

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Минаева Юлия Юрьевна

СИНТЕЗ БЫСТРЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель — кандидат
физико-математических наук
А. Н. Дарьин

Москва
2014

Оглавление

Введение	4
1 Аппроксимация импульсных и обобщённых управлений физически реализуемыми быстрыми управлениями	9
1.1 Введение	9
1.1.1 Обобщённые функции, основные понятия	9
1.1.2 Линейные системы с импульсным управлением	13
1.1.3 Линейные системы с обобщённым управлением	15
1.1.4 Линейные системы с импульсным управлением при неопределённости	17
1.1.5 Линейные системы с обобщённым управлением при неопределённости	18
1.1.6 Быстрые управления	20
1.2 Разрывные аппроксимации с минимальным модулем	22
1.3 Гладкие аппроксимации с минимальным модулем k -ой производной	27
1.4 Использование быстрых управлений в задаче управления без неопределённости	31
1.5 Примеры	34
1.5.1 Применение импульсного управления	34
1.5.2 Применение обобщённого управления с производной дельта-функции	36
1.5.3 Управление системой за нулевое время	37
1.5.4 Применение быстрых управлений	37
2 Задача синтеза управлений для систем с неопределённостью	41
2.1 Введение	41
2.2 Минимаксная и максиминная функции цены	42
2.3 Позиционная функция цены	47
2.3.1 Определение позиционной функции цены	47
2.3.2 Принцип оптимальности для позиционной функции цены	48
2.3.3 Свойства позиционной функции цены	50
2.3.4 Уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса для позиционной функции цены	52
2.4 Задача с коррекциями движения	54
2.4.1 Переход к системе с нулевой динамикой	54
2.4.2 Функции цены с коррекциями	55
2.4.3 Существование функции цены в задаче синтеза	56
2.5 Свойства функции цены в задаче синтеза	59
2.5.1 Равенство позиционной функции цены и функции цены в задаче синтеза	59
2.5.2 Уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса и синтез управления	60
2.5.3 Закон управления для систем с обобщённым управлением	61
2.5.4 Быстрые управления	61
2.6 Траектории замкнутой системы	61
2.6.1 Пределы последовательностей траекторий	62
2.6.2 Пространственно-временная система	62
2.7 Примеры	66

2.7.1	Синтез импульсных управлений	66
2.7.2	Синтез быстрых управлений	69
3	Численный алгоритм синтеза импульсных управлений	74
3.1	Введение	74
3.2	Постановка задачи	74
3.3	Аппроксимации минимаксной и максиминной функций цены	75
3.3.1	Класс функций $\mathcal{F}$	76
3.3.2	Свойства оператора S	76
3.3.3	Свойства оператора T	77
3.3.4	Аппроксимации функций цены	79
3.4	Аппроксимации функции цены с коррекциями	80
3.5	Численный алгоритм синтеза управления	81
3.6	Примеры применения численного алгоритма синтеза управления	83
3.6.1	Пример 1	84
3.6.2	Пример 2	86
3.6.3	Пример 3	87
3.6.4	Пример 4	89
3.6.5	Пример 5	91
	Заключение	94
	Литература	95

Введение

Актуальность темы

Данная работа посвящена исследованию задачи синтеза управления в системах с неопределённостью в классах импульсных управлений, формализуемых обобщёнными функциями [7, 34], а также быстрых управлений, действующих в течение малого промежутка времени, величина воздействия которых ограничена, хотя и может быть довольно большой.

Задачи построения синтезирующих управляющих воздействий являются одним из центральных вопросов современной математической теории управления. Решением таких задач служат управления в виде обратной связи. Они особенно необходимы в системах, где присутствуют неопределённые возмущения, неизвестные заранее, поскольку использование программных управлений в таких задачах, как правило, не даёт удовлетворительных результатов. Подобные задачи для систем с ограниченным управлением в детерминированной постановке, то есть когда задано ограничение на неопределённое возмущение и отсутствует статистическая информация о нём, достаточно подробно изучены в [2, 14, 18, 20, 23, 27, 53] и других работах.

Одним из способов решения задачи синтеза является применение метода динамического программирования, предложенного Р. Беллманом в [4] и более ранних работах [37, 38], и применённого к задачам с неопределённостью Р. Айзексом [2]. Исследование таких задач сводится к рассмотрению дифференциального уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса. Решение уравнения подобного типа представляет сложную вычислительную задачу, в связи с чем разрабатываются различные аппроксимационные методы [22, 53].

Решение многих задач оптимального управления, возникающих в приложениях, не достигается в традиционно рассматриваемом классе ограниченных управлений. Классическим примером такой задачи служит задача управления при условии минимума импульса управляющей силы u , которую можно сформулировать следующим образом: на траекториях $x(t)$ системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1,$$

минимизировать функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(\tau)| d\tau \rightarrow \min$$

при заданном начальном x^0 и конечном x^1 положении системы. Предполагается, что интервал времени $[t_0, t_1]$ фиксирован. Минимум функционала данной задачи достигается на управлениях u , содержащих в качестве слагаемых мгновенные ударные воздействия, формализуемые дельта-функцией $\delta(t)$ [7, 34]. Кроме того, известно [15], что среди оптимальных управляющих воздействий в классе программных управлений есть управления, представляющие собой линейную комбинацию дельта-функций, в которых количество импульсов не

превышает размерность фазового пространства [55].

Развитие теории импульсного управления обусловлено также тем, что во многих приложениях возникают задачи, в которых входные воздействия характеризуются большой интенсивностью и малым промежутком действия. Примеры задач с подобными свойствами встречаются в механике, робототехнике, финансовой математике, квантовой физике, химии, экологии, в медико-биологических и экономических задачах, при изучении атмосферных явлений и в других областях. Математическая идеализация таких воздействий приводит к рассмотрению мгновенных, импульсных управлений, вызывающих мгновенные изменения фазовых координат.

Построению программных управлений для систем, допускающих импульсные воздействия, посвящены основополагающие работы [15, 55]. Дополнительные возможности открывает рассмотрение в качестве управления распределений (обобщённых функций), допускающих высшие производные дельта-функций [24]. Известно, что для вполне управляемых систем задача перевода системы из одного положения в произвольное другое положение может быть решена при помощи обобщённых управлений высших порядков за нулевое время [24].

Следует отметить, что использование импульсных и обобщённых управлений не расширяет свойство полной управляемости системы [17] (здесь идёт речь об управляемости на интервале времени положительной длины), то есть, вполне управляемая система в классе импульсных управлений будет вполне управляемой и в классе ограниченных управлений, и наоборот, вполне управляемая система в классе ограниченных управлений будет вполне управляемой в классе импульсных управлений.

Позиционное импульсное управление в системах без неопределённости было построено в [43, 52]. В этих работах для синтеза импульсного управления используется обобщение метода динамического программирования на случай импульсных управлений. Задача оптимизации формулируется в терминах формализма Гамильтона–Якоби. Решение включает в себя построение функции цены, обладающей полугрупповым свойством, и последующее определение синтеза управления на основании неравенства типа Гамильтона–Якоби–Беллмана, которому удовлетворяет функция цены. Следует отметить, что для линейной задачи без неопределённости функция цены может быть найдена в явном виде при помощи средств выпуклого анализа.

Даже в простых модельных задачах функция цены может оказаться не дифференцируемой в классическом смысле, поэтому рассматриваемые задачи связаны с теорией обобщённых (вязкостных) решений [42, 50] и минимаксных решений [32].

Актуальной частью современной теории управления также являются задачи импульсного управления при наличии неопределённостей, или помех, как стохастического [39], так и детерминированного характера, которые могут быть вызваны неточным знанием параметров системы, информационными помехами или другими причинами. В работе [45] для задачи импульсного управления при наличии неизвестной ограниченной помехи предложено использовать задачи с коррекциями, по аналогии с результатом работы [20]. Для построения

позиционного управления предложено использовать предельное значение функции цены в задачах с коррекциями движения. Предельная функция цены является решением неравенства типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА), которое можно рассматривать как обобщение уравнения ГЯБА, известного в теории дифференциальных игр [2]. При построении синтеза импульсного управления возникает вопрос интерпретации траекторий замкнутой системы. В работе [51] для задач с неопределённостью при ограниченном управлении определены аппроксимационные и конструктивные движения. Некоторые способы описания траекторий замкнутой системы рассмотрены в [44].

Настоящая работа продолжает исследование метода, предложенного в работе [45]. В Главе 2 диссертационной работы доказано существование предельного значения функции цены в задачах с коррекциями движения, а также доказано, что предельная функция цены является решением неравенства типа ГЯБА. Предложены способы интерпретации траекторий замкнутой системы.

Импульсные и обобщённые управления не реализуемы на практике, поскольку величина таких воздействий не ограничена. Отсюда возникают проблемы их аппроксимации при помощи ограниченных функций, которые принято называть быстрыми управлениями [11, 12].

Среди задач теории управления, мотивированных приложениями, рассматриваются задачи, в которых на траектории движущихся объектов наложены фазовые ограничения, задачи наблюдения по неполной информации. Такие проблемы, безусловно, актуальны и для импульсных систем. Задачи оптимального импульсного управления при наличии фазовых ограничений различного характера рассмотрены в работах [9, 21]. В работе [10] исследуются задачи наблюдения для импульсной системы.

Импульсные воздействия могут также применяться при описании задач с гибридной динамикой, в которых система задаётся совокупностью подсистем и правилами переключения между ними. В работе [25] импульсные управления используются для формализации переключений между подсистемами.

Большинство реальных задач теории управления имеют сложную нелинейную структуру. Различные нелинейные задачи с импульсными воздействиями исследуются в [13, 26, 36, 40, 49, 54, 56] и других работах.

Цель работы состоит в исследовании задачи импульсного управления при наличии неопределённости, заданной в виде неизвестной ограниченной помехи, и получении синтеза в классе быстрых управлений.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Построены разрывные, непрерывные и гладкие (k раз дифференцируемые) аппроксимации обобщённых управлений с минимальным модулем аппроксимации, её производной, либо её производной k -ого порядка соответственно, которые используются при построении быстрых управлений.

2. Доказан принцип оптимальности в задаче синтеза импульсных и быстрых управлений для линейной системы при наличии неизвестной ограниченной помехи. Доказано, что функция цены удовлетворяет неравенству типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, и получена стратегия импульсного управления. Получены способы описания траекторий замкнутой системы.
3. Получен численный алгоритм построения синтеза импульсного управления при неопределённости, основанный на аппроксимации функции цены.

Научная новизна работы

Полученные результаты являются новыми. В работе рассмотрены ранее мало изученные задачи синтеза быстрых управлений в условиях неопределённости. Работа продолжает исследования [11, 12, 43].

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит, в основном, теоретический характер. В современной теории управления исследование вопросов синтеза импульсного управления при неопределённости является одной из актуальных задач. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании моделей реальных систем. Решение задач в классе быстрых управлений позволяет получить физические реализуемые управляющие воздействия, что может быть использовано в дальнейшем при исследовании практических задач.

Методы исследования

При решении рассматриваемых в диссертации задач использованы теория обобщённых функций, методы динамического программирования, функционального анализа и выпуклого анализа.

Апробация работы

Результаты работы были представлены в виде докладов на научном семинаре «Прикладные задачи системного анализа» под руководством академика А. Б. Куржанского на кафедре системного анализа ВМК МГУ и на следующих конференциях: «Тихоновские чтения – 2013» (Москва, октябрь 2013), 20 Международная конференция по автоматическому управлению «Автоматика – 2013» (Николаев, Украина, сентябрь 2013), «Ломоносовские чтения» (Москва, апрель 2014, 2012 и 2011 годов), конференция «Ломоносов» (Москва, апрель 2014 и 2012 годов), 18 Международная конференция по автоматическому управлению «Автоматика – 2011» (Львов, Украина, сентябрь 2011).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах [60, 61, 62], все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Все работы выполнены в соавторстве с научным руководителем А. Н. Дарьиным. В работе [60] научному руководителю принадлежат постановки задач аппроксимации дельта-функ-

ции, а также формулировка этих задач в виде соответствующих проблем моментов. Доказательства принадлежат автору диссертации. В работе [61] научному руководителю принадлежит постановка задач. Доказательства принадлежат автору диссертации. В работе [62] научному руководителю принадлежит общая постановка задачи и рекомендации по поводу выбора класса кусочно-аффинных выпуклых функций для построения аппроксимаций. Доказательства принадлежат автору диссертации.

Автор благодарит своего научного руководителя Александра Николаевича Дарьина за постановку задач и постоянное внимание к работе, ценные указания и консультации.

Автор благодарит академика Александра Борисовича Куржанского за критические замечания к работе и к выступлениям автора в рамках научного семинара «Прикладные задачи системного анализа».

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-01-00261-а и 12-01-31416-мол-а) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2239.2012.1).

Структура диссертации

Диссертация состоит из трех глав.

В **главе 1** рассмотрены различные способы построения быстрых управлений, приближающих импульсные управления, которые допускают наличие дельта-функции и её производных. В начале главы формализованы понятия импульсного и обобщённого управления, а также понятия решения системы дифференциальных уравнений с импульсными и обобщёнными управлениями.

В **главе 2** для задачи импульсного управления при неопределённости исследуются свойства функции цены в задаче синтеза. Доказан принцип оптимальности. Доказано, что функция цены синтеза удовлетворяет неравенству типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса.

В **главе 3** для задачи импульсного управления при неопределённости предложен численный алгоритм построения синтеза управления, основанный на аппроксимации функции цены в задаче с коррекциями.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1

Аппроксимация импульсных и обобщённых управлений физически реализуемыми быстрыми управлениями

1.1 Введение

Целью главы 1 является рассмотрение различных способов построения быстрых управлений, приближающих импульсные управления, которые допускают наличие дельта-функции и её производных. В начале главы формализованы понятия импульсного и обобщённого управления, а также понятия решения системы дифференциальных уравнений с импульсными и обобщёнными управлениями. Приведены примеры аппроксимаций дельта-функции в виде дельтообразных последовательностей. Затем поставлены задачи поиска аппроксимаций дельта-функции и её производных с минимальным модулем, а также k раз непрерывно дифференцируемых аппроксимаций с минимальным модулем k -ой производной. Для данных задач найден вид аппроксимаций и исследованы их свойства.

1.1.1 Обобщённые функции, основные понятия

Приведём определения обобщённых функций в одномерном и многомерном случаях и другие понятия, необходимые в дальнейшем.

Будем рассматривать пространство основных функций $D_k[\alpha, \beta]$, состоящее из k раз дифференцируемых функций $\xi(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем из интервала (α, β) . Также будем рассматривать $D_{k,m}[\alpha, \beta]$ — пространство k раз дифференцируемых функций $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ с компактным носителем из интервала (α, β) .

На пространстве $D_k[\alpha, \beta]$ зададим норму $\mathcal{G}(\xi)$, в виде

$$\mathcal{G}(\xi) = \max_t \gamma \left(\gamma_1 \left(\xi(t) \right), \dots, \gamma_1 \left(\frac{d^k \xi}{dt^k} \right) \right), \quad (1.1)$$

где γ — некоторая норма $(k+1)$ -вектора, каждая из компонент которого представляет собой норму функции $\frac{d^j \xi}{dt^j}$, $j = 0, \dots, k$.

Обобщённой функцией (распределением) f называется линейный непрерывный функционал $\langle f, \xi \rangle$, определённый на пространстве основных функций $D_k[\alpha, \beta]$ [7, 34]. Формально его можно записать в виде

$$\langle f(t), \xi(t) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \xi(t) dt. \quad (1.2)$$

Пространство всех обобщённых функций над пространством основных функций $D_k[\alpha, \beta]$ назовем $D_k^*[\alpha, \beta]$. В пространстве обобщённых функций введём норму $\mathcal{G}^*$, сопряжённую к норме $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^*[f] = \sup_{\mathcal{G}[\xi]=1} |\langle f, \xi \rangle|,$$

где $\xi \in D_k[\alpha, \beta]$ [17, 24].

В многомерном случае на пространстве $D_{k,m}[\alpha, \beta]$ норма $\mathcal{G}(\xi)$ задается аналогично (1.1):

$$\mathcal{G}(\xi) = \max_t \gamma \left(\gamma_1 \left(\xi(t) \right), \dots, \gamma_1 \left(\frac{d^k \xi}{dt^k} \right) \right),$$

только здесь γ_1 — это нормы m -векторов $\frac{d^j \xi}{dt^j}$, $j = 0, \dots, k$.

Обобщённой функцией (распределением) $f = (f_1, \dots, f_m)$ называется линейный непрерывный функционал $\langle f, \xi \rangle$, определенный на пространстве основных функций $D_{k,m}[\alpha, \beta]$, каждая компонента которого является обобщённой функцией из $D_k^*[\alpha, \beta]$. Обозначим через $D_{k,m}^*[\alpha, \beta]$ пространство всех обобщённых функций над пространством основных функций $D_{k,m}[\alpha, \beta]$. При этом формальную запись многомерной обобщённой функции $\langle f, \xi \rangle$ в виде (1.2) понимают как набор m равенств

$$\langle f_i(t), \xi_i(t) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f_i(t) \xi_i(t) dt$$

для $i = 1 \dots m$. В пространстве многомерных обобщённых функций действует норма

$$\mathcal{G}^*[f] = \sup_{\mathcal{G}[\xi]=1} |\langle f, \xi \rangle|, \quad (1.3)$$

где $\xi \in D_{k,m}[\alpha, \beta]$.

Обобщённой производной j -ого порядка, $j = 1 \dots k$, от обобщённой функции $f \in D_k^*[\alpha, \beta]$ называется функционал

$$\langle f^{(j)}(t), \xi(t) \rangle = (-1)^j \langle f(t), \xi^{(j)}(t) \rangle.$$

Обобщённая функция $f \in D_k^*[\alpha, \beta]$ имеет обобщённые производные до k -ого порядка, которые также являются обобщёнными функциями.

Пусть $a(t)$ — k раз непрерывно дифференцируемая в обычном смысле функция. Тогда произведение распределения f на функцию a определяется по формуле

$$\langle af, \xi \rangle = \langle f, a\xi \rangle.$$

В дальнейшем нам понадобится представление обобщённых функций через функции ограниченной вариации. Введём необходимые понятия.

Полной вариацией одномерной функции $F(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называется

$$\text{Var}_{[\alpha, \beta]} F(t) = \sup_{\substack{I \\ \{\tau_i\}}} \sum_{i=1}^I |F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})|,$$

где внутренний супремум берется по всем разбиениям $\{\tau_i\}_{i=1}^I$ отрезка $[\alpha, \beta]$.

В многомерном случае *полной вариацией* векторной функции $F(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ называется

$$\text{Var } F(t) = \sup_{[\alpha, \beta]} \sup_I \sum_{i=1}^I \gamma^*(F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})), \quad (1.4)$$

где γ^* — сопряжённая норма к норме γ m -вектора F , и внутренний супремум берётся по всем разбиениям $\{\tau_i\}_{i=1}^I$ отрезка $[\alpha, \beta]$.

Пусть $F_j(t) \in BV([\alpha, \beta])$, $j = 0, \dots, k$ — функции ограниченной вариации. Известно [1, 7], что любое распределение $f \in D_k^*[\alpha, \beta]$ представимо в виде:

$$\langle f, \xi \rangle = \sum_{j=0}^k \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^j \xi}{dt^j} dF_j(t).$$

Причём, если носителем распределения f является отрезок $[t_0, t_1]$, такой что $\alpha < t_0 \leq t_1 < \beta$, то компоненты F_j принимают постоянные значения на интервалах $\alpha \leq t \leq t_0$ и $t_1 < t < \beta$. Таким образом,

$$f = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1} F_j}{dt^{j+1}}. \quad (1.5)$$

В многомерном случае любое распределение $f \in D_{k,m}^*[\alpha, \beta]$ представимо в виде [7]:

$$\langle f, \xi \rangle = \sum_{j=0}^k \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^j \xi}{dt^j} dF_j(t), \quad (1.6)$$

где $F_j \in BV([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^m)$, т.е. это функции ограниченной вариации со значениями из $\mathbb{R}^m$. Причём если носителем распределения f является отрезок $[t_0, t_1]$, такой что $\alpha < t_0 \leq t_1 < \beta$, то компоненты F_j принимают постоянные значения на интервалах $\alpha \leq t \leq t_0$ и $t_1 < t < \beta$.

Таким образом, многомерная функция f представима через функцию ограниченной вариации:

$$f = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1} F_j}{dt^{j+1}},$$

однако, в отличие от (1.5), здесь F_j — m -векторные функции.

Пользуясь представлением (1.6), сопряжённую норму $\mathcal{G}^*[f]$ (1.3) можно записать в виде

$$\mathcal{G}^*[f] = \sup_I \sup_{\{\tau_i\}} \sum_{i=1}^I \gamma^* \left(\gamma_1^* \left(\frac{dF_0}{dt}(\tau_i) - \frac{dF_0}{dt}(\tau_{i-1}) \right), \dots, \gamma_1^* \left(\frac{d^{k+1} F_k}{dt^{k+1}}(\tau_i) - \frac{d^{k+1} F_k}{dt^{k+1}}(\tau_{i-1}) \right) \right) \quad (1.7)$$

где внутренний супремум берется по всем разбиениям $\{\tau_i\}_{i=1}^I$ отрезка $[t_0, t_1]$: $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_I = t_1$. Здесь функции F_j — m -векторные функции ограниченной вариации из (1.6), γ^* и γ_1^* — сопряжённые нормы к нормам γ и γ_1 соответственно.

Сопряжённая норма $\mathcal{G}^*$ является аналогом полной вариации функции, в том смысле, что она также может быть использована как характеристика интенсивности управления.

Норму γ можно определять различными способами, например как евклидову норму $\gamma(F) = (\sum_{\nu=1}^m F_\nu^2)^{1/2}$ или $\gamma(F) = \max_{\nu} |F_\nu|$. Если положить нормы γ и γ_1 равными

$$\gamma(y) = \max_{0 \leq j \leq k} |y_j|, \quad \gamma_1(z) = \max_{1 \leq \nu \leq m} |z_\nu|, \quad (1.8)$$

то сопряжённые к ним нормы γ^* и γ_1^* будут определяться выражениями

$$\gamma^*(y) = \sum_{j=0}^k |y_j|, \quad \gamma_1^*(z) = \sum_{\nu=1}^m |z_\nu|. \quad (1.9)$$

Рассмотрим ещё одну операцию над обобщёнными функциями. Пусть носителем обобщённой функции f является отрезок $[t_0, t_1] \subset [\alpha, \beta]$. Для произвольного $t \in [\alpha, \beta]$ под символом интеграла с переменным верхним пределом $\int_{t_0}^t f(\theta) d\theta$, согласно [7, 30], понимается следующее:

$$\left\langle \int_{t_0}^t f(\theta) d\theta, \xi(t) \right\rangle = \left\langle f(t), \int_t^\beta \xi(\theta) d\theta \right\rangle, \quad (1.10)$$

где $\xi(t)$ — любой элемент пространства $D_{k,n}[\alpha, \beta]$.

Действительно, рассмотрим левую часть (1.10):

$$\left\langle \int_{t_0}^t f(\theta) d\theta, \xi(t) \right\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{t_0}^t f(\theta) d\theta \right) \xi(t) dt = \int_{\alpha}^{t_0} \left(- \int_t^{t_0} f(\theta) d\theta \right) \xi(t) dt + \int_{t_0}^{\beta} \left(\int_{t_0}^t f(\theta) d\theta \right) \xi(t) dt$$

После изменения порядка интегрирования получаем:

$$\left\langle \int_{t_0}^t f(\theta) d\theta, \xi(t) \right\rangle = \int_{\alpha}^{t_0} \left(- f(\theta) \int_{\theta}^{t_0} \xi(t) dt \right) d\theta + \int_{t_0}^{\beta} \left(f(\theta) \int_{\theta}^{\beta} \xi(t) dt \right) d\theta,$$

где в правой части первый интеграл обращается в ноль, поскольку носителем распределения f является отрезок $[t_0, t_1] \subset [\alpha, \beta]$. По той же причине во втором слагаемом можно расширить пределы внешнего интеграла на весь отрезок $[\alpha, \beta]$. Таким образом,

$$\left\langle \int_{t_0}^t f(\theta) d\theta, \xi(t) \right\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\theta) \int_{\theta}^{\beta} \xi(t) dt \right) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(t) \int_t^{\beta} \xi(\theta) d\theta \right) dt = \left\langle f(t), \int_t^{\beta} \xi(\theta) d\theta \right\rangle,$$

что соответствует (1.10).

Среди обобщённых функций мы будем рассматривать, в том числе, функционалы определённого вида — дельта-функцию и её производные.

Дельта-функцией $\delta(t)$ называется функционал, действующий по правилу

$$\langle \delta(t), \xi(t) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t) \xi(t) dt = \xi(0)$$

для любой основной функции $\xi(\cdot) \in D_k[\alpha, \beta]$. Также введём «сдвинутую» дельта-функцию, действующую по правилу

$$\langle \delta(t - \tau), \xi(t) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - \tau) \xi(t) dt = \xi(\tau).$$

Сформулируем некоторые важные свойства, которые будут использоваться в дальнейшем.

- Дельта-функция равна нулю в окрестности любой точки, не равной 0: $\langle \delta(t), \xi(t) \rangle = 0$ для любой основной функции $\xi(t)$, такой что

$$\begin{cases} \xi(t) = 0, & \text{при } t \in \mathcal{B}_{\varepsilon}(0), \\ \xi(t) \neq 0, & \text{при } t \in [\alpha, \beta] \setminus \mathcal{B}_{\varepsilon}(0), \end{cases}$$

где $\mathcal{B}_{\varepsilon}(0)$ — произвольная ε -окрестность нуля.

- Дельта-функция является обобщённой производной функции Хевисайда $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ то есть $\delta(t) = \frac{d\chi(t)}{dt}$.
- Обобщённые производные дельта-функции вычисляются по правилу

$$\langle \delta^{(j)}(t), \xi(t) \rangle = (-1)^j \xi^{(j)}(0), \quad j = 1, \dots, k.$$

1.1.2 Линейные системы с импульсным управлением

Задачи импульсного управления для линейной системы без неопределённости рассматривались в работах [16, 17, 19, 55] в классе программных управлений, в классе управлений с обратной связью в работах [11, 52] и других работах. Приведём постановку задачи и некоторые известные результаты.

