

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Месяц Алексей Игоревич

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С
ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ДИНАМИКОЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
академик РАН А. Б. Куржанский

Москва, 2015 г.

Оглавление

Введение	4
Список обозначений	14
1 Решение линейно-квадратичной задачи через вытягивание в вектора	17
1.1 Постановка задачи	18
1.2 Решение	19
1.3 Возвращение к матричным обозначениям	22
2 Решение линейно-квадратичной задачи операторным методом	26
2.1 Постановка задачи	27
2.2 Линейные операторы над матричными пространствами	28
2.3 Решение задачи	33
2.3.1 Решение при отсутствии фазовых ограничений	33
2.3.2 Решение при наличии фазовых ограничений	37
2.4 Сравнение вычислительной сложности с решением через вытягивание в вектор для систем большой размерности	41
2.5 Численные примеры	44
2.5.1 Первый пример	45
2.5.2 Второй пример	46

2.5.3	Третий пример	48
2.5.4	Четвёртый пример	49
3	Операторные методы для задач с геометрическими ограничениями	52
3.1	Задача с геометрическими ограничениями	53
3.1.1	Постановка задачи	53
3.1.2	Решение	54
3.2	Визуализация матричных множеств	57
3.3	Численный пример	64
3.4	Эллипсоидальные оценки множества достижимости	66
3.4.1	Постановка задачи	66
3.4.2	Ортогональные и положительно определённые операторы в пространствах матриц	67
3.4.3	Внешние оценки множества достижимости	69
3.4.4	Внутренние оценки множества достижимости	72
3.4.5	Множество разрешимости	74
3.4.6	Численный пример	76
3.4.7	Сравнение вычислительной сложности	76
3.5	Задача реконфигурации	79
3.6	Численный пример	83
3.7	Задача разделения контейнера	85
3.8	Численный пример	89
Заключение		93
Литература		95

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию задач управления для систем с многозначными траекториями, выраженных в виде эллипсоидальных трубок. Подобные постановки возникают во многих актуальных задачах теории управления.

Одной из ключевых задач теории управления является *задача достижимости*, в которой требуется описать множество всех терминальных состояний, которые система может достичь к заданному моменту времени из множества начальных состояний, используя допустимые управление. Сопряженной к ней является *задача разрешимости* — задача отыскания всех начальных состояний системы, стартуя из которых, система может при помощи допустимых управлений попасть в терминальный момент на заранее заданное целевое множество. При решении этих задач осуществляется переход от рассмотрения отдельных траекторий к анализу *ансамблей* траекторий, задающих *многозначную* динамику исследуемых систем. Эволюция таких ансамблей приводит к анализу трубок достижимости и разрешимости — многозначных отображений, сечения которых в каждый момент времени будут являться множествами достижимости и разрешимости, соответственно. Изучением динамики подобных трубок занимается *теория трубок траекторий* [47, 48, 8].

Задачи достижимости и разрешимости не являются оптимизационными задачами, однако им можно поставить в соответствие задачи оптимизации, ко-

торые обеспечивают регулярные методы вычисления решений. Эффективным общим подходом для решения таких задач является метод *динамического программирования*, разработанный Р. Беллманом [15, 16], и опирающийся на гамильтонов формализм. Для использования этого метода необходимо ввести соответствующим образом *позицию* системы — минимальный набор параметров, обеспечивающий выполнение принципа оптимальности, выраженного в виде полугруппового свойства для функции цены. Построение трубок разрешимости позволяет находить синтезирующее управление с помощью метода экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [63].

Даже в простейших ситуациях множества достижимости и разрешимости могут иметь довольно сложную структуру. Для решения задач анализа динамики трубок до конца, то есть до практически реализуемых алгоритмов, применяется *эллипсоидальное исчисление*. В работах А. Б. Куржанского были построены параметризованные семейства эллипсоидальных трубок, позволяющие сконструировать внешние и внутренние оценки трубок достижимости для систем с неопределенностью [1, 53]. Такие оценки обладают рядом замечательных свойств:

1. они будут *тугими*, т.е. они будут касаться точного множества вдоль некоторой кривой;
2. они допускают *рекурентную запись* в виде систем дифференциальных уравнений на параметры эллипсоидов, позволяющую эффективно пересчитывать новые оценки на основе уже полученных без дополнительных расчётов;
3. при стремлении числа оценок к бесконечности они заметают всё оцениваемое множество;
4. оценки, отвечающие различным значениям параметра, могут быть посчи-

таны независимо друг от друга, допуская высокую степень параллелизма в вычислениях, позволяя использовать суперкомпьютерные вычисления [49].

Численные алгоритмы, реализующие построение таких оценок, реализованы в программном пакете *Ellipsoidal Toolbox* для вычислительной среды *Matlab* [14]. На основе полученных таким образом внутренних оценок множества разрешимости можно строить синтезирующие управление методом эллипсоидального синтеза [1, 50].

Другим возможным подходом для оценивания состояния системы является построение вместо трубыки единственной эллипсоидальной аппроксимации, удовлетворяющей какому-либо заданному критерию оптимальности (например, минимальность объёма или следа матрицы конфигураций) [24].

Невырожденный эллипсоид в \mathbb{R}^n описывается двумя параметрами, центром, q , и положительно определенной симметричной матрицей конфигураций, $Q = Q' > 0$:

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - q, Q^{-1}(x - q) \rangle \leq 1\},$$

следовательно, уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных трубок $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, также содержат две компоненты: векторную для $q(t)$ и матричную для $Q(t)$. В эллипсоидальном исчислении уравнение на матрицу Q будет уравнением Риккати. Матричные уравнения Риккати активно применяются во многих разделах теории управления [22, 23]. Кроме того, матричные фазовые переменные также встречаются в задачах оптимизации наблюдений [28].

Таким образом, задача управления системами с матричной фазовой переменной естественно вытекает из общей теории трубок траекторий.

Важным примером использования управляемых эллипсоидальных трубок являются задачи группового (коллективного) управления. В таких задачах рассматривается группа однородных (схожих) агентов, которым, взаимодействуя

друг с другом, надо выполнить некоторую общую задачу. Такие системы получают все большее распространение на практике в задачах исследования морского дна и картографирования [65, 66, 67, 68]. В работах [2, 3, 4] поставлена задача синтеза целевых управлений для группы агентов, которым необходимо достичь целевого множества, избегая столкновений друг с другом и внешними препятствиями, находясь при этом внутри виртуального *эллипсоидального контейнера*. Решение при этом строится в два этапа. Сначала рассчитывается виртуальное движение эллипсоидального контейнера, который, производя *реконфигурацию*, осуществляет избежание столкновений с внешними препятствиями, после чего находятся синтезирующие управление для агентов внутри контейнера, для которых он служит внешним фазовым ограничением. Использование эллипсоидального контейнера позволяет гарантировать выполнение *командного свойства* для группы. Специфика такой задачи накладывает ряд фазовых ограничений на матрицу конфигураций контейнера: так, отвечающий ей эллипсоид не должен быть слишком большим, чтобы обходить препятствия, и, кроме того, он не может быть слишком маленьким, иначе агенты внутри него не помещаются. Такие ограничения можно учитывать в виде неравенств на собственные числа фазовой матрицы.

Задача управления системами с матричными фазовыми траекториями рассматривалась И. В. Чебуниным в работе [21]. В ней исследовалось уравнение Риккати [22, 23],

$$\dot{P}(t) = AP(t) + PA'(t) + M(t) - P(t)B'N(t)BP(t), \quad P(t_0) = P_0 > 0, \quad (1)$$

где $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — фазовая матрица, $M(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $N(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — матричные управлении. Требовалось найти пару $\{M(t), N(t)\}$, которая переводила бы систему в момент t_1 в заданную положительно определённую матрицу P^* . В статье были получены условия управляемости уравнения (1) для двух случаев: когда управление является произвольной симметричной матрицей и когда оно

обязано быть неотрицательно определённой матрицей. Для получения результатов исследуемая система сводилась к векторной с помощью операции вытягивания матриц в вектора с использованием тензорного произведения Кронекера [29, 30, 31, 32].

Целью настоящей работы является провести дальнейшие исследования систем с матричной фазовой переменной. Такое исследование, с одной стороны, должно учитывать матричную специфику задачи, а с другой — допускать адаптацию предложенных результатов для проведения реальных вычислений для систем потенциально большой размерности.

Перейдём к описанию структуры диссертации.

В первом разделе первой главы рассматривается линейно-квадратичная задача управления для системы, описываемой линейным матричным уравнением

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t)B'(t), \quad Q(t_0) = Q_0, \quad (2)$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матричная фазовая переменная, $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — матричное позиционное управление, Q_0 — известное начальное положение системы. Требуется минимизировать интегральный функционал на траекториях системы,

$$\Psi(U(\cdot)) = \int_{t_0}^{\theta} \langle U(t, Q(t)), U(t, Q(t)) \rangle dt + \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle. \quad (3)$$

Здесь $M, D = D' > 0$ — известные матрицы. Применяя операцию вытягивания матрицы по строкам в столбец, $\overline{(\cdot)} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$, во **втором разделе** эта задача сводится, подобно работе [21], к векторной. Полученная задача затем решается классическими методами динамического программирования [5, 60]. Используя свойства произведения Кронекера, устанавливается, что для векторной задачи можно получить явные формулы для решения, однако оказывается, что перейти от полученных в итоге векторных формул обратно к матричным

обозначениям — задача более сложная чем непосредственный прямой переход от исходных матричных обозначений к промежуточным векторным.

В **третьем разделе** показывается, что аналог формулы, используемой при исходном переходе, вообще говоря, не имеет места для перехода обратного, и указывается класс систем, для которых такой переход возможен. Встаёт вопрос о сохранении матричной структуры на протяжении всего решения.

В **первом разделе второй главы** вновь рассматривается линейно-квадратичная задача (2), (3), но теперь её решение строится без выхода из класса матриц. Для этого, отталкиваясь от идей тензорного анализа [39, 40, 41], во **втором разделе** предлагается специальная форма записи действия линейных операторов над матричными пространствами. Как известно, действие линейного оператора над \mathbb{R}^n однозначно задаётся заданием образа базиса пространства. Если эти образы «склеить», то получится матрица линейного оператора. Проводится в чём-то аналогичная процедура для матричных операторов: действие оператора \mathcal{A} на базисе $\{E^{ij}\}_{i,j=1}^n$ матричного пространства, $A = \{\mathcal{A}E^{ij}\}_{i,j=1}^n$, и будет аналогом матрицы оператора в векторном случае. Эти объекты в дальнешнем называются *представлениями* матричных операторов. Здесь же строятся правила нахождения представления произведения операторов и представления сопряженного оператора, а также исследуется их взаимосвязь с классической теорией операторов.

Ключевым моментом здесь является указание способа сведения задачи нахождения представления произведения операторов к матричному умножению. Это позволяет использовать на практике известные алгоритмы для нахождения произведения матриц, имеющие хорошую алгоритмическую сложность [73, 74]. Более того, имея конкретный алгоритм умножения матриц, можно подобрать под него специальный способ отождествления представлений с матрицами, эффективный именно для этого алгоритма.

В третьем разделе строится решение задачи (2),(3) через представления с использованием вспомогательных матричных операторов. Операторная задача затем решается методом динамического программирования, после чего полученное решение переписывается обратно в матричную форму. Кроме того, в этом разделе задача рассматривается при наличии дополнительных фазовых ограничений,

$$\lambda_-^2 \leq \langle Q, Q \rangle \leq \lambda_+^2, \quad 0 < \lambda_- < \lambda_+,$$

где λ_- , λ_+ — известные константы. Эти неравенства ограничивают возможный размер эллипсоида с матрицей конфигураций $Q(t)$ шарами радиусов λ_- и λ_+ снизу и сверху соответственно. Используя метод штрафных функций, вводится новая функция цены и показывается, что задачу можно свести к оптимизации по параметрическому семейству задач, аналогичных по форме задаче без фазовых ограничений.

Изложенная в этой главе схема решения матричной задачи носит общий характер и может быть представлена в виде следующей последовательности действий:

1. Записать исходную задачу в операторном виде;
2. Найти представления операторов, входящих в задачу;
3. Решить операторную задачу (её решение аналогично решению векторной задачи);
4. Вернуться к матричным обозначениям, используя формулы для представлений операторов.

В четвертом разделе проводится сравнение вычислительной сложности методов из первой и второй глав через число арифметических операций, требуемых при вычислении полученных разными способами формул. Оказывается,

что операторный метод эффективнее метода через вытягивание. Это происходит потому, что он позволяет в явном виде использовать матричную специфику задачи и избежать тем самым части лишних вычислений, возникающих из-за векторизации.

В третьей главе предложенный подход записи матричных операторов применяется для решения нескольких задач с геометрическими («жёсткими») ограничениями на управление.

В первом разделе рассматривается задача разрешимости для системы с геометрическим ограничением на управление,

$$\langle U(t), U(t) \rangle \leq \mu^2 \text{ для всех } t \in [t_0, \theta].$$

и ищется позиционное управление, обеспечивающее достижение системой в терминальный момент θ целевого множества:

$$\langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle \leq 1.$$

Задача решается методом динамического программирования через сведение её к параметрическому семейству линейно-квадратичных задач.

Во втором разделе рассматривается вопрос о визуализации матричных множеств всвязи с переходом от рассмотрения изолированных матричных траекторий к произвольным выпуклым множествам в пространстве матриц. Для произвольного множества A в пространстве матриц вводится множество

$$\mathfrak{M}(A) = \bigcup_{Q \in A} \mathcal{E}(0, Q) \subset \mathbb{R}^n.$$

Это множество позволяет построить наглядное представление о множестве A , при этом будучи размерности n , в то время как само A при этом является $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерным. Далее в этом разделе исследуются свойства множества $\mathfrak{M}(A)$ в случае выпуклости A . В частности, доказывается выпуклость $\mathfrak{M}(A)$, и приводится явная формула для опорной функции $\rho(l, \mathfrak{M}(A))$. Кроме того, указывается явный

вид множества $\mathfrak{M}(A)$ для многогранников и шаров в пространстве матриц и указывается численный алгоритм построения множеств $\mathfrak{M}(A)$ на практике.

В третьем разделе приводится пример применения предложенных методов для построения множества разрешимости, описанного во втором разделе.

В четвёртом разделе рассматривается система с геометрическими ограничениями на управление и начальное состояние:

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t)B'(t), \\ Q(t_0) &\in \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0), \\ U(t) &\in \mathcal{E}(P(t), \mathcal{P}(t)),\end{aligned}$$

и ставится задача построения эллипсоидальной (в пространстве матриц) оценки множества достижимости для такой системы. В **втором подразделе** эта оценка строится по аналогии с векторным случаем [1, 53] с учетом формул для представлений, полученных во второй главе. Выводятся явные формулы для центра и оператора конфигураций оценки. В **третьем подразделе** подобные построения осуществляются для множеств разрешимости, что необходимо для решения задачи эллипсоидального синтеза.

В четвертом подразделе производится сравнение алгоритмической сложности полученного решения с решением через вытягивание. Оказывается, что хотя оба алгоритма имеют одинаковую асимптотику, предлагаемый операторный алгоритм на практике оказывается быстрее.

В пятом подразделе полученные результаты применяются для решения задачи *реконфигурации* эллипсоидального контейнера. Эта задача происходит из теории группового управления [3, 4]. В ней матрично-значное движение даёт виртуальный эллипсоидальный контейнер, который выступает в качестве эталонного движения для группы объектов: ему требуется, осуществляя необходимое для того изменение своей формы, переместиться из начальной позиции,

избегая столкновения с препятствиями, на заранее заданное целевое множество. В разделе приводится пример построения решения задачи реконфигурации эллипсоидального контейнера на плоскости при наличии двух препятствий. Приводится вычислительный пример.

В шестом подразделе приводится решение задачи разбиения контейнера.

Результаты диссертации отражены в публикациях [54, 55], а также были представлены в виде докладов на следующих конференциях:

- 20-я международная конференция «Автоматика», Николаев, Украина, 2013 [56];
- 52-я международная конференция CDC, Флоренция, Италия, 2013 [57];
- 21-я международная конференция MTNS, Гронинген, Голландия, 2014 [58].

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Список обозначений

\mathbb{R}	— вещественная прямая
\mathbb{R}^n	— n -мерное вещественное евклидово пространство
$\mathbb{R}^{n \times m}$	— пространство вещественных матриц с n строками и m столбцами
$\mathcal{L}(X, Y)$	— пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространство Y
X^*	— сопряженное к X пространство
\mathcal{A}^*	— сопряженный оператор к линейному оператору \mathcal{A} : $\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle$ для всех x, y
$\ x\ $	— норма вектора x
$\ x\ _A$	— (полу)норма вектора x , равная $\sqrt{\langle x, Ax \rangle}$, для (неотрицательно) положительно определённой матрицы A
$\langle x, y \rangle$	— скалярное произведение векторов x и y
$\text{rank } A$	— ранг матрицы A
$ A $	— определитель матрицы A
$\lambda_{\max}(A)$	— максимальное собственное число положительно определённой матрицы A

- $\lambda_{\min}(A)$ — минимальное собственное число положительно определённой матрицы A
 $A \otimes B$ — кронеккерово произведение матриц A и B
 $A \circ B$ — произведение матриц A и B по Адамару
 \overline{X} — вытягивание матрицы X по строкам в вектор-столбец
 $\text{conv } A$ — выпуклая оболочка множества A
 $\rho(l, A)$ — значение опорной функции к множеству A по направлению l ,

$$\rho(l, A) = \sup_{x \in A} \langle x, l \rangle.$$

- $B_r(x_0)$ — Шар радиуса r с центром в точке x_0 ,

$$B_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$$

- $\mathcal{E}(q, Q)$ — эллипсоид с центром в векторе q и матрицей (оператором) конфигураций Q :

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x : \langle x - q, Q^{-1}(x - q) \rangle \leq 1\}$$

- A' — транспонированная к A матрица
 I — единичная матрица
 \mathcal{I} — тождественный оператор
 $\text{vol } \mathcal{E}(q, Q)$ — объём эллипса $\mathcal{E}(q, Q)$
 ∂A — граница множества A (совокупность всех граничных точек)
 $\text{int } A$ — внутренность множества A (совокупность всех внутренних точек)

$\text{diag } m$ — диагональная матрица с компонентами вектора m на главной диагонали

$\text{tr } A$ — след матрицы A :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

$\text{epi } f$ — надграфик функции f :

$$\text{epi } f = \{(x, t) : t \geq f(x)\}$$

$A + B$ — сумма множеств A и B по Минковскому,

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

$A \dot{-} B$ — разница множеств по Минковскому,

$$A \dot{-} B = \{x : x + B \subseteq A\}$$

$d(A, B)$ — евклидово расстояние между двумя множествами:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$$

$\dot{x}(t)$ — полная производная $x(t)$ по времени

Глава 1

Решение матричной линейно-квадратичной

задачи через вытягивание в вектора

Введение

В этой главе рассматривается матричный аналог распространённой векторной линейно-квадратичной задачи на конечном интервале времени: требуется оптимизировать значение квадратичного функционала на траекториях линейной системы. Поскольку в векторном виде решение этой задачи хорошо известно, в этой главе осуществляется решение матричной задачи через сведение её к векторной. Для этого фазовая матричная переменная вытягивается в вектор, и, используя произведение Кронекера, записываются в явном виде параметры новых уравнений динамики. Затем векторная задача решается методами динамического программирования: записывается уравнение Гамильтона–Якоби–

Беллмана, после чего вводится функция цены, доказывается, что она будет квадратичной формой от начальной позиции системы, и приводятся дифференциальные уравнения на её параметры.

После получения ответа в терминах вытянутых матриц предпринимается попытка возвращения к исходным матричным обозначениям: оказывается, что явные формулы для перехода от матричной фазовой переменной к векторной не имеют места для перехода обратного, от векторной — к матричной. Приводится класс систем, для которых такой переход возможен.

1.1 Постановка задачи

На фиксированном отрезке времени $[t_0, \theta]$ рассматривается система

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t)B'(t), \quad (1.1)$$

$$Q(t_0) = Q_0,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матричная фазовая переменная, $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — управление, матричные параметры $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Штрих означает транспонирование.

Требуется найти позиционное матричное управление $U(t, Q)$, доставляющие минимум функционалу

$$\Psi(U(\cdot)) = \int_{t_0}^{\theta} \langle U(t, Q(t)), U(t, Q(t)) \rangle dt + \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle \quad (1.2)$$

на траекториях системы (1.1). Здесь M , $D = D' > 0$ — известные матрицы. Скалярное произведение матриц A, B рассматривается как $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B'A)$, индуцирующее в $\mathbb{R}^{n \times n}$ норму Фробениуса [29, 30]:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

1.2 Решение

Для решения задачи запишем матричное уравнение (1.1) в векторном виде.

Через \overline{Q} обозначим вытягивание матрицы Q по строкам в вектор–столбец,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для дальнейших действий нам потребуется воспользоваться кронеккеровым (тензорным) произведением матриц [29]:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

Таким образом, если $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$, $B \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$, то $A \otimes B \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times m_1 m_2}$. Для построения дальнейшего решения нам потребуются некоторые свойства операции вытягивания.

Лемма 1 ([29, 31, 32, 19]). *Справедливы следующие утверждения:*

1. $\langle A, B \rangle = \langle \overline{A}, \overline{B} \rangle$;
2. $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$;

3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;

4. Произведение $A \otimes B$ является обратимым тогда и только тогда, когда A и B являются обратимыми, причём

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

5. $\overline{AXB} = (A \otimes B')\overline{X}$.

6. Если $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные значения A , и $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ — собственные значения B , то матрица $A \times B$ имеет три собственных значения $\lambda_i \mu_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

7. $\text{tr } ABCD = (\overline{D}')'(C' \otimes A)\overline{B} = (\overline{D})'(A \otimes C)\overline{B}'$

Воспользовавшись леммой 1, мы можем преобразовать систему следующим образом,

$$\dot{\overline{Q}} = (T \otimes I)\overline{Q} + (I \otimes T)\overline{Q} + (B \otimes B)\overline{U} \equiv \mathcal{A}\overline{Q} + \mathcal{B}\overline{U}.$$

где

$$\mathcal{A} = (T \otimes I) + (I \otimes T), \quad \mathcal{B} = (B \otimes B).$$

Тогда функционал (1.2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Psi(U(\cdot)) &= \int_{t_0}^{\theta} \langle \overline{U}(t, Q(t)), \overline{U}(t, Q(t)) \rangle dt + \langle \overline{Q}(\theta), (D \otimes I)\overline{Q}(\theta) \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{Q}(\theta), \overline{DM} \rangle + \langle M, DM \rangle. \end{aligned}$$

Здесь и далее через I обозначается единичная матрица соответствующего размера. Полученную векторную задачу будем решать методом динамического программирования. Под (матричной) позицией системы будем понимать пару $\{t, Q\}$, принадлежащую пространству $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^{n \times n}$. Введём функцию цены

$$V(t_0, Q_0) = \min_{U(\cdot)} \{ \Psi(U(\cdot)) \mid Q(t_0) = Q_0 \}.$$

Эта функция является решением классического уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) [51]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\overline{U}} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}}, \mathcal{A}\overline{Q} + \mathcal{B}\overline{U} \right\rangle + \langle \overline{U}(t), \overline{U}(t) \rangle \right\} = 0, \quad (1.3)$$

при терминальном условии

$$V(\theta, Q) = \langle \overline{Q}(\theta), (D \otimes I)\overline{Q}(\theta) \rangle + \langle \overline{Q}(\theta), \overline{DM} \rangle + \langle M, DM \rangle. \quad (1.4)$$

Тогда минимум в (1.3) достигается на оптимальном управлении

$$\overline{U} = -\frac{1}{2} \mathcal{B}' \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}}.$$

Подставив управление \overline{U} в уравнение (1.3), получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}}, \mathcal{A}\overline{Q} \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}}, \mathcal{B}\mathcal{B}' \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}} \right\rangle = 0.$$

Полученное выражение есть квадратичная форма от фазовых координат и пространственных производных функции цены.

