630.
- [41] Ломов И.С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами I, II // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 3. С. 328-342. № 5. С. 648-660.

- [42] Ломов И.С. Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 632-646.
- [43] Ломов И.С. Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложений от расстояния внутреннего компакта до границы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1409-1420.
- [44] Макин А.С. О сходимости средних Рисса спектральных разложений, отвечающих одномерному оператору Шрёдингеру // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 897-899.
- [45] Макин А.С. О средних Рисса биортогональных разложений по корневым функциям несамосопряжённых расширений оператора Шрёдингера // ДАН СССР. 1992. Т. 322, № 3. С. 472-475.
- [46] Макин А.С. О свойствах корневых функций и спектральных разложений, отвечающих несамосопряжённым дифференциальным операторам // Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. М. МГУ, ВМиК. 2000.
- [47] Макин А.С. О базисности систем корневых функций регулярных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1646-1656.
- [48] Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряжённому оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. 2006. Т. 406, № 1. С. 21-24.
- [49] Макин А.С. Характеристика спектра регулярных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 3. С. 329-335.
- [50] Макин А.С. Асимптотика спектра оператора Штурма-Лиувилля с регулярными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 626-639.

- [51] *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1950. Т. 72, № 3. С. 457-460.
- [52] *Моисеев Е.И.* Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 827-844.
- [53] *Никольская Е.И.* Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шрёдингера с комплексными потенциалами из класса $\mathcal{L}^1$ // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 598-612.
- [54] *Радзиевский Г.В.* Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29, № 3. С. 87-90.
- [55] *Рыхлов В.С.* О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -ой производной // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1053-1056.
- [56] *Рыхлов В.С.* Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -ой производной // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 975-989.
- [57] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Матем. заметки. 2006. Т. 80, Вып. 6. С. 864-884.
- [58] *Садовничая И.В.* О скорости равносходимости с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряжённому расширению оператора Штурма-Лиувилля с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 4. С. 506-511.

- [59] *Садовничая И.В.* Равносходимость в пространствах Гёльдера разложений по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 674-685.
- [60] *Самарская Т.А.* О равносходимости спектральных разложений, отвечающих несамосопряжённым расширениям дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 1. С. 155-166.
- [61] *Седлецкий А.М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37, № 5. С. 51-95.
- [62] *Седлецкий А.М.* О сходимости негармонических рядов Фурье по системам экспонент, косинусов и синусов // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5 С. 1053-1056.
- [63] *Теляковский С.А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Матем. заметки. 1968. Т. 4, Вып. 3. С. 291-300.
- [64] *Титчмарш Т.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // Т. 1. М.: ИЛ. 1960. Т. 2. М.: ИЛ. 1961.
- [65] *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных операторов // Матем. сб-к. 1981. Т. 114, № 3 С. 378-405.
- [66] *Хромов А.П.* Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1691-1696.
- [67] *Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. механ. 2000. № 2. С. 21-26.

Публикации автора по теме диссертации.

- [68] Ломов И.С., Марков А.С. Оценки скорости сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов чётного порядка // ДАН. 2012. Т. 445, № 5. С. 510-512.
- [69] Ломов И.С., Марков А.С. Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов чётного порядка // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557-563.
- [70] Марков А.С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциального оператора на скорость равносходимости спектральных разложений // XV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных Ломоносов-2008, секция Вычислительная математика и кибернетика. Тезисы докладов, М.: Изд-во МГУ. 2008. С. 60.
- [71] Марков А.С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциального оператора на скорость равносходимости спектральных разложений // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. 2008. Вып. 5. С. 68-72.
- [72] Марков А.С. О скорости сходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. 2009. Вып. 6. С. 111-127.
- [73] Марков А.С. О скорости сходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2009 года. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ. 2009. С. 50.
- [74] Марков А.С. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений на отрезке // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1105-1116.

[75] Марков А.С. Исследование скорости сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов // Деп. в ВИНТИ 24.10.2013 № 292-В2013.