Рассматривается линейная система

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.11)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, управление $U(t) \in BV([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ — m -векторная функция ограниченной вариации. Будем считать функции ограниченной вариации непрерывными слева.

Выражение (1.11) понимается как формальная запись того, что движение системы описывается равенством

$$x(t+0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t+0} X(t, \tau)B(\tau)dU(\tau), \quad (1.12)$$

в котором интеграл по управлению понимается в смысле интеграла Стильтьеса [28]. Здесь $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения. $X(t, \tau)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial X(t, \tau)}{\partial t} = A(t)X(t, \tau), \quad X(\tau, \tau) = E, \quad (1.13)$$

где $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Решение $x(t)$ (1.12) представляет собой непрерывную слева функцию ограниченной вариации.

Задача импульсного управления для уравнения (1.11) была исследована в основополагающей работе [17] в следующей постановке:

Задача 1.1. *На траекториях системы*

$$\begin{aligned} dx(t) &= A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x(t_1 + 0) = x^1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

минимизировать функционал

$$J(U) = \text{Var}_{[t_0, t_1 + 0)} U(\cdot).$$

Фазовая переменная $x \in \mathbb{R}^n$, управление $U(\cdot) \in BV[t_0, t_1]$ принадлежит классу функций ограниченной вариации (управление одномерное). Задача рассматривается в классе программных управлений, то есть, управлений $U(\cdot)$, зависящих от времени.

Определение 1.1. *Допустимым управлением $U(\cdot)$ в задаче 1.1 называется такая функция из $BV[t_0, t_1]$, при которой решение $x(\cdot)$ (1.12) удовлетворяет краевым условиям (1.14).*

Подобные задачи естественным образом возникают при рассмотрении задач управления при условии минимума импульса управляющей силы. Приведём пример из работы [17]. Пусть движение системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$

Управление u имеет смысл действующей силы. В качестве возможных управлений рассматриваются кусочно-непрерывные функции. Требуется на траекториях данной системы минимизировать функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(\tau)| d\tau \rightarrow \min, \quad (1.15)$$

если u — скалярное управление. В векторном случае функционал можно записать как

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma^*(u(\tau)) d\tau \rightarrow \min, \quad (1.16)$$

где γ^* — некоторая норма вектора u . Оказывается [17], что задача не имеет решений в указанном классе кусочно-непрерывных управлений. Минимум функционала (1.15) или (1.16) достигается на управлениях u , содержащих в качестве слагаемых мгновенные ударные воздействия, формализуемые дельта-функцией $\delta(t)$ [7, 34]. Поэтому переходят к задаче вида 1.1, рассматривая в качестве управляющего воздействия функции ограниченной вариации, а в качестве критерия оптимальности — вариацию управляющего воздействия.

Известно [17], что для вполне управляемой системы в задаче 1.1 среди оптимальных управляющих воздействий в классе программных управлений есть управления вида

$$u(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \sum_{j=1}^r p^{(j)} \delta(t - \tau_j),$$

где $p^{(j)}$ — m -векторы, определяющие направление ударного воздействия на систему в моменты τ_j , а общее количество импульсов r не превышает размерность фазового вектора $r \leq n$.

1.1.3 Линейные системы с обобщённым управлением

В разделе 1.1.1 введены основные понятия, касающиеся обобщённых управлений. Приведём постановку задачи с обобщённым управлением [24]. Будем рассматривать пространство основных функций $D_{k,n}[\alpha, \beta]$ и отрезок времени $[t_0, t_1] \subset [\alpha, \beta]$. Введём начальное и конечное распределения $f^{(\alpha)}$ и $f^{(\beta)}$ из пространства $D_{k,n}^*[\alpha, \beta]$, сосредоточенные в точках t_0 и t_1 соответственно. Их можно представить в виде

$$f^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^k \alpha_j \delta^{(j)}(t - t_0), \quad f^{(\beta)} = \sum_{j=0}^k \beta_j \delta^{(j)}(t - t_1), \quad (1.17)$$

где некоторые коэффициенты из $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$ и $\beta_j \in \mathbb{R}^n$ могут обращаться в ноль.

Будем рассматривать уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}. \quad (1.18)$$

Определение 1.2. Допустимым управлением u для системы (1.18) называется такое распределение из $D_{k,m}^*[\alpha, \beta]$ с носителем на отрезке $[t_0, t_1]$, где $\alpha < t_0 \leq t_1 < \beta$, при котором существует распределение $x \in D_{k-1,n}^*[\alpha, \beta]$ с носителем на отрезке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющее уравнению (1.18) в смысле распределений, то есть:

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \xi(t) \right\rangle = \left\langle A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}, \xi(t) \right\rangle, \quad \forall \xi(t) \in D_{k,n}[\alpha, \beta]$$

или, по свойству обобщённой производной,

$$-\left\langle x, \frac{d\xi(t)}{dt} \right\rangle = \left\langle A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}, \xi(t) \right\rangle, \quad \forall \xi(t) \in D_{k,n}[\alpha, \beta].$$

Будем в дальнейшем предполагать, что матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ являются k раз дифференцируемыми на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$.

Теорема 1.1. [24] Пусть u — допустимое управление уравнения (1.18). Тогда распределение

$$x = \int_{t_0}^t X(t, \theta) [B(\theta)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}] d\theta,$$

где $X(t, \theta)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1.13), является единственным решением уравнения (1.18). Здесь интеграл с переменным верхним пределом от распределения понимается в смысле (1.10).

В работе [24] исследована следующая задача в классе программных обобщённых управлений:

Задача 1.2. Среди допустимых управлений системы (1.18) найти управление, доставляющее минимум функционалу

$$J(u) = \mathcal{G}^*[u], \quad (1.19)$$

где $\mathcal{G}^*[u]$ — норма вида (1.7).

Авторами получен следующий результат: если задача 1.2 разрешима, то среди оптимальных обобщённых управлений будет управление вида

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^k p_{ij} \delta^{(j)}(t - \tau_i),$$

где $p_{ij} \in \mathbb{R}^m$ — векторы, определяющие направление ударных воздействий $\delta^{(j)}$ в моменты τ_i , а общее число моментов времени r , в которые применяется обобщённый импульс $\sum_{j=0}^k p_{ij} \delta^{(j)}(t - \tau_i)$, не превышает размерность системы, то есть $r \leq n$.

Кроме того, при определённом выборе норм γ, γ_1 , определяющих $\mathcal{G}^*[u]$ в (1.19), количество импульсов оптимального воздействия можно уменьшить, а именно, если рассматривать нормы γ, γ^* вида (1.8), (1.9), то количество векторов p_{ij} , отличных от нуля, может быть не более n . Если дополнительно положить нормы γ_1, γ_1^* равными соответствующим нормам в (1.8), (1.9), тогда в каждом из этих векторов p_{ij} будет лишь одна ненулевая координата. Это означает, что в последнем случае число скалярных импульсов не превышает n [17, 19].

В работе [24] показано, что задачу с обобщённым управлением можно свести к задаче с импульсными управлениями. Для этого вводятся матричные функции $L_j(t)$ при помощи рекуррентных соотношений:

$$L_0(t) = B(t), \quad L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - \frac{dL_{j-1}(t)}{dt}, \quad j = 1 \dots k$$

и формируется матрица

$$\mathbf{B}(t) = (L_0(t) \quad L_1(t) \quad \dots \quad L_k(t)). \quad (1.20)$$

Также вводятся функции $L_{A,j}(t)$:

$$L_{A,0}(t) = E, \quad L_{A,j}(t) = A(t)L_{A,j-1}(t) - \frac{dL_{A,j-1}(t)}{dt}, \quad j = 1 \dots k, \quad (1.21)$$

где E — единичная матрица соответствующего размера. Начальная и конечная точки траектории определяются как

$$x^0 = x(t_0) = \sum_{j=0}^k L_{A,j}(t_0)\alpha_j, \quad x^1 = x(t_1) = \sum_{j=0}^k L_{A,j}(t_1)\beta_j. \quad (1.22)$$

Тогда для решения задачи 1.2 следует решить следующую задачу [24]:

Задача 1.3. Для системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 \quad (1.23)$$

найти управление $U(\cdot)$ из класса функций ограниченной вариации $BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{m(k+1)})$, минимизирующее функционал

$$J(U) = \text{Var}_{[t_0, t_1+0)} U(\cdot),$$

где

$$U(t) = (U_0^T(t) \ U_1^T(t) \ \dots \ U_k^T(t))^T. \quad (1.24)$$

Параметры $\mathbf{B}(t)$, x^0 , x^1 системы (1.23) определяются через параметры исходной задачи 1.2 по формулам (1.20), (1.22). В функционале задачи $\text{Var}_{[t_0, t_1+0)} U(\cdot)$ — полная вариация вида (1.4).

Тогда обобщённое управление исходной задачи 1.2 можно получить из представления обобщённой функции через функции ограниченной вариации (1.5):

$$u = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1}U_j(t)}{dt^{j+1}}, \quad (1.25)$$

где $U_0, \dots, U_k$ — компоненты управления (1.24), полученного в задаче 1.3.

1.1.4 Линейные системы с импульсным управлением при неопределённости

Введём в уравнение (1.11) помеху (неопределённость) $v(t) \in \mathbb{R}^q$ из класса функций $L_\infty[t_0, t_1]$, т. е. измеримых, почти всюду ограниченных функций. Пусть $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, где $\mathcal{Q}(t)$ — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$. Многозначное отображение $\mathcal{Q}(t)$ полунепрерывно сверху в метрике Хаусдорфа.

Рассмотрим импульсную систему уравнений с неопределённостью

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t) + C(t)v(t)dt, \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.26)$$

Выражение (1.26) понимается как формальная запись того, что $x(t)$ определяется формулой

$$x(t+0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t+0} X(t, \tau)B(\tau)dU(\tau) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau, \quad (1.27)$$

где интеграл, в который входит помеха — это интеграл Лебега, а интеграл по управлению понимается в смысле интеграла Стильтьеса [28]. $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица (1.13).

При известной реализации управления и помехи траектория системы (1.26) $x(t)$ будет функцией ограниченной вариации.

1.1.5 Линейные системы с обобщённым управлением при неопределённости

Будем рассматривать уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)} \quad (1.28)$$

и функционал

$$J(u) = \mathcal{G}^*[u], \quad (1.29)$$

где $\mathcal{G}^*[u]$ — норма вида (1.7). Цель управления — на траекториях системы (1.28) минимизировать функционал (1.29), несмотря на наличие неопределённости $v(\cdot)$. Функция $v(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям, описанным в разделе 1.1.4.

Мы предполагаем, как и в разделе 1.1.3, что x — распределение из пространства $D_{k-1,n}^*[\alpha, \beta]$, управление u — распределение из $D_{k,m}^*[\alpha, \beta]$ с носителем на отрезке $[t_0, t_1]$, где $\alpha < t_0 \leq t_1 < \beta$. Распределения $f^{(\alpha)}$ и $f^{(\beta)}$ определяются формулами (1.17). Матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ являются k раз дифференцируемыми на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$.

Определение 1.3. *Допустимым управлением u для системы (1.28) при известной реализации помехи $v(t)$ называется такое распределение из $D_{k,m}^*[\alpha, \beta]$ с носителем на отрезке $[t_0, t_1]$, где $\alpha < t_0 \leq t_1 < \beta$, при котором существует распределение $x \in D_{k-1,n}^*[\alpha, \beta]$ с носителем на отрезке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющее уравнению (1.28) в смысле распределений, то есть:*

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \xi(t) \right\rangle = \left\langle A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}, \xi(t) \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} C(t)v(t)\xi(t)dt, \quad \forall \xi(t) \in D_{k,n}[\alpha, \beta],$$

где интеграл по помехе понимается в смысле интеграла Лебега.

Теорема 1.2. [24] Пусть u — допустимое управление уравнения (1.28). Тогда распределение

$$x = \int_{t_0}^t X(t, \theta)[B(\theta)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)}]d\theta + \int_{t_0}^t X(t, \theta)C(\theta)v(\theta)d\theta$$

является единственным решением уравнения (1.28). Здесь $X(t, \theta)$ — фундаментальная матрица (1.13).

Покажем, что задачу с обобщённым управлением при неопределённости (1.28), (1.29) можно свести к задаче с импульсными управлениями при неопределённости следующего вида:

Задача 1.4. Для системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t) + C(t)v(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad (1.30)$$

найти управление $U(\cdot)$ из класса функций ограниченной вариации $BV([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{m(k+1)})$, минимизирующее функционал

$$J(U) = \text{Var}_{[t_0, t_1+0)} U(\cdot),$$

где

$$U(t) = (U_0^T(t) \ U_1^T(t) \ \dots \ U_k^T(t))^T. \quad (1.31)$$

Параметры $\mathbf{B}(t)$, x^0 , x^1 системы (1.30) определяются через параметры исходной задачи 1.3 по формулам (1.20), (1.22). В функционале задачи $\text{Var}_{[t_0, t_1+0)} U(\cdot)$ — полная вариация вида (1.4).

При этом обобщённое управление исходной задачи (1.28), (1.29) можно получить из представления обобщённой функции через функции ограниченной вариации (1.5):

$$u = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1} U_j(t)}{dt^{j+1}}, \quad (1.32)$$

где $U_0, \dots, U_k$ — компоненты управления (1.31), полученного в задаче 1.4.

Теорема 1.3. Пусть распределение x является решением уравнения (1.28) при известном допустимом управлении u и реализации помехи $v(\cdot)$. Тогда оно совпадает с решением уравнения (1.30), полученном при траекториях управления $U(\cdot)$, соответствующих представлению обобщённого управления через функции ограниченной вариации (1.32).

Доказательство. В [24] показано, что решение задачи (1.28), (1.29) совпадает с решением задачи для системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t) \quad (1.33)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1 - \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, s)C(s)v(s)ds$$

и функционалом

$$J(U) = \text{Var}_{[t_0, t_1+0)} U(\cdot).$$

В (1.33) выполним замену переменных $y(t) = x(t) + \int_{t_0}^t X(t, s)C(s)v(s)ds$. Тогда

$$\begin{aligned} dy(t) &= dx(t) + C(t)v(t)dt + \int_{t_0}^t A(t)X(t, s)C(s)v(s)dsdt = A(t)y(t)dt - \\ &- A(t) \int_{t_0}^t X(t, s)C(s)v(s)dsdt + \mathbf{B}(t)dU(t) + C(t)v(t)dt + \int_{t_0}^t A(t)X(t, s)C(s)v(s)dsdt = \\ &= A(t)y(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t) + C(t)v(t)dt. \end{aligned}$$

Начальные условия переходят в $y(t_0) = x^0$, $y(t_1) = x^1$. Таким образом, мы получили, что $y(t)$ является решением задачи 1.4. $\square$

Теперь сформулируем задачу обобщённого управления при неопределённости в другом виде, который будет использоваться в дальнейшем. Будем рассматривать уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t) + f^{(\alpha)} \quad (1.34)$$

и функционал

$$J(u, f^{(\beta)}) = \mathcal{G}^*[u] + \Phi(f^{(\beta)}) \rightarrow \min, \quad (1.35)$$

где $\mathcal{G}^*[u]$ — норма вида (1.7), $\Phi(\cdot)$ — некоторая собственная, выпуклая, замкнутая функция.

Введём $\varphi(x) = \min \left\{ \Phi(f^{(\beta)}) \mid \sum_{j=0}^k L_{A,j}(t_\beta)\beta_j = x \right\}$, где $L_{A,j}$ определяются соотношениями (1.21). Из предыдущих рассуждений следует, что для решения задачи (1.34), (1.35) следует перейти к задаче

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + \mathbf{B}(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.36)$$

с функционалом

$$J(U(\cdot), x(t_1 + 0)) = \underset{[t, t_1+0]}{\text{Var}} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \rightarrow \min. \quad (1.37)$$

1.1.6 Быстрые управления

Как было отмечено в предыдущих разделах, при решении задачи с обобщёнными управлениями реализация управления может представлять собой линейную комбинацию дельта-функции и её производных

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^k p_{ij} \delta^{(j)}(t - \tau_i). \quad (1.38)$$

Рассматриваемые импульсные и обобщённые управления представляют собой *мгновенные* воздействия на систему. *Быстрыми управлениями* называют ограниченные аппроксимации импульсных управлений, воздействующие на систему в течение *малого* времени.

Пусть $\Delta_{h_{ij}}^j(t - \tau_i)$ — аппроксимация производной дельта-функции $\delta^{(j)}(t - \tau_i)$, действующая на отрезке $[\tau_i - h_{ij}, \tau_i + h_{ij}]$, то есть на этом отрезке аппроксимация не равна нулю. Тогда будем аппроксимировать импульсное управление (1.38) быстрым управлением вида

$$u_\Delta(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^k u_{h_{ij}} \Delta_{h_{ij}}^j(t - \tau_i), \quad (1.39)$$

где коэффициенты h_{ij} и $u_{h_{ij}}$, а также вид функций $\Delta_{h_{ij}}^j(t)$ являются параметрами быстрого управления. Параметры подбираются в зависимости от конкретной задачи: например, это может быть ограничение на суммарное время, когда управление (1.39) не нулевое, либо ограничение на норму управления $\max_t \|u_\Delta(t)\|$ и др. Также могут предъявляться различные требования на построение самих аппроксимаций $\Delta_{h_{ij}}^j$ дельта-функции и её производных, в частности, на аппроксимации $\Delta_{h_{ij}}^j$ могут быть наложены условия непрерывности, гладкости,

гладкости их производных до некоторого порядка. Аппроксимации дельта-функции можно получить при помощи дельтообразных последовательностей [7].

Последовательность функций $f_\nu(t)$ называют *дельтообразной последовательностью*, если выполняются следующие два условия:

1. Для любого $M > 0$: $|\int_a^b f_\nu(t)dt| \leq C_M$ сразу для всех ν , при любых $|a| \leq M$, $|b| \leq M$, где C_M — некоторая константа, не зависящая от a , b , ν .
2. При любых $a \neq 0$, $b \neq 0$:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{при } a < b < 0 \text{ и } 0 < a < b, \\ 1, & \text{при } a < 0 < b. \end{cases}$$

Примером дельтообразной последовательности могут быть функции [7]:

$$f_\nu(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{t^2 + \nu^2}.$$

Можно показать, что

$$f_\nu(t) \rightarrow \delta(t) \text{ при } \nu \rightarrow \infty \quad (1.40)$$

При дифференцировании $f_\nu(t)$ получаются дельтообразные последовательности, сходящиеся к производным дельта-функции. Например,

$$f'_\nu(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu t}{(t^2 + \nu^2)^2} \rightarrow \delta'(t) \text{ при } \nu \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

В (1.40) и (1.41) сходимость понимается в смысле обобщённых функций, то есть

$$\begin{aligned} \int_a^b f_\nu(t)\xi(t)dt &\rightarrow \int_\alpha^\beta \delta(t)\xi(t)dt = \xi(0), \\ \int_a^b f'_\nu(t)\xi(t)dt &\rightarrow \int_\alpha^\beta \delta'(t)\xi(t)dt = -\xi'(0), \end{aligned} \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty$$

для любой $\xi(t) \in D_k[\alpha, \beta]$, т.е. k раз непрерывно дифференцируемой функции с компактным носителем на интервале (α, β) . Предполагается, что $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$.

В работе [52] было предложено использовать следующие аппроксимации $\Delta_h^n(t)$ дельта-функции и её производных:

$$\begin{cases} \Delta_h^0(t) = \frac{1}{2h} I_{[-h, h]}(t), \\ \Delta_h^n(t) = \frac{1}{2h} (\Delta_h^{n-1}(t+h) - \Delta_h^{n-1}(t-h)), \quad n = 1..k. \end{cases} \quad (1.42)$$

Здесь $I_{[-h, h]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [-h, h] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Подразумевается, что h — достаточно малая величина. На рисунке 1.1 показаны аппроксимации (1.42) дельта-функции и её производных.

При данном способе построения аппроксимаций дельта-функции и её производных никакие ограничения на модуль управления или длительность воздействия не накладывались. В

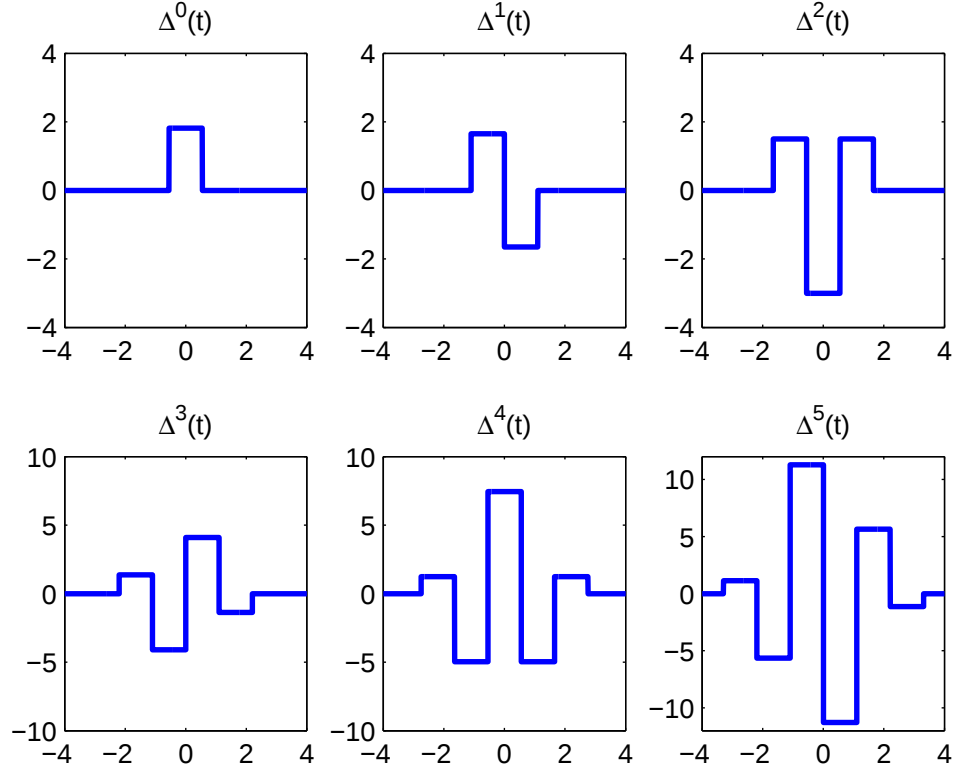


Рис. 1.1: Аппроксимации (1.42) дельта-функции и ее производных до 5-ого порядка, $h = 0.55$.

полученной аппроксимации и модуль $\max_t |\Delta_h^n(t)|$, и общая длительность T быстрого управления, то есть промежуток времени, когда оно не равно нулю, возрастают при увеличении n — порядка производной дельта-функции, а именно:

$$\begin{cases} T = 2h(n+1), \\ \max_t |\Delta_h^n(t)| = \frac{C + O(h)}{h^{n+1}}, \end{cases}$$

где C — некоторая постоянная, $0 < h < 1$. Также следует отметить, что аппроксимация n -ой производной дельта-функции $\Delta_h^n(t)$ подразумевает n переключений ограниченного управления с положительного на отрицательное значение или наоборот. Управление из приведённого примера обладает довольно простой структурой и линейным ростом количества переключений в зависимости от степени производной дельта-функции, однако ни модуль ни длительность управления не зафиксированы, что может сделать его неудобным для применения в задачах с ограниченным временным отрезком или силой воздействия.

1.2 Разрывные аппроксимации с минимальным модулем

Как правило, интервал времени, на котором рассматривается задача управления, ограничен, хотя он может и не быть зафиксированным заранее, как например в задаче быстрогодействия. Поэтому естественным требованием, накладываемым на быстрые управления, является огра-

ниченность отрезка времени, на котором действует управление. В свою очередь это позволяет поставить задачу определения аппроксимаций дельта-функции и её производных, действующих на ограниченном отрезке. С другой стороны, ресурсы управления в любой практической задаче также ограничены, поэтому для практических задач имеет смысл искать аппроксимации с наименьшим модулем.

Результаты, приведённые в данном разделе, опубликованы автором в работе [60] в соавторстве с научным руководителем А. Н. Дарьиным. В данной работе научному руководителю принадлежит постановка задачи 1.5 и её сведение к проблеме моментов (1.43), (1.44). Доказательства принадлежат автору диссертации.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.5. *Найти аппроксимацию $\Delta_h^n(t)$ n -ой производной дельта-функции $\delta^{(n)}(t)$ на отрезке $[-h, h]$ с минимальным модулем аппроксимации, $n \geq 0$.*

Задача может быть записана в виде проблемы моментов [3, 17] следующего вида.

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \inf, \\ |\Delta_h^n(t)| \leq \mu, \quad t \in [-h, h], \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) t^j dt = 0, \quad j = 0 \dots n-1, \\ \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) t^n dt = (-1)^n n! \end{cases} \quad (1.44)$$

В (1.43) $\Delta_h^n(t)$ обозначает аппроксимацию $\delta^{(n)}(t)$, действующую на отрезке $[-h, h]$, то есть, отличную от нуля на этом отрезке. Дополнительные ограничения (1.44) обеспечивают сходимость аппроксимации к дельта-функции или её производным.

Теорема 1.4. *Решение задачи 1.5, сформулированной в виде проблемы моментов (1.43), (1.44), можно представить в виде*

$$\Delta_h^n(t) = \frac{1}{4}(-1)^n n! \left(\frac{2}{h}\right)^{n+1} \text{sign} U_n \left(\frac{t}{h}\right), \quad (1.45)$$

где $U_n(\cdot)$ — многочлен Чебышева второго рода: $U_n(s) = \cos(n \cdot \arccos s)$ [31]. Полученная функция $\Delta_h^n(t)$ является аппроксимацией n -ой производной дельта-функции $\delta^{(n)}(t)$ с минимальным модулем аппроксимации при фиксированном отрезке времени $[-h, h]$, $n \geq 0$.