Последнее позволяет искать функцию цены также в виде квадратичной формы, а именно,

$$V(t, Q) = \langle \overline{Q}, \mathbb{P}(t)\overline{Q} \rangle + \langle \overline{Q}, \kappa(t) \rangle + \gamma(t). \quad (1.5)$$

Подставим эту квадратичную форму в систему:

$$\begin{aligned} & \left\langle \overline{Q}, \dot{\mathbb{P}}(t)\overline{Q} \right\rangle + \langle \overline{Q}, \dot{\kappa}(t) \rangle + \dot{\gamma}(t) + \langle 2\mathbb{P}(t)\overline{Q} + \kappa(t), \mathcal{A}\overline{Q} \rangle + \\ & + \langle 2\mathbb{P}(t)\overline{Q} + \kappa(t), \mathcal{B}\mathcal{B}'(2\mathbb{P}(t)\overline{Q} + \kappa(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при соответствующих степенях \overline{Q} , получаем систему уравнений:

$$\dot{\mathbb{P}} + \mathcal{A}'\mathbb{P} + \mathbb{P}\mathcal{A} - \mathbb{P}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathbb{P} = 0, \quad \mathbb{P}(\theta) = D \otimes I, \quad (1.6)$$

$$\dot{\kappa} + \mathcal{A}'\kappa + \mathbb{P}\mathcal{B}\mathcal{B}'\kappa = 0, \quad \kappa(\theta) = -2\overline{DM}, \quad (1.7)$$

$$\dot{\gamma} - \frac{1}{4} (\langle \kappa, \mathcal{B}\mathcal{B}'\kappa \rangle) = 0, \quad \gamma(\theta) = \langle M, DM \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, запишем уравнения (1.6)–(1.8) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{P}} + (T' \otimes I + I \otimes T')\mathbb{P} + \mathbb{P}(T \otimes I + I \otimes T) - \mathbb{P}(BB' \otimes BB')\mathbb{P} &= 0, \\ \mathbb{P}(\theta) &= D \otimes I, \\ \dot{\kappa} + (T' \otimes I + I \otimes T')\kappa + \mathbb{P}(BB' \otimes BB')\kappa &= 0, \\ \kappa(\theta) &= -2\overline{DM}, \\ \dot{\gamma} - \frac{1}{4}(\langle \kappa, (BB' \otimes BB')\kappa \rangle) &= 0, \\ \gamma(\theta) &= \langle M, DM \rangle. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Итак, с помощью этих уравнений получены уравнения для параметров формы (1.5). При непрерывной дифференцируемости параметров системы они однозначно задают классическое решение задачи (1.3), (1.4), являющееся единственным [60]. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Функция цены (1.5), где параметры описываются системой (1.9), определяет решение задачи оптимизации (1.1), (1.2). При этом синтезирующее оптимальное управление $U(t, Q)$ даётся формулой*

$$\overline{U} = -\frac{1}{2}(B \otimes B)' \frac{\partial V}{\partial \overline{Q}}. \tag{1.10}$$

1.3 Возвращение к матричным обозначениям

Уравнения (1.9) записаны путём перехода от матриц к векторам через вытягивание. Полученное решение имеет векторный вид, для возвращения к исходным матричным обозначениям нужны дополнительные операции. Переход от матриц к векторам производился по простым и явным формулам, поэтому естественно задать вопрос — возможен ли переход от полученного векторного решения обратно к матричному с помощью аналогичных соотношений?

Иными словами, возможно ли получить через параметры $\mathbb{P}(t) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$,

$\kappa(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$ матрицы $\mathcal{P}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ так, что бы

$$\langle \overline{Q}, \mathbb{P}(t)\overline{Q} \rangle = \langle Q, \mathcal{P}(t)Q \rangle, \quad \langle \overline{Q}, \kappa(t) \rangle = \langle Q, K(t) \rangle \text{ для всех } Q, t, \quad (1.11)$$

т.е. возможно ли получить матричные решения, не прибегая предварительно к вытягиванию решения в столбец? И, если это возможно, то как связаны параметры $\mathcal{P}(t)$, $K(t)$ с уравнениями (1.9)? Такая возможность позволила бы не выходить из класса матриц при решении задачи.

Воспользовавшись леммой 1, получаем, что первое соотношение в (1.11) эквивалентно выполнению

$$\mathbb{P}(t) = \mathcal{P}(t) \otimes I \text{ для всех } t. \quad (1.12)$$

Если оно имеет место, для параметра $K(t)$, $\overline{K}(t) = \kappa(t)$, из (1.9) вытекает

$$\dot{K} + T'K + KT' + \mathcal{P}BB'KBB' = 0, \quad K(\theta) = -DM. \quad (1.13)$$

При этом уравнение на $\gamma(t)$ примет вид

$$\dot{\gamma} - \frac{1}{4} (\langle K, BB'KBB' \rangle) = 0, \quad \gamma(\theta) = \langle m, Dm \rangle + \langle M, DM \rangle. \quad (1.14)$$

Таким образом, требуется проверить возможность представления (1.12).

Оказывается, в общем случае это представление не имеет места в силу следующего рассуждения. Действительно, если оно верно для \mathbb{P} , то по лемме 1 $\mathbb{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}(t) \otimes I$. При этом из (1.9) имеем, что

$$\frac{d(\mathbb{P}^{-1})}{dt} + \mathbb{P}^{-1}(T' \otimes I + I \otimes T') + (T \otimes I + I \otimes T)\mathbb{P}^{-1} - BB' \otimes BB' = 0.$$

Если выбрать

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то при любых начальных данных D получаем, что $(\mathbb{P}^{-1}(t))_{12} \neq 0$ при $t \neq 0$.

Значит, представление (1.12) в общем случае не имеет места.

Приведем достаточные условия, когда представление (1.12) справедливо. Оно равносильно выполнению двух условий, $\mathbb{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta) \otimes I$, и $\dot{\mathbb{P}}(t) = \dot{\mathcal{P}}(t) \otimes I$. Можно заметить, что в силу (1.9) первое условие выполнено, и $\mathcal{P}(\theta) = D$. Пусть до момента t (1.12) верно. Рассмотрим производную в момент t :

$$\dot{\mathbb{P}} + (T' \mathcal{P} + \mathcal{P} T) \otimes I + \mathcal{P} \otimes (T + T') + (\mathcal{P} B B' \mathcal{P}) \otimes (B B') = 0.$$

Лемма 2. *Выполнение $\mathcal{P} \otimes (T + T') + (\mathcal{P} B B' \mathcal{P}) \otimes (B B') = f(t, Q) \otimes I$ для всех \mathcal{P} возможно тогда и только тогда, когда*

$$T(t) + T'(t) = \mu(t)I, \quad B(t)B'(t) = \nu(t)I, \quad t \in [t_0, \theta], \quad (1.15)$$

где $\mu(t), \nu(t)$ — скалярные функции.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость следует из того, что матрица $f(t, Q) \otimes I$ состоит из диагональных блоков $(f(t, Q))_{ij} I$ — диагональных матриц с одинаковыми числами на диагоналях. Пусть у $T(t) + T'(t)$ или у $B(t)B'(t)$ имеется ненулевой внедиагональный элемент в позиции (i, j) . Выберем $\mathcal{P} = kI$, где k — некоторое число. Тогда сумма кронеккеровых произведений будет иметь блочно-диагональный вид с блоками $k(T + T') + k^2(BB')_{p,q}BB'$, и существует такое k , что в блоке на позиции (i, j) будет стоять не ноль. Аналогично проверяется, что на диагонали стоят одинаковые элементы. \square

Итак, получается, что выполнение (1.12) для любого возможного \mathcal{P} возможно тогда и только тогда, когда матрицы $T(t), B(t)$ удовлетворяют соотношению (1.15). Тогда уравнения (1.9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}} + \mathcal{P}T + T'\mathcal{P} - \nu^2\mathcal{P}^2 &= 0, & \mathcal{P}(\theta) &= D, \\ \dot{K} + T'K + KT' + \nu^2K\mathcal{P} &= 0, & K(\theta) &= -2DM, \\ \dot{\gamma} - \nu^2 \langle K, K \rangle &= 0, & \gamma(\theta) &= \langle M, DM \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Заметим, что из условия (1.15) следует, что в каждый момент времени t управление в системе либо отсутствует ($B = 0$), либо влияет на каждую из

компонент системы (размерность управления должна совпадать с размерностью фазовой переменной, т.е. $m = n$).

Таким образом, мы видим, что предложенный алгоритм решения не позволяет каким-либо простым способом вернуться к исходным матричным обозначениям.

Глава 2

Решение матричной линейно-квадратичной задачи операторным методом

Введение

В предыдущей главе было показано, что при решении линейно-квадратичной задачи через сведение к векторам оказывается затруднительно вернуться к исходным матричным обозначениям. Если требуется проверить дополнительный анализ полученной оптимальной траектории на какие-либо дополнительные, например, геометрические свойства, то было бы предпочтительнее иметь решение в виде матриц.

Эта глава посвящена получению *матричного* вида решения линейно-квадратичной задачи, т.е. получению формул, не выходящих из класса матриц на протяжении всего решения. Для этого вводится специальная форма записи линейных операторов над пространствами матриц, *представления операторов*, и исследуются основные их свойства и операции над ними — в первую очередь,

сопряжение и композиция. Изучаются взаимосвязь представлений с обычным перемножением матриц. Далее решение исходной задачи конструируется в терминах представлений операторов, что позволяет сохранить его матричную форму. Кроме того, в главе показывается, что построенный в ней алгоритм алгоритмически эффективнее (в смысле числа требуемых арифметических операций) решения через вытягивание. Это происходит из-за того, что в нём можно явно использовать эффективные алгоритмы для перемножения матриц.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущей главе (см. (1.1), (1.2)): на заданном временном отрезке $[t_0, \theta]$ рассматривается матричная система дифференциальных уравнений,

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t, Q)B'(t), \quad Q(t_0) = Q_0.$$

Система рассматривается на фиксированном временном интервале $[t_0, \theta]$. Требуется найти позиционное управление $U(t, Q)$, доставляющее минимум функционалу

$$\Psi(U(\cdot, \cdot)) = \int_{t_0}^{\theta} \langle U(t, Q(t)), U(t, Q(t)) \rangle dt + \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle$$

на траекториях системы (1.1). Здесь, как и ранее, $D = D' > 0$.

Задача (1.1), (1.2) также рассматривается при наличии дополнительных фазовых ограничений:

$$\lambda_-^2 \leq \langle Q, Q \rangle \leq \lambda_+^2, \quad 0 < \lambda_- < \lambda_+. \quad (2.1)$$

Здесь первое неравенство задаёт выпуклое ограничение, а второе — комплементарное к выпуклому. Эти неравенства ограничивают размер эллипсоида с

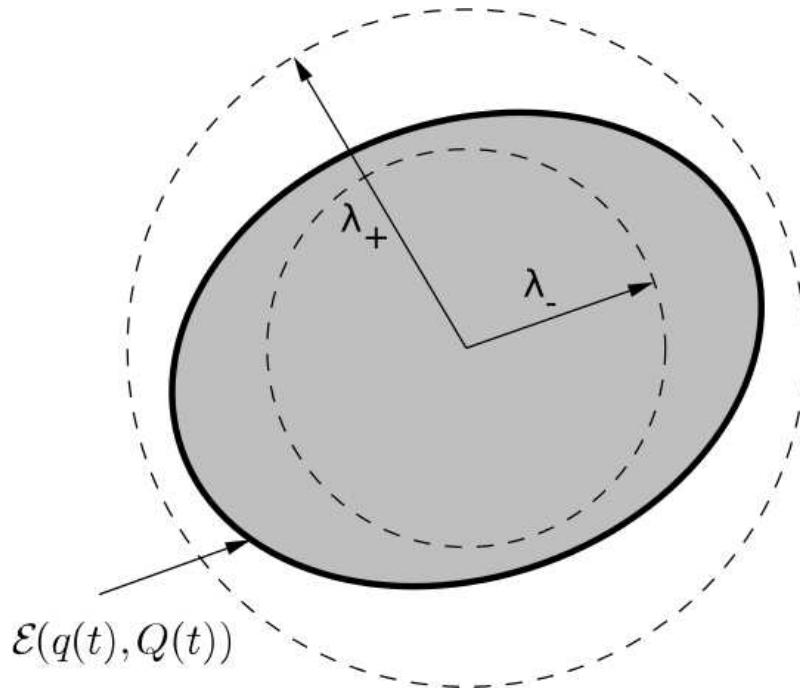


Рис. 2.1: Геометрический смысл ограничений (2.1).

матрицей конфигураций Q . Геометрический смысл этих ограничений проиллюстрирован на рисунке 2.1.

2.2 Линейные операторы над матричными пространствами

В данном разделе предложена специальная форма записи матричных линейных операторов, удобная для построения решения поставленной задачи. Эта идея восходит к методам тензорного анализа [39, 40, 41]. Напомним одно из возможных определений тензора.

Определение 1. Тензором типа (p, q) ранга $p + q$ над пространством W называется полилинейное отображение

$$T : \underbrace{W \times \dots \times W}_{q} \times \underbrace{W^* \times \dots \times W^*}_{p} \rightarrow \mathbb{R},$$

задаваемое формулой

$$T(a_1, \dots, a_q; l^1, \dots, l^p) = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j_1, \dots, j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} a_1^{j_1} \dots a_q^{j_q} l_{j_1}^1 \dots l_{i_p}^p,$$

где $a_k = \{a_k^{j_k}\} \in W$, $l^k = \{l_{i_k}^k\} \in W^*$.

Таким образом, надо предоставить описание действие тензора типа $(2, 2)$ в удобной для дальнейших действий форме.

Будем обозначать через $\mathcal{L}(X, Y)$ пространство линейных ограниченных операторов, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y . Как известно, действие линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ на вектор x можно записать в виде произведения матрицы оператора на вектор, $\mathcal{A}x = Ax$. В этом разделе для операторов над пространствами матриц вводятся объекты, аналогичные матрицам линейных операторов над \mathbb{R}^n , с помощью которых в следующем разделе будет построено решение исходной задачи.

Рассмотрим произвольный линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{m \times m})$. Зафиксируем произвольный базис $\{E^{ij}\}_{i,j=1}^n$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$, например,

$$E^{ij} = \{E_{ab}^{ij}\}_{a,b=1}^n, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad E_{ab}^{ij} = \begin{cases} 1, & a = i \text{ и } b = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В дальнейшем при работе с наборами матриц будем обозначать порядковый номер матрицы в наборе верхним индексом, а ее конкретный элемент — нижним индексом. При таких обозначениях, A_{pq}^{ij} — число, стоящее на пересечении p -й строчки и q -го столбца матрицы A^{ij} .

Действие линейного оператора на произвольную матрицу $X = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} E^{ij}$ однозначно определяется заданием его действия на элементах базиса,

$$\mathcal{A}X = \mathcal{A} \sum_{i,j=1}^n X_{ij} E^{ij} = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} \mathcal{A}E^{ij}.$$

Введём матрицы $A^{ij} = \mathcal{A}E^{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, $A^{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Таким образом, каждому $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{m \times m})$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие набор матриц $A = \{A^{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{m \times m}$. Введём следующее определение, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 2. Будем называть набор $A = \{A^{ij} = \mathcal{A}E^{ij}\}_{i,j=1}^n$ представлением оператора \mathcal{A} и обозначать такое соответствие через $\mathcal{A} = \{A^{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Матрице оператора в пространстве \mathbb{R}^n , равного суперпозиции операторов, отвечает матрица, равная произведению матриц соответствующих операторов. Определим теперь произведение представлений операторов в матричном пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ как представление их суперпозиции. Пусть

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m \times m}, \mathbb{R}^{k \times k}), \quad \mathcal{A} = \{A^{ij}\}_{i,j=1}^m, \quad \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{m \times m}), \quad \mathcal{B} = \{B^{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

Имеем:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}X = \mathcal{A} \sum_{i,j=1}^n B^{ij} X_{ij} = \sum_{k,l=1}^m A^{kl} \left(\sum_{i,j=1}^n B^{ij} X_{ij} \right)_{kl} = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^m A^{kl} B^{ij}_{kl} \right) X_{ij}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 3. Произведение представлений $A = \{A^{ij}\}_{i,j=1}^m$, $B = \{B^{ij}\}_{i,j=1}^n$ называется представление C , задаваемое формулой

$$C = AB, \quad C = \left\{ \sum_{k,l=1}^m A^{kl} B^{ij}_{kl} \right\}_{i,j=1}^n. \quad (2.2)$$

Видно, что определённое таким образом произведение будет ассоциативным.

Кроме того, легко заметить, что

$$C^{ij} = AB^{ij}.$$

Исследуем взаимосвязь операций умножения представлений и умножения матриц. Пусть $f(i, j)$ — произвольное взаимно однозначное отображение множества индексов (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, n$, в номера $1, 2, \dots, n^2$, а $g(i, j)$ — множества (p, q) , $p, q = 1, \dots, m$, в номера $1, \dots, m^2$. Тогда любому представлению

$D = \{D^{ij}\}_{i,j=1}^n$, $D^{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу

$$\mathring{D} = \{\mathring{D}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{m^2,n^2}, \quad \mathring{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha}^{\beta} = D_{g^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)}, \quad (2.3)$$

Обозначив $\gamma = g^{-1}(k, l)$, можно переписать (2.2) в виде

$$C_{pq}^{ij} = \sum_{k,l=1}^n A_{pq}^{kl} B_{kl}^{ij} \Leftrightarrow C_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\gamma=1}^{m^2} A_{\alpha}^{\gamma} B_{\gamma}^{\beta} \Leftrightarrow \mathring{C}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{m^2} \mathring{A}_{\alpha\gamma} \mathring{B}_{\gamma\beta} \Leftrightarrow \mathring{C} = \mathring{A} \mathring{B}. \quad (2.4)$$

Таким образом, нахождение $n^2 \cdot k^2$ коэффициентов представления оператора $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ сводится к нахождению коэффициентов матрицы \mathring{C} размера $k^2 \times n^2$, получающейся как умножение матриц \mathring{A} и \mathring{B} размеров $k^2 \times m^2$ и $m^2 \times n^2$ соответственно. Данная формула полезна при организации вычислительных алгоритмов для матричных операторов, позволяя организовывать хранение представлений операторов в памяти согласовано с имеющимся в распоряжении алгоритмом умножения матриц. Она особенно полезна при использовании параллельных вычислений.

Формула (2.4) также позволяет получить способ нахождения представления обратного оператора. Действительно,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \Leftrightarrow A\mathring{A}^{-1} = \mathring{I} \Leftrightarrow (\mathring{A}) (\mathring{A}^{-1}) = \mathring{I} \Leftrightarrow (\mathring{A}^{-1}) = (\mathring{A})^{-1} \mathring{I}.$$

Стоит отметить, что \mathring{I} будет матрицей перестановки, однозначно задаваемой отображениями f и g . Так, например, если

$$f : \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (2, 1) & (2, 2) \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g : \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (2, 1) & (2, 2) \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\mathring{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь в таблице перестановок верхняя строчка задает матричный индекс (строка, столбец), нижняя — линейный индекс.

Для дальнейшего потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{m \times m})$ имеет представление $A = \{A^{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда сопряженный к нему оператор \mathcal{A}^* имеет представление*

$$\tilde{A} = \{\tilde{A}^{ij}\}_{i,j=1}^m, \text{ где } \tilde{A}_{ij}^{kl} = A_{kl}^{ij}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}X, Y \rangle &= \sum_{i,j=1}^n Y_{ij} \left(\sum_{k,l=1}^n X_{kl} A^{kl} \right)_{ij} = \\ &= \sum_{k,l=1}^n X_{kl} \sum_{i,j=1}^n Y_{ij} A^{kl}_{ij} = \left\langle X, \sum_{i,j=1}^n Y_{ij} \hat{A}^{ij} \right\rangle = \langle X, \mathcal{A}^*Y \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось показать. \square

Имеет место следующая аналогия. Если оператору \mathcal{A} , действующим над \mathbb{R}^n , отвечает матрица A , и оператору \mathcal{A}^* будет отвечать матрица A' , полученная из A перестановкой строчного и столбцовогого индексов, то в случае $\mathbb{R}^{n \times n}$ имеет место следующее. Переставляется пара индексов, выделяющая элемент из набора представления, и пара индексов, выделяющая из этого элемента набора конкретное число. Таким образом, представление \tilde{A} , определяемое из A по лемме 3, можно по аналогии назвать транспонированием представления A .

Следующее утверждение связывает действие оператора и представление его сопряженного.

Лемма 4. *Пусть оператор, сопряженный к оператору \mathcal{A} , имеет представ-*

ление $\{\tilde{A}_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда

$$\mathcal{A}X = \begin{bmatrix} \langle X, \tilde{A}^{11} \rangle & \langle X, \tilde{A}^{12} \rangle & \dots & \langle X, \tilde{A}^{1n} \rangle \\ \langle X, \tilde{A}^{21} \rangle & \langle X, \tilde{A}^{22} \rangle & \dots & \langle X, \tilde{A}^{2n} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle X, \tilde{A}^{n1} \rangle & \langle X, \tilde{A}^{n2} \rangle & \dots & \langle X, \tilde{A}^{nn} \rangle \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что

$$(\mathcal{A}X)_{ij} = \sum_{k,l=1}^n X_{kl} A_{ij}^{kl} = \sum_{k,l=1}^n X_{kl} A_{ij}^{kl} = \sum_{k,l=1}^n X_{kl} \tilde{A}_{kl}^{ij} = \langle X, \tilde{A}^{ij} \rangle,$$

откуда и вытекает утверждение леммы. \square

2.3 Решение задачи

2.3.1 Решение при отсутствии фазовых ограничений

Сначала рассмотрим задачу (1.1), (1.2) при отсутствии фазовых ограничений (2.1). Для решения задачи запишем уравнение (1.1) в операторном виде, введя операторы

$$\mathcal{A}(t)X = T(t)X + XT'(t), \quad \mathcal{B}(t)X = B(t)XB'(t).$$

В дальнейшем для краткости аргумент t писать не будем. Найдём представления этих операторов. Для \mathcal{A} :

$$TE^{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & T_{1i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & T_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & T_{ni} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где ненулевой столбец находится в позиции j . Аналогично, $E^{ij}T'$ будет иметь одну ненулевую строку — j -ю строку матрицы T , стоящую в позиции i .