Доказательство. Функция $\Delta_h^n(t)$ определена на отрезке $t \in [-h, h]$. Выполним замену переменных $s = \frac{t}{h}$. Тогда новая независимая переменная $s \in [-1, 1]$. Представим $\Delta_h^n(t)$ в виде

$$\Delta_h^n(t) = (-1)^n n! h^{-(n+1)} \Delta^n \left(\frac{t}{h}\right).$$

Тогда функция $\Delta^n(s)$ будет решением задачи

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \inf, \\ |\Delta^n(s)| \leq \mu, \quad s \in [-1, 1], \\ \int_{-1}^1 \Delta^n(s) s^j ds = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ \int_{-1}^1 \Delta^n(s) s^n ds = 1. \end{cases}$$

Последняя задача является проблемой моментов:

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \inf, \\ \|\Delta^n(\cdot)\|_{L^\infty[-1,1]} \leq \mu, \\ \langle \Delta^n(\cdot), s^j \rangle = c_j, \quad j = 0, \dots, n, \\ c_0 = \dots = c_{n-1} = 0, \\ c_n = 1. \end{cases} \quad (1.46)$$

Просуммируем третье уравнение в системе (1.46) для всех $j = 0, \dots, n$, предварительно домножив на некоторые коэффициенты p_j . Тогда получим следующее выражение

$$\int_{-1}^1 \Delta^n(s) \left(\sum_{j=0}^n p_j s^j \right) ds = \sum_{j=0}^n p_j c_j.$$

Определим многочлен $P_n(s) = \sum_{j=0}^n p_j s^j$ и перепишем с его помощью полученное выражение

$$\int_{-1}^1 \Delta^n(s) P_n(s) ds = \sum_{k=0}^n p_k c_k.$$

Оценим модуль левой части, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского,

$$\left| \int_{-1}^1 \Delta^n(s) P_n(s) ds \right| \leq \|\Delta^n(\cdot)\|_{L^\infty[-1,1]} \cdot \|P_n(\cdot)\|_{L_1[-1,1]} \leq \mu \|P_n(\cdot)\|_{L_1[-1,1]}.$$

Получим

$$\mu \geq \frac{\sum_{k=0}^n p_k c_k}{\left\| \sum_{j=0}^n p_j s^j \right\|_{L_1[-1,1]}}, \quad \text{для всех } p \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Минимальное μ , удовлетворяющее этому условию, определяется выражением

$$\mu^* = \sup_{p \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{\sum_{k=0}^n p_k c_k}{\left\| \sum_{j=0}^n p_j s^j \right\|_{L_1[-1,1]}}.$$

Так как по условию $c_0 = \dots = c_{n-1} = 0, c_n = 1$, то

$$\mu^* = \sup_{p \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{p_n}{\left\| \sum_{j=0}^n p_j s^j \right\|_{L_1[-1,1]}} = \sup_{p \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\left\| \sum_{j=0}^n (p_j/p_n) s^j \right\|_{L_1[-1,1]}}. \quad (1.47)$$

В (1.47) предполагается, что $p_n \neq 0$, так как в противном случае в числителе будет 0, и очевидно, что при этом супремум по p достигаться не будет.

Пусть супремум в (1.47) достигается на многочлене $P_n^*(s) = \sum_{j=0}^n p_j^* s^j$. Из (1.47) следует, что многочлен $P_n^*(s)$ обладает минимальной нормой в $L_1[-1, 1]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Поэтому он является, с точностью до множителя, многочленом Чебышева второго рода n -ой степени $U_n(s)$. Следовательно, $P_n^*(s) = 2^{-n} U_n(s)$. Норма многочлена Чебышева равна $\|U_n(s)\|_{L_1[-1, 1]} = 2$.

Таким образом,

$$\mu^* = 1 / \left(\|P_n^*(s)\|_{L_1[-1, 1]} \right) = 2^{(n-1)}.$$

После возврата к исходным переменным:

$$\Delta_h^n(t) = (-1)^n n! h^{-(n+1)} \Delta^n \left(\frac{t}{h} \right) = (-1)^n n! h^{-(n+1)} \mu^* \operatorname{sign} P_n^* \left(\frac{t}{h} \right).$$

Окончательно получаем

$$\Delta_h^n(t) = \frac{1}{4} (-1)^n n! \left(\frac{2}{h} \right)^{n+1} \operatorname{sign} U_n \left(\frac{t}{h} \right). \quad (1.48)$$

□

Функция (1.48) является кусочно-постоянной функцией со значениями $\pm \frac{1}{4} n! \left(\frac{2}{h} \right)^{n+1}$. Точки перемены знака определяются нулями многочлена Чебышева $t_k = -h \cos \frac{\pi k}{n+1}$, $k = 0 \dots n+1$ [31]. На рисунке 1.2 показаны аппроксимации (1.48) для дельта-функции и её производных до пятого порядка.

Теорема 1.5. *Условия (1.44) обеспечивают слабую сходимость аппроксимации $\Delta_h^n(t)$ к n -ой производной дельта-функции $\delta^{(n)}(t)$ при стремлении к нулю отрезка времени, на котором действует аппроксимация, а именно*

$$\int_{-h}^h \Delta_h^n(t) \xi(t) dt \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \delta^{(n)}(t) \xi(t) dt = (-1)^n \xi^{(n)}(0), \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

для любой $\xi(t) \in D_k[\alpha, \beta]$, $n \leq k$, т.е. k раз непрерывно дифференцируемой функции с компактным носителем на интервале (α, β) . Предполагается, что $[-h, h] \subset [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Для любой k раз непрерывно дифференцируемой функции $\xi(t)$ справедливо разложение в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^n \xi^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} + O(t^{n+1}), \quad n \leq k.$$

Воспользовавшись условием (1.44), получим

$$\int_{-h}^h \Delta_h^n(t) \xi(t) dt = \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) \left(\sum_{i=0}^n \xi^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} + O(t^{n+1}) \right) dt = \sum_{i=0}^n \frac{\xi^{(i)}(0)}{i!} \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) t^i dt +$$

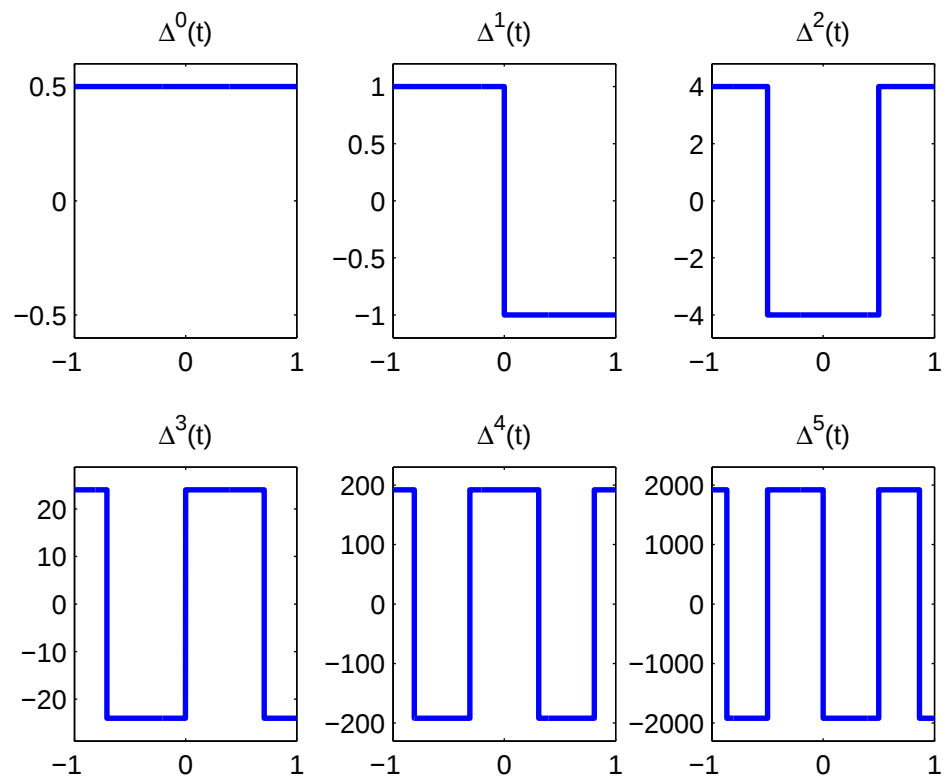


Рис. 1.2: Аппроксимации (1.45) с минимальным модулем на отрезке времени $[-1, 1]$. Вне этого отрезка аппроксимации равны нулю.

$$+ \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) O(t^{n+1}) dt = (-1)^n \xi^{(n)}(0) + \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) O(t^{n+1}) dt.$$

Оценим последнее слагаемое

$$\left| \int_{-h}^h \Delta_h^n(t) O(t^{n+1}) dt \right| \leq \max_{t \in [-h, h]} |\Delta_h^n(t)| \left| \int_{-h}^h O(t^{n+1}) dt \right| \leq \mu \left| \int_{-h}^h O(t^{n+1}) dt \right| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-h}^h \Delta_h^n(t) \xi(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \xi(t) dt = (-1)^n \xi^{(n)}(0), \text{ при } h \rightarrow 0.$$

□

Полученные аппроксимации (1.48) обладают следующими свойствами: время действия аппроксимации T фиксировано $T = 2h$. Модуль аппроксимации $\max_t |\Delta_h^n(t)| = C \frac{2^{n-1}}{h^{n+1}} n!$, где C — некоторая константа. Для реализации $\Delta_h^n(t)$ требуется n переключений управления. Преимущество (1.48) над первоначальными аппроксимациями (1.42) в том, что время действия T стало фиксированным, однако модуль (1.48) аппроксимации растёт быстрее, чем в аппроксимации (1.42).

1.3 Гладкие аппроксимации с минимальным модулем k -ой производной

Результаты, приведённые в данном разделе, опубликованы автором в работе [60] в соавторстве с научным руководителем А. Н. Дарьиным. В данной работе научному руководителю принадлежит постановка задачи 1.6 и её сведение задач к проблеме моментов (1.51). Доказательства принадлежат автору диссертации.

Аппроксимации вида (1.45), описанные в предыдущем разделе, представляют собой кусочно-непрерывные функции. Однако в некоторых задачах целесообразно требовать непрерывности или гладкости управления или даже гладкости производных управления до некоторого порядка. Это позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача 1.6. Найти аппроксимацию $\Delta_{h,k}^n(t)$ n -ой производной дельта-функции $\delta^{(n)}(t)$ на отрезке $[-h, h]$, которая была бы $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируема, с минимальным модулем производной $(k-1)$ -ого порядка, $n \geq 0$, $k \geq 1$.

Будем искать аппроксимацию в виде k -кратного интеграла функции $g_k^n(t)$, так чтобы $\Delta_{h,k}^n(t) \in C^{k-1}[-h, h]$. При этом функция $g_k^n(t)$ не обязательно должна быть непрерывной, она может быть кусочно-непрерывной.

$$\begin{cases} \Delta_{h,k}^n(t) = \int_{-h}^t \int_{-h}^{t_1} \dots \int_{-h}^{t_{k-1}} g_k^n(t_k) dt_k dt_{k-1} \dots dt_1, \\ |g_k^n(t)| \leq \mu. \end{cases} \quad (1.49)$$

Здесь $t_1, \dots, t_k$ — переменные интегрирования.

Кроме того, на гладкие аппроксимации (1.49) наложим дополнительные ограничения: действие аппроксимаций на полиномы степени n должно быть таким же, как и действие дельта-функции и ее производных, аналогичные ограничениям (1.44), которые использовались для разрывных аппроксимаций:

$$\begin{cases} \int_{-h}^h \Delta_{h,k}^n(t) t^j dt = 0, & j = 0, \dots, n-1, \\ \int_{-h}^h \Delta_{h,k}^n(t) t^n dt = (-1)^n n! \end{cases} \quad (1.50)$$

Теорема 1.6. *Решение задачи 1.6, записанной в форме (1.49), (1.50), является k -кратным интегралом от функции, являющейся разрывной аппроксимацией с минимальным модулем для производной дельта-функции $(n+k)$ -ого порядка, $\Delta_h^{n+k}(t)$:*

$$\Delta_{h,k}^n(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-h}^t \Delta_h^{n+k}(\tau) (t-\tau)^{k-1} d\tau,$$

где

$$\Delta_h^{n+k}(t) = \frac{1}{4} (-1)^{n+k} \left(\frac{2}{h}\right)^{n+k+1} (n+k)! \operatorname{sign} U_{n+k} \left(\frac{t}{h}\right).$$

Доказательство. С помощью интегрирования по частям задачу (1.49) с ограничениями (1.50) можно привести к проблеме моментов для k -ой производной $g_k^n(t)$ аппроксимации $\Delta_{h,k}^n(t)$:

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \inf, \\ |g_k^n(t)| \leq \mu, & t \in [-h, h], \\ \int_{-h}^h g_k^n(t) t^j dt = 0, & j = 0, \dots, n+k-1, \\ \int_{-h}^h g_k^n(t) t^{n+k} dt = (-1)^{n+k} (n+k)! \end{cases} \quad (1.51)$$

Проведём доказательство для $k = 1$. При $k > 1$ доказательство аналогично, но интегрирование по частям требуется провести несколько раз.

Рассмотрим выражения (1.50) при $k = 1$:

$$\begin{cases} \int_{-h}^h \Delta_{h,1}^n(t) dt = 0, \\ \int_{-h}^h \Delta_{h,1}^n(t) t dt = -n. \end{cases} \quad (1.52)$$

Преобразуем первое равенство в (1.52):

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \Delta_{h,1}^n(t) dt &= \int_{-h}^h \int_{-h}^t g_1^n(t_1) dt_1 dt = \int_{-h}^t g_1^n(t_1) dt_1 t \Big|_{t=-h}^h - \int_{-h}^h g_1^n(t) t dt = \int_{-h}^h g_1^n(t) h dt - \\ &\quad - \int_{-h}^h g_1^n(t) t dt = h \int_{-h}^h g_1^n(t) dt - \int_{-h}^h g_1^n(t) t dt = 0 \end{aligned}$$

Оно будет выполняться, если потребовать, чтобы

$$\int_{-h}^h g_1^n(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-h}^h g_1^n(t) t dt = 0. \quad (1.53)$$

Преобразуем второе равенство в (1.52):

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \Delta_{h,1}^n(t) t dt &= \int_{-h}^h \int_{-h}^t g_1^n(t_1) dt_1 t dt = \int_{-h}^t g_1^n(t_1) dt_1 \frac{t^2}{2} \Big|_{t=-h}^h - \int_{-h}^h g_1^n(t) \frac{t^2}{2} dt = \int_{-h}^h g_1^n(t) \frac{h^2}{2} dt - \\ &\quad - \int_{-h}^h g_1^n(t) \frac{t^2}{2} dt = \frac{h^2}{2} \int_{-h}^h g_1^n(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-h}^h g_1^n(t) t^2 dt = -n \end{aligned}$$

Оно будет выполняться, если потребовать, чтобы

$$\int_{-h}^h g_1^n(t) t dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-h}^h g_1^n(t) t^2 dt = 2n. \quad (1.54)$$

Из (1.53) и (1.54) получаем, что выполняется (1.51).

Из теоремы 1.4 получим, что решением проблемы моментов (1.51) будет функция

$$g_k^n(t) = \Delta_h^{n+k}(t) = \frac{1}{4}(-1)^{n+k} \left(\frac{2}{h}\right)^{n+k+1} (n+k)! \text{sign} U_{n+k} \left(\frac{t}{h}\right). \quad (1.55)$$

Таким образом, из (1.49) получаем, что $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируемая аппроксимация $\Delta_{h,k}^n(t)$ производной дельта-функции n -ого порядка $\delta^{(n)}(t)$ является k -кратным интегралом от функции, являющейся разрывной аппроксимацией производной $\Delta_h^{n+k}(t)$ дельта-функции $(n+k)$ -ого порядка. Можно показать, что

$$\Delta_{h,k}^n(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-h}^t \Delta_h^{n+k}(\tau) (t-\tau)^{k-1} d\tau. \quad (1.56)$$

Действительно, для $k=1$:

$$\Delta_{h,1}^n(t) = \int_{-h}^t g_1^n(\tau) d\tau = \int_{-h}^t \Delta_h^{n+1}(\tau) d\tau.$$

При $k=2$:

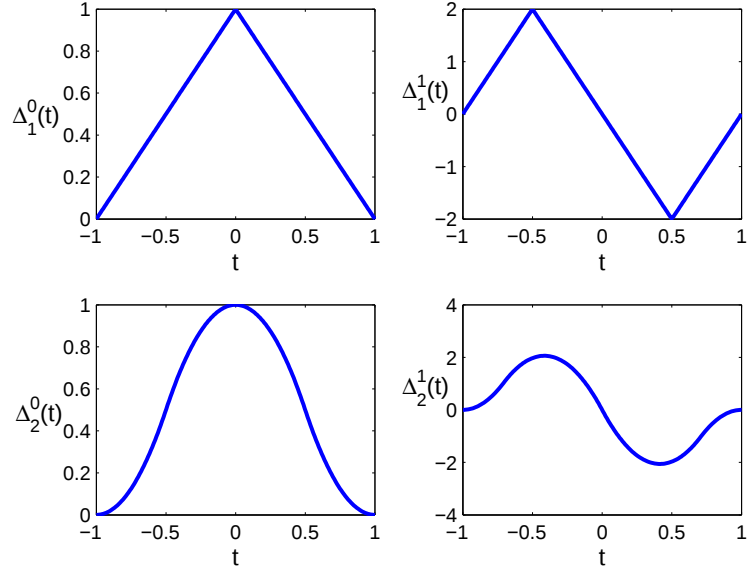


Рис. 1.3: Аппроксимации дельта-функции (слева) и её первой производной (справа): непрерывные и гладкие.

$$\begin{aligned}\Delta_{h,2}^n(t) &= \int_{-h}^t \int_{-h}^{t_1} g_2^n(t_2) dt_2 dt_1 = \int_{-h}^{t_1} g_2^n(t_2) dt_2 t_1 \Big|_{t_1=-h}^t - \int_{-h}^t g_2^n(t_1) t_1 dt_1 = \\ &= \int_{-h}^t g_2^n(t_2) dt_2 t - \int_{-h}^t g_2^n(t_1) t_1 dt_1 = \int_{-h}^t (t - \tau) g_2^n(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Аналогично, при помощи интегрирования по частям можно показать справедливость (1.56) и при $k > 2$.

□

Аппроксимации $\Delta_{h,k}^n(t)$ (1.56) представляют собой кусочно-полиномиальные функции с полиномами порядка k , имеющие $(k - 1)$ непрерывную производную в точках стыковки. Коэффициенты этих полиномов можно явно вычислить по формулам (1.55) и (1.56).

На рисунке 1.3 приведены аппроксимации дельта-функции (слева) и её первой производной (справа): непрерывные (верхний ряд) и непрерывно дифференцируемые аппроксимации (нижний ряд). На рисунке 1.4 приведены аппроксимации второй производной $\delta^{(2)}(t)$ (слева) и третьей производной $\delta^{(3)}(t)$ (справа): непрерывные (верхний ряд) и непрерывно дифференцируемые аппроксимации (нижний ряд).

Теорема 1.7. Условия (1.55) обеспечивают слабую сходимость аппроксимации $\Delta_{h,k}^n(t)$ к n -ой производной дельта-функции $\delta^{(n)}(t)$ при стремлении к нулю отрезка времени, на ко-

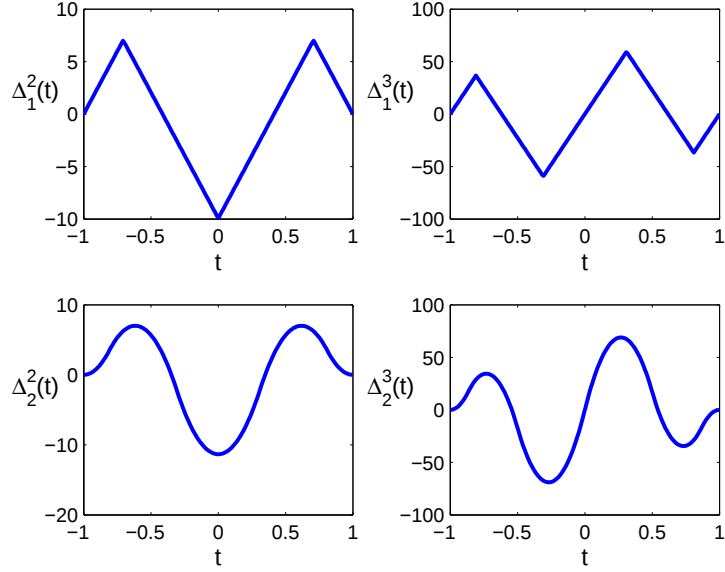


Рис. 1.4: Аппроксимации производной дельта-функции второго и третьего порядка: непрерывные и гладкие.

тором действует аппроксимация, а именно

$$\int_{-h}^h \Delta_{h,k}^n(t) \xi(t) dt \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \delta^{(n)}(t) \xi(t) dt = (-1)^n \xi^{(n)}(0), \text{ при } h \rightarrow 0$$

для любой $\xi(t) \in D_s[\alpha, \beta]$, $n \leq s$, т.е. s раз непрерывно дифференцируемой функции с компактным носителем на интервале (α, β) . Предполагается, что $[-h, h] \subset [\alpha, \beta]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.5.

Быстрые управления могут быть использованы для аппроксимации решений импульсных задач управления при моделировании результатов и их практическом применении. При использовании быстрых управлений следует изучить, как влияет замена $\delta^{(n)}(t)$ её аппроксимацией $\Delta_{h,k}^n(t)$ на траекторию $x(t)$.

1.4 Использование быстрых управлений в задаче управления без неопределённости

Пусть дана система с обобщённым управлением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f^{(\alpha)} - f^{(\beta)},$$

которая была рассмотрена в разделе 1.1.3. Будем предполагать, что вместо обобщённых, т.е. неограниченных, управлений требуется найти решение в быстрых, т.е. ограниченных, управлениях. Тогда от уравнения в распределениях можно перейти к дифференциальному уравнению:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad (1.57)$$

где x^0, x^1 определяются по формулам (1.22). Воспользуемся представлением управления через производные функций ограниченной вариации (которое верно и для ограниченных управлений)

$$u = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1}U_j}{dt^{j+1}}$$

и перейдем к системе с импульсными управлениями, как описано в разделе 1.1.3:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad (1.58)$$

где $\mathbf{B}(t) = (L_0(t) \ L_1(t) \ \dots \ L_k(t))$, $U(t) = (U_0^T(t) \ U_1^T(t) \ \dots \ U_k^T(t))^T$.

В работе [12] показано, как получить решение задачи управления для уравнения (1.57) в быстрых управлениях вида (1.42), которые являются кусочно-непрерывными функциями. Приведём здесь основные результаты и поясним на примере.

Запишем формулу Коши для системы (1.58)

$$x(\theta + 0) = X(\theta, t_0)x_0 + \sum_{j=0}^k \int_{t_0}^{\theta+0} X(\theta, t)L_j(t)dU_j(t). \quad (1.59)$$

В работе [12] предлагается записать функции $L_j(t)$, входящие в (1.59), в виде

$$L_j(t) = \int_{\alpha}^{\beta} X(t, \tau)B(\tau)\delta^{(j)}(\tau - t)d\tau$$

и заменить дельта-функцию и её производные на аппроксимации $\Delta_h^j(t)$ вида (1.42). Для удобства определим аппроксимации так, чтобы они были отличны от нуля не на отрезке $[-h(j+1), h(j+1)]$, как в цитируемой работе, а на отрезке $[0, 2h(j+1)]$. Таким образом, пусть аппроксимации $\Delta_h^j(t)$ определяются соотношениями

$$\begin{cases} \Delta_h^0(t) = \frac{1}{2h}I_{[0, 2h]}(t), \\ \Delta_h^j(t) = \frac{1}{2h}(\Delta_h^{j-1}(t) - \Delta_h^{j-1}(t - 2h)), \quad j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (1.60)$$

Тогда введём функции

$$M_j(t) = \int_t^{t+2h(j+1)} X(t, \tau)B(\tau)\Delta^{(j)}(\tau - t)d\tau \quad (1.61)$$

и подставим их в формулу Коши (1.59) вместо $L_j(t)$. Также изменим обозначения: фазовую переменную обозначим через y , а управление — через $U^{(y)}$. Фундаментальная матрица однородной системы $X(\theta, t)$ не изменяется.

$$y(\theta + 0) = X(\theta, t_0)y_0 + \sum_{j=0}^k \int_{t_0}^{\theta+0} X(\theta, t)M_j(t)dU_j^{(y)}(t). \quad (1.62)$$

Формула (1.62) является формулой Коши для системы

$$dy(t) = A(t)y(t)dt + \mathbf{M}(t)dU^{(y)}(t), \quad (1.63)$$

где $\mathbf{M}(t) = (M_0(t) \ M_1(t) \ \dots \ M_k(t))$.

В работе [12] доказано, что при помощи оптимального управления системы (1.63) можно получить быстрое управление для исходной системы (1.57) таким образом, что в конечный момент времени фазовые координаты для этих систем будут совпадать. Данное утверждение приведено в [12] для ограниченного управления в системе (1.63), то есть, предполагается, что $u^{(y)} = \frac{dU^{(y)}}{dt}$ ограничено. Если снять это требование, то утверждение теоремы также будет верно в силу свойств интеграла Стильтьеса. Приведём формулировку теоремы из [12] без требования ограниченности управления.

Теорема 1.8. Пусть $U^{(y)}(t) \equiv 0$ при $t \in [\theta, \theta + 2h(k+1)]$. Тогда $y(\theta + 2h(k+1)) = x(\theta + 2h(k+1))$, где $y(t)$ — траектория системы (1.63) при управлении $U^{(y)}(t) = (U_0^{(y)}(t), \dots, U_k^{(y)}(t))$, а $x(t)$ — траектория исходной системы (1.57) при управлении

$$u(t) = \sum_{j=0}^k \int_{t_0}^t \Delta_h^j(t - \tau) dU_j^{(y)}(\tau). \quad (1.64)$$

Таким образом, для того, чтобы получить решение задачи в быстрых управлениях необходимо:

- Выбрать вид аппроксимаций дельта-функции. В работе [12] используются кусочно-непрерывные аппроксимации вида (1.60). Можно показать, что результат, аналогичный теореме 1.8, остается верным и для управлений вида (1.45) и (1.56) различной степени гладкости, полученных ранее в этой главе.
- Вычислить функции $M_h^j(t)$ (1.61) и перейти к системе (1.63).
- Для системы (1.63) построить импульсное управление $U(t)$. Управление может быть как программным, так и в виде синтеза.
- По формуле (1.64) перейти к быстрым (ограниченным) управлениям для исходной системы (1.57).

Повторяя рассуждения [12], получим следующие результаты для аппроксимаций вида (1.45) и (1.56).

Для того чтобы получить решение задачи для системы (1.57) в быстрых управлениях: когда управления — кусочно-непрерывные функции, с минимальным модулем на фиксированном отрезке времени, либо когда управления — непрерывные или гладкие функции с минимальным модулем соответствующей производной, следует выбрать конкретный вид аппроксимации (1.45) или (1.56). Для удобства будем считать, что аппроксимации нужного

вида отличны от нуля на отрезке $[0, 2h]$, а не $[-h, h]$ (такие аппроксимации получаются из (1.45) или (1.56) очевидной заменой переменной). Далее следует сформировать систему вида (1.63), где функции $M_0(t), \dots, M_k(t)$ получаются подстановкой выбранных аппроксимаций в (1.61). Тогда будет верна следующая теорема

Теорема 1.9. Пусть $U^{(y)}(t) \equiv 0$ при $t \in [\theta, \theta + 2h]$. Тогда $y(\theta + 2h) = x(\theta + 2h)$, где $y(t)$ — траектория системы (1.63) при управлении $U^{(y)}(t) = (U_0^{(y)}(t), \dots, U_k^{(y)}(t))$, а $x(t)$ — траектория исходной системы (1.57) при управлении

$$u(t) = \sum_{j=0}^k \int_{t_0}^t \Delta_h^j(t - \tau) dU_j^{(y)}(\tau),$$

где в качестве Δ_h^j подставлены быстрые управления вида (1.45) или (1.56).

1.5 Примеры

Приведём пример, иллюстрирующий применение импульсных и обобщённых управлений, а также переход к быстрым управлениям в задачах без неопределённости.

Сначала мы рассмотрим решение задачи импульсного управления для колебательной системы с одной степенью свободы. Решение подобных задач в классе программных управлений подробно описано в [17]. Мы проиллюстрируем применение этого метода. Также рассмотрим решение задачи в обобщённых управлениях, когда в качестве управления, помимо дельта-функций, допускается использование их первых производных. После этого мы покажем, как выполнить переход к быстрым управлениям (по схеме, описанной в предыдущем разделе) и получим быстрое программное управление с использованием аппроксимаций вида (1.42) и (1.56).

1.5.1 Применение импульсного управления

Рассмотрим движение груза на пружине в горизонтальной плоскости. Один из концов пружины закреплён. Тогда движение описывается уравнением

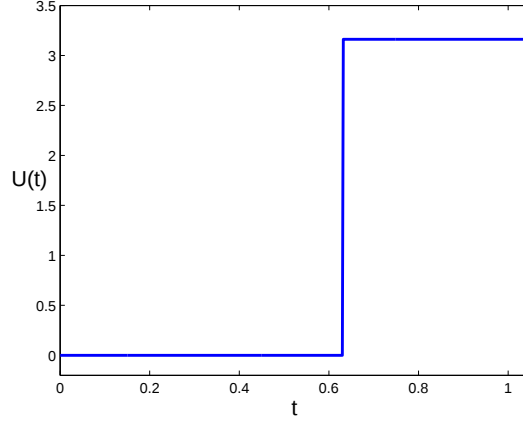
$$m\ddot{x} = -kx,$$

где x — смещение груза относительно положения равновесия $x = 0$, m — масса груза, k — коэффициент жёсткости пружины. Обозначив смещение груза за x_1 и скорость $\dot{x} = x_2$, перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1, \end{cases}$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Пусть к свободному концу пружины приложено обобщённое управляющее воздействие $U(\cdot)$. Запишем систему в виде (1.11):

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt, \\ dx_2 = -\omega^2 x_1 dt + dU. \end{cases} \quad (1.65)$$

Рис. 1.5: Управляющее воздействие $U(t)$

Будем рассматривать задачу на отрезке времени $[t_0, t_1] = [0, \frac{\pi}{\omega}]$. Пусть в начальный момент $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$, и для определённости $x_{1,2}^0 > 0$. Задача состоит в успокоении системы, т.е. приведении в положение $(x_1(t_1), x_2(t_2)) = (0, 0)$, с минимальным импульсом силы $\text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) \rightarrow \min$.

Решение задач такого вида в классе программных управлений подробно описано в работе [17]. Воспользуемся этим методом и получим, что оптимальное управляющее воздействие равно

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t_0 \leq t \leq \tau, \\ \sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}, & \text{при } \tau < t \leq t_1, \end{cases} \quad (1.66)$$

где $\tau = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x_2^0}{x_1^0 \omega} \right)$. При этом импульсное управление

$$u(t) = \frac{dU}{dt} = \sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \delta(t - \tau). \quad (1.67)$$

В момент τ , когда применяется управление, выполняется:

$$\begin{cases} \sin \omega \tau = \frac{\omega x_1^0}{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}, \\ \cos \omega \tau = \frac{x_2^0}{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}. \end{cases} \quad (1.68)$$

На рисунке 1.5 показано управляющее воздействие $U(t)$ (1.66), полученное в рассматриваемом примере при следующих значениях параметров: $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\omega = 3$.

Опишем физический смысл полученного управления. Движение системы (1.65) происходит по закону

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 \cos \omega t + \frac{x_2^0}{\omega} \sin \omega t, \\ x_2(t) = -\omega x_1^0 \sin \omega t + x_2^0 \cos \omega t. \end{cases}$$

К моменту τ применения управления, который описывается выражениями (1.68), система

будет находиться в положении равновесия с ненулевой скоростью:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = 0, \\ x_2(\tau) = -\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}. \end{cases}$$

После применения импульсного управления (1.67) скорость обращается в ноль, а координата не изменяется:

$$\begin{cases} x_1(\tau + 0) = 0, \\ x_2(\tau + 0) = 0, \end{cases}$$

и груз останавливается в положении равновесия.

1.5.2 Применение обобщённого управления с производной дельта-функции

Теперь предположим, что в системе (1.65) допускается применение в качестве управления не только дельта-функции, но и первой производной дельта-функции. Тогда надо записать задачу в общем виде (1.18) и перейти к системе с импульсным управлением, как описано в разделе 1.1.3:

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt + dU_1, \\ dx_2 = -\omega^2 x_1 dt + dU_0, \end{cases} \quad (1.69)$$

при этом исходное обобщённое управление $u(\cdot)$ представлено через функции ограниченной вариации $U_0(\cdot)$, $U_1(\cdot)$:

$$u = \frac{dU_0}{dt} - \frac{d^2 U_1}{dt^2}. \quad (1.70)$$

Следуя рассуждениям из [17], получаем, что

$$U_0(t) = 0, \quad U_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t_0 \leq t \leq \tau, \\ -\frac{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}{\omega}, & \text{при } \tau < t \leq t_1, \end{cases}$$

и управление u (1.70) будет равно

$$u(t) = \frac{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}{\omega} \delta'(t - \tau),$$

где момент времени τ определяется из условий:

$$\begin{cases} \sin \omega \tau = \frac{x_2^0}{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}, \\ \cos \omega \tau = \frac{\omega x_1^0}{\sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}. \end{cases}$$

В момент τ система будет находиться в точке максимального отклонения с нулевой скоростью:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}, \\ x_2(\tau) = 0, \end{cases}$$

После применения управления система мгновенно переводится в ноль.

1.5.3 Управление системой за нулевое время

Нетрудно проверить, что при использовании управлений, которые допускают применение дельта-функции и её первой производной, задача может быть решена за нулевое время. Это можно сделать при помощи обобщённого управления

$$u(t) = -x_2^0 \delta(t) + x_1^0 \delta'(t).$$

Также заметим, что с помощью одних только дельта-функции, без применения производной дельта-функции, задачу за нулевое время решить нельзя (при произвольных начальных значениях x_1^0, x_2^0).

1.5.4 Применение быстрых управлений

Теперь проиллюстрируем решение задачи в классе программных быстрых управлений. Запишем исходное уравнение рассматриваемого примера (1.65) в форме обыкновенного дифференциального уравнения (1.57)

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.71)$$

где $u = \frac{dU}{dt}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = (0, 1)^T$. Управление u предполагаем ограниченным.

Перепишем систему в виде (1.69)

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + [L_0(t)L_1(t)] \begin{pmatrix} dU_0(t) \\ dU_1(t) \end{pmatrix},$$

где $[L_0(t)L_1(t)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а управления U_0, U_1 связаны с u соотношением (1.70).

Сначала рассмотрим быстрые управления вида (1.60):

$$\begin{cases} \Delta_h^0(t) = \frac{1}{2h} I_{[0, 2h]}(t), \\ \Delta_h^1(t) = \frac{1}{4h^2} (I_{[0, 2h]}(t) - I_{[2h, 4h]}(t)). \end{cases} \quad (1.72)$$

Найдем $M_0(t)$ и $M_1(t)$ (1.61):

$$M_0(t) = \begin{pmatrix} -h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ h\omega^2 \end{pmatrix}$$

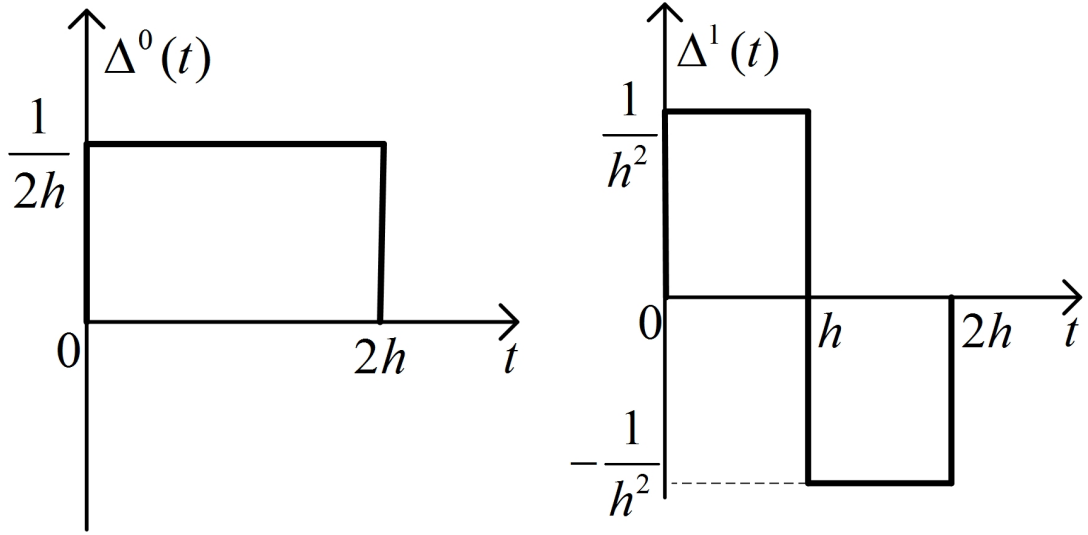
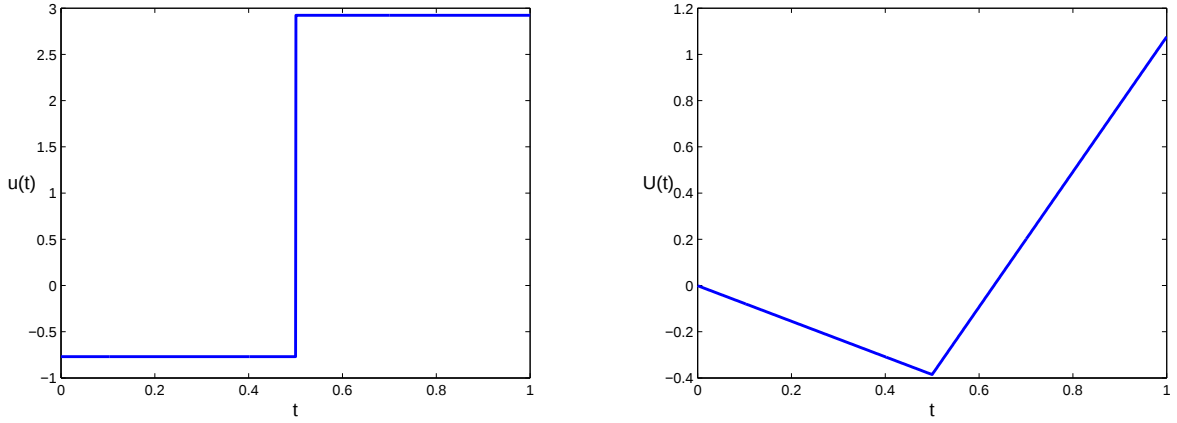
Тогда уравнение (1.63) будет иметь вид

$$\dot{x} = Ax + [M_0(t)M_1(t)] \begin{pmatrix} dU_0(t) \\ dU_1(t) \end{pmatrix}, \quad (1.73)$$

где $[M_0(t)M_1(t)] = \begin{pmatrix} -h & 1 \\ 1 & h\omega^2 \end{pmatrix}$.

Как в разделе 1.5.3, будем решать задачу для уравнения (1.73) за нулевое время. Тогда получим, что

$$U_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t = 0, \\ \frac{h\omega^2 x_1^0 - x_2^0}{1 + h^2\omega^2}, & \text{при } t = 0+, \end{cases} \quad U_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t = 0, \\ \frac{-x_1^0 - hx_2^0}{1 + h^2\omega^2}, & \text{при } t = 0+. \end{cases} \quad (1.74)$$

Рис. 1.6: $\Delta^0(t)$ и $\Delta^1(t)$ Рис. 1.7: Применение разрывных аппроксимаций при $h = 0.5$: быстрое управление $u(t)$ и его интеграл $U(t)$. Вне отрезка $[0, 1]$ управление $u(t) = 0$.

Пересчитывая быстрое управление для исходной системы (1.71) по формуле (1.64), получим

$$u(t) = q_0 \Delta^0(t) + q_1 \Delta^1(t), \quad (1.75)$$

где

$$q_0 = \frac{h\omega^2 x_1^0 - x_2^0}{1 + h^2\omega^2}, \quad q_1 = \frac{x_1^0 h x_2^0}{1 + h^2\omega^2}. \quad (1.76)$$

На рисунке 1.6 схематически показан вид аппроксимаций (1.72). На рисунке 1.7 показаны быстрое управление $u(t)$ вида (1.75) и $U(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$, полученные в рассматриваемом примере при следующих значениях параметров: $h = 0.5$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\omega = 3$. На рисунке 1.8 — при $h = 0.1$.

Теперь решим ту же задачу с быстрыми управлениями, найденными в разделе 1.3. Возьмем непрерывные аппроксимации дельта-функции и её первой производной с минимальным

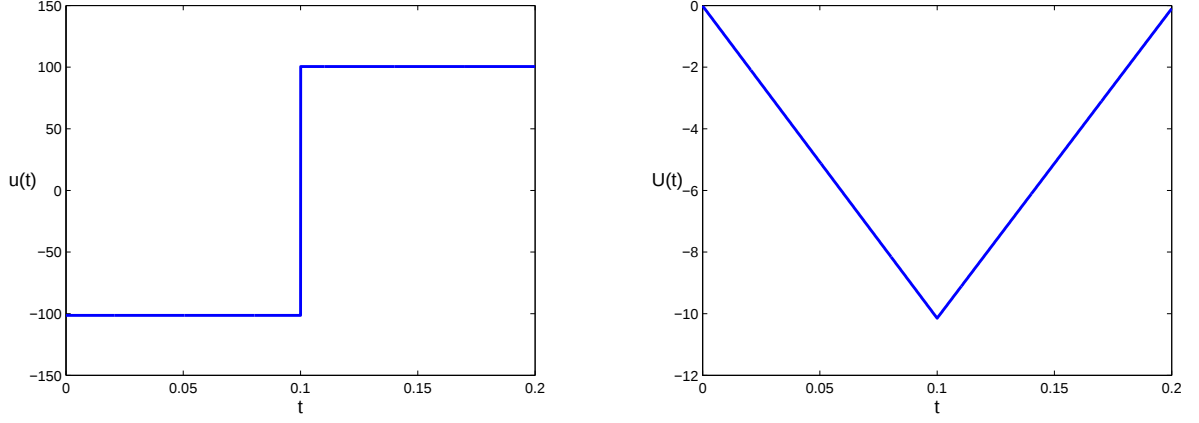


Рис. 1.8: Применение разрывных аппроксимаций при $h = 0.1$: быстрое управление $u(t)$ и его интеграл $U(t)$. Вне отрезка $[0, 0.2]$ управление $u(t) = 0$.

модулем производной аппроксимации на отрезке $[0, 2h]$. Тогда, из (1.56) получим, что нужные аппроксимации имеют вид:

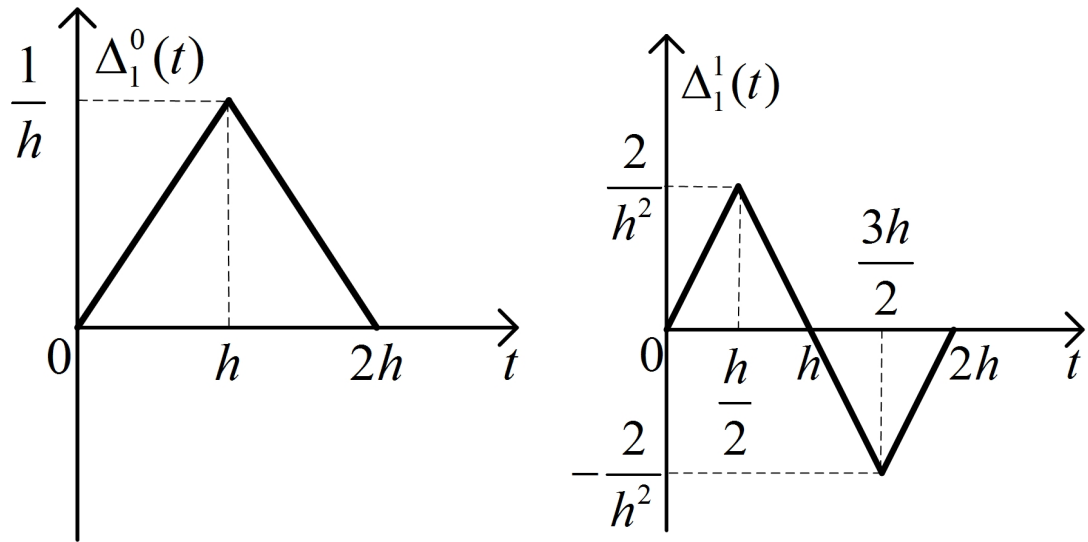
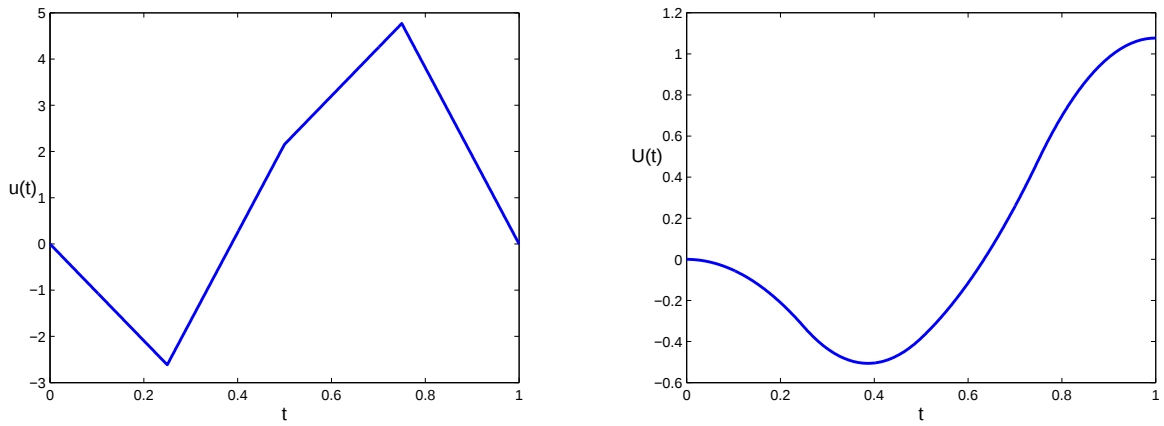
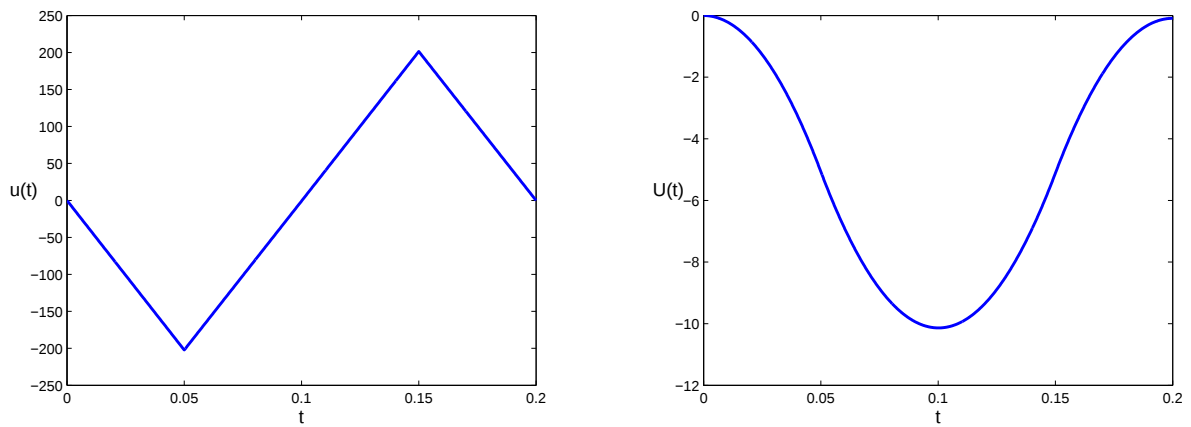
$$\Delta_{h,1}^0(t) = \begin{cases} \frac{t}{h^2}, & \text{при } 0 \leq t < h, \\ \frac{2}{h} - \frac{t}{h^2}, & \text{при } h \leq t \leq 2h, \end{cases} \quad \Delta_{h,1}^1(t) = \begin{cases} \frac{4t}{h^3}, & \text{при } 0 \leq t < \frac{h}{2}, \\ \frac{4}{h^2} - \frac{4t}{h^3}, & \text{при } \frac{h}{2} \leq t < \frac{3h}{2}, \\ -\frac{8}{h^2} + \frac{4t}{h^3}, & \text{при } \frac{3h}{2} \leq t \leq 2h. \end{cases} \quad (1.77)$$

В данной задаче получается, что при использовании быстрых управлений (1.77) значения функций $M_0(t)$, $M_1(t)$ будут такие же, что и для быстрых управлений (1.72). Тогда импульсное управление системы (1.73) снова получится (1.74). Значит, решение задачи в быстрых управлениях вида (1.77) будет следующим:

$$u(t) = q_0 \Delta_{h,1}^0(t) + q_1 \Delta_{h,1}^1(t), \quad (1.78)$$

где q_0, q_1 совпадают с (1.76).

На рисунке 1.9 схематически показан вид аппроксимаций (1.77). На рисунке 1.10 показаны быстрое управление $u(t)$ вида (1.78) и $U(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$, полученные в рассматриваемом примере при следующих значениях параметров: $h = 0.5$, $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $\omega = 3$. На рисунке 1.11 — при $h = 0.1$.

Рис. 1.9: $\Delta_1^0(t)$ и $\Delta_1^1(t)$ Рис. 1.10: Применение непрерывных аппроксимаций при $h = 0.5$: быстрое управление $u(t)$ и его интеграл $U(t)$. Вне отрезка $[0, 1]$ управление $u(t) = 0$.Рис. 1.11: Применение непрерывных аппроксимаций при $h = 0.1$: быстрое управление $u(t)$ и его интеграл $U(t)$. Вне отрезка $[0, 0.2]$ управление $u(t) = 0$.

Глава 2

Задача синтеза управлений для систем с неопределённостью

2.1 Введение

В данной главе исследуется задача синтеза импульсного управления при неопределённости, выраженной неизвестной ограниченной помехой. Используется обобщение метода динамического программирования на случай импульсных управлений, применённое к задачам с импульсным управлением без неопределённости в работах [43, 52]. В работе [45] было предложено использовать упомянутый метод в задаче импульсного управления при наличии помехи. Результаты, полученные в данной главе, продолжают исследование метода, предложенного в работе [45].

Для доказательства принципа оптимальности используется подход, предложенный в работах [47, 48, 59], в которых вводится позиционная функция цены для задач с ограниченными управлениями. В данной работе введена позиционная функция цены для задачи импульсного управления, доказан принцип оптимальности. Также доказано, что позиционная функция цены удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА). Однако в этом подходе не удаётся получить конструктивный закон управления, поэтому далее рассматривается задача с коррекциями [20].

Задача с коррекциями представляет собой задачу управления при неопределённости, в которой весь отрезок времени разбивается на небольшие интервалы. В фиксированные моменты времени, ограничивающие данные интервалы, становится доступной информация о текущем положении системы. В каждый такой момент времени выбирается управление, которое будет действовать на следующем маленьком интервале.

Следует отметить, что при дополнительном ограничении на то, что на каждом интервале управление постоянно, мы получим схему аппроксимационных движений, предложенных в [51]. При увеличении количества интервалов в пределе получаются конструктивные движения.