Итак, представление \mathcal{A} задаётся формулой

$$A_{ab}^{ij} = (\mathcal{A}E^{ij})_{ab} = \begin{cases} T_{ii} + T_{jj}, & a = i \text{ и } b = j, \\ T_{bj}, & a = i \text{ и } b \neq j, \\ T_{ai}, & a \neq i \text{ и } b = j, \\ 0, & a \neq i \text{ и } b \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

Для оператора \mathcal{B} получаем:

$$\mathcal{B}E^{ij} = BE^{ij}B' = \begin{bmatrix} B_{1i}B_{j1} & B_{1i}B_{j2} & \dots & B_{1i}B_{jm} \\ B_{2i}B_{j1} & B_{2i}B_{j2} & \dots & B_{2i}B_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{mi}B_{j1} & B_{mi}B_{j2} & \dots & B_{mi}B_{jm} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$B_{ab}^{ij} = (\mathcal{B}E^{ij})_{ab} = B_{ai}B_{bj}. \quad (2.7)$$

По лемме 3, сопряжённые операторы \mathcal{A}^* и \mathcal{B}^* будут иметь представление

$$\tilde{A}_{ab}^{ij} = \begin{cases} T_{ii} + T_{jj}, & a = i \text{ и } b = j, \\ T_{jb}, & a = i \text{ и } b \neq j, \\ T_{ia}, & a \neq i \text{ и } b = j, \\ 0, & a \neq i \text{ и } b \neq j, \end{cases} \quad \tilde{B}_{ab}^{ij} = B_{ia}B_{jb}. \quad (2.8)$$

В терминах введённых операторов задача принимает вид

$$\dot{Q} = \mathcal{A}Q + \mathcal{B}U,$$

$$Q(t_0) = Q_0,$$

$$\int_{t_0}^{\theta} \langle U, U \rangle dt + \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle \rightarrow \min.$$

Решим эту задачу методом динамического программирования. Вводя функцию цены,

$$V(t_0, Q_0) = \min_{U(\cdot, \cdot)} \{ \Psi(U(\cdot, \cdot)) \mid Q(t_0) = Q_0 \},$$

приходим к уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана [51]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_U \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial Q}, \mathcal{A}Q + \mathcal{B}U \right\rangle + \langle U, U \rangle \right\} = 0, \quad (2.9)$$

$$V(\theta, Q) = \langle Q - M, D(Q - M) \rangle.$$

В отличие от уравнения (1.3), это — *матричное* уравнение, записанное в операторных терминах. Здесь $\frac{\partial V}{\partial Q}$ обозначает матричную производную функции цены по фазовой матрице, понимаемую в смысле Фреше [26, 27].

Дифференцируя по Q выражение в фигурных скобках, получим, что минимум достигается на оптимальном управлении

$$U = -\frac{1}{2} \mathcal{B}^* \frac{\partial V}{\partial Q}. \quad (2.10)$$

Подставив его в систему, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial Q}, \mathcal{A}Q \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \mathcal{B}^* \frac{\partial V}{\partial Q}, \mathcal{B}^* \frac{\partial V}{\partial Q} \right\rangle = 0.$$

Будем искать решение в виде квадратичной формы,

$$V(t, Q) = \langle Q, \mathcal{P}(t)Q \rangle + \langle Q, K(t) \rangle + \gamma(t) = \sum_{i,j,k,l=1}^n Q_{ij} Q_{kl} P_{ij}^{kl}(t) + \langle Q, K(t) \rangle + \gamma(t). \quad (2.11)$$

Здесь $\mathcal{P}(t) = \{P^{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\gamma(t) \in \mathbb{R}$. Подставив это выражение в (2.9), получим квадратичную форму по Q :

$$\left\langle Q, \dot{\mathcal{P}}Q \right\rangle + \left\langle Q, \dot{K} \right\rangle + \dot{\gamma} + \langle 2\mathcal{P}Q + K, \mathcal{A}Q \rangle - \frac{1}{4} \langle 2\mathcal{P}Q + K, \mathcal{B}\mathcal{B}^*(2\mathcal{P}Q + K) \rangle = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при квадратичном и линейном слагаемых и при свободном члене к нулю, получим систему уравнений на параметры функции

цены:

$$\dot{\mathcal{P}} + \mathcal{A}^* \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} - \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{B}^* \mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P}(\theta) X = D X, \quad (2.12)$$

$$\dot{K} + \mathcal{A}^* K + \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{B}^* K = 0, \quad K(\theta) = -2 D M, \quad (2.13)$$

$$\dot{\gamma} - \frac{1}{4} \langle K, \mathcal{B} \mathcal{B}^* K \rangle = 0, \quad \gamma(\theta) = \langle M, D M \rangle. \quad (2.14)$$

Запишем теперь полученные уравнения в матричном виде, используя представления операторов. Для начала выпишем представление для оператора $\mathcal{C} = \mathcal{B} \mathcal{B}^* = \{C^{ij}\}_{i,j=1}^n$, воспользовавшись формулами (2.6), (2.7) и (2.8):

$$C_{ab}^{ij} = \sum_{k,l=1}^n B_{ak} B_{bl} B_{ik} B_{jl} = \sum_{k=1}^n B_{ak} B_{ik} \sum_{l=1}^n B_{bl} B_{jl} = (BB')_{ai}(BB')_{bj}. \quad (2.15)$$

Сопоставляя это с (2.7), получаем, что

$$\mathcal{C}X = BB'XBB'.$$

Запишем выражения для (i, j) -ой компоненты представления каждого слагаемого первого уравнения:

$$\mathcal{P} \mathcal{A}: \sum_{k,l=1}^n P^{kl} A_{kl}^{ij}, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{A}^* \mathcal{P}: \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}^{kl} P_{kl}^{ij}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{P} \mathcal{C} \mathcal{P}: \sum_{k,l=1}^n P^{kl} (\mathcal{C} \mathcal{P})_{ij}^{kl} = \sum_{k,l=1}^n P^{kl} \left(\sum_{p,q=1}^n C^{pq} P_{pq}^{ij} \right)_{kl} = \sum_{k,l,p,q=1}^n P^{kl} C_{kl}^{pq} P_{pq}^{ij}. \quad (2.18)$$

Отсюда получаем:

$$\dot{P}^{ij} + \sum_{k,l=1}^n \left(P^{kl} A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl} P_{kl}^{ij} \right) + \sum_{k,l,p,q=1}^n P^{kl} (BB')_{kp} (BB')_{lq} P_{pq}^{ij} = 0, \quad (2.19)$$

$$P^{ij}(\theta) = DE^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\dot{K} + \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \tilde{A}^{ij} + \sum_{k,l=1}^n P^{kl} (BB' K BB')_{kl} = 0, \quad (2.20)$$

$$K(\theta) = -2DM,$$

$$\dot{\gamma} - \frac{1}{4} \langle K, BB' K BB' \rangle = 0,$$

$$\gamma(\theta) = \langle M, DM \rangle. \quad (2.21)$$

Оптимальное управление при этом запишется как

$$U = -B' \left(\sum_{k,l=1}^n P^{kl} Q_{kl} + \frac{1}{2} K \right) B. \quad (2.22)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Решение задачи (1.1), (1.2) даётся функцией цены (2.11), параметры которой определяются из уравнений (2.19)–(2.21). Оптимальное управление, доставляющее минимум, определяется из формулы (2.22).

2.3.2 Решение при наличии фазовых ограничений

Опишем теперь схемы решения исходной задачи при наличии фазовых ограничений (2.1). Начнем с описания решения, опирающегося на метод штрафных функций, и при этом позволяющего решать задачу способами, аналогичными

предыдущему разделу. Введём

$$W_{\alpha,\beta}(t, Q) = \alpha(t)(\langle Q, Q \rangle - \lambda_+^2)_+ + \beta(t)(\lambda_-^2 - \langle Q, Q \rangle)_+,$$

$$V_L(t_0, Q_0) = \min_{U(\cdot)} \max_{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} \int_{t_0}^{\theta} \left[\langle U(t, Q(t)), U(t, Q(t)) \rangle + \right.$$

$$\left. + W_{\alpha,\beta}(t, Q(t)) \right] dt + \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle,$$

где $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ — скалярные функции, принимающие положительные значения, $\alpha(t) + \beta(t) = L$ для всех $t \in [t_0, \theta]$. Здесь $(a)_+$ обозначает операцию усечённой разности:

$$(a)_+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$$

Следуя [69], можно поменять местами максимум и минимум, получив семейство уравнения ГЯБ, аналогичных (2.9):

$$\frac{\partial V_{\alpha,\beta}}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V_{\alpha,\beta}}{\partial Q}, \mathcal{A}Q \right\rangle - \frac{1}{4} \left\| \mathcal{B}^* \frac{\partial V_{\alpha,\beta}}{\partial Q} \right\|^2 + W_{\alpha,\beta} = 0,$$

с тем же терминальным условием. Оптимальное управление будет по-прежнему определяться через (2.10). Будем искать решение в виде кусочно-квадратичной формы,

$$V_{\alpha,\beta}(t, Q) = \langle Q, \mathcal{P}_i(t)Q \rangle + \langle Q, K_i(t) \rangle + \gamma_i(t), \quad Q \in U_i,$$

где $U_i, i = 1, \dots, 4$ — области $\mathbb{R}^{n \times n}$, определяемые различными комбинациями знаков разниц в выражении для $W_{\alpha,\beta}(t, Q)$. Получаем по системе уравнений для каждой области U_i . Приведём один такой набор, отвечающий области, где

обе разности положительны:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{A}^* \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_1 \mathcal{A} - \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{B}^* \mathcal{P}_1 + (\alpha \lambda_+^2 - \beta \lambda_-^2) \mathcal{I} &= 0, \\ \mathcal{P}_1(\theta) X &= DX, \\ \dot{K}_1 + \mathcal{A}^* K_1 + \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{B}^* K_1 &= 0, \\ K_1(\theta) &= -2DM, \\ \dot{\gamma}_1 - \frac{1}{4} \langle K_1, \mathcal{B} \mathcal{B}^* K_1 \rangle + \alpha \lambda_+^2 - \beta \lambda_-^2 &= 0, \\ \gamma_1(\theta) &= \langle M, DM \rangle. \end{aligned}$$

Через \mathcal{I} здесь и далее обозначен тождественный оператор. С помощью операторных представлений, полученные уравнения можно переписать в матричном виде,

$$\begin{aligned} \dot{P}_1^{ij} + \sum_{k,l=1}^n \left(P_1^{kl} A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl} P_{1,kl}^{ij} \right) + \\ + \sum_{k,l,p,q=1}^n P_1^{kl} (BB')_{kp} (BB')_{lq} P_{1,pq}^{ij} + (\alpha \lambda_+^2 - \beta \lambda_-^2) E^{ij} &= 0, \\ P_1^{ij}(\theta) = DE^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \dot{K}_1 + \sum_{i,j=1}^n K_{1,ij} \tilde{A}^{ij} + \sum_{k,l=1}^n P_1^{kl} (BB' K_1 BB')_{kl} &= 0, \\ K_1(\theta) &= -2DM, \\ \dot{\gamma}_1 - \frac{1}{4} \langle K_1, BB' K_1 BB' \rangle + \alpha \lambda_+^2 - \beta \lambda_-^2 &= 0, \\ \gamma_1(\theta) &= \langle M, DM \rangle. \end{aligned}$$

Системы уравнений для U_2 , U_3 и U_4 получаются аналогичным образом. Наличие нижнего фазового ограничения делает задачу в общем случае невыпуклой, и предлагаемое решение будет, вообще говоря, лишь обобщённым решением ГЯБ [59, 60]. В случае его единственности, решение можно понимать в класси-

ческом смысле, заменяя произведения градиентов на производные по направлению.

Функция цены будет определяться как

$$V_L(t_0, Q_0) = \max_{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} V_{\alpha, \beta}(t_0, Q_0).$$

Стоит отметить, что оптимизаторы $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ зависят от позиции (t_0, Q_0) . Решение задачи получается при $L \rightarrow +\infty$, и достигается на некотором конечном значении L [71, 72].

Если фазовые ограничения присутствуют не на всём временном интервале $[t_0, \theta]$, а лишь в один момент времени t' , то можно применить более простой подход. А именно, рассмотрим выражение

$$a \langle Q - \alpha I, Q - \alpha I \rangle - b \langle Q - \beta I, Q - \beta I \rangle, \quad (2.23)$$

где a, b, α и β — положительные параметры, а $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Добавляя указанное выражение в функционал под интегралом, находим уравнение ГЯБ и отвечающее ему оптимальное управление, полученное методами, описанными в предыдущем разделе. Далее, проводя оптимизацию по набору параметров (a, b, α, β) , можно удовлетворить фазовым ограничениям в момент t' . Опишем один из возможных способов выбора такого набора, от которого можно отталкиваться при дальнейшем поиске. Распишем скалярные произведения в (2.23):

$$\begin{aligned} a \langle Q - \alpha I, Q - \alpha I \rangle - b \langle Q - \beta I, Q - \beta I \rangle &= \\ &= (a - b) \langle Q, Q \rangle - 2(a\alpha - b\beta) \langle Q, I \rangle + (\alpha^2 - \beta^2)n = \\ &= (a - b) \sum_{k=1}^n \lambda_k^2(Q) - 2(a\alpha - b\beta) \sum_{k=1}^n \lambda_k(Q) + (a\alpha^2 - b\beta^2)n = \\ &= \sum_{k=1}^n ((a - b)\lambda_k^2(Q) - 2(a\alpha - b\beta)\lambda_k(Q) + (a\alpha^2 - b\beta^2)) \end{aligned}$$

Выберем теперь параметры так, чтобы минимум каждого слагаемого достигался в пределах фазового ограничения. Для этого требуется

$$a - b > 0, \lambda_- \leq \frac{a\alpha - b\beta}{b - a} \leq \lambda_+. \quad (2.24)$$

Выбрать подобные параметры можно всегда.

2.4 Сравнение вычислительной сложности с решением через вытягивание в вектор для систем большой размерности

Сравним вычислительную сторону предложенного способа получения решения с методом, полученными в предыдущей главе. Для краткости записи, не умаляя общности, будем полагать $n = m$.

Вычислительную сложность будем оценивать числом скалярных умножений, используемых в расчётных формулах. Пусть в нашем распоряжении имеется алгоритм умножения матриц порядка n с числом умножений $f(n)$. Существуют [73, 74] алгоритмы, обеспечивающие число умножений порядка $O(n^\alpha)$, где $\alpha \in (2, 3]$. Случай $\alpha = 3$ отвечает перемножению матриц по определению, т.е. по правилу «строка на столбец». Пусть $f(n) = O(n^\alpha)$, $\alpha \in (2, 3]$.

Решение задачи в обоих способах разбивается на два этапа:

1. Нахождение в обратном времени параметров квадратичной формы функции цены, определяемых матрицами правой части (1.1).
2. Нахождение по заданной начальной позиции t_0, Q_0 оптимальной траектории в прямом времени, рассчитывающее управление по найденным на первом этапе параметрам.

Сначала оценим число умножений, требуемое для нахождения параметров квадратичной формы функции цены. Для этого оценим число умножений, необходимое для вычисления правых частей систем дифференциальных уравнений на параметры функции цены.

В случае операторного метода, для этого нужно сначала оценить сложность умножения представлений. Если находить представление по определению, используя формулу (2.2), то это даёт n^6 умножений. Однако, если использовать формулу (2.4), то получаем $f(n^2) = O(n^{2\alpha})$ умножений. Далее при оценке считаем, что произведение представлений считается по формуле (2.4).

Рассмотрим теперь систему уравнений (2.12), (2.13) и (2.14). В (2.12) надо сделать пять умножений представлений: $\mathcal{A}^*\mathcal{P}$, $\mathcal{P}\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\mathcal{B}^*$ (далее использующийся в (2.14)), $\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{B}^*$ (потом использующийся в (2.13)), и, наконец, $\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{B}^*\mathcal{P}$, использующийся непосредственно в (2.12). Кроме того, в (2.13) надо посчитать два действия оператора на матрицу, для чего требуется $2n^4$ умножений; в (2.14) добавляется одно действие оператора на матрицу и одно скалярное произведение.

Итого, для однократного расчёта правой части систем уравнений (2.12), (2.13), (2.14) необходимо $5f(n^2) + 3n^4 + n^2 = O(n^{2\alpha})$ умножений.

В случае решения через вытягивание, аналогичным рассуждением устанавливается, что число умножений в системе на параметры функции цены (1.9) точно такое же.

Теперь оценим сложность прямого хода решения. Для этого оценим сложность расчёта управления как число умножений, необходимых для вычисления правой части в замкнутой на оптимальное управление системе. В операторном методе, для нахождения управления по формуле (2.22), требуется n^4 умножений внутри скобок и еще $2f(n)$ вне них. В правой части (1.1) нужно сделать два матричных умножения, что дает в итоге $4f(n) + n^4 = O(n^4)$ умножений.

Для решения с вытягиванием рассмотрим формулу (1.10). Для нахождения

управления нужно сделать n^4 умножений в скобках и $f(n^2)$ вне них. Правая часть (1.1) требует $2n^4$ умножений. Итого имеем $f(n^2) + 3n^4 = O(n^{2\alpha})$ умножений. Поскольку $\alpha > 2$, то операторный метод нахождения управления имеет меньший порядок сложности, чем метод с вытягиванием.

Итак, была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оба алгоритма имеют одинаковое число умножений порядка $n^{2\alpha}$ на этапе нахождения функции цены;*
2. *Операторный алгоритм позволяет найти оптимальное управление за число умножений порядка n^4 , а метод с вытягиванием — за $n^{2\alpha}$.*

Для сравнения работы методов на практике они были реализованы в вычислительной среде Matlab. Результаты сравнения времени нахождения управления в зависимости от размерности системы изображены на рисунке 2.2. Начиная с матриц порядка 40, операторный алгоритм далее работает всё быстрее алгоритма с вытягиванием. На матрицах большей размерности преимущество метода будет ещё заметнее.

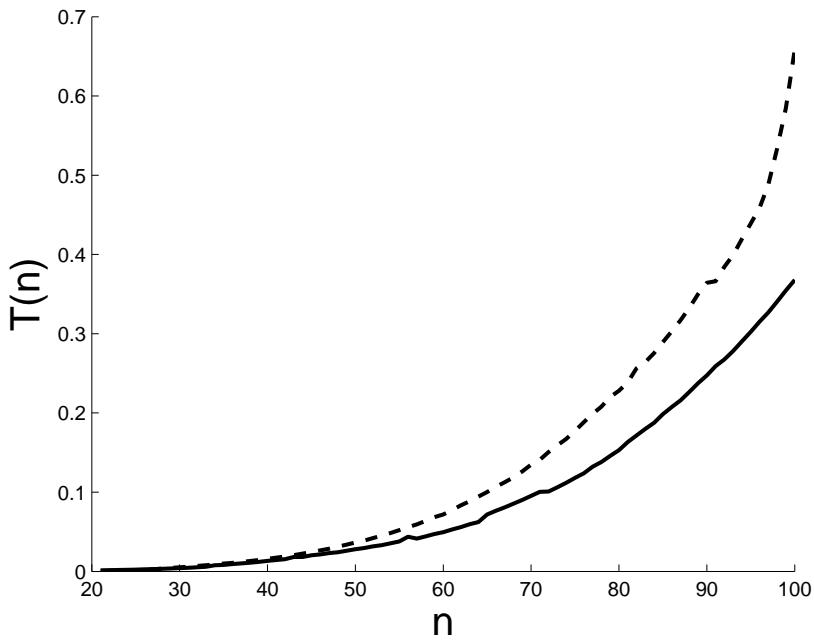


Рис. 2.2: Сравнение времени нахождения управления для операторного метода (сплошная линия) и метода с вытягиванием (пунктирная линия). По горизонтальной оси отложена размерность фазовой матрицы, по вертикальной — время нахождения управления (усреднение по 200 запускам).

2.5 Численные примеры

В этом разделе будут приведены численные примеры расчёта решения методами, описанными в разделе 2.3.

2.5.1 Первый пример

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) со следующими значениями параметров:

$$T = \begin{bmatrix} \sin(10\pi t) & t \\ -t^2 & 5 \sin(10\pi t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = 1.$$

Если $Q > 0$, то Q можно рассматривать как матрицу конфигураций некоторого эллипсоида, а матричнозначную функцию $Q(t)$ можно рассматривать как эллипсоидальную трубку. Такая трубка для приведённого примера изображена на рис. 2.3. На рис. 2.4 изображено изменение собственных значений вдоль траектории.

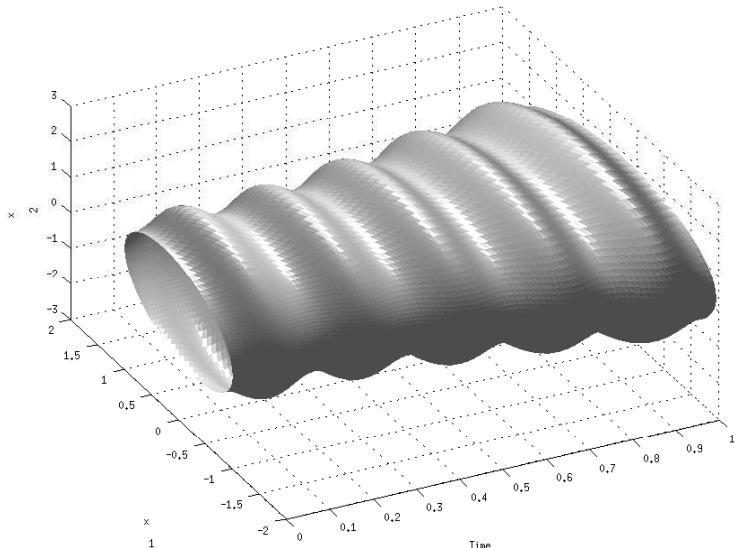


Рис. 2.3: Трубка $Q(t)$ для первого примера.