Определяются минимаксная и максиминная функции цены с коррекциями, которые являются обобщением минимаксной и максиминной функций цены. Показано, что при стремлении длины интервалов разбиения к нулю пределы минимаксных и максиминных функций цены с коррекциями совпадают, и можно ввести функцию цены в задаче синтеза, равную этим предельным значениям. Доказано, что функция цены в задаче синтеза равна позиционной функции цены и удовлетворяет уравнению типа ГЯБА. Из уравнения ГЯБА можно получить закон импульсного управления для задачи с неопределённостью. Для полного описания синтеза управления следует также указать, в каком смысле можно понимать траектории за-

мкнутой системы. Описаны два возможных подхода: определение замкнутых траекторий как пределов последовательностей траекторий в приближённой схеме и через пространственно-временную систему [11, 26, 54, 56].

В конце главы приведены примеры синтеза импульсных и быстрых управлений.

Результаты второй главы опубликованы автором в работе [61] в соавторстве с научным руководителем А. Н. Дарьиным. Научному руководителю принадлежит постановка задачи. Доказательства принадлежат автору диссертации.

2.2 Минимаксная и максиминная функции цены

В этом разделе мы рассмотрим систему с импульсным управлением $U(\cdot)$ при неопределённости $v(\cdot)$, которая была введена в разделах 1.1.4, 1.1.5. Движение описывается уравнением

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + B(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t) = x. \quad (2.1)$$

Система рассматривается на интервале времени $s \in [t, t_1]$. Задан функционал, зависящий от управления и помехи,

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)), \quad (2.2)$$

где $\text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot)$ — полная вариация (1.4) на интервале $[t, t_1 + 0)$ функции ограниченной вариации $U(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — некоторая собственная, замкнутая, выпуклая функция. Цель управления — минимизировать функционал (2.2), несмотря на наличие неопределённости. Мы введём минимаксную и максиминную функции цены, чтобы найти минимальное значение функционала (2.2) в случае, когда реализуется наихудший случай помехи (неопределённости), и выразим эти функции через параметры задачи. Минимаксная и максиминная функция цены будут использованы в следующих разделах в формулировке уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, а также при построении функций цены с коррекциями.

Сначала определим *множество возможных помех*

$$\mathcal{M}(t) = \{v : [t, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q \mid v(\cdot) \in L_\infty[t, t_1], v(s) \in \mathcal{Q}(s) \text{ для п.в. } s \in [t, t_1]\}, \quad (2.3)$$

где L_∞ — пространство измеримых, почти всюду ограниченных функций, $\mathcal{Q}(s)$ — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$. Многозначное отображение $\mathcal{Q}(\cdot)$ — полунепрерывно сверху в метрике Хаусдорфа.

Возможные управления $U(\cdot)$ принадлежат классу функций ограниченной вариации $U(\cdot) \in BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$. Поскольку в систему (2.1) управление входит как дифференциал dU , мы будем рассматривать классы эквивалентных управлений с точностью до константы.

Введём *минимаксную функцию цены*

$$V(t, x) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot) \in \mathcal{M}(t)} [\text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t) = x, U(\cdot) \in BV[t, t_1]]. \quad (2.4)$$

Здесь $x(t)$ — траектория системы (2.1), соответствующая управлению $U(\cdot)$ и помехе $v(\cdot)$.

Также введём *максиминную функцию цены*

$$W(t, x) = \max_{v(\cdot) \in \mathcal{M}(t)} \min_{U(\cdot)} [\text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t) = x, U(\cdot) \in BV[t, t_1]]. \quad (2.5)$$

Для функций $V(t, x)$, $W(t, x)$ в некоторых случаях будем использовать расширенные обозначения $V(t, x) = V(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$, $W(t, x) = W(t, x; t_1, \varphi(\cdot))$, в которых явно указано, что в момент $(t_1 + 0)$ значение функционала (2.2) равно $\varphi(t_1 + 0)$.

По свойству операций взятия максимума и минимума, $W(t, x) \leq V(t, x)$ для всех (t, x) . При этом минимаксная функция цены $V(t, x)$ соответствует тому, что мы выбираем управление, не имея информации о том, какая помеха реализовалась. В случае максиминной функции цены $W(t, x)$, наоборот, мы выбираем управление при известной реализации помехи.

Функцию цены $V(t, x)$ (2.4) и $W(t, x)$ (2.5) можно вычислить явным образом, пользуясь схемой, предложенной в [52] для задач импульсного управления без помехи.

Теорема 2.1. *Функция цены $V(t, x)$ (2.4) выпукла по x , и сопряжённая к ней функция равна*

$$V^*(t, p) = \text{conv} \{ \varphi^*(X^T(t, t_1)p) - \rho(X^T(t, t_1)p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \} + \mathcal{I}(X^T(t, t_1)p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]). \quad (2.6)$$

Здесь $\text{conv}(\cdot)$ — операция овыпукления функции, то есть получения наибольшей выпуклой функции, не превосходящей исходной функции; $\varphi^*(p)$ — сопряжённая по Юнгу-Фенхелю функция к $\varphi(x)$ (2.10); опорная функция $\rho(\cdot \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$ строится ко множеству (2.9); $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ — единичный шар в полунорме (2.11); $\mathcal{I}(p, \mathcal{A})$ — индикаторная функция множества $\mathcal{A}$, равная нулю, если p принадлежит множеству $\mathcal{A}$, и бесконечности в противном случае.

Теорема 2.2. *Функция цены $W(t, x)$ (2.5) выпукла по x , и сопряжённая к ней функция равна*

$$W^*(t, p) = \text{conv} \{ \varphi^*(X^T(t, t_1)p) + \mathcal{I}(X^T(t, t_1)p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]) - \rho(X^T(t, t_1)p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}. \quad (2.7)$$

Докажем теорему 2.1 для минимаксной функции цены. Теорема 2.2 для максиминной функции доказывается аналогичным образом.

Доказательство. Схема доказательства предложена в работе [45], однако для полноты изложения материала здесь следует привести полное доказательство.

Рассмотрим определение минимаксной функции цены (2.4). В выражении (2.4) сначала найдем максимум по $v(\cdot)$. Заметим, что $\text{Var } U(\cdot)$ не зависит от $v(\cdot)$, а правый конец траектории $x(t_1 + 0)$ можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$x(t_1 + 0) = \underbrace{X(t_1, t)x + \int_t^{t_1+0} X(t_1, \tau)B(\tau)dU(\tau)}_{\hat{x}(t_1+0)} +$$

$$+ \underbrace{\int_t^{t_1} X(t_1, \tau) C(\tau) v(\tau) d\tau}_{\mathbf{v}(t_1)} = \hat{x}(t_1 + 0) + \mathbf{v}(t_1). \quad (2.8)$$

В выражении (2.8) вектор $\hat{x}(t_1 + 0)$ представляет собой правый конец траектории без помехи. Поскольку $v(\cdot) \in \mathcal{Q}(\cdot)$, то вектор $\mathbf{v}(t_1) \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству

$$\mathbb{Q}(t, t_1) = \int_t^{t_1} X(t_1, \tau) C(\tau) \mathcal{Q}(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

С помощью методов выпуклого анализа [57] получим

$$\begin{aligned} \max_{v(\cdot) \in \mathcal{Q}(\cdot)} \varphi(x(t_1 + 0)) &= \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{Q}} \varphi(\hat{x}(t_1 + 0) + \mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{Q}} \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle \hat{x}(t_1 + 0) + \mathbf{v}, p \rangle - \varphi^*(p) \} = \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle \hat{x}(t_1 + 0), p \rangle + \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) - \varphi^*(p) \} = \psi(\hat{x}(t_1 + 0)). \end{aligned}$$

Здесь $\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$ — опорная функция в направлении p к выпуклому компактному множеству $\mathbb{Q}(t, t_1)$, равная

$$\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) = \sup_{q \in \mathbb{Q}(t, t_1)} \langle p, q \rangle;$$

$\varphi^*(p)$ — сопряжённая по Юнгу-Фенхелю [57] функция к $\varphi(x)$:

$$\varphi^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, p \rangle - \varphi(x)). \quad (2.10)$$

Поскольку $\varphi(x)$ является собственной, выпуклой, замкнутой функцией, по теореме Фенхеля–Моро, она равна второй сопряжённой функции $\varphi(x) = \varphi^{**}(x)$.

Значит, функция $\psi(\hat{x}(t_1 + 0))$ — выпуклая, и сопряжённая к ней функция равна

$$\psi^*(p) = \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \},$$

где $\text{conv}(f)$ обозначает овыпукление функции f [58], то есть наибольшую выпуклую функцию, не превосходящую f .

Таким образом, $V(t, x) = \min_{U(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \psi(\hat{x}(t_1 + 0)) \mid x(t) = x]$. Следует отметить, что $\hat{x}(t_1 + 0)$ не зависит от помехи.

Далее можно воспользоваться схемой поиска $V(t, x)$, приведенной в [52]. Предположим, что вариация управления ограничена некоторой константой $\text{Var } U \leq \mu$. Поскольку

$$\hat{x}(t_1 + 0) = X(t_1, t)x + \int_t^{t_1+0} X(t_1, \tau) B(\tau) dU(\tau),$$

для любого $\ell \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle \ell, \hat{x}(t_1 + 0) \rangle &\leq \langle \ell, X(t_1, t)x \rangle + \max \left\{ \int_t^{t_1+0} \langle \ell, X(t_1, \tau) B(\tau) dU(\tau) \rangle \mid \text{Var } U \leq \mu \right\}. \\ \langle \ell, \hat{x}(t_1 + 0) \rangle &\leq \langle \ell, X(t_1, t)x \rangle + \max \left\{ \int_t^{t_1+0} \langle B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) \ell, dU(\tau) \rangle \mid \text{Var } U \leq \mu \right\}. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что векторы $B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)\ell$ непрерывны по τ . Поскольку пространство функций ограниченной вариации является сопряжённым к пространству непрерывных функций, то справедливо следующее неравенство:

$$\langle \ell, \hat{x}(t_1 + 0) \rangle \leq \langle \ell, X(t_1, t)x \rangle + \mu \max_{\tau \in [t, t_1]} \|B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)\ell\|,$$

где $\|\ell\|$ — евклидова норма. Перепишем это выражение, используя норму в пространстве непрерывных функций:

$$\langle \ell, \hat{x}(t_1 + 0) \rangle \leq \langle \ell, X(t_1, t)x \rangle + \mu \|B^T(\cdot)X^T(t_1, \cdot)\ell\|_{C[t, t_1]},$$

и определим полунорму

$$\|\ell\|_V = \|B^T(\cdot)X^T(t_1, \cdot)\ell\|_{C[t, t_1]}. \quad (2.11)$$

Поскольку $\hat{x}(t_1 + 0)$ — точка траектории системы без помехи, справедлива следующая теорема [52]:

Теорема 2.3. *Задача управления из точки x в точку $x^{(1)} = \hat{x}(t_1 + 0)$ разрешима тогда и только тогда, когда вариация управления ограничена $\text{Var } U \leq \mu$. При этом оптимальным программным управлением будет управление с вариацией*

$$\mu^0 = \sup_{\ell \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle \ell, x^{(1)} - X(t_1, t)x \rangle}{\|B^T(\cdot)X^T(t_1, \cdot)\ell\|_{C[t, t_1]}}. \quad (2.12)$$

Если система вполне управляема, то в выражении (2.12) максимум достигается.

$$\mu^0 = \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle \ell, x^{(1)} - X(t_1, t)x \rangle}{\|\ell\|_V} = \max_{\|\ell\|_V \leq 1} \langle \ell, x^{(1)} - X(t_1, t)x \rangle.$$

Воспользуемся приведенной теоремой для того, чтобы найти минимаксную функцию цены. Тогда

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \inf_{x^{(1)}} \max_{\|\ell\|_V \leq 1} \{ \langle \ell, x^{(1)} - X(t_1, t)x \rangle + \psi(x^{(1)}) \} = \max_{\|\ell\|_V \leq 1} \inf_{x^{(1)}} \{ \langle \ell, x^{(1)} - X(t_1, t)x \rangle + \psi(x^{(1)}) \} = \\ &= \max_{\|\ell\|_V \leq 1} \{ -\langle \ell, X(t_1, t)x \rangle - \sup_{x^{(1)}} \{ -\langle \ell, x^{(1)} \rangle - \psi(x^{(1)}) \} \}. \end{aligned}$$

В полученном выражении сделаем замену $-\ell$ на ℓ :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \max_{\|\ell\|_V \leq 1} \{ \langle \ell, X(t_1, t)x \rangle - \sup_{x^{(1)}} \{ \langle \ell, x^{(1)} \rangle - \psi(x^{(1)}) \} \} = \\ &= \max_{\ell \in \mathbb{R}^n} \{ \langle X^T(t_1, t)\ell, x \rangle - \psi^*(\ell) - \mathcal{I}(\ell \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]) \}, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ — единичный шар в полунорме (2.11), $\mathcal{I}(\cdot, \mathcal{A})$ — индикаторная функция множества $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{I}(\ell, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \ell \in \mathcal{A}, \\ \infty & \ell \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Сделаем в (2.13) ещё одну замену переменных $p = X^T(t_1, t)\ell$. Тогда

$$V(t, x) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \psi^*(X^T(t, t_1)p) - \mathcal{I}(X^T(t, t_1)p | \mathcal{B}_V[t, t_1]) \}. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что минимаксная функция цены $V(t, x)$ — выпукла по x , и сопряжённая к ней функция равна

$$\begin{aligned} V^*(t, p) &= \psi^*(X^T(t, t_1)p) + \mathcal{I}(X^T(t, t_1)p | \mathcal{B}_V[t, t_1]) = \\ &= \text{conv} \{ \varphi^*(X^T(t, t_1)p) - \rho(X^T(t, t_1)p | \mathbb{Q}(t, t_1)) \} + \mathcal{I}(X^T(t, t_1)p | \mathcal{B}_V[t, t_1]). \end{aligned}$$

Теорема 2.1 доказана. $\square$

При решении задач управления методом динамического программирования необходимо, чтобы функция цены удовлетворяла принципу оптимальности. Следует обратить внимание на то, что минимаксная функция цены, рассматриваемая в этом разделе, не удовлетворяет принципу оптимальности.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий, что для минимаксной функции цены не выполняется принцип оптимальности. Пусть движение точки на прямой описывается следующим уравнением с управлением $U(\cdot)$ и помехой $v(\cdot)$:

$$dx(t) = (1 - t^2)dU + v(t)dt, \quad t \in [-1, 1],$$

а функционал задачи равен

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \max_{|v(\cdot)| \leq 1} \{ \text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \} \rightarrow \min,$$

где $\varphi(x(t_1 + 0)) = d(x(t_1 + 0), \mathbb{M})$ — расстояние от конца траектории в момент $t_1 + 0$ до множества $\mathbb{M} = \{x : |x| \leq M\}$. Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$.

Если бы в данной задаче функция цены удовлетворяла принципу оптимальности, тогда для произвольного $\tau \in [t, t_1]$ было бы верно соотношение

$$V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = V(t, x; \tau, V(\tau, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))). \quad (2.15)$$

Воспользуемся формулами (2.6) и (2.14) для определения минимаксной функции цены в этой задаче. Поскольку в данной системе $A = 0$, фундаментальная матрица будет единичной. Выпишем по отдельности слагаемые, определяющие функцию цены:

$$\varphi^*(X^T(t, t_1)p) = \varphi^*(p) = \begin{cases} M|p| & \text{при } |p| \leq 2 \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\rho(X^T(t, t_1)p | \mathbb{Q}(t, t_1)) = \rho(p | \mathbb{Q}(t, t_1)) = |p|(t_1 - t),$$

$$\mathcal{I}(X^T(t, t_1)p | \mathcal{B}_V[t, t_1]) = \mathcal{I}(p | \mathcal{B}_1(0)),$$

где $\mathcal{B}_1(0)$ — единичный шар с центром в нуле.

Тогда функция цены в левой части (2.15) равна

$$V(t, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{|p| \leq 1} \{p x - \text{conv}\{M|p| - |p|(t_1 - t) \mid |p| \leq 2\}\} = \max_{|p| \leq 1} \{p x - (2M - 2t_1 + 2t)\}.$$

Возьмём произвольный момент времени $\tau \in (t, t_1)$ и выпишем сопряжённую функцию к функции цены

$$V^*(\tau, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \text{conv}\{M|p| - |p|(t_1 - \tau) \mid |p| \leq 2\} - \mathcal{I}(p|\mathcal{B}_1(0))$$

Тогда правая часть выражения (2.15) будет равна

$$\begin{aligned} V(t, x; \tau, V(\tau, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))) &= \max_{|p| \leq 1} \{p x - \text{conv}\{\text{conv}\{M|p| - |p|(t_1 - \tau) \mid |p| \leq 2\} - \\ &\quad - |p|(\tau - t) \mid |p| \leq 1\}\} = \max_{|p| \leq 1} \{p x - (2M - 2t_1 + \tau + t)\}, \end{aligned}$$

то есть, не совпадает с левой частью при $\tau \neq t$. В данном примере минимаксная функция цены не удовлетворяет принципу оптимальности.

2.3 Позиционная функция цены

В этом разделе мы введём позиционную функцию цены [46, 47, 48, 59] и докажем принцип оптимальности. В работах [46, 48] доказан принцип оптимальности для позиционной функции цены в задаче с ограниченным управлением. Основываясь на результатах, полученных в приведённых работах, проведём доказательство принципа оптимальности для позиционной функции цены в случае импульсных управлений. После этого докажем, что позиционная функция цены удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса.

2.3.1 Определение позиционной функции цены

Воспользуемся введенными ранее определениями множеств возможных помех $\mathcal{M}(t)$ (2.3)

$$\mathcal{M}(t) = \{v : [t, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q \mid v(\cdot) \in L_\infty[t, t_1], v(s) \in \mathcal{Q}(s) \text{ для п.в. } s \in [t, t_1]\},$$

и возможных управлений $BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$. Ещё раз отметим, что поскольку управление входит в уравнение движения в форме дифференциала, то мы будем считать управления равными, если они принадлежат одному классу эквивалентности, т.е. равны с точностью до константы. Следуя работам [47, 48, 59], определим позиционную функцию цены.

Введём отображение

$$\mathcal{U} : \mathcal{M}(t) \rightarrow BV([t, t_1], \mathbb{R}^m), \quad (2.16)$$

позволяющее по реализации помехи на отрезке $[t, t_1]$ получить значение управления на этом отрезке. Обозначим через $\Omega(t)$ множество таких отображений вида (2.16), которые дополнительно обладают свойством неупреждения, а именно, для любого момента времени $s \in [t, t_1]$ и для любых $v', v'' \in \mathcal{M}(t)$ выполняется следующее свойство: если $v'(\tau) = v''(\tau)$ при п.в.

$\tau \in [t, s]$, то $\mathcal{U}[v'](\tau) = \mathcal{U}[v''](\tau)$ при $\tau \in [t, s + 0)$. Здесь $\mathcal{U}[v](t)$ — реализация отображения $\mathcal{U}$ при известной реализации помехи $v(t)$.

Таким образом, во множество $\Omega(t)$ входят отображения, которые позволяют получить значение управления в момент s на основании информации о реализовавшейся помехе за предыдущие моменты времени от t до s .

Будем рассматривать уравнение (2.1) и функционал (2.2). Введём функцию

$$\mathbb{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \}, \quad (2.17)$$

которую будем называть *позиционной функцией цены*.

2.3.2 Принцип оптимальности для позиционной функции цены

Теорема 2.4. Для любого $\tau \in [t, t_1 + 0)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ для функции цены (2.17) выполняется принцип оптимальности:

$$\mathbb{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(\tau, x(\tau)) \}. \quad (2.18)$$

В работе [48] доказан принцип оптимальности для функции цены (2.17), если в задаче допускаются только ограниченные управления. На основе этого доказательства проведём доказательство теоремы 2.4. В данном случае управление может быть не ограниченным.

Доказательство. Пусть правая часть (2.18) равна $\tilde{V}(t, x)$. По свойству инфимума, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует отображение $\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)} \in \Omega(t)$ такое, что выполняется

$$\tilde{V}(t, x) \geq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v] + \mathbb{V}(\tau, x^{(1)}(\tau + 0)) \} - \varepsilon. \quad (2.19)$$

Здесь через $x^{(1)}(s)$ обозначена траектория системы (2.1) из начальной точки $x^{(1)}(t) = x$ при управлении $\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v]$. Обозначим $x^{(1)}(\tau + 0) = \hat{x}$.

Далее, по определению функции цены,

$$\mathbb{V}(\tau, \hat{x}) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(\tau)} \sup_{v \in \mathcal{M}(\tau)} \{ \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \}.$$

По свойству инфимума, существует отображение $\mathcal{U}_\varepsilon^{(2)} \in \Omega(\tau)$ такое, что выполняется

$$\mathbb{V}(\tau, \hat{x}) \geq \sup_{v \in \mathcal{M}(\tau)} \{ \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) \} - \varepsilon. \quad (2.20)$$

Здесь через $x^{(2)}(s)$ обозначена траектория системы (2.1) из начальной точки $x^{(2)}(\tau) = x^{(1)}(\tau + 0)$ при управлении $\mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v]$. Следует обратить внимание, что оба управления $\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v]$, $\mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v]$ могут иметь скачок в момент τ .

Введём отображение $\mathcal{U}(\cdot)$:

$$\mathcal{U}_\varepsilon(s) = \begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(s) + \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(\tau), & \text{при } t \leq s \leq \tau, \\ \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(\tau + 0) + \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(s), & \text{при } \tau < s \leq t_1 + 0. \end{cases}$$

При этом $\text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon(\cdot) \leq \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(\cdot) + \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(\cdot)$.

Пусть траектория системы (2.1) $x(s)$ начинается в точке $x(t) = x$ и соответствует управлению $\mathcal{U}_\varepsilon[v]$. Тогда при одинаковых реализациях помехи будет выполняться $x(t_1 + 0) = x^{(2)}(t_1 + 0)$.

Из (2.19) и (2.20) получим

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x) &\geq \sup_{v_1 \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v_1] + \sup_{v_2 \in \mathcal{M}(\tau)} \{ \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v_2] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) \} \} - 2\varepsilon = \\ &= \sup_{v_1 \in \mathcal{M}(t)} \sup_{v_2 \in \mathcal{M}(\tau)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v_1] + \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v_2] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) \} - 2\varepsilon \geq \\ &\geq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

По определению позиционной функции цены и из предыдущего неравенства, можно записать

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(t, x) &= \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} \leq \\ &\leq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} \leq \tilde{V}(t, x) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольное, $\mathbb{V}(t, x) \leq \tilde{V}(t, x)$.

Докажем обратное неравенство. По определению позиционной функции цены и по свойству инфимума, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует отображение $\mathcal{U}_\varepsilon \in \Omega(\tau)$ такое, что выполняется

$$\mathbb{V}(t, x) \geq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} - \varepsilon. \quad (2.21)$$

Построим отображения $\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(\cdot)$, $\mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(\cdot)$ следующим образом:

$$\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(s) = \begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon(s), & t \leq s \leq \tau, \\ \mathcal{U}_\varepsilon(\tau + 0), & \tau < s \leq t_1 + 0, \end{cases} \quad \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(s) = \begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon(\tau + 0), & t \leq s \leq \tau, \\ \mathcal{U}_\varepsilon(s), & \tau < s \leq t_1 + 0. \end{cases}$$

При этом $\text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon(\cdot) = \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}(\cdot) + \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}(\cdot)$.

Пусть $x^{(1)}(s)$ — траектория системы (2.1) из начальной точки $x^{(1)}(t) = x$ при управлении $\mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v]$, а $x^{(2)}(s)$ — траектория из начальной точки $x^{(2)}(\tau) = x^{(1)}(\tau + 0)$ при управлении $\mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v]$. Тогда, как и в первой части доказательства, если траектория $x(s)$ начинается в точке $x(t) = x$ и соответствует управлению $\mathcal{U}_\varepsilon[v]$, то при одинаковых реализациях помехи будет выполняться $x(t_1 + 0) = x^{(2)}(t_1 + 0)$.

По свойству инфимума,

$$\tilde{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(\tau, x(\tau)) \} \leq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v] + \mathbb{V}(\tau, x^{(1)}(\tau)) \}$$

По свойству супремума, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует реализация помехи $v_1(\cdot) \in \mathcal{M}(t)$ такая, что

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t, x) &\leq \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v_1] + \mathbb{V}(\tau, x^{(1)}(\tau)) + \varepsilon \leq \\
&\leq \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v_1] + \sup_{v \in \mathcal{M}(\tau)} \{ \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) \} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

По свойству супремума, для того же $\varepsilon > 0$ существует реализация помехи $v_2 \in \mathcal{M}(\tau)$ такая, что

$$\tilde{V}(t, x) \leq \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v_1] + \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v_2] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) + 2\varepsilon. \quad (2.22)$$

Определим помеху $v(s) = \begin{cases} v_1(s), & t \leq s \leq \tau, \\ v_2(s), & \tau < s \leq t_1. \end{cases}$ Тогда из (2.21) и (2.22) следует:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t, x) &\leq \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(1)}[v] + \text{Var}_{[\tau, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon^{(2)}[v] + \varphi(x^{(2)}(t_1 + 0)) + 2\varepsilon = \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) + 2\varepsilon \leq \\
&\leq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, t_1+0)} \mathcal{U}_\varepsilon[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} + 2\varepsilon \leq \mathbb{V}(t, x) + 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Поскольку ε — произвольное, $\tilde{V}(t, x) \leq \mathbb{V}(t, x)$. Мы получили, что и обратное неравенство верно, значит $\tilde{V}(t, x) = \mathbb{V}(t, x)$, и утверждение теоремы доказано. $\square$

2.3.3 Свойства позиционной функции цены

Докажем некоторые свойства функции цены $\mathbb{V}(t, x)$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.5. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(s) = \mathbb{V}(s, X(s, t)x + \int_t^s C(\tau)v(\tau)d\tau)$ не убывает при $s \in [t, t_1]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $s \in [t, t_1]$. По принципу оптимальности (теорема 2.4),

$$\mathbb{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, s+0)} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(s, x(s + 0)) \}.$$

Возьмем управление $U \equiv 0$ на промежутке времени $[t, s + 0)$. Тогда

$$f(t) = \mathbb{V}(t, x) \leq \mathbb{V}(s, x(s + 0)) = \mathbb{V}(s, X(s, t)x + \int_t^s C(\tau)v(\tau)d\tau) = f(s).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.6. Производная позиционной функции цены $\mathbb{V}(t, x)$ в точке (t, x) по направлению $(1, A(t)x + C(t)v(t))$ неотрицательна, то есть $\mathbb{V}'(t, x | 1, A(t)x + C(t)v(t)) \geq 0$. Если функция цены дифференцируема в (t, x) , то $\mathbb{V}_t + \langle \mathbb{V}_x, A(t)x + C(t)v(t) \rangle \geq 0$.

Доказательство. По определению производной по направлению,

$$\mathbb{V}'(t, x|1, Ax + Cv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}(t + h, x + h(Ax + Cv)) - \mathbb{V}(t, x)}{h}.$$

Воспользуемся леммой 2.5 для $s = t + h$:

$$\mathbb{V}(t + h, X(t + h, t)x + \int_t^{t+h} C(\tau)v(\tau)d\tau) \geq \mathbb{V}(t, x)$$

При малом h

$$X(t + h, t)x + \int_t^{t+h} C(\tau)v(\tau)d\tau = hA(t)x(t) + hC(t)v(t) + o(h).$$

Тогда $\mathbb{V}'(t, x|1, Ax + Cv) \geq 0$.

Если функция цены дифференцируема в точке (t, x) , то

$$\mathbb{V}'(t, x|1, Ax + Cv) = \mathbb{V}_t + \langle \mathbb{V}_x, Ax + Cv \rangle \geq 0.$$

□

Лемма 2.7. Для произвольных $h \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \leq t_1$ справедливо неравенство

$$\mathbb{V}(t, x) \leq \mathbb{V}(t, x + Bh) + \|h\|.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $t \in [t_0, t_1]$. По принципу оптимальности (теорема 2.4),

$$\mathbb{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var } \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(t, x(t + 0)) \}.$$

Возьмём управление $U(s) = h\chi(s - t)$, где $\chi(\cdot)$ — функция Хевисайда

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$$

Тогда $\mathbb{V}(t, x) \leq \|h\| + \mathbb{V}(t, x + Bh)$.

□

Лемма 2.8. Производная позиционной функции цены $\mathbb{V}(t, x)$ по направлению $(0, Bh)$ ограничена по модулю: $|\mathbb{V}'(t, x|0, B(t)h)| \leq \|h\|$. Если функция цены дифференцируема по x в точке (t, x) , то $|\langle \mathbb{V}_x(t, x), B(t)h \rangle| \leq \|h\|$.

Доказательство. По лемме 2.7,

$$|\mathbb{V}'(t, x|0, B(t)h)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{V}(t, x + \varepsilon B(t)h) - \mathbb{V}(t, x)|}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon \|h\|}{\varepsilon} = \|h\|.$$

Если функция цены дифференцируема по x в точке (t, x) , то

$$|\mathbb{V}'(t, x|0, Bh)| = |\langle \mathbb{V}_x, Bh \rangle| \leq \|h\|.$$

□

2.3.4 Уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса для позиционной функции цены

Теорема 2.9. *Позиционная функция цены $\mathbb{V}(t, x)$ (2.17) удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА):*

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} &= 0, \\ \mathcal{H}_1(t, x, \mathbb{V}_t, \mathbb{V}_x) &= \mathbb{V}_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \langle \mathbb{V}_x, A(t)x + C(t)v \rangle, \\ \mathcal{H}_2(t, x, \mathbb{V}_t, \mathbb{V}_x) &= \min_{\|h\|=1} \{1 + \langle \mathbb{V}_x, B(t)h \rangle\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

с краевым условием

$$\mathbb{V}(t_1, x) = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \quad (2.24)$$

где $V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$ — минимаксная функция цены (2.4), взятая в момент t_1 и равная

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, p \rangle - \varphi^*(p) \mid \|B^T(t_1)p\| \leq 1 \}.$$

Доказательство. Заметим, что в общем случае функция цены может не быть дифференцируемой в точке (t, x) . Тогда вместо частных производных мы будем рассматривать производные по соответствующим направлениям. С учетом этого замечания перепишем $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(t, x, \mathbb{V}_t, \mathbb{V}_x) &= \mathbb{V}_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \mathbb{V}'(t, x|1, A(t)x + C(t)v), \\ \mathcal{H}_2(t, x, \mathbb{V}_t, \mathbb{V}_x) &= \min_{\|h\|=1} \{1 + \mathbb{V}'(t, x|0, B(t)h)\} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{V}'(t, x|0, B(t)h) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}(t, x + \sigma B(t)h) - \mathbb{V}(t, x)}{\sigma}, \\ \mathbb{V}'(t, x|1, A(t)x + C(t)v) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}(t + \sigma, x + \sigma(A(t)x + C(t)v)) - \mathbb{V}(t, x)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную точку (t, x) . Воспользуемся доказанными в предыдущем разделе свойствами позиционной функции цены. По лемме 2.6 получим, что $\mathcal{H}_1(t, x) \geq 0$. Из леммы 2.8 следует, что $\mathcal{H}_2(t, x) \geq 0$.

Далее, если $\mathcal{H}_2(t, x) = 0$ в рассматриваемой точке (t, x) , тогда утверждение теоремы выполнено. Предположим, что это не так. Пусть $\mathcal{H}_2(t, x) > 0$.

Из принципа оптимальности (2.18) для произвольного $\tau \in [t, t_1]$ следует

$$\mathbb{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau+0)} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(\tau, x(\tau + 0)) \}.$$

Пусть $\tau^\varepsilon > t$ — первый момент после t , когда применяется управление, то есть первый момент, когда выполняется $\text{Var}_{[t, \tau^\varepsilon+0)} \mathcal{U} > 0$.

По свойству инфимума, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует отображение $\mathcal{U}^\varepsilon$ такое, что

$$\mathbb{V}(t, x) \geq \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau^\varepsilon+0)} \mathcal{U}^\varepsilon[v] + \mathbb{V}(\tau^\varepsilon, x(\tau^\varepsilon + 0)) \} - \varepsilon. \quad (2.25)$$

Покажем, что τ^ε отделено от t , то есть, что существует $\delta > 0$ такое, что $\tau^\varepsilon \geq t + \delta$ для любого $\varepsilon > 0$. Предположим противное. Пусть существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, для которой $\tau^{\varepsilon_n} \rightarrow t$.

Тогда для некоторого $v(\cdot)$ и соответствующей реализации управления $U^{\varepsilon_n}(\cdot)$ из оценки (2.25) получим

$$\mathbb{V}(t, x) \geq \text{Var}_{[t, \tau^{\varepsilon_n} + 0]} U^{\varepsilon_n}(\cdot) + \mathbb{V}(\tau^{\varepsilon_n}, x(\tau^{\varepsilon_n} + 0)) - \varepsilon_n.$$

Здесь $\varepsilon_n > 0$ — любое, поэтому

$$\mathbb{V}(t, x) \geq \text{Var}_{[t, \tau^{\varepsilon_n} + 0]} U^{\varepsilon_n}(\cdot) + \mathbb{V}(\tau^{\varepsilon_n}, x(\tau^{\varepsilon_n} + 0)). \quad (2.26)$$

Обозначим через $\Delta \in \mathbb{R}^m$ скачок $U^{\varepsilon_n}(\cdot)$ в момент t , т.е. $\Delta = U^{\varepsilon_n}(t+0) - U^{\varepsilon_n}(t)$. Тогда, переходя в (2.26) к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$, получим

$$\mathbb{V}(t, x) \geq \|\Delta\| + \mathbb{V}(t, x + B(t)\Delta).$$

Перенесем все слагаемые в правую часть и представим приращение x в виде $B(t)\Delta = \sigma\Delta_1$, где $\|\Delta_1\| = 1$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}(t, x + \sigma\Delta_1) - \mathbb{V}(t, x)}{\sigma} + 1 \leq 0,$$

значит

$$\mathcal{H}_2(t, x) = \min_{\|h\|=1} \{1 + \mathbb{V}'(t, x|0, B(t)h)\} \leq 0,$$

что противоречит нашему предположению $\mathcal{H}_2(t, x) > 0$.

Таким образом, мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\tau^\varepsilon \geq t + \delta$. Возьмем $\tau_1 \in (t, \tau^\varepsilon)$. По доказанному выше, на отрезке $[t, \tau_1 + 0)$ управление не применяется. Из принципа оптимальности (2.18) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(t, x) &= \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \{ \text{Var}_{[t, \tau_1 + 0]} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(\tau_1, x(\tau_1 + 0)) \} = \sup_{v \in \mathcal{M}(t)} \mathbb{V}(\tau_1, x(\tau_1 + 0)) \geq \\ &\geq \mathbb{V}(\tau_1, x(\tau_1 + 0)). \end{aligned}$$

Здесь в последнем неравенстве взята некоторая реализация помехи $v(\cdot)$. Представим $\tau_1 = t + \sigma$ и запишем изменение координаты $x(\tau_1 + 0) = x(t) + \sigma(Ax(t) + Cv)$. Тогда $\mathcal{H}_1(t, x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}(t + \sigma, x + \sigma(Ax + Cv)) - \mathbb{V}(t, x)}{\sigma} \leq 0$, значит $\mathcal{H}_1(t, x) = 0$.

Таким образом, мы показали, что в каждый момент (t, x) как минимум одно из двух выражений $\mathcal{H}_1(t, x)$ и $\mathcal{H}_2(t, x)$ обращается в ноль, и каждое из них неотрицательно.

Осталось показать, что позиционная функция цены удовлетворяет краевому условию (2.24). Поскольку ограниченная помеха на интервале $[t_1, t_1 + 0)$ не оказывает влияния на систему, по определению позиционной функции цены $\mathbb{V}(t, x)$, взятой в момент t_1 , получим,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(t_1, x) &= \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t_1)} \sup_{v \in \mathcal{M}(t_1)} \{ \text{Var}_{[t_1, t_1 + 0]} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} = \inf_{\mathcal{U} \in \Omega(t_1)} \{ \text{Var}_{[t_1, t_1 + 0]} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1 + 0)) \} = \\ &= \inf_{U \in BV[t_1, t_1 + 0]} \{ \text{Var}_{[t_1, t_1 + 0]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \} = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)). \end{aligned}$$

По теореме 2.1, минимаксная функция цены в момент t_1 равна

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, p \rangle - \varphi^*(p) \mid \|B^T(t_1)p\| \leq 1 \}.$$

Теорема доказана. □

2.4 Задача с коррекциями движения

В этом разделе мы рассмотрим задачу с коррекциями движения для системы с импульсным управлением при неопределённости. Задача с коррекциями [20] представляет собой задачу управления при неопределённости, в которой весь отрезок времени разбивается на небольшие интервалы. В фиксированные моменты времени, ограничивающие данные интервалы, становится доступной информация о текущем положении системы. В каждый такой момент времени выбирается управление, которое будет действовать на следующем маленьком интервале.

Продолжая исследование метода, предложенного в работе [45], мы определим минимаксную и максиминную функции цены с коррекциями, которые являются обобщением введённых ранее минимаксной и максиминной функций цены на задачи с коррекциями. Мы покажем, что при стремлении длины интервалов разбиения к нулю пределы минимаксных и максиминных функций цены с коррекциями совпадают. Тогда можно ввести функцию цены в задаче синтеза, равную этим предельным значениям. Мы покажем, что функция цены в задаче синтеза будет равна позиционной функции цены, определенной в предыдущем разделе, и что она удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса.

Без ограничения общности перейдём к системе с нулевой динамикой для упрощения последующих выкладок.

2.4.1 Переход к системе с нулевой динамикой

Сделаем замену в системе (2.1) так, чтобы после замены в полученной системе слагаемое с матрицей A стало нулевым:

$$\tilde{x}(s) = X(t_1, s)x(s), \tag{2.27}$$

где $X(t_1, s)$ — фундаментальная матрица (1.13) системы (2.1). Поскольку $x(s) = X(s, t_1)\tilde{x}(s)$, то

$$\dot{x}(s) = AX(s, t_1)\tilde{x}(s) + X(s, t_1)\dot{\tilde{x}}(s).$$

При подстановке в уравнение получаем систему для $\tilde{x}(s)$:

$$d\tilde{x}(s) = \tilde{B}(s)dU(s) + \tilde{C}(s)v(s)ds, \quad \tilde{x}(t) = X(t_1, t)x = \tilde{x},$$

где $\tilde{B}(s) = X(t_1, s)B(s)$, $\tilde{C}(s) = X(t_1, s)C(s)$. При этом функционал $J(U)$ остается прежним, поскольку $\tilde{x}(t_1 + 0) = x(t_1 + 0)$.

Мы рассматривали ранее множество возможных помех (2.3), где $v(s) \in \mathcal{Q}(s)$. Введём множество

$$\widetilde{\mathcal{M}}(t) = \{\tilde{v} : [t, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q \mid \tilde{v}(\cdot) \in L^\infty[t, t_1], \tilde{v}(s) \in \widetilde{\mathcal{Q}}(s) \text{ для п.в. } s \in [t, t_1]\},$$

$\widetilde{\mathcal{Q}}(s) = \tilde{C}(s)\mathcal{Q}(s)$. Множество $\widetilde{\mathcal{Q}}(s)$ будет так же, как и $\mathcal{Q}(s)$, выпуклым компактом. Далее будем рассматривать задачу с нулевой динамикой и использовать обозначения без тильды:

$$dx(s) = B(s)dU(s) + v(s)ds, \quad x(t) = x. \quad (2.28)$$

Функционал (2.2) не изменится

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \underset{[t, t_1+0)}{\text{Var}} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)). \quad (2.29)$$

Цель управления — минимизировать функционал (2.29) на траекториях системы (2.28), несмотря на наличие неопределённости $v(s) \in \mathcal{M}(s)$.

2.4.2 Функции цены с коррекциями

Пусть $\mathcal{T} = \{\tau_k\}_{k=0}^N$ — разбиение отрезка $[t, t_1]$, такое что $t = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$. В моменты времени τ_k происходит коррекция движения, то есть становится известно текущее положение $x(\tau_k)$.

Определим *минимаксную функцию цены с коррекциями* $V_{\mathcal{T}}(s, x)$ рекуррентными соотношениями, используя минимаксную функцию цены $V(s, x)$ (2.4):

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}}(\tau_0, x) &= V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \\ V_{\mathcal{T}}(s, x) &= V(s, x; \tau_{k-1}, V_{\mathcal{T}}(\tau_{k-1}, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))), \quad s \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Также определим *максиминную функцию цены с коррекциями* $W_{\mathcal{T}}(s, x)$, используя максиминную функцию цены $W(s, x)$ (2.5):

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{T}}(\tau_0, x) &= W(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \\ W_{\mathcal{T}}(s, x) &= W(s, x; \tau_{k-1}, W_{\mathcal{T}}(\tau_{k-1}, \cdot)), \quad s \in [\tau_k, \tau_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Функции $V_{\mathcal{T}}(s, x)$ и $W_{\mathcal{T}}(s, x)$ можно интерпретировать как функции цены в минимаксной и максиминной задачах соответственно, которые возникают, когда в момент τ_k становится известно текущее состояние системы.

Теорема 2.10. Для произвольного $s \in [t, t_1]$ справедливы следующие неравенства

$$W(s, x) \leq W_{\mathcal{T}}(s, x) \leq V_{\mathcal{T}}(s, x) \leq V(s, x).$$

Утверждение теоремы следует из свойств операций минимума и максимума.

В каждой позиции (t, x) минимаксные функции цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ ограничены снизу максиминной функцией цены $W(t, x)$, поэтому существует точная нижняя грань $\inf_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}(t, x)$. Максиминные функции цены с коррекциями $W_{\mathcal{T}}(t, x)$ в каждой позиции (t, x)

ограничены сверху минимаксной функцией цены $V(t, x)$, поэтому существует точная верхняя грань $\sup_{\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}}(t, x)$.

Если точная нижняя и точная верхняя грани равны, то есть, если

$$\inf_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}(t, x) = \sup_{\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}}(t, x),$$

то можно ввести функцию цены в задаче синтеза $\mathcal{V}(t, x)$, равную в каждой точке (t, x)

$$\mathcal{V}(t, x) = \inf_{\mathcal{T}} V_{\mathcal{T}}(t, x) = \sup_{\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}}(t, x). \quad (2.32)$$

В следующем разделе мы докажем существование функции цены в задаче синтеза $\mathcal{V}(t, x)$.

2.4.3 Существование функции цены в задаче синтеза

Прежде чем приступить к доказательству существования функции цены в задаче синтеза, введём некоторые обозначения и перепишем минимаксную и максиминную функции цены с коррекциями в более удобном виде.

Введём операторы S и T , действующие по правилам:

$$\begin{aligned} S^{[t, t_1]} \varphi^*(p) &= \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}, \\ T^{[t, t_1]} \psi^*(p) &= \psi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь $\text{conv}(\cdot)$ — операция овыпукления функции, то есть получения наибольшей выпуклой функции, не превышающей исходной функции; опорная функция $\rho(\cdot \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$ строится ко множеству

$$\mathbb{Q}(t, t_1) = \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau; \quad (2.34)$$

$\mathcal{B}_V[t, t_1]$ — единичный шар в полунорме

$$\|\ell\|_V = \|B^T(\cdot)\ell\|_{C[t, t_1]}; \quad (2.35)$$

$\mathcal{I}(p, \mathcal{A})$ — индикаторная функция множества $\mathcal{A}$, равная нулю, если p принадлежит множеству $\mathcal{A}$, и бесконечности в противном случае.

Тогда, по теоремам 2.1, 2.2, функции $V^*(t, p)$ (2.6) и $W^*(t, p)$ (2.7), сопряжённые к минимаксной и максиминной функциям цены $V(t, x)$ (2.4) и $W(t, x)$ (2.5), можно представить в виде

$$\begin{aligned} V^*(t, p) &= T^{[t, t_1]} S^{[t, t_1]} \varphi^*(p), \\ W^*(t, p) &= S^{[t, t_1]} T^{[t, t_1]} \varphi^*(p). \end{aligned}$$

Докажем некоторые свойства операторов S и T .

Лемма 2.11. Пусть эффективные области функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ ограничены шаром радиуса $R > 0$ с центром в нуле, и справедлива оценка $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \leq K_\varphi$, где $K_\varphi > 0$ — некоторая константа. Пусть множество $\mathcal{Q}(s)$ при всех $s \in [t, t_1]$ содержится в шаре радиуса $M > 0$ с центром в нуле. Тогда для произвольного $\tau \in [t, t_1]$ и $\sigma > 0$ такого, что $\tau + \sigma \leq t_1$, выполняется:

$$\|S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - \varphi_2\|_C \leq K_\varphi + \sigma RM. \quad (2.36)$$

Замечание 2.1. Здесь и далее в этом разделе рассматривается норма вида

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C = \max_{p \in \text{dom } \varphi_1 \cap \text{dom } \varphi_2} |\varphi_1(p) - \varphi_2(p)|.$$

Доказательство. Оценим опорную функцию $\rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma))$.

$$|\rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma))| = \left| \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)} \langle p, \mathbf{q} \rangle \right| \leq \|p\| \cdot \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)} \|\mathbf{q}\| \leq \sigma RM.$$

Тогда выполняется двойное неравенство

$$\varphi(p) - \sigma RM \leq \text{conv} \{ \varphi(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)) \} \leq \varphi(p) + \sigma RM,$$

из которого получим

$$\|S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - \varphi_2\|_C \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C + \sigma RM \leq K_\varphi + \sigma RM.$$

Утверждение (2.36) доказано. $\square$

Лемма 2.12. Пусть эффективные области функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ ограничены шаром радиуса $R > 0$ с центром в нуле, и справедлива оценка $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \leq K_\varphi$, где $K_\varphi > 0$ — некоторая константа. Пусть отображение $\mathcal{Q}(s)$ липшицево с константой $L_\mathcal{Q} > 0$, и $\mathcal{Q}(s)$ — непустой выпуклый компакт для всех $s \in [t, t_1]$. Тогда для произвольного $\tau \in [t, t_1]$ и $\sigma > 0$ такого, что $\tau + \sigma \leq t_1$, выполняется

$$\|S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - S^{[\tau - \sigma, \tau]} \varphi_2\|_C \leq K_\varphi + \sigma^2 RL_\mathcal{Q}. \quad (2.37)$$

Доказательство. Пусть заданы два непустых выпуклых компактных множества $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$, расстояние по Хаусдорфу между которыми ограничено константой $h(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) \leq K$. Тогда для произвольного $q_2 \in \mathcal{Q}_2$ существует $q_1(q_2) \in \mathcal{Q}_1$ такое, что $\|q_2 - q_1(q_2)\| \leq K$. Оценим опорную функцию множества $\mathcal{Q}_2$.

$$\rho(p \mid \mathcal{Q}_2) = \max_{q_2 \in \mathcal{Q}_2} \langle p, q_2 \rangle = \max_{q_2 \in \mathcal{Q}_2} \langle p, q_2 - q_1(q_2) + q_1(q_2) \rangle \leq R\|q_2 - q_1(q_2)\| + \rho(p \mid \mathcal{Q}_1).$$

Воспользуемся неравенством

$$h\left(\int_{\tau}^{\tau + \sigma} \mathcal{Q}(s) ds, \int_{\tau - \sigma}^{\tau} \mathcal{Q}(s) ds\right) \leq \int_{\tau - \sigma}^{\tau} h(\mathcal{Q}(s + \sigma), \mathcal{Q}(s)) ds \leq L_\mathcal{Q} \sigma^2.$$

Тогда для множеств $\mathbb{Q}(\tau - \sigma, \tau)$ и $\mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)$ вида (2.34) будет верна оценка

$$\rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)) \leq RL_\mathcal{Q} \sigma^2 + \rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau - \sigma, \tau)).$$

Теперь оценим значение $S^{[\tau - \sigma, \tau]} \varphi_2$:

$$\begin{aligned} S^{[\tau - \sigma, \tau]} \varphi_2(p) &= \text{conv} \{ \varphi_2(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau - \sigma, \tau)) \} \leq \\ &\leq \text{conv} \{ \varphi_2(p) - \varphi_1(p) + \varphi_1(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)) \} + RL_\mathcal{Q} \sigma^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \text{conv} \{ \varphi_1(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(\tau, \tau + \sigma)) \} + \|\varphi_2(p) - \varphi_1(p)\|_C + RL_Q \sigma^2 \leq \\ &\leq S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1(p) + K_\varphi + RL_Q \sigma^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим обратное неравенство. Тогда

$$\|S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - S^{[\tau - \sigma, \tau]} \varphi_2\|_C = \max_{p \in \text{dom } \varphi_1 \cap \text{dom } \varphi_2} |S^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1(p) - S^{[\tau - \sigma, \tau]} \varphi_2(p)| \leq K_\varphi + RL_Q \sigma^2.$$

Утверждение (2.37) доказано. □

Лемма 2.13. Пусть эффективные области функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ ограничены, и выполняется $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \leq K_\varphi$. Тогда для произвольного $\tau \in [t, t_1]$ и $\sigma > 0$ такого, что $\tau + \sigma \leq t_1$, $\tau - \sigma \geq t$, верна оценка $\|T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_2\|_C \leq K_\varphi$.

Доказательство. Операция T ограничивает эффективную область функции:

$$T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi(p) = \varphi(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[\tau, \tau + \sigma]),$$

где $\mathcal{B}_V[\tau, \tau + \sigma]$ — единичный шар в полунорме (2.35).

Обозначим $f(p) = T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1(p) - T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_2(p)$. Тогда

$$\|T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_1 - T^{[\tau, \tau + \sigma]} \varphi_2\|_{C(\text{dom } f)} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(\text{dom } f)} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(\text{dom } \varphi_1 \cap \text{dom } \varphi_2)} \leq K_\varphi.$$

Утверждение леммы доказано. □

Теперь докажем существование функции цены в задаче синтеза.

Теорема 2.14. Пусть система (2.28) вполне управляема на каждом отрезке $[\tau', \tau'']$, $t \leq \tau' < \tau'' \leq t_1$. Пусть терминальная функция $\varphi(\cdot)$ выпуклая и липшицева. Пусть отображение $\mathcal{Q}(s)$ липшицево с константой L_Q , и $\mathcal{Q}(s)$ — непустой выпуклый компакт для всех $s \in [t, t_1]$. Тогда существует функция цены синтеза $\mathcal{V}(t, x)$ (2.32).

Доказательство. Будем рассматривать равномерные разбиения $\mathcal{T}$ отрезка $[t, t_1]$ точками $\tau_i = t_1 - \sigma i$, $\sigma = \frac{1}{N}(t_1 - t)$. Сначала докажем существование сопряжённой функции $\mathcal{V}^*(t, x)$ к функции цены синтеза $\mathcal{V}(t, x)$.

При помощи операторов (2.33) представим сопряжённые функции к минимаксной и максиминной функциям цены с коррекциями в виде

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= T^{[t, \tau_{N-1}]} S^{[t, \tau_{N-1}]} \dots T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(p), \\ W_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= S^{[t, \tau_{N-1}]} T^{[t, \tau_{N-1}]} \dots S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} T^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(p). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Поскольку $S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(\cdot) = \varphi^*(\cdot)$, обозначим $\tilde{\varphi}^*(\cdot) = T^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(\cdot)$. Тогда перепишем выражения (2.38):

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= T^{[t, \tau_{N-1}]} S^{[t, \tau_{N-1}]} \dots T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(p), \\ W_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= S^{[t, \tau_{N-1}]} T^{[t, \tau_{N-1}]} \dots S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(p). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Поскольку, по условию, функция $\varphi(\cdot)$ — липшицева, то эффективная область $\text{dom } \varphi^*(\cdot)$ ограничена, значит, $\text{dom } \tilde{\varphi}^*(\cdot)$ также ограничена. Тогда, по лемме 2.11,

$$\|S^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(\cdot) - \tilde{\varphi}^*(\cdot)\|_C \leq \sigma RM,$$

где $R > 0$ — радиус шара, в который вложена область $\text{dom } \tilde{\varphi}^*(\cdot)$, $M > 0$ — радиус шара, в который вложены значения отображения $\mathcal{Q}(s)$ для всех $s \in [t, t_1]$.