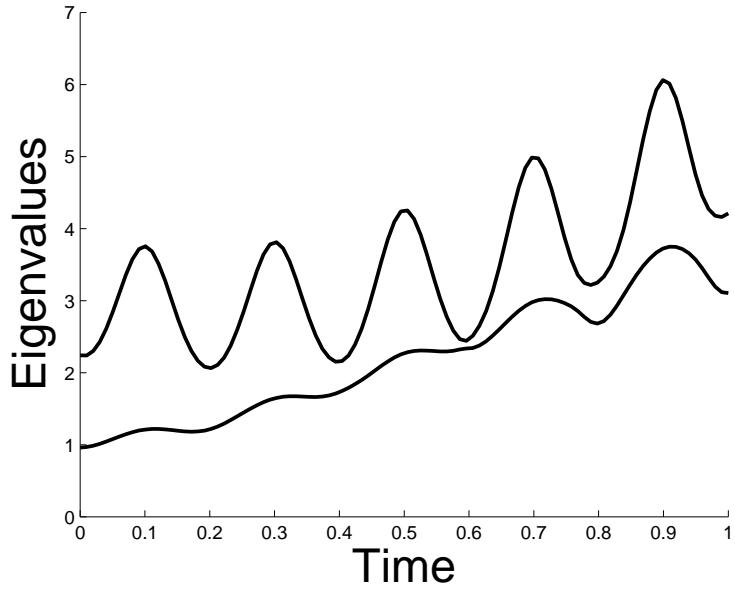


Рис. 2.4: Собственные значения вдоль траектории для первого примера.

2.5.2 Второй пример

В этом примере учитываются фазовые ограничения (2.1) при $\lambda_{\min} = 0.5$ и $\lambda_{\max} = 6$. Параметры системы таковы:

$$T = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \cos(t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{bmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 2.2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \theta = 2.$$

Решение получено с использованием метода (2.23), параметры которого были выбраны так:

$$a = 5.1, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{4.1}{\sqrt{2}} = \beta = \frac{4.1}{\sqrt{2}}$$

Трубка и собственные числа изображены на рис. 2.5–2.7.

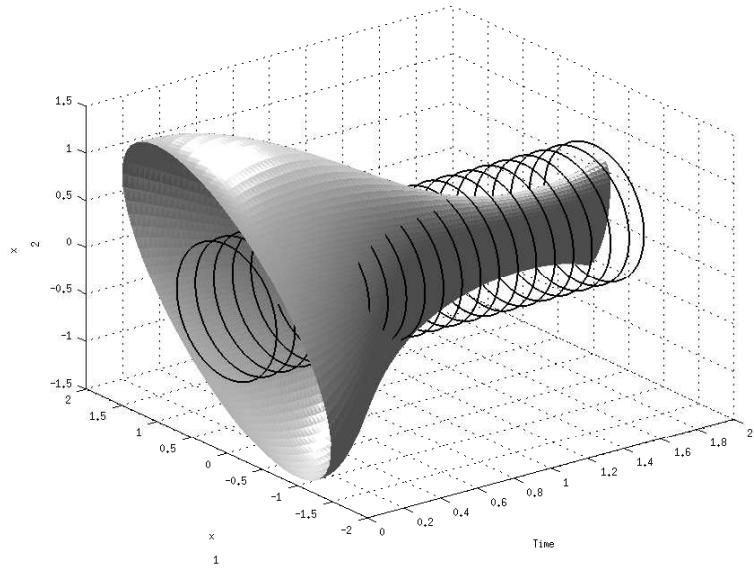


Рис. 2.5: Трубка $Q(t)$ для второго примера, построенная без учёта фазовых ограничений. Здесь видно, что решение выходит за фазовые ограничения.

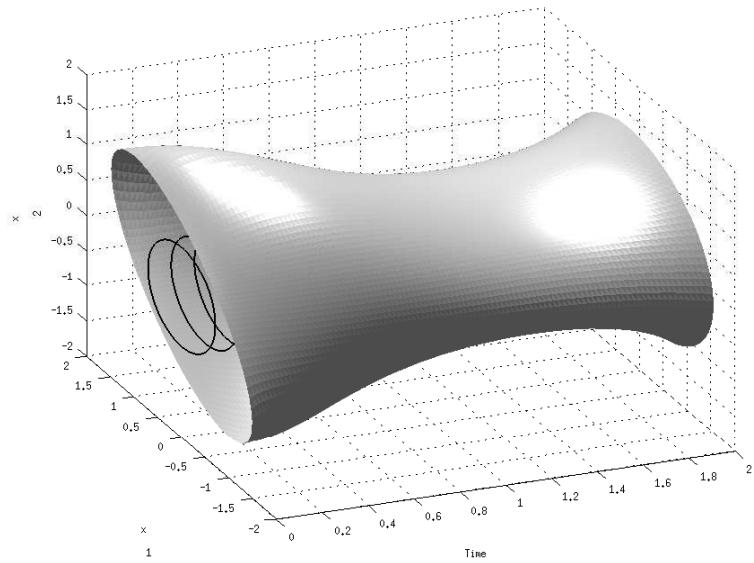


Рис. 2.6: Трубка $Q(t)$ для второго примера, построенная с учётом фазовых ограничений.

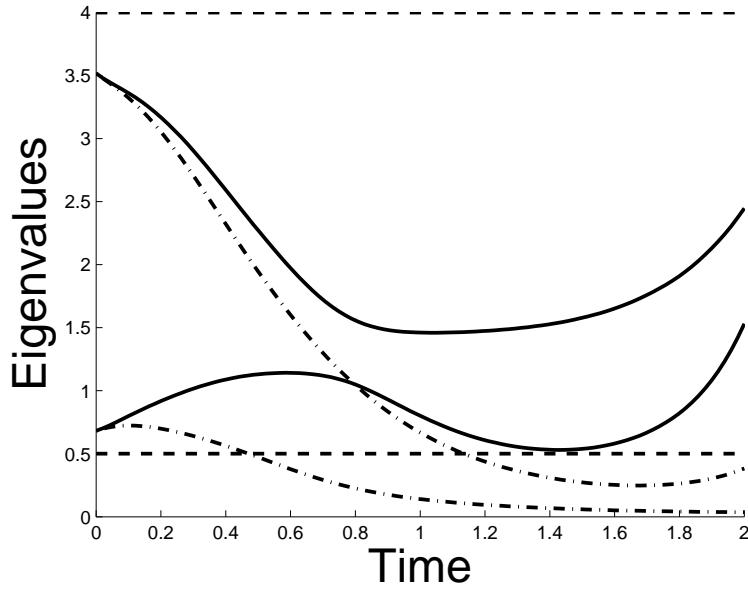


Рис. 2.7: Собственные числа решения для второго примера. Сплошная линия отвечает случаю с учётом фазовых ограничений, штрихованная — без учета. Горизонтальными линиями обозначены ограничения.

2.5.3 Третий пример

Теперь рассмотрим следующие параметры для динамики (1.1) матрицы Q :

$$T = \begin{bmatrix} -4t & 0 \\ 0 & -4t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad \theta = 1,$$

Эти матрицы удовлетворяют условию (1.15). Матрицы в терминальной части функционала и начальное условие таковы:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фазовые ограничения заданы константами $\lambda_- = \sqrt{2}$, $\lambda_+ = 2\sqrt{2}$. Эллипсоидальные трубы траекторий с учетом фазовых ограничений и без них изображены на рисунках 2.8, 2.9.

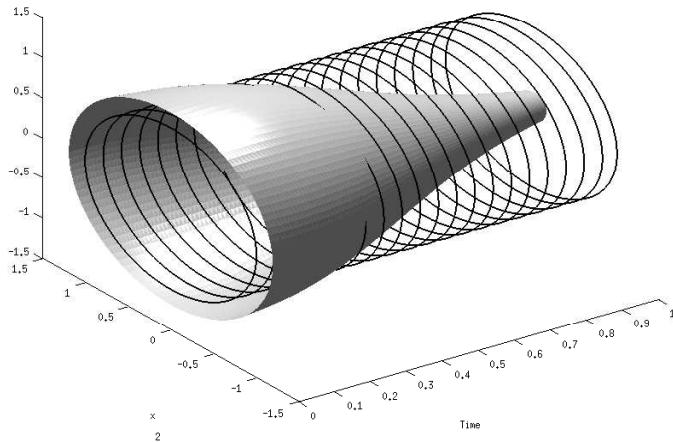


Рис. 2.8: Третий пример. Эллипсоидальные трубы для эллипсоида $\mathcal{E}(0, Q(t))$ без учета фазовых ограничений. Отдельными семействами черных кругов изображено внутреннее фазовое ограничения.

2.5.4 Четвёртый пример

Теперь рассмотрим параметры

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad \theta = 1,$$

с матрицей в терминальной части функционала и начальным условием

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фазовые ограничения заданы константами $\lambda_- = 1.5\sqrt{2}$, $\lambda_+ = 9\sqrt{2}$. Соответствующие иллюстрации приведены на рисунках 2.5.4, 2.11.

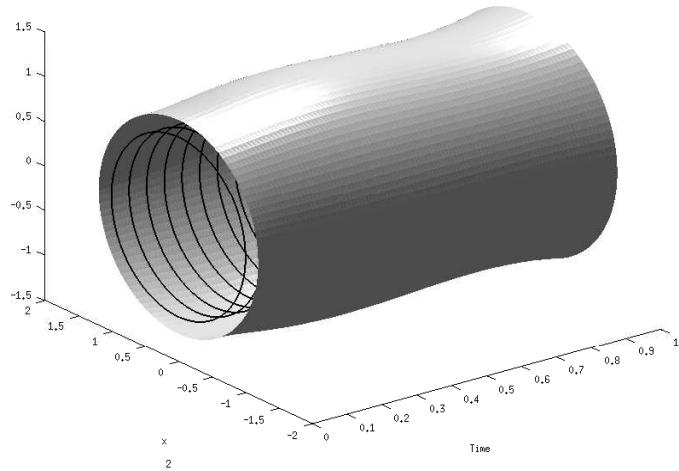


Рис. 2.9: Третий пример. Эллипсоидальные трубы для эллипсоида $\mathcal{E}(0, Q(t))$ и с учетом фазовых ограничений. Отдельными семействами черных кругов изображено внутреннее фазовое ограничения.

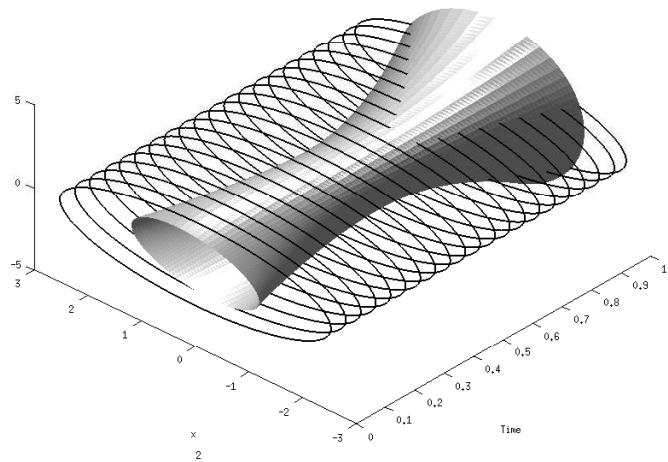


Рис. 2.10: Четвёртый пример. Эллипсоидальные трубы без учёта фазовых ограничений. Отдельными семействами черных кругов изображено внутреннее фазовое ограничение.

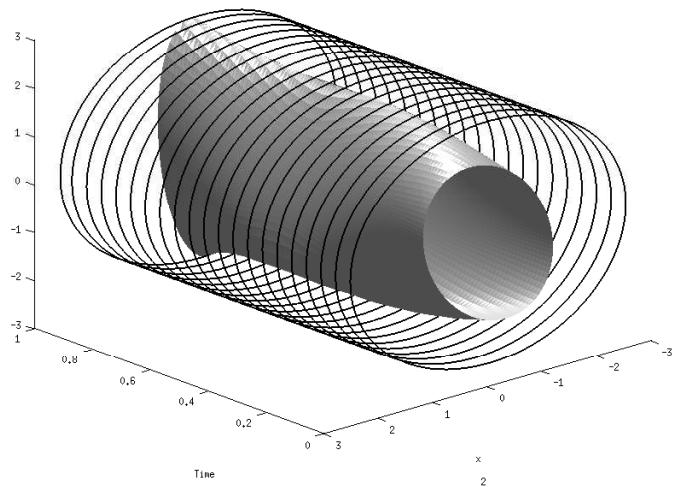


Рис. 2.11: Четвёртый пример. Эллипсоидальные трубы с учётом фазовых ограничений. Отдельными семействами черных кругов изображено внешнее фазовое ограничение.

Глава 3

Применение операторных методов для задач с геометрическими ограничениями

Введение

Операторные методы записи тензоров, построенные в предыдущей главе, имеют общий характер и могут быть применены для других задач. В общем виде, операторная схема решения может быть представлена с следующем виде:

1. Записать задачу в операторном виде;
2. Найти представления матричных операторов, входящих в задачу;
3. Решить задачу в операторном виде;
4. Вернуться к матричным обозначениям, используя формулы для представ-

лений операторов.

В этой главе будет показано, как их можно применить для анализа систем с геометрическими («жёсткими») ограничениями на начальное состояние и управление. Сначала рассматривается задача с геометрическим ограничением на управление, и для неё строится матричное множество разрешимости. Затем в главе описываются методы визуализации множеств в пространстве положительно определённых матриц и приводятся примеры визуализации множеств разрешимости. В разделе 3.5 приводится пример использования описанных методов для решения задачи реконфигурации эллипсоидального контейнера. В разделе 3.7 вариация этой задачи — задача разделения контейнера перед реконфигурацией.

3.1 Задача с геометрическими ограничениями

3.1.1 Постановка задачи

На заданном интервале $[t_0, \theta]$ рассматривается матричная система с заданным начальным состоянием Q_0 ,

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t)B'(t), \quad Q(t_0) = Q_0, \quad (3.1)$$

в которой на управление наложено геометрическое ограничение:

$$\langle U(t), U(t) \rangle \leq \mu^2 \text{ для всех } t \in [t_0, \theta]. \quad (3.2)$$

Задано целевое множество:

$$\langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle \leq 1, \quad (3.3)$$

где, как и ранее, $M, D = D' > 0$ — известные матрицы. Требуется решить

задачу разрешимости — описать множество разрешимости для системы,

$$W(t; t_1, \mathcal{M}) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : \exists Q_1, \text{ т.ч. } \langle Q_1 - M, D(Q_1 - M) \rangle \leq 1, \right. \\ \left. \exists U(\cdot), \text{ удв. (3.2), т.ч. } , Q_1 = Q(t_1; t, Q, U) \right\}.$$

3.1.2 Решение

Хотя задача разрешимости не является задачей оптимизации, мы можем поставить ей в соответствией оптимизационную задачу, обеспечивающую регулярный метод решения.

Будем решать задачу (3.1)–(3.3) через сведение её к семейству задач, подобным описанной в предыдущей главе. Для этого перепишем условия (3.2) и (3.3) в эквивалентном виде.

Для начала потребуем выполнения условия (3.2) на конечной сетке $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \theta$:

$$\langle U(t_k), U(t_k) \rangle \leq \mu^2, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Совместное выполнение условий (3.3) и (3.4) эквивалентно выполнению неравенства

$$\alpha_0 \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\mu^2} \langle U(t_k), U(t_k) \rangle \leq 1$$

для всех наборов $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$ таких, что $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k = 1$.

Выберем теперь $\alpha_k = \beta(t_k) \Delta t_k$, где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ и $\beta(t) \geq 0$ для всех $t \in [t_0, \theta]$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим следующее утверждение.

Лемма 6. Совместное выполнение условий (3.3) и (3.2) эквивалентно выполнению неравенства

нению неравенства

$$\Phi(\alpha_0, \beta, U) = \alpha_0 \langle Q(\theta) - M, D(Q(\theta) - M) \rangle + \int_{t_0}^{\theta} \frac{\beta(t)}{\mu^2} \langle U(t), U(t) \rangle dt \leqslant 1,$$

для всех пар $\{\alpha_0, \beta(\cdot)\}$ таких, что

$$\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega = \left\{ \{\alpha_0, \beta(\cdot)\} : \alpha_0 \geqslant 0, \beta(t) \geqslant 0, \alpha_0 + \int_{t_0}^{\theta} \beta(t) dt = 1 \right\}.$$

Таким образом, решение исходной задачи требует отыскания управлений $U(\cdot)$, которые бы обеспечивали выполнения условия

$$\max_{\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega} \Phi(\alpha_0, \beta(\cdot), U(\cdot)) \leqslant 1.$$

Введём функцию цены:

$$V(t_0, Q_0) = \min_{U(\cdot)} \max_{\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega} \Phi(\alpha_0, \beta(\cdot), U(\cdot)).$$

Целевое множество будет достижимо из тех и только тех позиций (t_0, Q_0) , для которых $V(t_0, Q_0) \leqslant 1$. Воспользовавшись теоремой о минимаксе [69], получаем, что

$$V(t_0, Q_0) = \max_{\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega} \left\{ \min_{U(\cdot)} \Phi(\alpha_0, \beta(\cdot), U(\cdot)) \right\}.$$

Минимизация в фигурных скобках представляет собой линейно-квадратичную задачу, идентичную (1.1), (1.2) с точностью до скалярных множителей α_0 и $\frac{\beta(t)}{\mu^2}$.

Функция цены будет квадратичной формой,

$$V(t, Q) = \langle Q, \mathcal{P}(t)Q \rangle + \langle Q, K(t) \rangle + \gamma(t),$$

операторные уравнения на параметры которой (2.12)–(2.13) примут вид

$$\dot{\mathcal{P}} + \mathcal{A}^* \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} - \frac{\mu^2}{\beta} \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{B}^* \mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P}(\theta) X = \alpha_0 D X, \quad (3.5)$$

$$\dot{K} + \mathcal{A}^* K + \frac{\mu^2}{\beta} \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{B}^* K = 0, \quad K(\theta) = -2\alpha_0 D M, \quad (3.6)$$

$$\dot{\gamma} - \frac{\mu^2}{4\beta} \langle K, \mathcal{B} \mathcal{B}^* K \rangle = 0, \quad \gamma(\theta) = \alpha_0 \langle M, D M \rangle. \quad (3.7)$$

В матричном виде они запишутся как

$$\dot{P}^{ij} + \sum_{k,l=1}^n \left(P^{kl} A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl} P_{kl}^{ij} \right) + \frac{\mu^2}{\beta} \sum_{k,l,p,q=1}^n P^{kl} (BB')_{kp} (BB')_{lq} P_{pq}^{ij} = 0, \quad (3.8)$$

$$P^{ij}(\theta) = \alpha_0 D E^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

$$\dot{K} + \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{\mu^2}{\beta} \sum_{k,l=1}^n P^{kl} (BB' K BB')_{kl} = 0, \quad (3.10)$$

$$K(\theta) = -2\alpha_0 DM, \quad (3.11)$$

$$\dot{\gamma} - \frac{\mu^2}{4\beta} \langle K, BB' K BB' \rangle = 0, \quad (3.12)$$

$$\gamma(\theta) = \alpha_0 \langle M, DM \rangle. \quad (3.13)$$

Обозначим параметры квадратичной формы, отвечающие паре $\{\alpha_0, \beta(\cdot)\}$, как $\mathcal{P}[\alpha_0, \beta(\cdot)](\cdot)$, $K[\alpha_0, \beta(\cdot)](\cdot)$, $\gamma[\alpha_0, \beta(\cdot)](\cdot)$. Тогда функция цены будет максимумом из квадратичных форм:

$$V(t_0, Q_0) = \max_{\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega} \left\{ \langle Q_0, \mathcal{P}[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) Q_0 \rangle + \langle Q_0, K[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) \rangle + \gamma[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) \right\}.$$

Из этого следует, что для всех $\{\alpha_0, \beta(\cdot)\}$

$$\langle Q_0, \mathcal{P}[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) Q_0 \rangle + \langle Q_0, K[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) \rangle + \gamma[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0) \leq 1,$$

или, что эквивалентно (для краткости квадратные скобки здесь убраны),

$$\left\langle Q_0 - \mathcal{P}^{-1} K, \frac{\mathcal{P}}{1 - \gamma + \langle K, \mathcal{P}^{-1} K \rangle} (Q_0 - \mathcal{P}^{-1} K) \right\rangle \leq 1.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Множество разрешимости будет пересечением эллипсоидов в пространстве матриц:*

$$W[t_0] = \bigcap_{\{\alpha_0, \beta(\cdot)\} \in \Omega} \mathcal{E}[\alpha_0, \beta(\cdot)], \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\alpha_0, \beta(\cdot)] &= \{Q : V[\alpha_0, \beta(\cdot)](t_0, Q) \leq 1\} = \mathcal{E}(R[\alpha_0, \beta(\cdot)], \mathcal{R}[\alpha_0, \beta(\cdot)]), \\ R[\alpha_0, \beta(\cdot)] &= \mathcal{P}^{-1}[\alpha_0, \beta(\cdot)]K[\alpha_0, \beta(\cdot)], \\ \mathcal{R}[\alpha_0, \beta(\cdot)] &= (1 - \gamma[\alpha_0, \beta(\cdot)] + \langle K[\alpha_0, \beta(\cdot)], \mathcal{P}^{-1}[\alpha_0, \beta(\cdot)]K[\alpha_0, \beta(\cdot)] \rangle) \times \\ &\quad \times \mathcal{P}^{-1}[\alpha_0, \beta(\cdot)],\end{aligned}$$

где параметры форм описываются уравнениями (3.8)–(3.13).

3.2 Визуализация матричных множеств

В предыдущих главах рассматривались отдельные траектории матричной системы (3.1). В каждый момент времени фазовая матрица $Q(t)$ порождала эллипсоид, визуализируя который, можно получить наглядное представление о поведении системы. Теперь же, когда рассматриваются множества в пространствах матриц (например, $W[t_0]$), представляет интерес вопрос их визуализации.

На любое множество A в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n \times n}$ можно посмотреть как множество в n^2 -мерном евклидовом пространстве и строить его визуальное представление как набор двух- или трёхмерных проекций. С другой стороны, если каждой матрице Q из A поставить в соответствие эллипсоид $\mathcal{E}(0, Q)$, то можно рассмотреть множество

$$\mathfrak{M}(A) = \bigcup_{Q \in A} \mathcal{E}(0, Q) \subset \mathbb{R}^n,$$

представляющее собой набор всех эллипсоидов, «порождённых» множеством A . Опишем теперь ряд свойств этого множества, позволяющих его строить на практике не прибегая к прямому перебору всех точек в A .

Лемма 7. *Пусть A – произвольное непустое выпуклое множество положительно определённых матриц. Тогда $\mathfrak{M}(A)$ – выпуклое множество в \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{M}(A)$. Тогда существует такая матрица $Q \in A$, что $\langle x, Q^{-1}x \rangle \leq 1$. Значит, множество $\mathfrak{M}(A)$ можно представить как

$$\mathfrak{M}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \min_{Q \in A} \langle x, Q^{-1}x \rangle \leq 1\}.$$

Минимум достигается, поскольку при фиксированном x функция $\langle x, Q^{-1}x \rangle$ выпукла.

Как известно [33], если функция $f(x, y)$ — выпуклая по совокупности переменных, а множество Ω — выпуклое, то функция $g(y) = \min_{x \in \Omega} f(x, y)$ будет выпуклой по y . Чтобы воспользоваться этим фактом для доказательства, надо показать, что функция $F(x, Q) = \langle x, Q^{-1}x \rangle$ выпукла по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times A$.