Оценим последовательно элементы в правой части (2.39). По лемме 2.13, применение оператора $T^{[\tau_1, \tau_0]}$ не изменяет норму разности функций:

$$\|T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(\cdot) - T^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(\cdot)\|_C \leq \sigma RM.$$

По лемме 2.12 получим, что применение оператора $S^{[\tau_2, \tau_1]}$ увеличивает норму разности функций не более, чем на $\sigma^2 RL_{\mathcal{Q}}$:

$$\|S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(\cdot) - S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_1, \tau_0]} \tilde{\varphi}^*(\cdot)\|_C \leq \sigma RM + \sigma^2 RL_{\mathcal{Q}}.$$

После этого применяем поочередно леммы 2.13 и 2.12 еще $(N - 2)$ раза и получаем, что норма разности функций может увеличиться еще не более, чем на $(N - 2)\sigma^2 RL_{\mathcal{Q}}$. Последнее применение оператора $S^{[t, \tau_{N-1}]}$ для функции $W_{\mathcal{T}}^*(t, p)$ увеличивает норму разности не более, чем на σRM .

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \|V_{\mathcal{T}}^*(t, \cdot) - W_{\mathcal{T}}^*(t, \cdot)\|_C &\leq 2\sigma RM + (N - 1)\sigma^2 RL_{\mathcal{Q}} = \\ &= \frac{2}{N}(t_1 - t)RM + \frac{N - 1}{N^2}(t_1 - t)^2 RL_{\mathcal{Q}} = O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Значит, при возрастании N функции $V_{\mathcal{T}}^*(t, \cdot)$ и $W_{\mathcal{T}}^*(t, \cdot)$ сходятся к $\mathcal{V}^*(t, \cdot)$. Функции $V_{\mathcal{T}}^*(t, p)$ выпуклы по p , следовательно, предельная функция $\mathcal{V}^*(t, p)$ также будет выпуклой по p . Тогда

$$\mathcal{V}(t, x) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} (\langle x, p \rangle - \mathcal{V}^*(t, p)),$$

и утверждение теоремы доказано. □

2.5 Свойства функции цены в задаче синтеза

2.5.1 Равенство позиционной функции цены и функции цены в задаче синтеза

В данной главе мы ввели позиционную функцию цены $\mathbb{V}(t, x)$ (2.17) и функцию цены в задаче синтеза $\mathcal{V}(t, x)$ (2.32) и рассмотрели их свойства. Мы доказали, что позиционная функция цены удовлетворяет неравенству типа ГЯБА (2.23). Однако с помощью позиционной функции цены не удаётся получить конструктивный закон управления. Для построения закона управления можно использовать функцию цены синтеза $\mathcal{V}(t, x)$, как это будет показано ниже. Оказывается, что в рассматриваемой задаче позиционная функция цены и функция цены синтеза совпадают.

Теорема 2.15. Пусть выполнены условия теоремы 2.14 существования функции цены в задаче синтеза. Тогда для любых (t, x) позиционная функция цены $\mathbb{V}(t, x)$ равна функции цены в задаче синтеза $\mathcal{V}(t, x)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из неравенства

$$W_{\mathcal{T}}(t, x) \leq \mathbb{V}(t, x) \leq V_{\mathcal{T}}(t, x), \quad (2.40)$$

верного для произвольного разбиения $\mathcal{T}$, и теоремы 2.14. Правое неравенство в (2.40) справедливо, поскольку в определении позиционной функции цены $\mathbb{V}(t, x)$ (2.17) берётся супремум по всем возможным отображениям из $\Omega(t)$, позволяющим в каждый момент времени $s \in [t, t_1]$ построить управление на основании данных о реализовавшейся помехе на интервале $[t, s]$, а в минимаксной функции цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ управление выбирается в отдельные моменты времени $\{\tau_k\}$ из разбиения $\mathcal{T}$. Левое неравенство в (2.40) следует из свойств операций взятия максимума и минимума. □

2.5.2 Уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса и синтез управления

Поскольку функция цены синтеза $\mathcal{V}(t, x)$ и позиционная функция цены $\mathbb{V}(t, x)$ совпадают, справедлива следующая теорема

Теорема 2.16. Функция цены задачи синтеза $\mathcal{V}(t, x)$ для системы (2.28) с функционалом (2.29) удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса:

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} &= 0, \\ \mathcal{H}_1(t, x, \mathcal{V}_t, \mathcal{V}_x) &= \mathcal{V}_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \langle \mathcal{V}_x, v \rangle, \\ \mathcal{H}_2(t, x, \mathcal{V}_t, \mathcal{V}_x) &= \min_{\|h\|=1} \{1 + \langle \mathcal{V}_x, B(t)h \rangle\} \end{aligned}$$

с краевым условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)),$$

где $V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$ — минимаксная функция цены (2.4), взятая в момент t_1 и равная

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, p \rangle - \varphi^*(p) \mid \|B^T(t_1)p\| \leq 1 \}.$$

Приведём также формулировку теоремы для системы общего вида (2.1) с функционалом (2.2).

Теорема 2.17. Функция цены задачи синтеза $\mathcal{V}(t, x)$ для системы (2.1) с функционалом (2.2) удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса:

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} &= 0, \\ \mathcal{H}_1(t, x, \mathcal{V}_t, \mathcal{V}_x) &= \mathcal{V}_t + \max_{v \in \mathcal{Q}(t)} \langle \mathcal{V}_x, A(t)x + C(t)v \rangle, \\ \mathcal{H}_2(t, x, \mathcal{V}_t, \mathcal{V}_x) &= \min_{\|h\|=1} \{1 + \langle \mathcal{V}_x, B(t)h \rangle\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

с краевым условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)),$$

где $V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$ — минимаксная функция цены (2.4), взятая в момент t_1 и равная

$$V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, p \rangle - \varphi^*(p) \mid \|B^T(t_1)p\| \leq 1 \}.$$

Из уравнения ГЯБА (2.41) получим оптимальный закон управления, гарантирующий, что при начальном положении $x(t) = x$ значения функционала задачи не превысит $\mathcal{V}(t, x)$. Для произвольного (s, x) :

- если $\mathcal{H}_1(s, x) = 0$, то $dU(s, x) = 0$,
- если $\mathcal{H}_1(s, x) > 0$, то $\mathcal{H}_2(s, x) = 0$. Тогда управление $U(s, x)$ имеет скачок в направлении $-B^T \mathcal{V}_x$, величина которого определяется, исходя из условия $\mathcal{H}_1(s+0, x(s+0)) = 0$ после применения управления.

2.5.3 Закон управления для систем с обобщённым управлением

В предыдущем разделе описан закон импульсного управления. Если в системе в качестве входных воздействий допускается использование обобщённых управлений, например, производных дельта-функции, то следует рассмотреть постановку задачи с обобщённым управлением (1.34), (1.35) и, как описано в разделе 1.1.5, перейти к задаче с импульсным управлением (1.36), (1.37). После этого для задачи с импульсным управлением следует найти оптимальный закон управления, как описано в предыдущем разделе. Тогда реализация обобщённого управления u может быть получена из реализации импульсного управления $U(\cdot)$ при помощи соотношения

$$u = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{d^{j+1} U_j(t)}{dt^{j+1}},$$

где $U_0, \dots, U_k$ — компоненты управления $U(\cdot) \in BV([t, t_1]; \mathbb{R}^m)$.

2.5.4 Быстрые управления

Для построения позиционного быстрого управления следует воспользоваться схемой, описанной в разделе 1.4: она может быть использована для поиска как программных, так и для позиционных управлений. Пример перехода к быстрым управлениям дан ниже, в разделе 2.7.2.

2.6 Траектории замкнутой системы

Как описано в разделе 2.5.2, из уравнения типа ГЯБА можно получить оптимальный закон управления, однако для полного определения синтеза управления необходимо исследовать, что представляют собой траектории замкнутой системы. Существуют разные подходы, как

описать решение системы, в которую подставлен закон управления. В настоящей работе рассмотрены два подхода: через пределы последовательностей траекторий, полученных в приближённой схеме, и при помощи пространственно-временной системы.

2.6.1 Пределы последовательностей траекторий

Рассмотрим разбиение отрезка времени $\mathcal{T}$ точками $\tau_i: t = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$. Обозначим диаметр разбиения $\sigma = \text{diam } \mathcal{T}$. Используем схему с коррекциями на разбиении $\mathcal{T}$ и вычислим функцию цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}(t, x)$. Для построения оптимальной траектории в каждый момент времени τ_i определим управление по правилу, приведённому после теоремы 2.17. Это управление будет действовать на интервале $[\tau_i, \tau_{i-1})$. Таким образом, получим реализацию управления $U_{\sigma}(s)$ и реализацию траектории $x_{\sigma}(s)$.

Пусть $\{U_{\sigma}(s)\}$ — последовательность управлений с ограниченной нормой $\text{Var}_{[t, t_1]} U_{\sigma}(\cdot)$. Поскольку шар в пространстве функций ограниченной вариации является слабо* компактным множеством [29], то можно выделить подпоследовательность $\{U_{\sigma_n}(\cdot)\}$, слабо* сходящуюся к некоторой функции ограниченной вариации $\tilde{U}(\cdot)$. Это означает, что для произвольной функции $f(s) \in C[t, t_1]$ выполняется $\int f(s) dU_{\sigma_n}(s) \rightarrow \int f(s) d\tilde{U}(s)$. Тогда соответствующая подпоследовательность реализаций траекторий $x_{\sigma_n}(s)$ будет при $\sigma_n \rightarrow 0$ слабо* сходиться к некоторой предельной траектории $x(s)$. Предельные траектории в описанной схеме будем считать траекториями замкнутой системы.

Следует отметить, что если на каждом интервале времени брать постоянное управление, то мы получим схему аппроксимационных и конструктивных движений, описанную в работе [51] для задач с неопределённостью при ограниченном управлении.

2.6.2 Пространственно-временная система

В качестве другого подхода можно рассмотреть переход к пространственно-временной системе [26, 54, 56]. В работе [11] данный подход был применён для описания траекторий замкнутой системы в задаче с импульсным управлением без неопределённости. Применим его в рассматриваемой задаче с неопределённостью.

Выпишем ещё раз рассматриваемую систему с импульсным управлением и помехой

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + B(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t) = x \quad (2.42)$$

и функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)). \quad (2.43)$$

Введём новую независимую переменную $\xi \in [0, S]$ и запишем пространственно-временную систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\xi} = A(s(\xi))y(\xi)u^s(\xi) + B(s(\xi))u^x(\xi) + C(s(\xi))v(\xi)u^s(\xi), \\ \frac{ds}{d\xi} = u^s(\xi). \end{cases} \quad (2.44)$$

На расширенное управление $u(\xi) = (u^s(\xi), u^x(\xi)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ наложено геометрическое ограничение

$$u(\xi) = (u^s(\xi), u^x(\xi)) \in [0, 1] \times \mathcal{B}_1, \quad (2.45)$$

где $\mathcal{B}_1$ — единичный шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле, причём u^s и u^x не могут одновременно равняться нулю. Компоненты управления u^s, u^x — кусочно-непрерывные функции. Связь исходной переменной x с новой переменной y задаётся соотношением $y(\xi) = x(s(\xi))$. Начальное условие $x(t) = x$ преобразуется в $y(0) = y$, к нему добавляются условия $s(0) = t, s(S) = t_1$.

Связь управления импульсной системы (2.42) с управлением пространственно-временной системы (2.44) задаётся соотношением:

$$dU = u^x d\xi. \quad (2.46)$$

При этом

$$s(\xi) = t + \int_0^\xi u^s(\sigma) d\sigma, \text{ при всех } \xi \in [0, S].$$

Тогда функционал (2.43) преобразуется в

$$J(u(\cdot)) = \int_0^S \|u^x(\xi)\| d\xi + \varphi(y(S)). \quad (2.47)$$

Функционал (2.47) минимизируется по расширенному управлению $u = (u^s, u^x)$.

Поясним суть пространственно-временной замены. Когда в исходной системе $dU(s) = 0$, тогда в пространственно-временной системе «управление временем» $u^s(s) = 1$, управление координатами $u^x(s) = 0$. Пусть в момент времени s^* в исходной системе управление совершает скачок величины $\gamma > 0$, то есть $U(s^* + 0) - U(s^*) = \gamma d$, где $d \in \mathbb{R}^m$ — направление скачка, $\|d\| = 1$. Обозначим через ξ_1 первый момент времени, когда выполняется $s(\xi_1) = s^*$. Тогда в пространственно-временной системе в момент ξ_1 время останавливается: управление $u^s(\xi_1)$ становится равным нулю. При этом управление координатами будет совпадать с направлением скачка $u^x(\xi_1) = d$. Пусть в момент ξ_2 выполняется равенство $U(s^* + 0) - U(s^*) = u^x(\xi_2 - \xi_1)$, то есть $\xi_2 = \xi_1 + \gamma$. В этот момент $u^x(\xi_2)$ снова обращается в ноль, и $u^s(\xi_2)$ становится равным 1.

Рисунок 2.1 иллюстрирует приведённое рассуждение.

Известно [54, 56], что множество траекторий исходной системы $x(s)$ плотно во множестве траекторий пространственно-временной системы $y(\xi)$, то есть, любая окрестность траектории пространственно-временной системы (2.44) содержит траекторию исходной системы (2.42). Тогда любая оптимальная траектория исходной задачи (2.42), (2.43) будет оптимальной в расширенной задаче (2.44), (2.47).

Введём функцию цены в задаче синтеза для системы (2.44) с функционалом (2.47) $\mathcal{V}^\xi(\xi, y)$ как предел соответствующих функций цены с коррекциями. Из приведённых выше рассуждений следует, что $\mathcal{V}^\xi(\xi, y) = \mathcal{V}(s, x)$.

Поскольку в пространственно-временной системе управление ограничено, можно воспользоваться известными результатами для линейных систем с ограниченным управлением при наличии помехи [2, 18]:

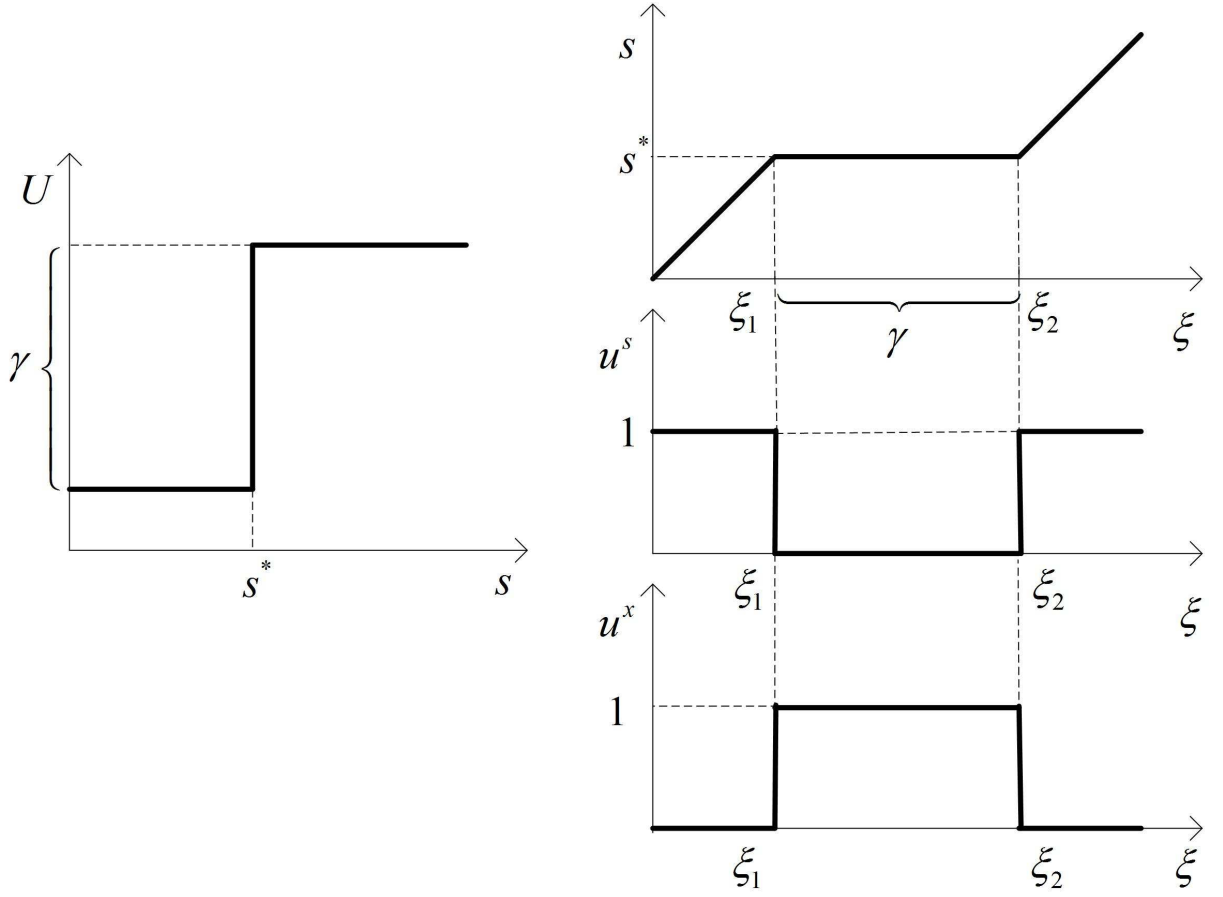


Рис. 2.1: Скачок управления исходной системы (слева) и управления пространственно-временной системы (справа).

Теорема 2.18. Минимаксная функция цены синтеза $\mathcal{V}^\xi(\xi, y)$ задачи (2.44), (2.47) является решением следующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса:

$$\begin{aligned} \min_{(u^s, u^x) \in [0, 1] \times \mathcal{B}_1} H(\xi, y) &= 0, \\ H(\xi, y) &= \mathcal{V}_\xi^\xi(\xi, y) u^s + \max_{v \in \mathcal{Q}} \langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), (A(\xi)y + C(\xi)v) u^s \rangle + \\ &\quad + \langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), B(\xi)u^x \rangle + \|u^x\| \end{aligned} \quad (2.48)$$

с краевым условием $\mathcal{V}^\xi(S, y) = \varphi(y(S))$.

Замечание 2.2. Функция цены $\mathcal{V}^\xi(\xi, y)$, вообще говоря, не является всюду дифференцируемой. В точках, где производная разрывна, слагаемые $\mathcal{V}_\xi^\xi u^s + \langle \mathcal{V}_y^\xi, (Ay + Cv)u^s \rangle$ и $\langle \mathcal{V}_y^\xi, Bu^x \rangle$ следует понимать как производные функции $\mathcal{V}^\xi(\xi, y)$ по направлениям $(u^s, Ayu^s + Cvu^s)$ и $(0, Bu^x)$, которые существуют в силу выпуклости $\mathcal{V}^\xi(\xi, y)$ по y .

Покажем, что уравнения ГЯБА для исходной системы (2.41) и пространственно-временной системы (2.48) совпадают. Рассмотрим (2.48). Функция $H(\cdot)$ положительно однородна по u^s, u^x , значит среди точек минимума есть точки на границе рассматриваемой области $(u^s(\xi), u^x(\xi)) \in [0, 1] \times \mathcal{B}_1$. Если минимум достигается при $u^s = 0$, то

$$\min_{u^x \in \mathcal{B}_1} \langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), B(\xi)u^x \rangle + \|u^x\| = 0.$$

В этом случае обязательно $u^x \neq 0$, значит $\mathcal{H}_2(s, x) = 0$.

Если минимум достигается при $u^s = 1$, то

$$\min_{u^x \in \mathcal{B}_1} \left(\mathcal{V}_\xi^\xi(\xi, y) + \max_{v \in \mathcal{Q}} \langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), (A(\xi)y + C(\xi)v) \rangle + \langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), B(\xi)u^x \rangle + \|u^x\| \right) = 0.$$

По свойству функции цены, $|\langle \mathcal{V}_y^\xi(\xi, y), B(\xi)h \rangle| \leq \|h\|$, значит минимум по u^x достигается при $u^x = 0$, откуда следует, что $\mathcal{H}_1(s, x) = 0$. Таким образом, уравнения ГЯБА совпадают.

Для линейной системы с ограниченным управлением (2.44), (2.47) под синтезом управления $\mathcal{U}_\xi(\xi, y)$ понимают многозначное отображение $\mathcal{U}_\xi(\xi, y) : [0, S] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \times \mathcal{B}_1$, полунепрерывное сверху по (ξ, y) , значение которого представляют собой непустые выпуклые компактные множества. Тогда выполнены условия существования и продолжаемости решения дифференциального включения [33], которое получается при подстановке синтеза в исходное уравнение:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} A(\xi)y + C(\xi)v(\xi) & B(\xi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^s \\ u^x \end{pmatrix} \mid (u^s, u^x) \in \mathcal{U}_\xi(\xi, y) \right\}. \quad (2.49)$$

В задаче (2.44), (2.47) определим синтез управления как множество минимизаторов уравнения (2.48):

$$\mathcal{U}_\xi(\xi, y) = \bigcup \{ (u^s, u^x) \mid (u^s, u^x) \in \text{Argmin } H(\xi, y) \}, \quad (2.50)$$

где объединение берётся по производным по направлению функции $\mathcal{V}(\xi, y)$. Определенный таким образом синтез будет удовлетворять условиям существования и продолжаемости решения дифференциального включения [33], поскольку многозначное отображение (2.50) будет полунепрерывным сверху [6], со значениями во множестве выпуклых компактов (т.к. функция $H(\xi, y)$ — линейная и непрерывная по u^s, u^x , а множество допустимых управлений (2.45) ограничено).

Траектория пространственно-временной системы представляет собой решение дифференциального включения (2.49). Поскольку множество траекторий исходной системы $x(s)$ плотно во множестве траекторий пространственно-временной системы $y(\xi)$, соответствующие траектории пространственно-временной системы можно считать траекториями исходной замкнутой системы. Управление исходной задачи связано с управлением в пространственно-временной системе соотношением (2.46).

Для применения метода, описанного в *Главе 2*, для решения задач моделирования и на практике необходимо находить аналитически или численно функцию цены, возникающую в каждой конкретной задаче. В случае одномерного пространства состояний ($x \in \mathbb{R}^1$) для определенного класса функционалов существует явное представление для функции цены, поэтому в конкретных численных примерах с помощью вариационного неравенства (2.23) можно построить синтез управления. Пример такого построения представлен в конце данной главы.

В общем случае, как правило, не удастся найти явное выражение для функции цены, но задачу можно решать приближенно, используя аппроксимации функции цены. Данный подход описан подробно в *Главе 3*. Для функции цены $V_T(s, x)$ (2.30) строится ее аппроксимация

$\tilde{V}_{\mathcal{T}}^+(s, x)$, такая что $V_{\mathcal{T}}(s, x) \leq \tilde{V}_{\mathcal{T}}^+(s, x)$. Построенная оценка используется для определения синтеза в задаче с импульсным управлением. Полученный синтез гарантирует, что значения функционала $J(U)$ будет не хуже, чем $\tilde{V}_{\mathcal{T}}^+(t, x)$.

2.7 Примеры

2.7.1 Синтез импульсных управлений

Рассмотрим движение точки на прямой в соответствии с уравнением

$$dx(t) = \left(\frac{3}{2} - (t-1)^2\right)dU + v(t)dt, \quad t \in [0, 2.5].$$

Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Цель управления U из класса функций ограниченной вариации — минимизировать функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[0, 2.5]} U(\cdot) + |x(t_1 + 0)|,$$

несмотря на наличие помехи.

Особенностью примера является то, что вид функционала позволяет в одномерном случае получить аналитическое представление функции цены [45].

Так, функция цены в задаче синтеза представима в виде $\mathcal{V}(t, x) = \beta(t)|x| + k(t)$, где

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{1}{\frac{3}{2} - (t-1)^2}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right], \end{cases} \quad k(t) = \int_t^{2.5} \beta(\tau) d\tau.$$

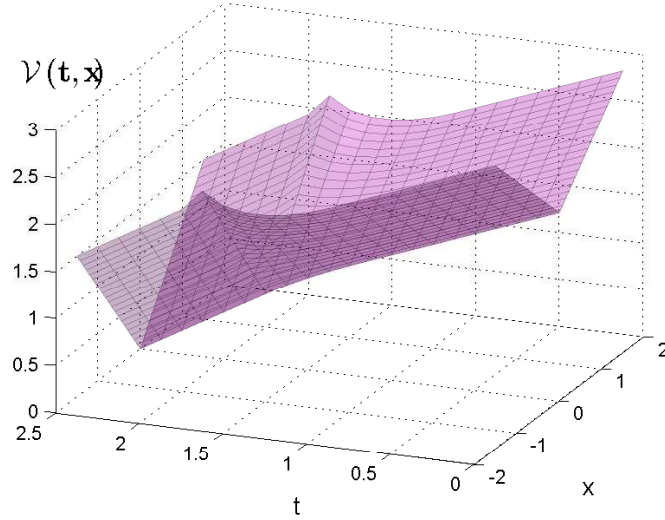
Тогда

$$\mathcal{V}(t, x) = \begin{cases} \frac{2}{3}|x| - \frac{2}{3}t - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln(2 - \sqrt{3}) + 2\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{|x|}{\frac{3}{2} - (t-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(t-1) - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(t-1) + \sqrt{3}}\right| - \\ \quad - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ |x| - t + \frac{5}{2}, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]. \end{cases}$$

Функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ представлена на рисунке 2.2.