Докажем, что надграфик $F(x, Q)$ — выпуклое множество. Имеем

$$\text{epi } F = \{(x, Q, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times \mathbb{R} : \langle x, Q^{-1}x \rangle \leq t\}.$$

Воспользуемся дополнением по Шуру [17, 18] в следующей форме: симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W'_{12} & W_{22} \end{bmatrix}$$

положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определены матрицы W_{11} и $W_{22} - W'_{12}W_{11}^{-1}W_{12}$. Отсюда получаем, что

$$\text{epi } F = \left\{ (x, Q, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times \mathbb{R} : \begin{bmatrix} Q & x \\ x' & t \end{bmatrix} \geq 0 \right\},$$

откуда и следует выпуклость $\text{epi } F$, и, следовательно, выпуклость F . \square

Таким образом, несмотря на то, что в общем случае объединение выпуклых множеств не будет выпуклым, $\mathfrak{M}(A)$ будет выпуклым множеством.

Справедливы следующие соотношения:

$$\mathfrak{M}(A \cap B) \subseteq \mathfrak{M}(A) \cap \mathfrak{M}(B), \quad \mathfrak{M}(A \cup B) \subseteq \mathfrak{M}(A) \cup \mathfrak{M}(B).$$

Кроме того, отметим, что импликация

$$\mathcal{E}(0, Q) \subseteq \mathfrak{M}(A) \Rightarrow Q \in A$$

в общем случае не имеет места. Действительно, возьмём в качестве A множество, состоящее из одной матрицы Q . Тогда для любого $\lambda \in [0, 1)$ верно, что $\mathcal{E}(0, \lambda Q) \subseteq \mathfrak{M}(A)$, но λQ , очевидно, не лежит в A .

Для визуализации множества $\mathfrak{M}(A)$ в случае выпуклого A нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $\rho(L, A)$ — опорная функция матричного множества A , $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда*

$$\rho(l, \mathfrak{M}(A)) = \sqrt{\rho(l l', A)}, \quad l \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(l, \mathfrak{M}(A)) &= \sup_{x \in \mathfrak{M}(A)} \langle x, l \rangle = \sup_{Q \in A} \sup_{x \in \mathcal{E}(0, Q)} \langle x, l \rangle = \\ &= \sup_{Q \in A} \sqrt{\langle l, Ql \rangle} = \sup_{Q \in A} \sqrt{\langle ll', Q \rangle} = \sqrt{\rho(ll', A)}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать. \square

Таким образом, для построения множества $\mathfrak{M}(A)$ нам достаточно знать опорную функцию множества A только на неотрицательно определённых направлениях L , у которых $\text{rank } L = 1$.

Для некоторых множеств $\mathfrak{M}(A)$ можно указать явно. Так, оказывается, что для выпуклого многогранника в пространстве матриц множество $\mathfrak{M}(A)$ устроено следующим образом.

Лемма 9. *Рассмотрим выпуклый многогранник в пространстве матриц*

$$P = \text{conv}\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$$

как выпуклую оболочку N его вершин. Тогда

$$\mathfrak{M}(P) = \text{conv}\{\mathcal{E}(0, V_1), \mathcal{E}(0, V_2), \dots, \mathcal{E}(0, V_N)\},$$

т.е. $\mathfrak{M}(P)$ есть выпуклая оболочка объединения эллипсоидов, порождённых вершинами P .

Доказательство. По лемме 8 получаем

$$\begin{aligned} \rho(l, \mathfrak{M}(P)) &= \sqrt{\rho(l l', P)} = \sqrt{\max_{i=1,\dots,N} \langle l l', V_i \rangle} = \\ &= \max_{i=1,\dots,N} \sqrt{\langle l, V_i l \rangle} = \rho\left(l, \text{conv} \bigcup_{i=1}^N \mathcal{E}(0, V_i)\right), \end{aligned}$$

что и требовалось показать. \square

Вид множества $\mathfrak{M}(A)$ для шара устанавливает следующая лемма.

Лемма 10. В пространстве матриц рассмотрим шар с центром в положительно определенной матрице Q_0 радиуса r , $B_r(Q_0) = \mathcal{E}(Q_0, r^2 I)$. Тогда

$$\mathfrak{M}(B_r(Q_0)) = \mathcal{E}(0, Q_0 + rI).$$

Доказательство. По лемме 8 имеем:

$$\rho(l, \mathfrak{M}(B_r(Q_0))) = \sqrt{\langle l l', Q_0 \rangle + r \sqrt{\langle l l', l l' \rangle}}.$$

Преобразуем второе слагаемое под корнем. Пусть $l = \|l\| s$, $\|s\| = 1$. Поскольку в позиции (i, j) у матрицы ss' будет стоять произведение $s_i s_j$, получаем:

$$\begin{aligned} \langle l l', l l' \rangle &= \|l\|^4 \langle ss', ss' \rangle = \|l\|^4 \|ss'\|^2 = \|l\|^4 \sum_{i,j=1}^n ((ss')_{ij})^2 = \\ &= \|l\|^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_i^2 s_j^2 = \|l\|^4 \sum_{i=1}^n s_i^2 \sum_{j=1}^n s_j^2 = \|l\|^4 \sum_{i=1}^n s_i^2 = \|l\|^4. \end{aligned}$$

Значит,

$$\rho(l, \mathfrak{M}(B_r(Q_0))) = \sqrt{\langle l l', Q_0 \rangle + r \|l\|^2} = \sqrt{\langle l, Q_0 l \rangle + r \langle l, l \rangle} = \sqrt{\langle l, (Q_0 + rI)l \rangle},$$

что и требовалось показать. \square

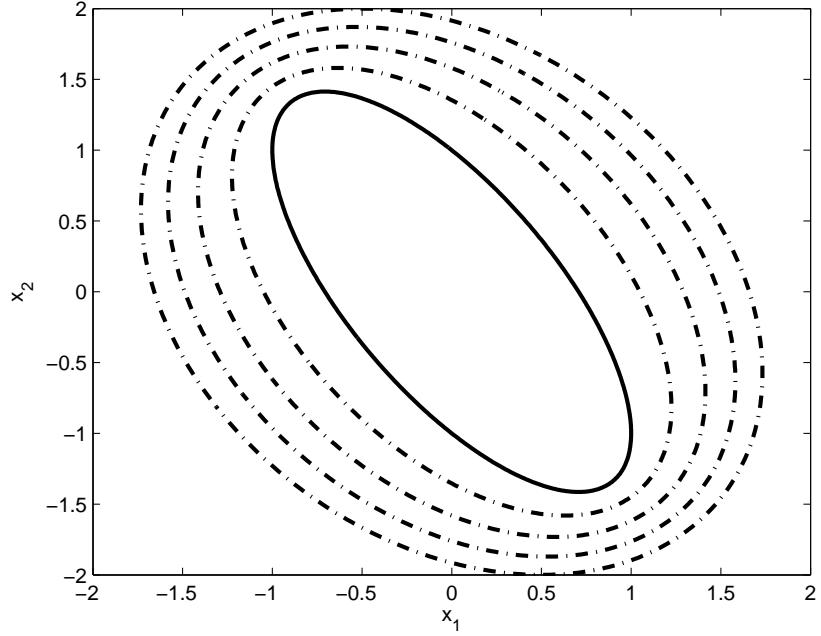


Рис. 3.1: Набор концентрических шаров $\mathfrak{M}(B_r(Q_0))$ при $r = 0.5, 1, 1.5, 2$ (пунктирные эллипсы). Сплошной линией изображен эллипс, отвечающий центру Q_0 .

На рис. 3.1 изображено несколько концентрических шаров с центром в матрице

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Лемма 8 даёт алгоритм для численного построения $\widehat{\mathfrak{M}(A)}$, приближения множеств $\mathfrak{M}(A)$:

1. Взять некоторый набор направлений $\{l_i\}_{i=1}^K$ на единичной сфере в пространстве \mathbb{R}^n ;
2. Получить соответствующие граничные точки Q_i , $i = 1, \dots, K$ на которых достигается максимум в матричной опорной функции $\rho(L, A)$ по направлениям $L_i = l_i l_i'$;
3. Построить выпуклую оболочку объединения эллипсоидов $\mathcal{E}(0, Q_i)$:

$$\widehat{\mathfrak{M}(A)} = \text{conv} \bigcup_{i=1}^K \mathcal{E}(0, Q_i).$$

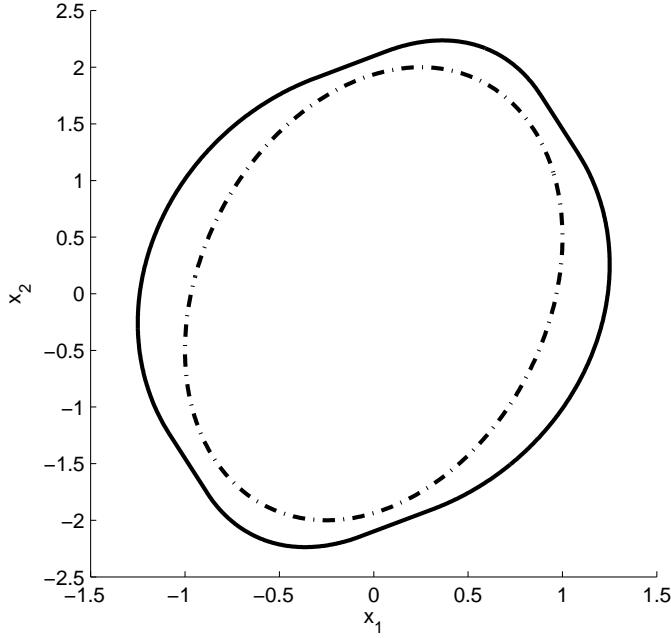


Рис. 3.2: Множество $\mathfrak{M}(A_1)$. Пунктиром изображен эллипс, отвечающий центру M .

Фактически, как видно из леммы 9, в этом алгоритме строится внутренняя аппроксимация множества $\mathfrak{M}(A)$ выпуклым многогранником.

Приведём примеры построения $\mathfrak{M}(A)$ для некоторых конкретных множеств A по такому алгоритму.

Пример 1. Рассмотрим эллипсоид в пространстве матриц вида

$$A_1 = \{Q : \langle Q - M, D(Q - M) \rangle \leqslant 1\},$$

который встречается в постановке задачи (3.1)–(3.3). Пусть

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Множество $\mathfrak{M}(A_1)$ изображено на рисунке 3.2.

Пример 2. Рассмотрим «куб» со стороной S , сдвинутый от начала координат на положительно определенную матрицу M ,

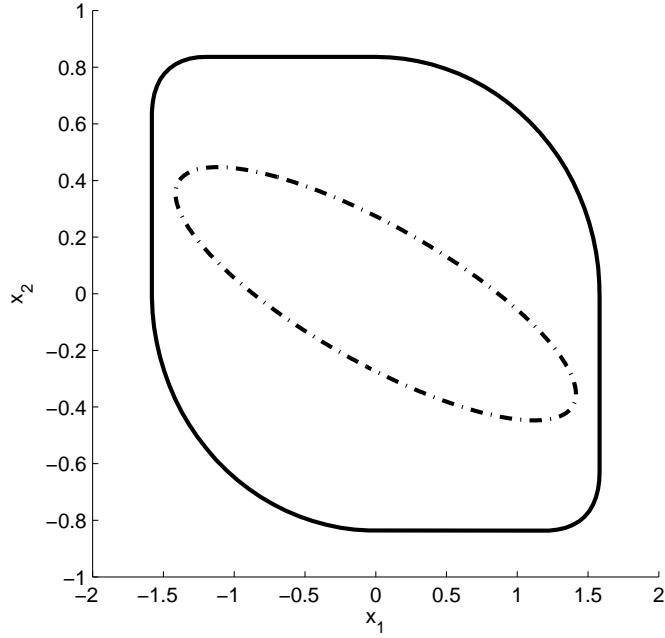


Рис. 3.3: Множество $\mathfrak{M}(A_2)$. Пунктиром изображен эллипс, отвечающий M .

$$A_2 = M + S \cdot \{Q : \max_{i,j=1,\dots,n} |Q_{ij}| \leq 1\},$$

Пусть

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad S = 0.5.$$

Множество $\mathfrak{M}(A_2)$ изображено на рисунке 3.3.

Пример 3. Рассмотрим матричный «треугольник» A_3 с вершинами

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Множество $\mathfrak{M}(A_3)$ изображено на рисунке 3.4.

В примерах 2 и 3 полученный результат согласуется с леммой 9.

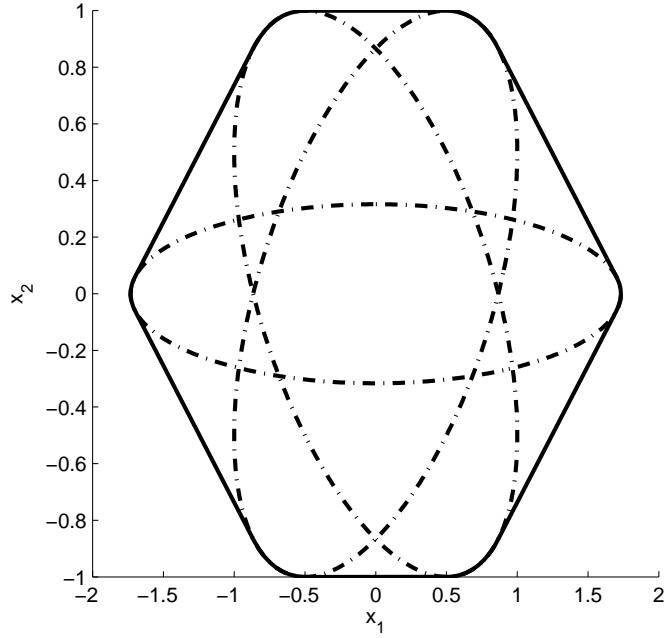


Рис. 3.4: Множество $\mathfrak{M}(A_3)$. Пунктиром изображены эллипсы, отвечающие вершинам V_1, V_2, V_3 .

3.3 Численный пример

Рассмотрим задачу (3.1)–(3.3) при следующих значениях параметров:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix},$$

$t_0 = 0$, $\theta = 0.5$, $\mu = 10$. Трубка $\mathfrak{M}(W[t])$ изображена на рис. 3.5. На рисунке 3.6 изображены сечения отдельных эллипсоидов $\mathfrak{M}(\mathcal{E}[\alpha_0, \beta(\cdot)])$ из формулы (3.14).

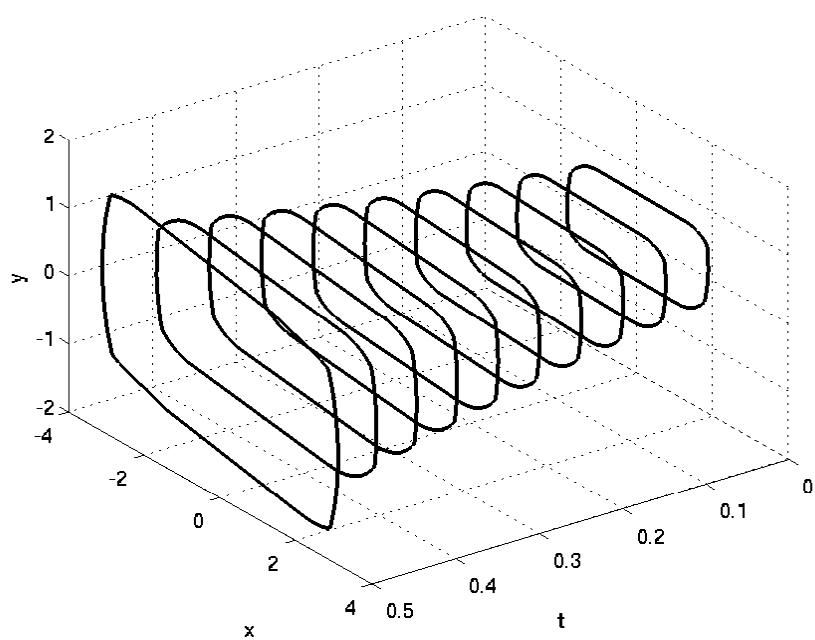


Рис. 3.5: Трубка $\mathfrak{M}(W[t])$.

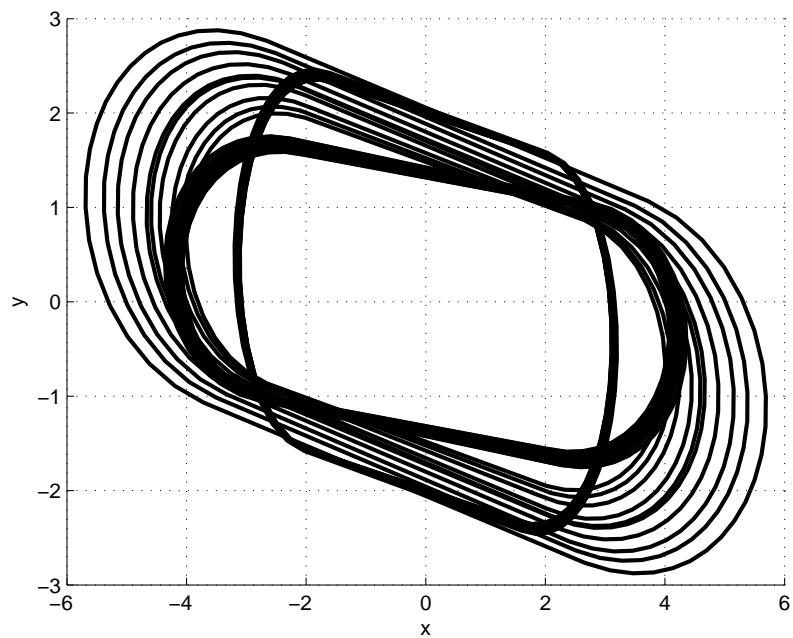


Рис. 3.6: Отдельные множества $\mathfrak{M}(\mathcal{E}[\alpha_0, \beta(\cdot)])$ в момент времени $t = 0.5$.

3.4 Эллипсоидальные оценки множества достижимости

3.4.1 Постановка задачи

Рассматривается управляемая линейная матричная система:

$$\dot{Q}(t) = T(t)Q(t) + Q(t)T'(t) + B(t)U(t)B'(t), \quad (3.15)$$

$$Q(t_0) \in \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0), \quad (3.16)$$

$$U(t) \in \mathcal{E}(P(t), \mathcal{P}(t)), \quad (3.17)$$

Здесь $\mathcal{E}(M, \mathcal{M})$ означает эллипсоид в пространстве матриц:

$$\mathcal{E}(M, \mathcal{M}) = \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n}: \langle Q - M, \mathcal{M}^{-1}(Q - M) \rangle \leq 1\},$$

и операторы \mathcal{Q}^0 и $\mathcal{P}(t)$ предполагаются положительно определёнными.

Через $Q(t; t_0, Q_0, U)$ будем обозначать матрицу Q , в которую переведёт в момент t управление U матрицу Q_0 из момента t_0 в силу системы (3.15).

Следующее определение вводится аналогично определению для векторных систем [1, 7].

Определение 4. Множеством достижимости на момент t называется множество

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}_0) = \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n}: \exists Q_0 \in \mathcal{X}_0, U(\cdot), \text{ удв. (3.17), т.ч. } Q = Q(t; t_0, Q_0, U)\}.$$

Для системы (3.15) требуется построить в матричной форме тугие эллипсоидальные оценки множества достижимости $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0))$.

3.4.2 Ортогональные и положительно определённые операторы в пространствах матриц

Как известно [29, 17], для любой симметричной положительно определённой матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ найдутся ортогональная матрица S и диагональная матрица Λ с положительными элементами на диагонали, такие, что $Q = S\Lambda S'$. Поскольку в дальнейшем нам придётся работать с положительно определёнными матричными операторами, задающими эллипсоидальные оценки в пространстве матриц, в этом разделе изучим некоторые свойства ортогональных и положительно определённых матричных операторов.

Покажем, что над пространствами матриц ортогональные операторы имеют специальную структуру. Для этого воспользуемся следующим утверждением [43, 44, 45].

Лемма 11. *Пусть \mathcal{A} — произвольный линейный оператор над $\mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. \mathcal{A} сохраняет спектральную норму.
2. \mathcal{A} отображает множество ортогональных матриц на себя.
3. \mathcal{A}^* сохраняет норму Фробениуса.
4. \mathcal{A}^* отображает множество матриц с сингулярными числами вида

$$[1, 0, \dots, 0]$$

на себя.

5. Существуют такие ортогональные матрицы U_1, V_1 , что либо $\mathcal{A}X = U_1XV_1$, либо $\mathcal{A}X = U_1X'V_1$ для всех матриц X .
6. Существуют такие ортогональные матрицы U_2, V_2 , что либо $\mathcal{A}^*X = U_2XV_2$, либо $\mathcal{A}^*X = U_2X'V_2$ для всех матриц X .

Поскольку сопряженный к ортогональному оператору, очевидно, сохраняет норму Фробениуса, то можно сделать вывод, что для произвольного ортогонального оператора \mathcal{S} найдутся такие ортогональные матрицы U и V , что либо $\mathcal{S}X = UXV$, либо $\mathcal{S}X = UX'V$.

Следующая лемма указывает способ нахождения спектра матричного оператора через его представление.

Лемма 12. Для произвольного матричного оператора $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1 \times m_1}, \mathbb{R}^{n_2 \times m_2})$ его спектр совпадает со спектром матрицы \mathring{M} , определённой по формуле (2.3).

Доказательство. Рассмотрим цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}X = \lambda X &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n M^{ij}X_{ij} = \lambda \sum_{i,j=1}^n X_{ij}E^{ij} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n M_{kl}^{ij}X_{ij} = \lambda X_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n \Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{n^2} M_{\beta}^{\alpha}X_{\alpha} = \lambda X_{\beta}, \quad \beta = 1, \dots, n^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathring{M}\mathring{X} = \lambda \mathring{X}, \end{aligned}$$

что и означает, что λ лежит в спектре \mathcal{M} тогда и только тогда, когда λ лежит в спектре \mathring{M} . \square

В векторном случае, действие диагональной матрицы

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$$

на элементах базиса выглядит как $M e_k = m_k e_k$. По аналогии введём «диагональный» оператор в матричном случае. Для этого нам потребуется определение произведения матриц по Адамару [31].

Определение 5. Произведением двух матриц одинакового размера $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ по Адамару называется матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, такая, что

$$C = A \circ B = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}, \quad c_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Определение 6. Оператор $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{n \times m})$ называется *диагональным*, если существует такая матрица $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, что для всех $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ выполнено

$$\mathcal{D}X = M \circ X.$$

Из лемм 11,12 сразу же получаем следующую теорему.

Теорема 5. Если найдутся такие ортогональные матрицы U и V , а также положительная (т.е. все элементы которой положительны) матрица Λ , что для любого $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ верно либо

$$\mathcal{A}X = V(\Lambda \circ (UXV))U',$$

либо

$$\mathcal{A}X = V(\Lambda \circ (UX'V))U'.$$

то \mathcal{A} — симметричный положительно определенный оператор над $\mathbb{R}^{n \times n}$.

3.4.3 Внешние оценки множества достижимости

Вернёмся к задаче построения оценки множества достижимости для матричной системы (3.15)–(3.17). Для решения задачи введём операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} ,

$$\mathcal{A}(t)X = T(t)X + XT'(t), \quad \mathcal{B}(t)X = B(t)XB'(t).$$

представления которых находится по формулам (2.6), (2.7), (2.8).

Определение 7. Фундаментальным оператором $\mathcal{X}(t, s)$ системы (3.15) называется оператор, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathcal{X}}(t, s) = (T\mathcal{X} + \mathcal{X}T'), \quad \mathcal{X}(t, t) = \mathcal{I},$$

где \mathcal{I} — тождественный оператор.

Справедлива

Лемма 13. Фундаментальный оператор $\mathcal{X}(t, s)$ существует, и его представление $X(t, s) = \{X^{ij}(t, s)\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot{X}^{kl}(t, s) = \sum_{i,j=1}^n A^{ij}(t) X_{ij}^{kl}(t, s), \quad \dot{X}^{kl}(t, t) = E^{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Теперь можно выписать операторный аналог формулы Коши:

$$Q(t) = \mathcal{X}(t, t_0)Q_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(t, s)\mathcal{B}(s)U(s)ds.$$

Множество достижимости удовлетворяет следующему соотношению в операторной форме:

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0)) = \mathcal{X}(t, t_0)\mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0) + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(t, s)\mathcal{B}(s)\mathcal{E}(P(s), \mathcal{P}(s))ds.$$

Здесь сумма множеств понимается в смысле Минковского:

$$A + B = \{z: z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

По аналогии с векторными «хорошими кривыми» [53], введём матричные «хорошие кривые»:

Определение 8. Матричная функция $L(t)$ называется «хорошой кривой», если она удовлетворяет следующему уравнению сопряженной системы:

$$\dot{L}(t) = -T'(t)L(t) - L(t)T(t), \quad L(t_0) = L_0. \quad (3.18)$$

Напомним, что оценка называется тугой вдоль некоторого направления l , если она касается оцениваемого множества в этом направлении. Это означает совпадение опорных функций оценки и исходного множества в данном направлении.

Совершенно естественно с векторного случая [1, 53, 14] переносится следующее утверждение.

Теорема 6. Для любой матрицы L_0 эллипсоид $\mathcal{E}(Q^+(t), \mathcal{Q}^+(t))$, параметры которого описываются уравнениями

$$\dot{Q}^+(t) = T(t)Q^+(t) + Q^+(t)T'(t) + B(t)P(t)B'(t), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} Q^+(t_0) &= Q_0, \\ \dot{\mathcal{Q}}^+ &= \mathcal{A}\mathcal{Q}^+ + \mathcal{Q}^+\mathcal{A}^* + \pi(t)\mathcal{Q}^+ + \frac{1}{\pi(t)}\mathcal{B}\mathcal{P}(t)\mathcal{B}^*, \\ \mathcal{Q}^+(t_0) &= \mathcal{Q}^0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

тогда

$$\pi(t) = \left(\frac{\langle L(t), \mathcal{B}(t)\mathcal{P}(t)\mathcal{B}^*(t)L(t) \rangle}{\langle L(t), \mathcal{Q}^+(t)L(t) \rangle} \right)^{1/2},$$

будет внешней оценкой множества $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0))$, т.к. вдоль направления $L(t)$, удовлетворяющего системе (3.18), при чём справедливо соотношение

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0)) = \cap \{ \mathcal{E}(Q^+(t), \mathcal{Q}^+(t)), \|L_0\| = 1 \}.$$

Воспользовавшись леммой 3 и формулами (2.16), (2.17), (2.18), можно переписать (3.20) из операторного в матричный вид для $\mathcal{Q}^+(t) = \{Q^{+ij}(t)\}_{i,j=1}^n$:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^{+ij}(t) &= \sum_{k,l=1}^n (Q^{+kl}A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl}Q_{kl}^{+ij}) + \pi(t)Q^{+ij} + \\ &+ \frac{1}{\pi(t)} \sum_{k,l,p,q=1}^n B^{kl}\tilde{B}^{kl}Q_{kp}^{+ij}Q_{ij}^{+lq}B_{pq}^{ij}\tilde{B}_{pq}^{ij}, \quad Q^{+ij}(t_0) = \mathcal{Q}_0^{ij}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

и, соответственно,

$$\pi(t) = \left(\frac{\left\langle L(t), \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n B^{kl}\tilde{B}^{kl}Q_{kp}^{+ij}Q_{ij}^{+lq}B_{pq}^{ij}\tilde{B}_{pq}^{ij}L_{ij}(t) \right\rangle}{\left\langle L(t), \sum_{i,j=1}^n Q^{+ij}(t)L_{ij}(t) \right\rangle} \right)^{1/2}. \quad (3.22)$$

Таким образом, формулы (3.19), (3.21), (3.22) полностью задают в матричной форме параметры внешней оценки $\mathcal{E}(Q^+(t), \mathcal{Q}^+(t))$.

3.4.4 Внутренние оценки множества достижимости

В аналогии с векторным случаем выводятся и внутренние оценки.

Теорема 7. Для любой матрицы L_0 эллипсоид $\mathcal{E}(Q^-(t), \mathcal{Q}^-(t))$, центр которого описывается уравнением (3.19), а оператор конфигурации — уравнением

$$\dot{\mathcal{Q}}^- = \mathcal{A}\mathcal{Q}^- + \mathcal{Q}^-\mathcal{A}^* + (\mathcal{Q}^-)^{1/2}\mathcal{S}(t)(\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2} + (\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2}\mathcal{S}^*(t)(\mathcal{Q}^-)^{1/2}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{Q}^+(t_0) = \mathcal{Q}^0,$$

где $\mathcal{S}(t)$ — ортогональный оператор, определяемый из соотношения

$$\mathcal{S}(t)(\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2}L(t) = \mu \frac{\langle L(t), \mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*L(t) \rangle^{1/2}}{\langle L(t), \mathcal{Q}^-L(t) \rangle^{1/2}}(\mathcal{Q}^-)^{1/2}L(t) \quad (3.24)$$

будет внутренней оценкой множества $\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0))$, т.к. вдоль направления $L(t)$, удовлетворяющего системе (3.18), причём справедливо соотношение

$$\mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{E}(Q_0, \mathcal{Q}^0)) = \bigcup \{\mathcal{E}(Q^-(t), \mathcal{Q}^+(t)), \|L_0\| = 1\}.$$

Перепишем эти уравнения в матричном виде. Для краткости введём следующие представления:

$$(\mathcal{Q}^-)^{1/2} = \{R^{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad (\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2} = \{G^{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{S} = \{S^{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

Тогда уравнение (3.23) запишется как

$$\begin{aligned} \dot{Q}^{-ij}(t) &= \sum_{k,l=1}^n (Q^{-kl}A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl}Q_{kl}^{-ij}) + \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n R^{kl}S_{kl}^{pq}G_{pq}^{ij} + \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n G^{kl}S_{pq}^{kl}R_{pq}^{ij}, \\ Q^{-ij}(t_0) &= \mathcal{Q}_0^{ij}. \end{aligned}$$

Встаёт вопрос о поиске на практике из соотношения (3.24) ортогонального оператора \mathcal{S} . В векторном случае для этого есть удобная явная формула [49]. Её аналог в матричном случае будет иметь следующий вид.

Лемма 14. Пусть заданы две матрицы V_1 и V_2 , и пусть оператор \mathcal{S} задаётся как

$$\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{Z}(S - I)\mathcal{Z}^*,$$

тогда

$$S = \begin{bmatrix} c-1 & s \\ -s & c-1 \end{bmatrix}, \quad c = \langle Q_1, Q_1 \rangle, \quad s = \sqrt{1-c^2}, \quad R_i = \frac{V_i}{\|V_i\|},$$

а оператор $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{n \times n})$ действует по правилу

$$\mathcal{Z}x = Q_1x_1 + Q_2x_2, \quad Q_1 = R_1, \quad Q_2 = \begin{cases} \frac{R_2 - cR_1}{s}, & s \neq 0, \\ 0, & s = 0. \end{cases}$$

Тогда матрицы $\mathcal{S}V_2$ и μR_1 коллинеарны.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что $\mathcal{S}R_2 = R_1$.

Сначала найдём \mathcal{Z}^* :

$$\langle Q_1x_1 + Q_2x_2, Y \rangle = x_1 \langle Q_1, Y \rangle + x_2 \langle Q_2, Y \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \langle Q_1, Y \rangle \\ \langle Q_2, Y \rangle \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Значит, действие $\mathcal{Z}^* : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ описывается как

$$\mathcal{Z}^*X = \begin{bmatrix} \langle Q_1, X \rangle \\ \langle Q_2, X \rangle \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай $s \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{Z}^*R_2 = \begin{bmatrix} \langle Q_1, R_2 \rangle \\ \langle Q_2, R_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle R_1, R_2 \rangle \\ \frac{1}{s} \langle R_2 - cR_1, R_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \frac{1-c^2}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}.$$

Далее,

$$\mathcal{Z}(S - I) \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} = \mathcal{Z} \begin{bmatrix} 1-c \\ -s \end{bmatrix} = (1-c)R_1 + (-s) \cdot \frac{R_2 - cR_1}{s} = R_1 - R_2.$$

Значит,

$$(\mathcal{I} + \mathcal{Z}(S - I)\mathcal{Z}^*)R_2 = R_1,$$

что и требовалось показать. \square

3.4.5 Множество разрешимости

Теоремы о внутренних и внешних оценках можно переформулировать для попятного множества достижимости — множества разрешимости.

Определение 9. Пусть задано целевое множество \mathcal{M} . Множеством разрешимости на момент t называется множество

$$\mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{M}) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : \exists Q_1 \in \mathcal{M}, U(\cdot), \text{ удв. (3.17),} \right. \\ \left. \text{такое, что } Q_1 = Q(t_1; t, Q, U) \right\}.$$

Предположим, что целевое множество \mathcal{M} является эллипсоидом $\mathcal{E}(Y_1, \mathcal{Y}^1)$.

Теорема 8. Для любой матрицы L_0 эллипсоид $\mathcal{E}(Y^+(t), \mathcal{Y}^+(t))$, параметры которого описываются уравнениями

$$\dot{Y}^+(t) = T(t)Y^+(t) + Y^+(t)T'(t) + B(t)P(t)B'(t), \quad (3.25)$$

$$Y^+(t_1) = Y_1,$$

$$\dot{\mathcal{Y}}^+ = \mathcal{A}\mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^+\mathcal{A}^* - \eta(t)\mathcal{Y}^+ - \frac{1}{\eta(t)}\mathcal{B}\mathcal{P}(t)\mathcal{B}^*, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{Y}^+(t_1) = \mathcal{Y}^1,$$

$$\varepsilon \partial e \eta(t) = \sqrt{\mu(t)},$$

$$\mu(t) = \frac{\langle L(t), \mathcal{B}(t)\mathcal{P}(t)\mathcal{B}^*(t)L(t) \rangle}{\langle L(t), \mathcal{Y}^+(t)L(t) \rangle},$$

будет внешней оценкой множества $\mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{E}(Y_1, \mathcal{Y}^1))$, т.к. оно вдоль направления $L(t)$, удовлетворяющего системе (3.18), причём справедливо соотношение

$$\mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{E}(Y_1, \mathcal{Y}^1)) = \cap \{ \mathcal{E}(Y^+(t), \mathcal{Y}^+(t)), \|L_0\| = 1 \}.$$

Для матричных компонент $\mathcal{Y}^+(t) = \{Y^{+ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ эти формулы можно записать как

$$\begin{aligned}\dot{Y}^{+ij}(t) = & \sum_{k,l=1}^n (Y^{+kl} A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl} Y_{kl}^{+ij}) - \eta(t) Y^{+ij} - \\ & - \frac{1}{\eta(t)} \sum_{k,l,p,q=1}^n B^{kl} \tilde{B}^{kl} Y_{kp}^{+ij} Y_{ij}^{+lq} B_{pq}^{ij} \tilde{B}_{pq}^{ij}, \\ Y^{+ij}(t_1) = & \mathcal{Y}_1^{ij},\end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\mu(t) = \frac{\left\langle L(t), \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n B^{kl} \tilde{B}^{kl} Y_{kp}^{+ij} Y_{ij}^{+lq} B_{pq}^{ij} \tilde{B}_{pq}^{ij} L_{ij}(t) \right\rangle}{\left\langle L(t), \sum_{i,j=1}^n Y^{+ij}(t) L_{ij}(t) \right\rangle}.$$

Теорема 9. Для любой матрицы L_0 эллипсоид $\mathcal{E}(Y^-(t), \mathcal{Y}^-(t))$, центр которого описывается уравнением (3.25), а оператор конфигурации — уравнением

$$\dot{\mathcal{Y}}^- = \mathcal{A}\mathcal{Y}^- + \mathcal{Y}^-\mathcal{A}^* + (\mathcal{Y}^-)^{1/2}\mathcal{S}(t)(\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2} + (\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2}\mathcal{S}^*(t)(\mathcal{Y}^-)^{1/2}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{Y}^+(t_1) = \mathcal{Y}^1,$$

где $\mathcal{S}(t)$ — ортогональный оператор, определяемый из соотношения

$$\mathcal{S}(t)(\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2}L(t) = \mu \frac{\langle L(t), \mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*L(t) \rangle^{1/2}}{\langle L(t), \mathcal{Y}^-L(t) \rangle^{1/2}} (\mathcal{Y}^-)^{1/2}L(t)$$

будет внутренней оценкой множества $\mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{E}(Y_1, \mathcal{Y}^1))$, т.к. вдоль направления $L(t)$, удовлетворяющего системе (3.18), при чём справедливо соотношение

$$\mathcal{W}(t; t_1, \mathcal{E}(Y_1, \mathcal{Y}^1)) = \bigcup \{ \mathcal{E}(Y^-(t), \mathcal{Y}^-(t)), \|L_0\| = 1 \}.$$

Для матричных компонент $\mathcal{Y}^-(t) = \{Y^{-ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ эти формулы можно записать

сать как

$$\begin{aligned}\dot{Y}^{-ij}(t) &= \sum_{k,l=1}^n (Q^{-kl} A_{kl}^{ij} + \tilde{A}^{kl} Y_{kl}^{-ij}) + \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n R^{kl} S_{kl}^{pq} G_{pq}^{ij} + \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^n G^{kl} S_{pq}^{kl} R_{pq}^{ij}, \\ Q^{-ij}(t_0) &= \mathcal{Y}_0^{ij},\end{aligned}$$

εde

$$(\mathcal{Q}^-)^{1/2} = \{R^{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad (\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{B}^*)^{1/2} = \{G^{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{S} = \{S^{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

3.4.6 Численный пример

Рассмотрим систему (3.15)–(3.17) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}X = X, \\ P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}X = X.\end{aligned}$$

Система рассматривалась на отрезке времени $[0, 1]$. Внутренние и внешние аппроксимации строились для $M = 10$ направлений вида

$$L_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \frac{2i\pi}{M}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1.$$

Соответствующие иллюстрации приведены на рисунках 3.7–3.9.

3.4.7 Сравнение вычислительной сложности

В этом разделе приведены результаты сравнения вычислительной сложности операторного алгоритма и алгоритма, основывающимся на вытягивании вектора. Сравнение приведём на примере построения внешних оценок множества достижимости. Как и в разделе 2.4, предположим, что у нас есть алгоритм умножения матриц со сложностью $O(n^\alpha)$, где $\alpha \in (2, 3]$, и будем оценивать

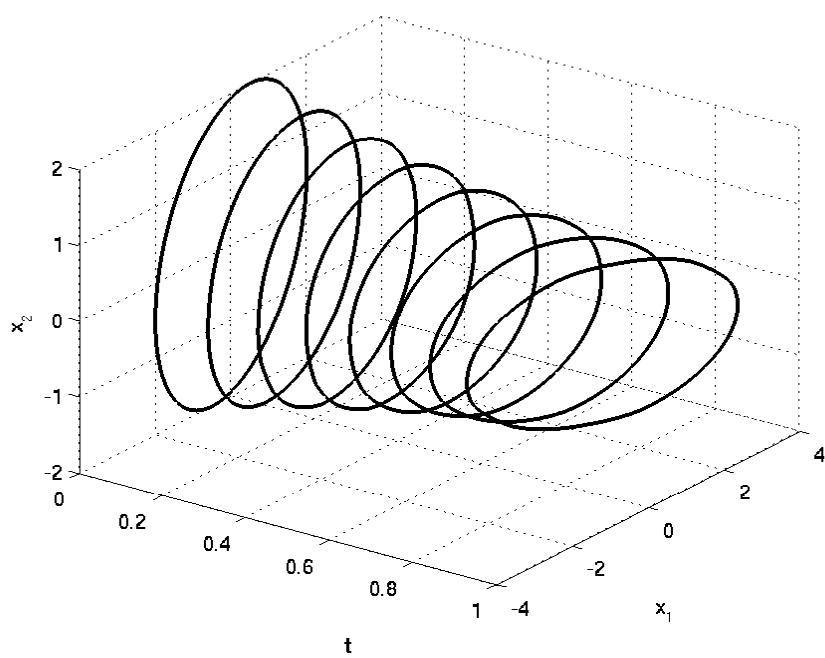


Рис. 3.7: Внешняя аппроксимация трубы достижимости.

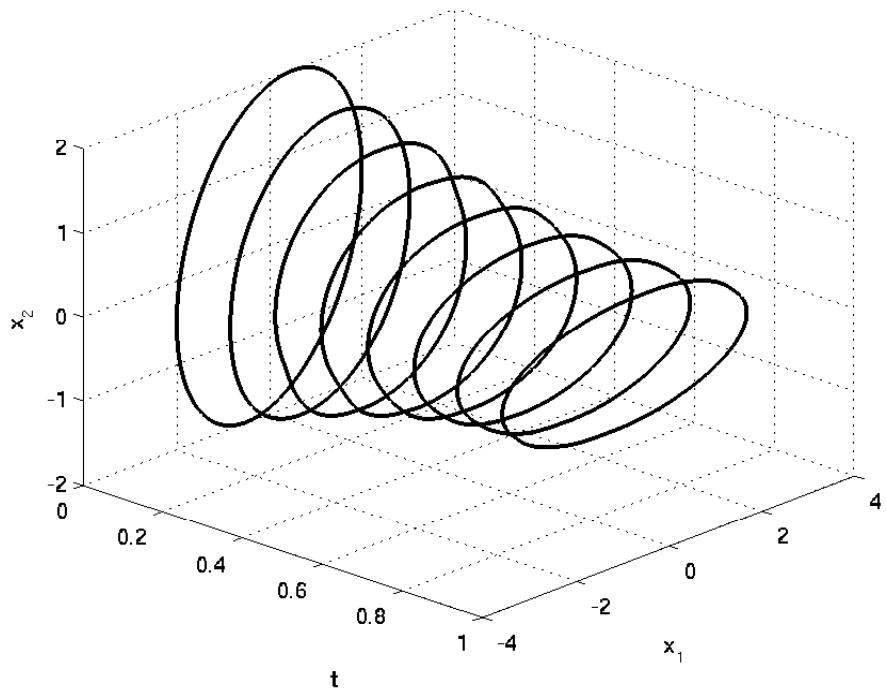


Рис. 3.8: Внутренняя аппроксимация трубы достижимости.

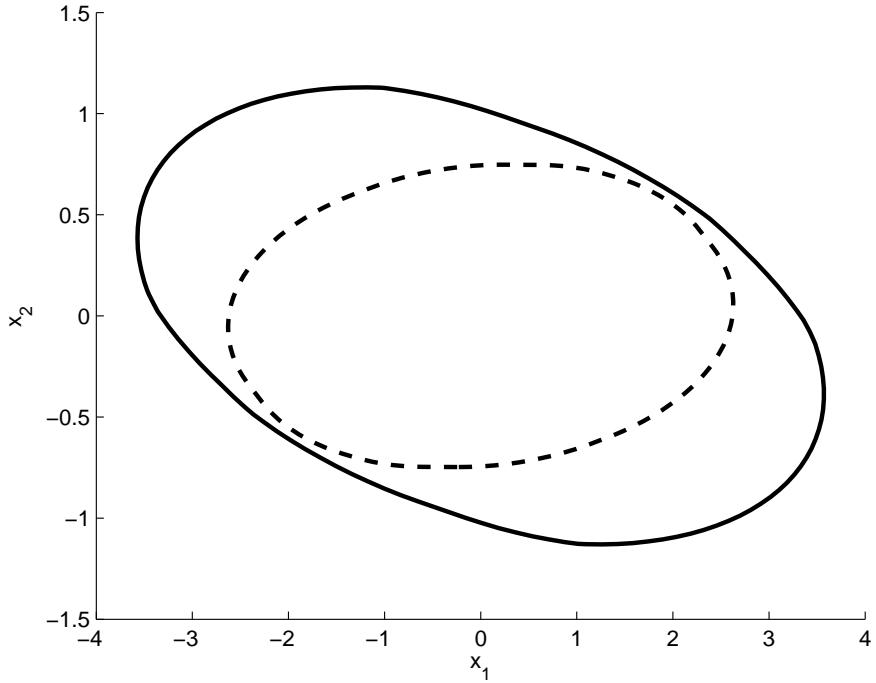


Рис. 3.9: Внутренняя и внешние оценки в момент времени $t = 1$.

сложность через число скалярных умножений, необходимых для расчёта правой части системы уравнений на параметры оценки.

Воспользовавшись тем, что сложность перемножения представлений операторов над матрицами порядка n имеет порядок 2α , из формул (3.19), (3.20) получим, что для расчётов обоими методами необходимо $O(n^{2\alpha})$ умножений.

Для сравнения работы методов на практике оба алгоритма были реализованы в вычислительной среде **Matlab**. Результаты сравнения времени нахождения управления в зависимости от размерности системы изображены на рисунке 3.4.7. Видно, что операторный алгоритм работает лучше векторного, но при увеличении размерности системы разница во времени алгоритмов уменьшается. Преимущество операторного алгоритма здесь заключается в том, что он располагает переменные в естественном для алгоритма умножения матриц порядке.

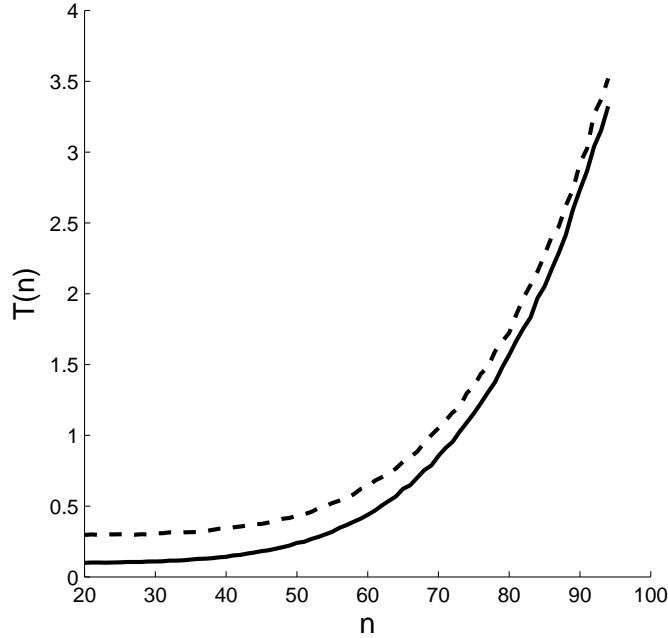


Рис. 3.10: Время расчётов для операторного алгоритма (сплошная линия) и метода через вытягивание (пунктирная линия).

3.5 Задача реконфигурации

Важным примером использования систем с матричной динамикой является *задача реконфигурации контейнера*, возникающая в системах с групповым управлением [3, 4]. Виртуальный эллипсоидальный контейнер при этом выступает в качестве *эталонного движение* для группы объектов: ему требуется, осуществляя необходимое для того изменение своей формы, переместиться из начальной позиции, избегая столкновения с препятствиями, на заранее заданное целевое множество. В этом разделе будет приведён пример построения решения задачи реконфигурации эллипсоидального контейнера на плоскости при наличии двух препятствий. Общая схема решения будет следовать работам [3, 4].

Будем рассматривать эллипсоидальный контейнер $\mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subset \mathbb{R}^2$, динамика центра которого описывается уравнением

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = q'_0.$$

Здесь управление $u(t)$ стеснено геометрическим ограничением

$$\langle u(t), u(t) \rangle \leq \mu^2.$$

Динамика матрицы конфигураций контейнера описывается системой (3.15)–(3.17) при единственном начальном положении Q_0 ($\dot{Q}_0 = 0$). Также задано целевое множество — эллипсоид $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M)$ и непересекающиеся эллипсоидальные препятствия $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(z_1, Z_1)$ и $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(z_2, Z_2)$, $d(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) > 0$, где $d(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние между множествами, $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$. Требуется провести контейнер из начального множества на целевое между препятствиями. При этом контейнер должен удовлетворять геометрическим ограничениям:

$$B_{\lambda_-}(q(t)) \subseteq \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subseteq B_{\lambda_+}(q(t)), \quad 0 < \lambda_- \leq \lambda_+.$$

Эти ограничения означают, что в контейнер можно вписать шар радиусом λ_- и что он всегда содержитя в шаре λ_+ с центрами, совпадающими с центром контейнера.

Решение задачи приведём в три этапа при помощи *барьерных гиперплоскостей*, на каждом из этапов сначала строя траекторию центра, затем — траекторию матрицы конфигураций.

Сначала опишем построение вспомогательных гиперплоскостей. Обозначим $H = d(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ и $z_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$, — граничные точки кратчайшего отрезка, соединяющего препятствия. Прдеположим, что $H \geq 2\lambda_-$. Иными словами, пусть

$$l^0 = \operatorname{Argmax}_{\|l\|=1} (\{-\rho(-l, \mathcal{E}_1) - \rho(l, \mathcal{E}_2)\}),$$

тогда z_i определяются единственным образом как

$$z_1 = \operatorname{Argmax}_{z \in \mathcal{E}_1} \langle z, -l^0 \rangle, \quad z_2 = \operatorname{Argmax}_{z \in \mathcal{E}_2} \langle z, l^0 \rangle.$$

Обозначим для краткости $h_{\min} = \sqrt{\frac{H}{2}}$. Далее, положим

$$c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad d = \frac{y_1 - y_2}{\|y_1 - y_2\|},$$

и выберем вектор l так, чтобы $\langle l, d \rangle = 0$, $\langle l, l \rangle = 1$ (это всегда можно сделать). Таким образом, точка c лежит посередине между препятствиями, вектор d направлен от c в сторону \mathcal{E}_2 , вектор l — единичная нормаль к d . Определим гиперплоскости $\mathcal{H}_i = \{x : \langle x - z_i, d \rangle = 0\}$ — между этими гиперплоскостями находится область, свободная от препятствий, и гиперплоскость $\mathcal{H}_z = \{x : \langle x - c, d \rangle = 0\}$.

Теперь определим гиперплоскости \mathcal{H}_i^b , трансверсальные \mathcal{H}_i , таким образом, чтобы оба препятствия были между ними. Например, в качестве таковых можно взять

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i^b &= \{x : \langle x - c_i^*, d \rangle = 0\}, \quad c_i^* = c + \nu_i l, \\ \nu_1 &= \inf_{\nu \geq 0} \{\nu : \{x : \langle x - c - \nu l, l \rangle = 0\} \cap \mathcal{E}_i = \emptyset, i = 1, 2\}, \\ \nu_2 &= \sup_{\nu \leq 0} \{\nu : \{x : \langle x - c - \nu l, l \rangle = 0\} \cap \mathcal{E}_i = \emptyset, i = 1, 2\}.\end{aligned}$$

Далее, пусть $\mathcal{H}_z \cap \mathcal{H}_i^b = c + \lambda_i^b l$, при этом $\lambda_1^b \lambda_2^b < 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_1^b < 0$, а $\lambda_2^b > 0$ (этого всегда можно добиться за счёт выбора вектора l).

Пусть минимальная полуось контейнера не может быть меньше, чем заданная величина l_{\min} , а максимальная — не больше, чем l_{\max} . При этом

$$\lambda_- \leq l_{\min} \leq l_{\max} \leq \lambda_+.$$

Тогда определим входное целевое множество для центра контейнера как

$$T_1 = \{(x, v) : x = c + \lambda l, v = \mu l, \lambda < \lambda_i^b - l_{\min}, \mu \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, как только центр контейнера окажется в T_1 , то он будет направлен внутрь области, зажатой между \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 , вдоль \mathcal{H}_z .

Опишем теперь для каждого возможного положения центра $x_1^* = c + \lambda^* l$ из T_1 множество $O_1 = O_1(\lambda^*)$ допустимых значений матрицы конфигураций контейнера. Пусть вектор l образует угол α с положительным направлением оси

x . Тогда минимальный допустимый эллипсоид будет иметь матрицу конфигураций (с точностью до порядка осей)

$$Q_1 = S\Lambda S', \quad S = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} h_{\min}^2 & 0 \\ 0 & l_{\min}^2 \end{bmatrix}.$$

Выберем множество O_1 шаром $B_r(Q_1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ с радиусом $r = r(\lambda^*)$ с центром в Q_1 . Покажем, что можно выбрать радиус $r(\lambda^*)$ так, чтобы все матрицы конфигураций из O_1 были допустимыми. В силу леммы 10 имеем:

$$\mathfrak{M}(B_r(Q_1)) = \mathcal{E}(0, Q_1 + rI).$$

Необходимо выбрать радиус r так, чтобы у всех возможных целевых эллипсоидов из $\mathfrak{M}(B_r(Q_1))$ полуоси лежали в заданных пределах. Поскольку

$$Q_1 + rI = S\Lambda S + rSIS' = S(\Lambda + rI)S',$$

то получаем

$$\sqrt{h_{\min}^2 + r} \leq l_{\max}, \quad \sqrt{l_{\min}^2 + r} \leq l_{\max}.$$

Значит, можно выбрать

$$r = \min \{l_{\max}^2 - h_{\min}^2, l_{\max}^2 - l_{\min}^2\},$$

что и обеспечит допустимость каждой матрицы конфигураций из O_1 .

После того, как контейнер был переведён на множество $T_1 \times O_1$, то, не меняя его матриц конфигураций, можно перевести его вдоль \mathcal{H}_z до выхода за гиперплоскость \mathcal{H}_2^b в точку c^* . Если при этом оказалось, что $v_1^* \neq 0$, то это можно сделать нулевым управлением для центра.

Осталось перевести контейнер на целевое множество так, чтобы он целиком оказался внутри него, т.е. $\mathcal{E}(q(t), Q(t)) \subset \mathcal{M}$. Сначала опишем целевое множество для центра. Ясно, что всё \mathcal{M} на эту роль не подходит: например, $q \in \partial\mathcal{M}$

обеспечит лишь непустоту пересечения контейнера и целевого множества, но не включение.

Выберем $T_2 = \mathcal{M} - B_s(0)$, где $s > l_{\min}$. Тогда конечная точка гарантированно окажется на расстоянии, не меньшем l_{\min} , от границы \mathcal{M} . Опишем теперь для каждого допустимого положения центра q^* из T_2 множество допустимых матриц конфигураций. Пусть $d(q^*, \mathcal{M}) = \lambda_2^*$, тогда, рассуждая аналогично построению множества O_1 , в качестве O_2 можно взять шар $B_w(Q_2)$ с параметрами

$$Q_1 = \begin{bmatrix} l_{\min}^2 & 0 \\ 0 & l_{\min}^2 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \lambda_2^* - l_{\min}.$$

Таким образом, общее решение задачи можно составить из следующих этапов.

1. Построить гиперплоскости $\mathcal{H}^i, \mathcal{H}_b^i$;
2. Перевести центр контейнера на множество T_1 , получив при этом значение λ_1^* ;
3. Перевести матрицу конфигураций на множество $O_1(\lambda_1^*)$;
4. Перевести центр в точку c^* , не меняя при этом матрицу конфигураций;
5. Перевести центр на множество T_2 , получив при этом значение λ_2^* ;
6. Перевести матрицу конфигураций на множество $O_2(\lambda_2^*)$.

3.6 Численный пример

Приведём теперь вычислительный пример решения задачи при следующих значениях параметров. Начальное положение контейнера и целевое множество

задаются как

$$q_0 = \begin{bmatrix} -4.5 \\ 4.0 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 6 \\ -1.5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2.3 & 0 \\ 0 & 2.3 \end{bmatrix},$$

геометрические ограничения задаются константами

$$\lambda_- = 0.17, \lambda_+ = 4.$$

Параметры системы (3.15)–(3.17) следующие:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{P}X = X.$$

Параметры эллипсоидов-препятствий:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Z_1 = \begin{bmatrix} 7.0003 & 1.2691 \\ 1.2691 & 1.7297 \end{bmatrix}, z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.2 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 4.2412 & -0.7398 \\ -0.7398 & 1.1688 \end{bmatrix},$$

Для построения управления на каждом этапе были использованы методы поулучшения синтеза на основе построения внутренних оценок множества разрешимости системы [1, 50]. Для этого из соответствующего целевого множества на каждом этапе выпускались внутренние оценки соответствующего множества разрешимости, из них выбиралась та, в которую попадало конечное положение предыдущего этапа (на первом этапе — пара q_0 и Q_0), и строилось управление, осуществляющее «прицеливание» на полученную оценку. Для матрицы конфигурация внутренние оценки строились по формулам теоремы 9.

Поскольку множества $T_i, O_i, i = 1, 2$ не являются, вообще говоря, эллипсоидами, то в примере для применения описанных алгоритмов они были заменены их внутренними эллипсоидальными аппроксимациями [25].

Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 3.11–3.16: на рис. 3.11, 3.12 изображена динамика трубы $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, на рис. 3.13 изображены собственные числа трубы вдоль траектории, и на рис. 3.14–3.16 изображён набор

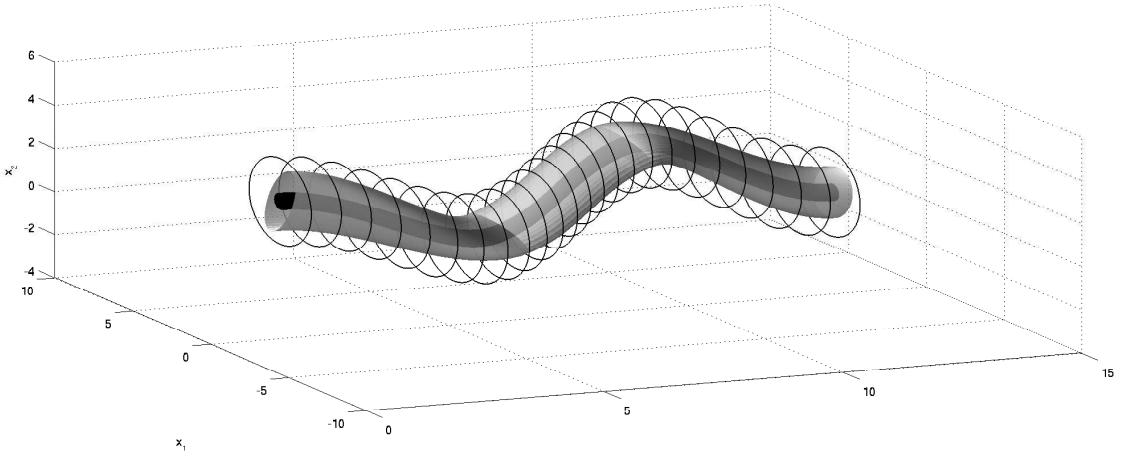


Рис. 3.11: Трубка $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$ (полупрозрачная трубка), внутреннее ограничение (сплошная трубка) и внешнее ограничение (семейство чёрных окружностей).

движений контейнера в различные моменты времени. На этих рисунках серым изображены препятствия, пунктиром изображено целевое множество, сплошной черной линией изображены границы контейнера, тонкой линией обозначена траектория центра, кружками отмечены точки $c + \lambda_i^b l$, и проведена пунктирная линия, соединяющая точки y_1 и y_2 .

3.7 Задача разделения контейнера

Рассмотрим задачу реконфигурации при наличии трёх препятствий, когда имеется возможность прохождения между двумя парами из них. При этом может оказаться необходимым разделить контейнер на два контейнера меньшего объёма, которые обойдут препятствия независимыми маршрутами и потом объединяться обратно. Для каждого из новых контейнеров его подзадачу можно решать способом, изложенным в предшествующем разделе.

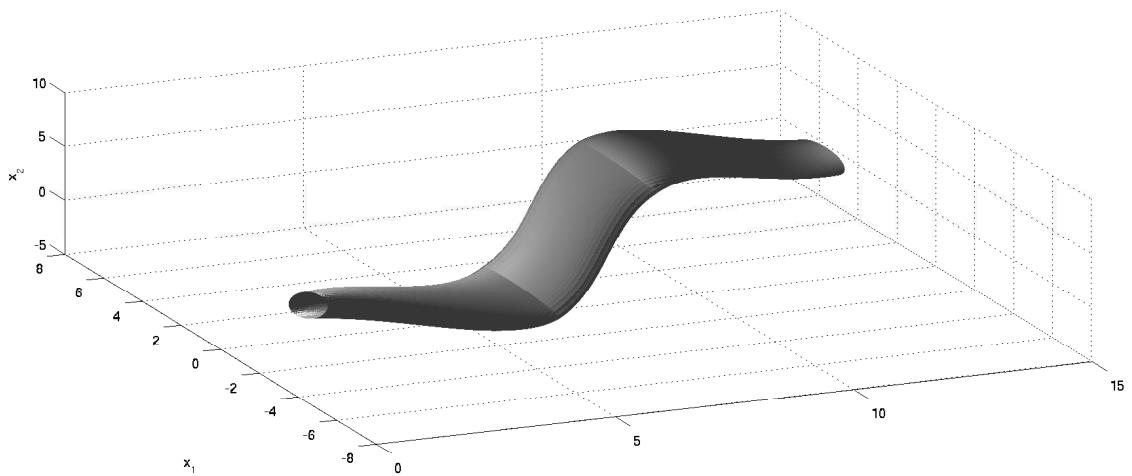


Рис. 3.12: Трубка $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, изображенная со сплошной поверхностью.

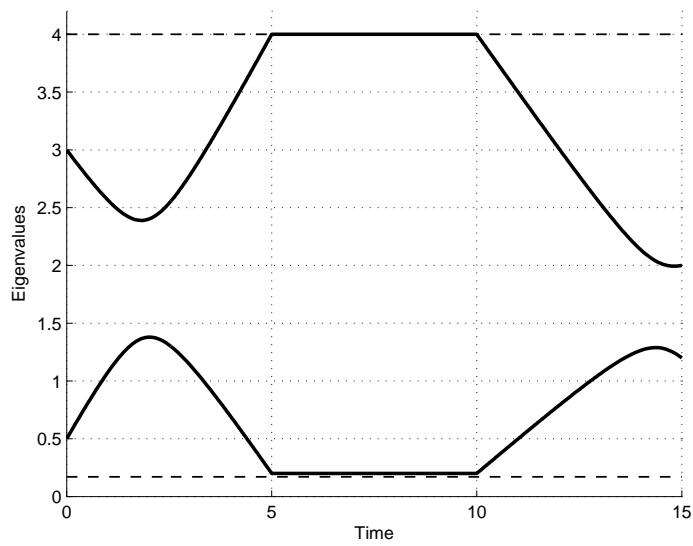


Рис. 3.13: Собственные числа матрицы конфигураций контейнера $Q(t)$ вдоль траектории движения. Пунктирными линиями отмечены внутреннее и внешнее ограничение.

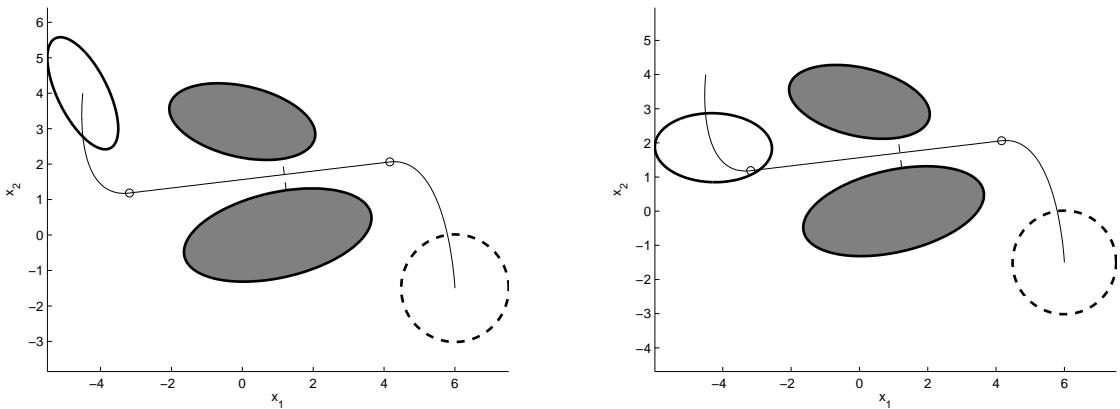


Рис. 3.14: Контейнер в моменты времени $t = 0, t = 3.3$.

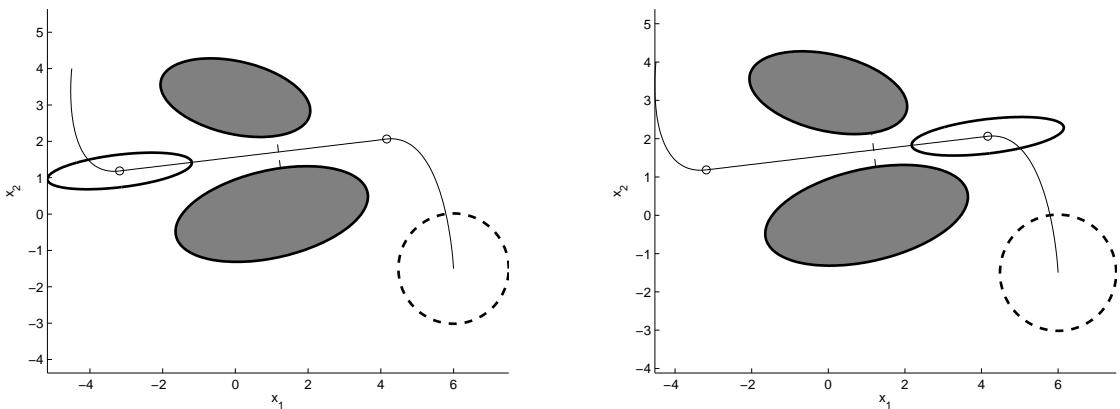


Рис. 3.15: Контейнер в моменты времени $t = 5, t = 10$.

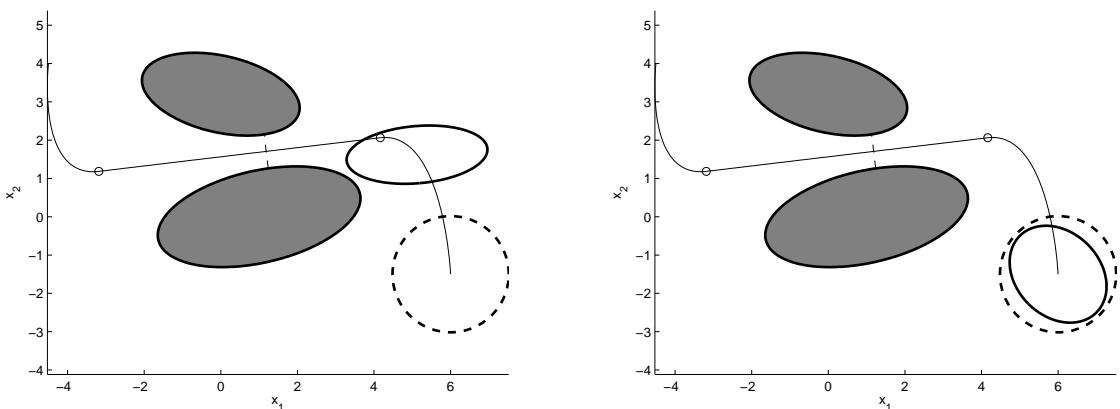


Рис. 3.16: Контейнер в моменты времени $t = 12.8, t = 15$.

Обозначим через

$$\text{vol } \mathcal{E} (q, Q) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \prod_{k=1}^n \lambda_k(Q)$$

объём эллипсоида $\mathcal{E} (q, Q)$. Рассмотрим задачу разбиения контейнера $\mathcal{E} (q_0, Q_0)$ на два эллипсоида, $\mathcal{E} (q_1, Q_1)$ и $\mathcal{E} (q_2, Q_2)$, с внешним и внутренним ограничениями λ_+^i на собственные значения, соответственно:

$$\text{vol } \mathcal{E} (q_1, Q_1) + \text{vol } \mathcal{E} (q_2, Q_2) \rightarrow \max, \quad (3.28)$$

$$B_{\lambda_-^i} (q_i) \subseteq \mathcal{E} (q_i, Q_i), \quad i = 1, 2, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{E} (q_i, Q_i) \subseteq B_{\lambda_+^i} (q_i), \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{E} (q_i, Q_i) \subseteq \mathcal{E} (q_0, Q_0), \quad (3.31)$$

$$\text{int } \mathcal{E} (q_1, Q_1) \cap \text{int } \mathcal{E} (q_2, Q_2) = \emptyset. \quad (3.32)$$

Здесь через $\text{int } A$ обозначена внутренность множества A . Используя методы выпуклого анализа, ограничения (3.29), (3.30) и (3.31) можно записать как

$$(\lambda_-^i)^2 \langle l, l \rangle \leq \langle l, Q_i l \rangle, \quad \text{для всех } l \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

$$\langle l, Q_i l \rangle \leq (\lambda_+^i)^2 \langle l, l \rangle, \quad \text{для всех } l \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

$$\langle q_i, l \rangle + \sqrt{\langle l, Q_i l \rangle} \leq \langle q_0, l \rangle + \sqrt{\langle l, Q_0 l \rangle}, \quad \text{для всех } l \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

Поскольку эллипсоид — сильно выпуклое множество, то в неравенстве

$$\max_l \{ \langle l, x \rangle - \rho(l, \mathcal{E} (q_i, Q_i)) \} \leq 0$$

равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда $l \in \partial \mathcal{E} (q_i, Q_i)$. Значит, условие (3.32) можно записать как

$$\min_l \max \left\{ \begin{aligned} & \langle q_1 - q_2, l \rangle - \sqrt{\langle l, Q_1 l \rangle} - \sqrt{\langle l, Q_2 l \rangle}, \\ & \langle q_2 - q_1, l \rangle - \sqrt{\langle l, Q_1 l \rangle} - \sqrt{\langle l, Q_2 l \rangle} \end{aligned} \right\} \leq 0.$$

Окончательно, задачу (3.28)–(3.32) можно записать как

$$\text{vol } \mathcal{E}(q_1, Q_1) + \text{vol } \mathcal{E}(q_2, Q_2) \rightarrow \max,$$

$$(\lambda_-^i)^2 \langle l, l \rangle \leq \langle l, Q_i l \rangle, \text{ для всех } l \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2,$$

$$\langle l, Q_i l \rangle \leq (\lambda_+^i)^2 \langle l, l \rangle, \text{ для всех } l \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2,$$

$$\langle q_i, l \rangle + \sqrt{\langle l, Q_i l \rangle} \leq \langle q_0, l \rangle + \sqrt{\langle l, Q_0 l \rangle}, \text{ для всех } l \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2,$$

$$|\langle q_1 - q_2, l \rangle| \leq \sqrt{\langle l, Q_1 l \rangle} + \sqrt{\langle l, Q_2 l \rangle} \text{ для всех } l \in \mathbb{R}^n.$$

3.8 Численный пример

Приведём вычислительный пример решения задачи при следующих значениях параметров. Начальное положение для ветвления и целевое множество задаются как

$$q_0 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Ограничения на собственные значения были выбраны как

$$\lambda_-^1 = 0.2, \lambda_+^1 = 4.8, \lambda_-^2 = 0.7, \lambda_+^2 = 1.7.$$

Параметры системы (3.15)–(3.17) следующие:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{P}X = X.$$

Параметры эллипсоидов-препятствий:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, Z_1 = \begin{bmatrix} 8.5 & 7.5 \\ 7.5 & 8.5 \end{bmatrix}, z_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6.25 \end{bmatrix},$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}, Z_3 = \begin{bmatrix} 8.5 & -7.5 \\ -7.5 & 8.5 \end{bmatrix}.$$

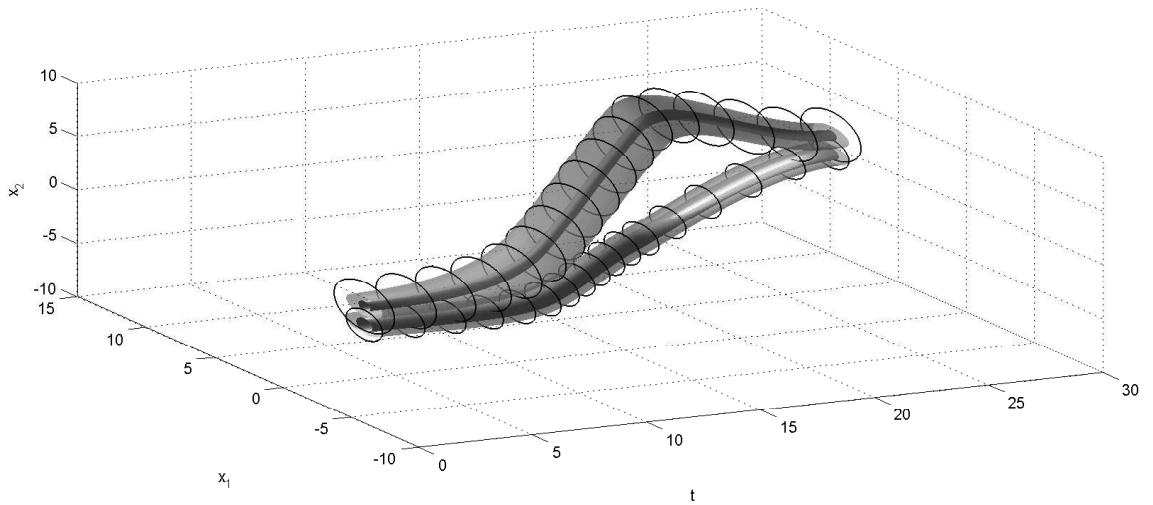


Рис. 3.17: Трубы $\mathcal{E}(q_1(t), Q_1(t)), \mathcal{E}(q_2(t), Q_2(t))$ (полупрозрачные трубы), внутреннее ограничение (сплошные трубы) и внешнее ограничение (семейство чёрных окружностей).

Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 3.18–3.22: на рис. 3.17, 3.18 изображена динамика трубы $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, на рис. 3.19 изображены собственные числа трубы вдоль траектории, и на рис. 3.20–3.22 изображён набор движений контейнеров в различные моменты времени. На этих рисунках серым изображены препятствия, пунктиром изображено целевое множество, сплошной черной линией изображены границы контейнера, тонкой линией обозначены траектории центров.

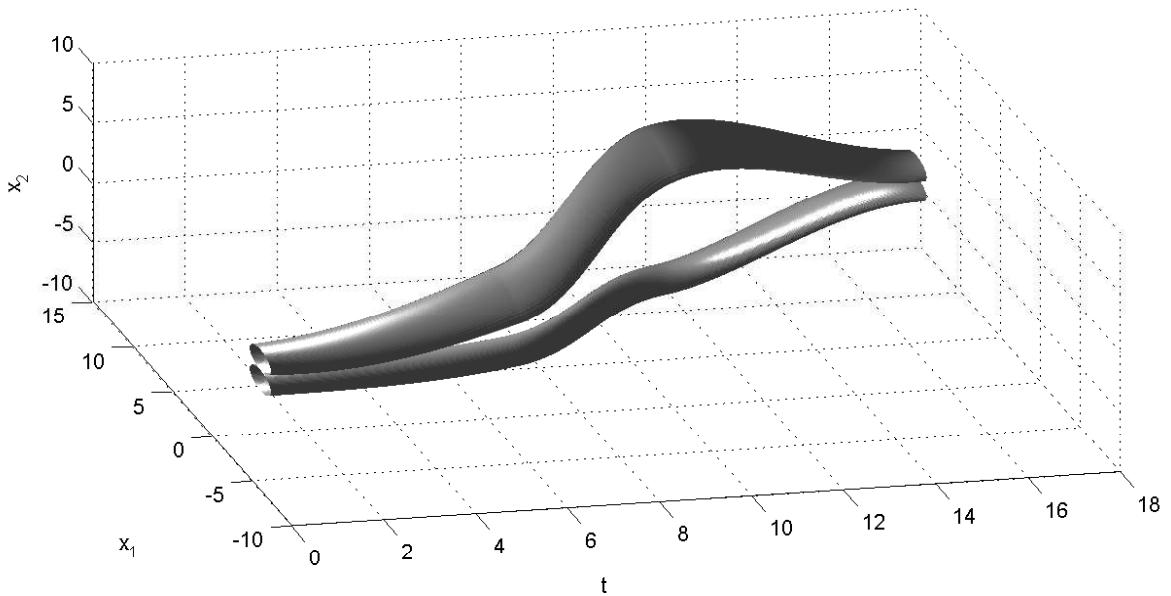


Рис. 3.18: Трубы $\mathcal{E}(q_1(t), Q_1(t))$, $\mathcal{E}(q_2(t), Q_2(t))$, изображенные со сплошной поверхностью.

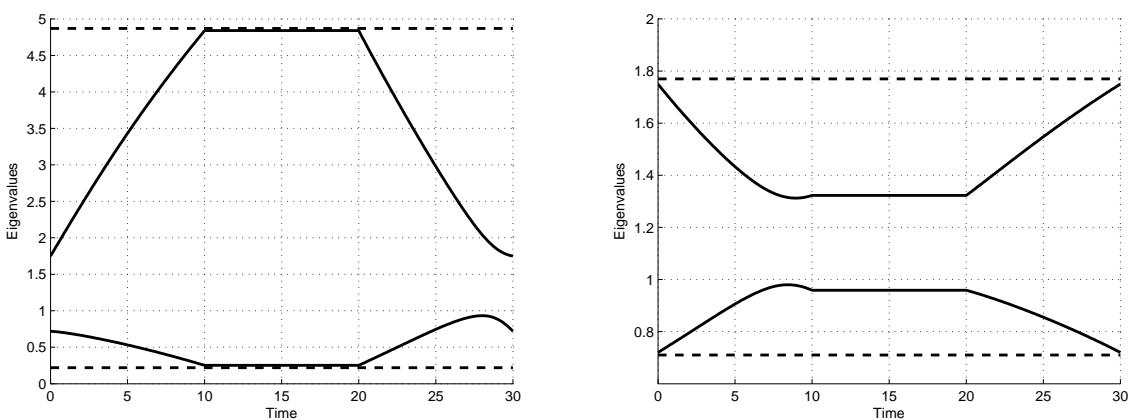


Рис. 3.19: Собственные числа матрицы конфигураций контейнера $Q_1(t)$ (слева) и $Q_2(t)$ (справа) вдоль траектории движения. Пунктирными линиями отмечены внутреннее и внешнее ограничение.

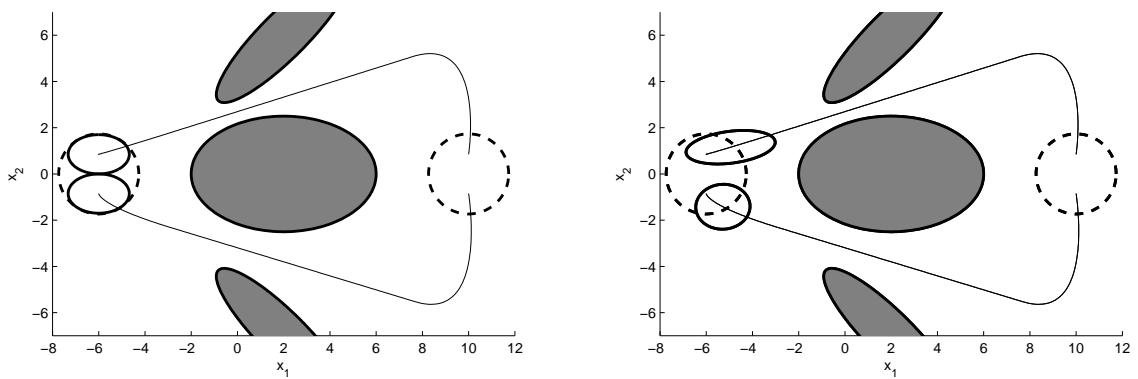


Рис. 3.20: Контейнер в моменты времени $t = 0, t = 6.12$.

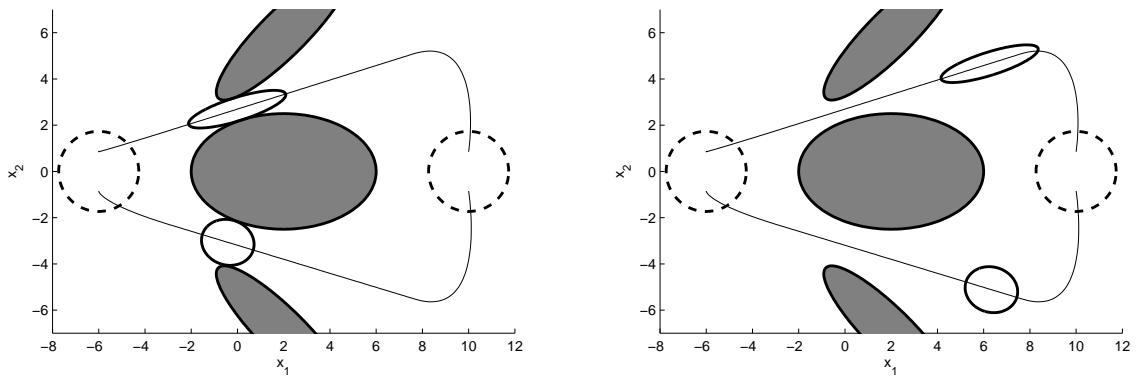


Рис. 3.21: Контейнер в моменты времени $t = 12.37, t = 18.62$.

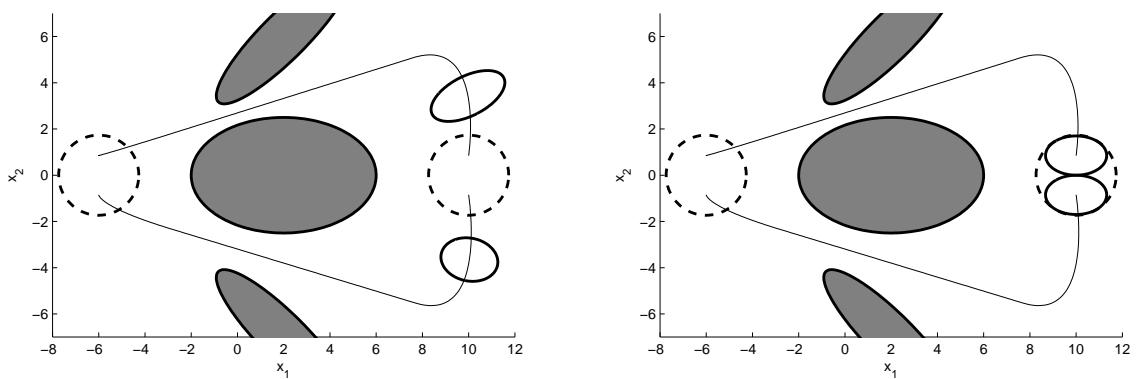


Рис. 3.22: Контейнер в моменты времени $t = 24.87, t = 30$.

Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Решена задача синтеза для матричной линейно-квадратичной задачи через сведение её к векторной. Получено явное выражение для функции цены. Указан класс систем, в котором метод позволяет вернуться к исходным матричным обозначениям.
2. Построена специальная форма записи действия матричных операторов в терминах *представлений операторов*, позволяющая сохранить матричную форму решения. Выведен ряд свойств представлений. Показано, что использование подобного подхода алгоритмически более эффективно, чем решение через векторизацию.
3. Была решена матричная задача синтеза с геометрическим («жёстким») ограничением на управление. Предложен способ наглядной визуализации множеств в пространстве матриц, его действие проиллюстрировано на ряде примеров. Приведены формулы для внутренних и внешних оценок множеств достижимости и разрешимости в пространствах матриц, на основе которых строится приближённое решение задачи синтеза. Полученные методы применены для решения задачи реконфигурации.

Решение задач управления для систем с матричными фазовыми переменными представляет большой интерес для современной математической теории

управления. Изложенные в настоящей работе методы и подходы применены к широкому кругу подобных задач. Операторный метод решения, изложенный во второй главе, может быть использован для задач с высокой размерностью фазовой переменной. Методы, изложенные в третьей главе, могут применяться для матричных задач достижимости и синтеза управлений при наличии геометрических ограничений на управление. Задачи реконфигурации и разбиения контейнера в третьей главе происходят из группового управления и являются составным этапом решения общей задачи синтеза управлений для группы агентов в условиях препятствий.

Результаты настоящей работы допускают обобщение и дальнейшее развитие в рамках этих задач.

Литература

- [1] A. B. Kurzhanski and I. Vályi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [2] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On synthesizing target controls under obstacle and collision avoidance // Journal of Franklin Institute. 2010. February. V. 347, № 1. Pp. 130–145.
- [3] Куржанский А. Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Доклады Российской Академии наук. Т. 426, №1. С. 20–25 (2009).
- [4] Куржанский А. Б. О задаче группового управления в условиях препятствий // Труды института математики и механики РАН, Т. 20, №3, С. 166–179 (2014).
- [5] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamic Optimization for Reachability Problems // Journal of Optimization Theory and Applications, V. 2, P. 227–251 (2001).
- [6] Kurzhanski A.B., Set-valued calculus and dynamic programming in problems of feedback control // Int. Ser. Numer. Math., 124, 163–174 (1998).
- [7] Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. М.: Наука, 1977.

- [8] A. B. Kurzhanski and P. Varaiya, *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*, Birkhäuser, Boston, 2014
- [9] Понtryагин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
- [10] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [11] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [12] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [13] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Мир, 1974.
- [14] Kurzhanskiy A. A. and Varaiya, P. Ellipsoidal Toolbox.
<http://systemanalysisdpt-cmc-msu.github.io/ellipsoids/>
- [15] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
- [16] Bellman R., Dreyfus S. Applied dynamic programming. Princeton, Princeton University Press, 1962.
- [17] Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М., Физматлит, 2007.
- [18] Zhang F. (Ed.), *The Schur Complement and Its Applications*, Springer, New York, 2005.
- [19] Магнус Я. Р., Найдеккер Х., *Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и экономике*, М.: Физматлит, 2002.
- [20] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

- [21] Чебунин И.В. Условия управляемости для уравнения Риккати // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 12. С. 1654–1661.
- [22] Егоров А. И. Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001.
- [23] Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнения Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
- [24] Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М., Наука, 1988.
- [25] Важенцев А. Ю. *Внутренние эллипсоидальные оценки в задачах динамики и управления*. Кандидатская диссертация по специальности 01.01.07, научный руководитель Куржанский А. Б. М., МГУ им. М.В. Ломоносова (2004).
- [26] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Физматлит, 2006.
- [27] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [28] René Boel and Jan H. van Schuppen, “Control of the observation matrix for control purposes,” in: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Budapest, Hungary, 2010, pp. 1261–1268.
- [29] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
- [30] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Физматлит, 2010.
- [31] Horn R., Jhonson C. *Topics in matrix analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [32] Steeb W.-H. *Problems and solutions in introductory and advanced matrix calculus*. London: World Scientific, 2006.

- [33] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [34] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishna, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [35] Половинкин Е. С. и Балашов М. В., *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, М.: Физматлит, 2004.
- [36] Рокафеллар Р., *Выпуклый анализ*, М.: Мир, 1973.
- [37] Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, М.: МЦНМО, 2011.
- [38] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, М.: Наука, 1985.
- [39] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. М.: Факториал, 2000.
- [40] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967.
- [41] J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus*, Dover Publications, New York, 1978.
- [42] Новиков С. П., Тайманов И. А., *Современные геометрические структуры и поля*, М.: МЦНМО, 2006.
- [43] M. Marcus, All linear operators leaving the unitary group invariant // Duke Math. J., vol. 26, pp. 155-163 (1959).
- [44] A. Kovacs, Trace preserving linear transformations on matrix algebras // Linear and Multilinear Algebra, vol. 4, pp. 243–250 (1976/77).

- [45] Chi-Kwong Li, Nam-Kiu Tsing, Linear preserver problems // *Linear Algebra and its Applications*, vol. 162–164, pp. 217–235 (1992).
- [46] L. Baribeau and T. Ransford, Non-linear spectrum-preserving maps // *Bull. London Math. Soc.*, vol. 32, pp. 8–14 (2000).
- [47] Куржанский А. Б. Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // *Доклады РАН*, Т. 133, №4, 578–581 (1993).
- [48] Kurzhanski A.B. and Filippova, T.F., On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // *Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Progress in Systems and Control Theory*, vol. 17, pp. 122–188 (1993).
- [49] Куржанский А. Б., Дарьин А. Н. Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределённых возмущениях // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Том 53, №. 1. С. 47–57.
- [50] Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А.Б. Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений // *Дифференциальные уравнения*, Т. 42, №11, с. 1452–1463 (2006).
- [51] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Optimization of Output Feedback Control Under Set-Membership Uncertainty // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. V. 151. Pp. 11–32.
- [52] Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P. Control Synthesis for State Constrained Systems and Obstacle Problems // Proc. NOLCOS-04. / IFAC. Stuttgart: Elsevier Science, 2004.

- [53] A. B Kurzhanski and P. Varaiya, “Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External Approximations. Part II: Internal Approximations. Box-valued Constraints,” *Optimization methods and software*, vol. 17, no. 2, pp. 177–237, 2002.
- [54] Куржанский А. Б., Месяц А. И. Оптимальное управление эллипсоидальными движениями // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №12. С. 1525–1532.
- [55] Куржанский А. Б., Месяц А. И. Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. №3. С. 404–414.
- [56] Месяц А.И. Управление эллипсоидальными траекториями // Материалы XX международной конференции «Автоматика», Николаев, Украина, стр. 63–64, 2013.
- [57] Kurzhanski A.B., Mesyats A.I. Ellipsoidal motions for applied control: from theory to computation // Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Florence, Italy, pp. 5816–5821, 2013.
- [58] Kurzhanski A.B., Mesyats A.I. The Mathematics of Team Control // Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Groningen, Netherlands, p. 1755-1758, 2014.
- [59] A. I. Subbotin, *Generalized Solutions of First-Order PDE's. The Dynamic Optimization Perspective*, SCFA, Boston, 1995.
- [60] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [61] Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Stern R.J., and Wolenski P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York (1998).
- [62] Lions P.-L. *General solutions of Hamilton–Jacobi Equations*, Pitman, London (1982).
- [63] N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer, New York, 1988.
- [64] R. Olfati-Saber, “Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.51, No. 3, 2006, pp. 401–420.
- [65] Group Coordination and Cooperative Control / Eds. K.Y. Pettersen, J.T. Gravdahl, H. Nijmeijer. Berlin: Springer–Verlag, 2006.
- [66] Cooperative Control / Eds. V. Kumar, N. Leonard, A.S. Morse. Berlin: Springer–Verlag, 2004.
- [67] O.Junge, S.Ober-Bloebaum, “Optimal reconfiguration of formation flying satellites,” *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC*, Seville, Spain, 2005, pp.66–71.
- [68] Р.И. Козлов, Н. Н. Максимкин, Л. В. Киселев. Устойчивость конфигураций группового движения автономных поводных роботов в условиях неопределенности // Подводные роботы и робототехника. Т. 5, №19, С. 40–46 (2010).
- [69] K. Fan, “Minimax theorems,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 39, no 1, pp. 42–47 (1953).
- [70] Демьянов В. Ф. *Минимакс: производные по направлениям*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

- [71] V. V. Vasin and I. I. Eremin, *Operators and Iterative Processes of Fejer Type*, Gruyter, Berlin, 2009.
- [72] S.-P. Han and O. L. Mangasarian, “Exact penalty functions in nonlinear programming,” // Mathematical Programming. 1979. No 17. P. 251–269.
- [73] Strassen V. Gaussian Elimination is not Optimal // Numerische Mathematik. 1969. №13, P. 354–356.
- [74] Coppersmith D., Winograd S. Matrix multiplication via arithmetic progressions // Journal of Symbolic Computation. 1990. №9. P. 251–280.