Вычислим частные производные функции цены по t и x :

$$\mathcal{V}_t(t, x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{2(t-1)|x|}{\left(\frac{3}{2} - (t-1)^2\right)^2} - \frac{1}{\frac{3}{2} - (t-1)^2}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right], \end{cases}$$

Рис. 2.2: Функция цены $\mathcal{V}(t, x)$.

$$\mathcal{V}_x(t, x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \operatorname{sign} x, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{\operatorname{sign} x}{\frac{3}{2} - (t-1)^2}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \operatorname{sign} x, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]. \end{cases}$$

Таким образом, функции $\mathcal{H}_1(t, x)$, $\mathcal{H}_2(t, x)$ равны

$$\mathcal{H}_1(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{2(t-1)|x|}{\left(\frac{3}{2} - (t-1)^2\right)^2}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 0, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]. \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_2(t, x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(t-1)^2, & \text{при } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -\frac{1}{2} + (t-1)^2, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]. \end{cases}$$

На рис. 2.3 схематически показано правило управления для данной задачи. Функция $\mathcal{H}_2(t, x)$ отлична от нуля в левой и правой областях при $t \in [0, 1]$ и $t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]$ для всех x . При этом $\mathcal{H}_1(t, x) = 0$. Если точка (t, x) находится в одной из этих областей, то управлять не надо. На рисунке горизонтальными стрелками схематически показано направление движения. (Вообще говоря, при наличии неопределённости координата x системы без управления не будет постоянной, но для простоты на рисунке направление движения без управления показано горизонтальными стрелками).

В центральной области $t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, функция $\mathcal{H}_2(t, x)$ обращается в ноль. Здесь

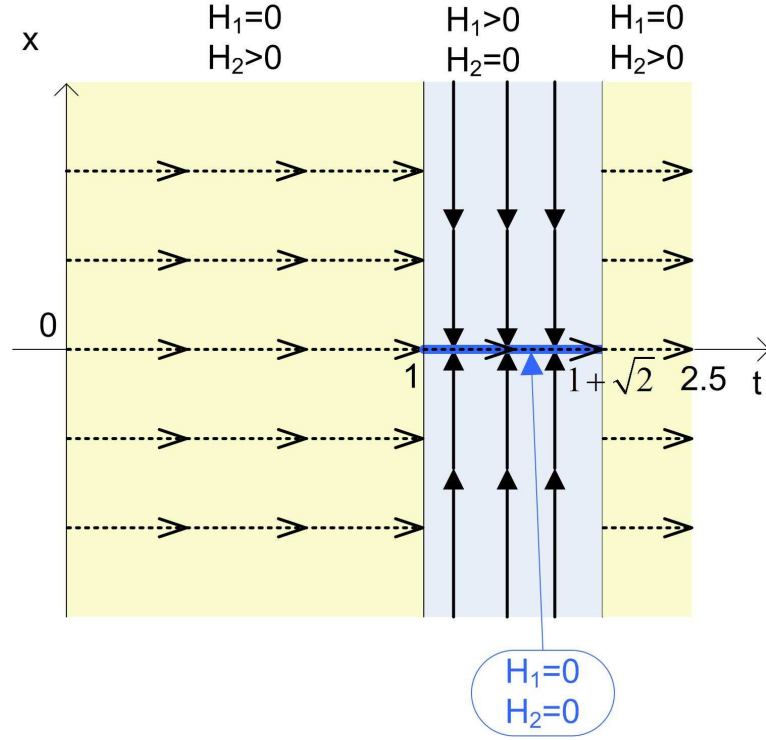


Рис. 2.3: Синтез управления, полученный аналитически.

$\mathcal{H}_1(t, x) > 0$, если $|x| > 0$, и $\mathcal{H}_1(t, 0) = 0$ при $x = 0$. В области $\left\{t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), |x| > 0\right\}$ требуется применить импульсное управление, переводящее x в ноль. В этой области линиями со стрелками показано направление мгновенного перемещения точки в результате такого удара.

На рисунках 2.4 и 2.5 показаны примеры траектории и управления при различных реализациях помех. В обоих примерах $x(0) = 5$. На рисунке 2.4 помеха $v(t) = \sin(50t)$, на рисунке 2.5 помеха постоянна и равна $v(t) = 0.9$. В первом случае значение функционала $J(U) = 3.4$, во втором $J(U) = 5.1$. В обоих случаях значение функции цены в начальный момент времени, взятое в начальной точке траектории, равно $\mathcal{V}(0, x(0)) = 5.3$.

Из приведенных рисунков видно, что при $\tau = 1$ происходит скачок управления U , который мгновенно переводит фазовую координату в ноль. Управление $u = \frac{dU}{dt}$ — импульсное: $u = -\alpha\delta(t - 1)$, где α — величина скачка (определяется численно). Далее, на интервале $\tau \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, если траектория смещается из нуля под действием помехи, то импульсное управление снова приводит её в ноль. В примере на рисунке 2.4 помеха синусоидальная, поэтому управление U имеет на указанном интервале синусоидальный вид. В примере на рисунке 2.5 помеха постоянная, поэтому управление U на указанном интервале имеет вид линейной функции. После момента $\tau = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ управление не применяется.

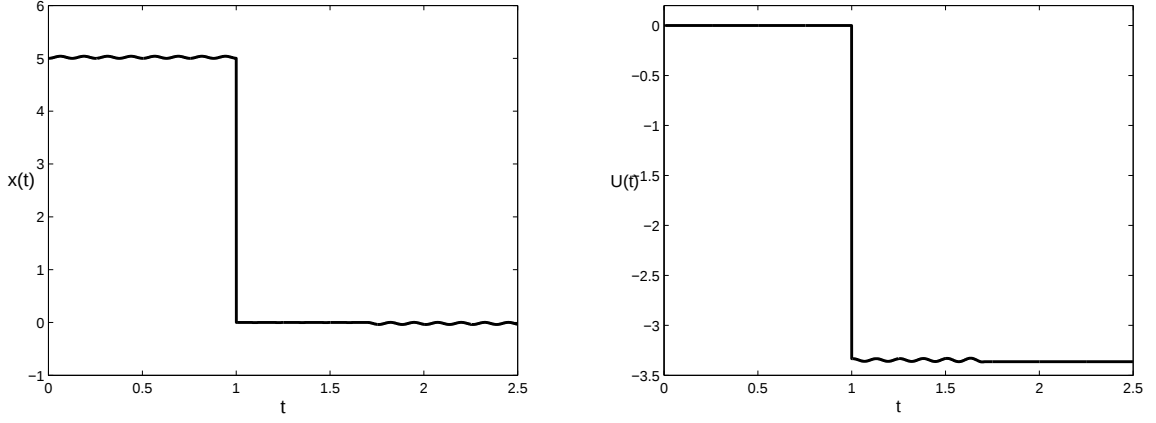


Рис. 2.4: Траектория $x(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = \sin(50t)$.

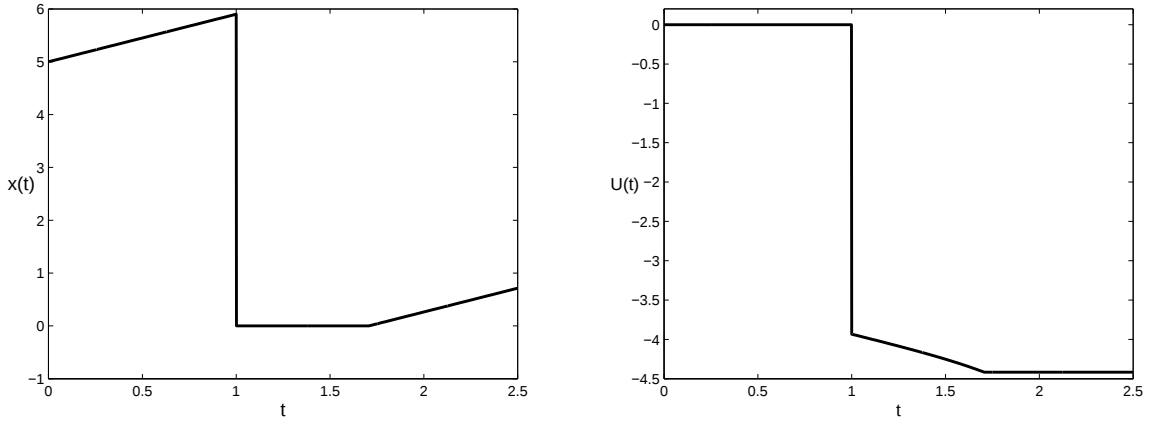


Рис. 2.5: Траектория $x(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = 0.9$.

2.7.2 Синтез быстрых управлений

Теперь найдем решение рассмотренной задачи в быстрых управлениях. Схема перехода к быстрым управлениям, основанная на результатах статьи [12], описана в первой главе, в разделе 1.4. Будем использовать аппроксимацию дельта-функции $\Delta^0(t) = \frac{1}{2h}I_{[0,2h]}(t)$, схематически представленную на рисунке 1.6 слева. Она равна $\frac{1}{2h}$ при $t \in [0, 2h]$ и нулю в противном случае. Зафиксируем некоторое малое h . Найдём $M_0(t)$ (1.61):

$$M_0(t) = \frac{3}{2} + h^2 - (t - 1 + h)^2.$$

Теперь мы перейдём к системе (1.63)

$$dy(t) = M_0(t)dU^{(y)} + v(t)dt \quad (2.51)$$

и найдём для неё синтез импульсного управления тем же способом, что и в предыдущем примере. После этого по формуле (1.64) получим быстрое управление для исходной системы.

Функция цены в задаче синтеза для системы (2.51) представима в виде $\mathcal{V}(t, y) = \beta(t)|y| + k(t)$, где

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} + h^2}, & \text{при } t \in [0, 1 - h], \\ \frac{1}{\frac{3}{2} + h^2 - (t - 1 + h)^2}, & \text{при } t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}\right), \\ 1, & \text{при } t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right], \end{cases}$$

$$k(t) = \int_t^{2.5} \beta(\tau) d\tau.$$

Вид функции цены $\mathcal{V}(t, y)$ не будем приводить в силу его громоздкости. Частные производные функции цены по t и y равны

$$\mathcal{V}_t(t, y) = \begin{cases} -\frac{1}{\frac{3}{2} + h^2}, & \text{при } t \in [0, 1 - h], \\ \frac{2(t - 1 + h)|y|}{\left(\frac{3}{2} + h^2 - (t - 1 + h)^2\right)^2} - \frac{1}{\frac{3}{2} - (t - 1)^2}, & \text{при } t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}\right), \\ -1, & \text{при } t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right]. \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_x(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} + h^2} \operatorname{sign} x, & \text{при } t \in [0, 1 - h], \\ \frac{\operatorname{sign} x}{\frac{3}{2} + h^2 - (t - 1 + h)^2}, & \text{при } t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}\right), \\ \operatorname{sign} x, & \text{при } t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right]. \end{cases}$$

Функции $\mathcal{H}_1(t, x)$, $\mathcal{H}_2(t, x)$ равны

$$\mathcal{H}_1(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 1 - h], \\ \frac{2(t - 1 + h)|y|}{\left(\frac{3}{2} + h^2 - (t - 1 + h)^2\right)^2}, & \text{при } t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}\right), \\ 0, & \text{при } t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right]. \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_2(t, x) = \begin{cases} \frac{h - h^2 + (t - 1 + h)^2}{\frac{3}{2} + h}, & \text{при } t \in [0, 1 - h], \\ 0, & \text{при } t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}\right), \\ -\frac{1}{2} - h^2 + (t - 1 + h)^2, & \text{при } t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right]. \end{cases}$$

Отсюда следует правило импульсного управления для системы (2.51):

- Если точка (t, y) находится в области $t \in [0, 1 - h]$ или $t \in \left[1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2}, 2.5\right]$, то управлять не надо.

- В области $\left\{ t \in \left(1 - h, 1 - h + \sqrt{\frac{1}{2} + h^2} \right), |y| > 0 \right\}$ требуется применить импульсное управление, переводящее y в ноль.

По формуле (1.64) рассчитывается быстрое управление для исходной системы.

На рисунках 2.6 и 2.8 показаны примеры траектории при различных реализациях помех. В обоих примерах $x(0) = 5$.

На рисунке 2.7 приведены быстрые управления $u = \frac{dU}{dt}$ при помехе $v(t) = \sin(50t)$. Слева $h = 0.04$, справа $h = 0.08$. Соответствующая траектория приведена на рисунке 2.6. При указанных быстрых управлениях траектории внешне практически неразличимы, поэтому приведен только один рисунок. Значение функционала для управления на рисунке 2.7 слева равно $J(u) = 3.6$, для управления на рисунке 2.7 справа равно $J(u) = 3.5$.

На рисунке 2.9 приведены быстрые управления $u = \frac{dU}{dt}$ при постоянной помехе $v(t) = 0.9$. Слева $h = 0.04$, справа $h = 0.08$. Соответствующая траектория приведена на рисунке 2.8 (внешне они также совпадают). Значение функционала для управления на рисунке 2.9 слева равно $J(u) = 5.1$, для управления на рисунке 2.9 справа равно $J(u) = 5.1$. При $h = 0.04$ управление имеет большую абсолютную величину, чем при $h = 0.08$.

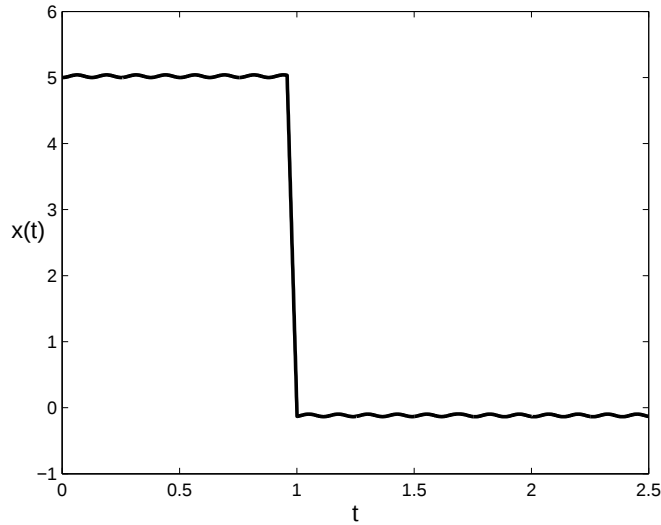


Рис. 2.6: Траектория $x(t)$ с быстрым управлением при помехе $v(t) = \sin(50t)$.

Таким образом, на примере показано построение синтеза импульсных и быстрых управлений согласно правилу синтеза, следующему из неравенства ГЯБА (2.41), в случае, когда функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ может быть найдена явным образом. Быстрые управления, указанные на рисунках 2.7 и 2.9, позволяют получить физически реализуемые аппроксимации оптимальных импульсных воздействий. Подобные аппроксимации могут удовлетворять различным требованиям, накладываемым на задачу. Например, для рассматриваемой одномерной системы приведено решение в быстрых управлениях, которые построены при помощи аппроксимаций дельта-функции, имеющих минимальный модуль среди аппроксимаций на

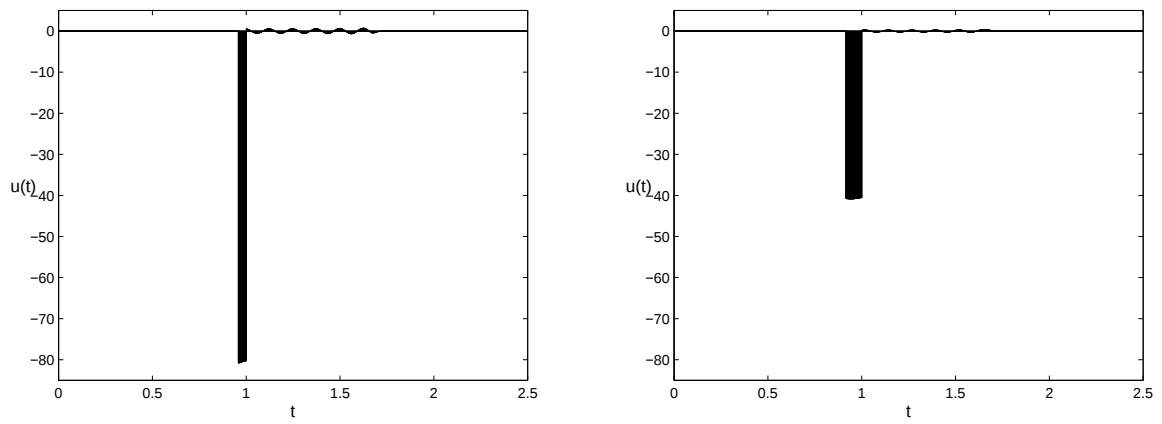


Рис. 2.7: Быстрые управления $u(t)$ при помехе $v(t) = \sin(50t)$. Слева $h = 0.04$, справа $h = 0.08$.

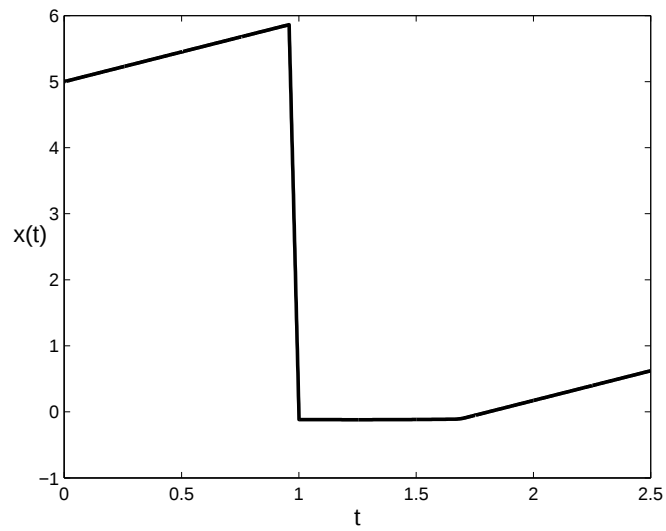


Рис. 2.8: Траектория $x(t)$ с быстрым управлением при помехе $v(t) = 0.9$.

фиксированном отрезке времени. Найдены быстрые управления различной длительности и, соответственно, различной величины воздействия.

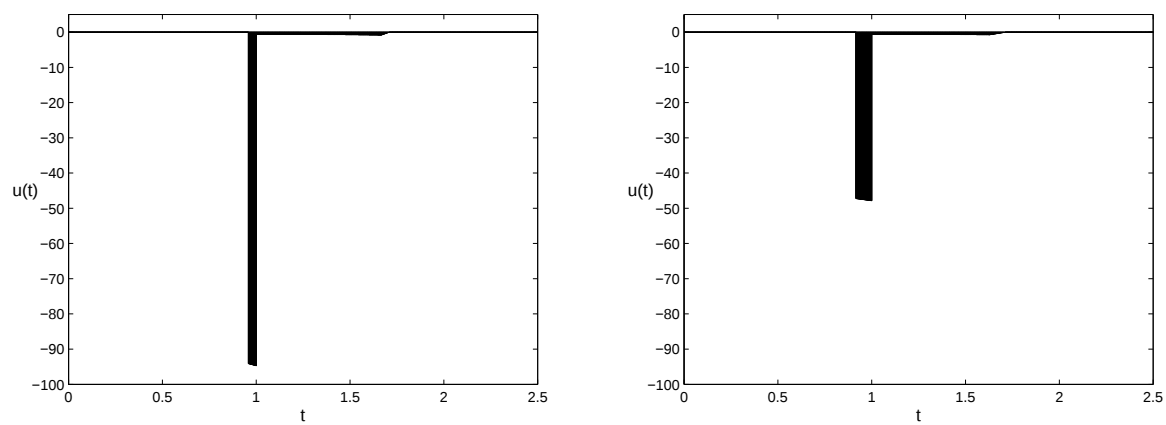


Рис. 2.9: Быстрые управления $u(t)$ при помехе $v(t) = 0.9$. Слева $h = 0.04$, справа $h = 0.08$.

Глава 3

Численный алгоритм синтеза импульсных управлений

3.1 Введение

В Главе 2 показано, что функция цены синтеза удовлетворяет неравенству типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, из которого можно найти синтез управления. Однако, получить аналитическое представление для функции цены удаётся только для ограниченного класса задач. В общем случае для построения управления можно использовать аппроксимации функции цены.

В данной главе предложен численный алгоритм синтеза управления. Для его реализации построена верхняя оценка функции цены с коррекциями. Аппроксимация функции цены с коррекциями построена при помощи аппроксимации сопряжённой функции, нижняя оценка которой найдена в классе кусочно-аффинных выпуклых функций. Применение алгоритма проиллюстрировано примерами, приведёнными в конце главы.

Предложенный метод построения оценки сопряжённой функции позволяет также построить нижнюю оценку функции цены с коррекциями, с помощью которой можно получить аппроксимацию множества достижимости.

Результаты третьей главы опубликованы автором в работе [62] в соавторстве с научным руководителем А. Н. Дарьиным. Научному руководителю принадлежит общая постановка задачи и рекомендации по поводу выбора для аппроксимаций класса кусочно-аффинных выпуклых функций. Доказательства принадлежат автору диссертации.

3.2 Постановка задачи

Рассмотрим импульсную систему управления с помехой:

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + B(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t) = x. \quad (3.1)$$

Здесь, как и ранее, $x \in \mathbb{R}^n$, управление $U(s) \in BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$ — m -векторная функция ограниченной вариации.

Напомним, что мы рассматриваем помехи $v(t)$ из множества возможных помех

$$\mathcal{M}(t) = \{v : [t, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q \mid v(\cdot) \in L^\infty[t, t_1], v(s) \in \mathcal{Q}(s) \text{ для п.в. } s \in [t, t_1]\},$$

где L_∞ — пространство измеримых, почти всюду ограниченных функций, $\mathcal{Q}(s)$ — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$. Многочисленное отображение $\mathcal{Q}(t)$ полунепрерывно сверху в метрике Хаусдорфа. Решение системы будем понимать в том же смысле, что и в разделе 1.1.4.

Как и в предыдущей главе, для упрощения выкладок сделаем замену в системе (3.1) так, чтобы после замены в полученной системе слагаемое с матрицей A стало нулевым. Будем рассматривать систему

$$dx(s) = B(s)dU(s) + v(s)ds, \quad x(t) = x. \quad (3.2)$$

с функционалом

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[t, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)). \quad (3.3)$$

Цель управления — минимизировать функционал (3.3) на траекториях системы (3.2), несмотря на наличие неопределённости $v(s) \in \mathcal{M}(s)$.

3.3 Аппроксимации минимаксной и максиминной функций цены

В разделе 2.2 были введены минимаксная и максиминная функции цены

$$V(t, x) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t) = x], \quad (3.4)$$

$$W(t, x) = \max_{v(\cdot)} \min_{U(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \mid x(t) = x]. \quad (3.5)$$

В разделе 2.4.3 было показано, что функции $V^*(t, p)$ и $W^*(t, p)$, сопряжённые к минимаксной и максиминной функциям цены $V(t, x)$ (3.4) и $W(t, x)$ (3.5), можно представить в виде

$$\begin{aligned} V^*(t, p) &= T^{[t, t_1]} S^{[t, t_1]} \varphi^*(p), \\ W^*(t, p) &= S^{[t, t_1]} T^{[t, t_1]} \varphi^*(p), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где операторы S и T действуют по правилам:

$$\begin{aligned} S^{[t, t_1]} \varphi^*(p) &= \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}, \\ T^{[t, t_1]} \psi^*(p) &= \psi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $\text{conv}(\cdot)$ — операция овыпукления функции, то есть получения наибольшей выпуклой функции, не превышающей исходной функции; опорная функция $\rho(\cdot \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$ строится ко множеству

$$\mathbb{Q}(t, t_1) = \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau;$$

$\mathcal{B}_V[t, t_1]$ — единичный шар в полунорме

$$\|\ell\|_V = \|B^T(\cdot)\ell\|_{C[t, t_1]};$$

а индикаторная функция $\mathcal{I}(p \mid \mathcal{A})$ определяется как

$$\mathcal{I}(p \mid \mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in \mathcal{A}, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

В следующих разделах будут построены верхние и нижние оценки функций $V^*(t, p)$ и $W^*(t, p)$ (3.6).

3.3.1 Класс функций $\mathcal{F}$

Определим класс функций, в котором мы будем строить аппроксимации. Пусть заданы $\{p_i\}_{i=1}^I$ — конечный набор точек $p_i \in \mathbb{R}^n$, среди которых $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, и набор вещественных чисел $\{f_i\}_{i=1}^I$.

Определение 3.1. Функцией класса $\mathcal{F}$, соответствующей набору параметров $\{p_i, f_i\}_{i=1}^I$, будем называть наибольшую выпуклую функцию $f(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \text{dom } f = \text{conv}\{p_i\}_{i=1}^I, \\ f(p_i) \leq f_i \quad i = 1 \dots I, \end{cases}$$

где $\text{conv}\{p_i\}_{i=1}^I$ — выпуклая оболочка набора точек $\{p_i\}_{i=1}^I$.

Из данного определения следует, что каждая функция $f \in \mathcal{F}$ является кусочно-аффинной выпуклой функцией, которая определяется однозначно набором параметров $\{p_i, f_i\}$. При этом одну и ту же функцию могут определять разные наборы параметров. На рисунке 3.2 схематически показан пример кусочно-аффинной выпуклой функции из класса $\mathcal{F}$, определяемой параметрами $\{p_i, f_i\}_{i=1}^5$, причём параметр $\{p_2, f_2\}$ может быть исключён из описания данной функции.

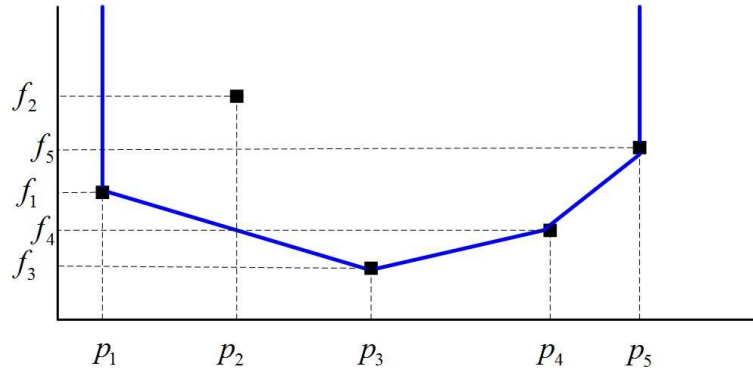


Рис. 3.1: Функция из класса $\mathcal{F}$.

3.3.2 Свойства оператора S

Рассмотрим оператор S из (3.7):

$$S^{[t, t_1]} \varphi^*(p) = \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1)) \}.$$

Теорема 3.1. Справедливы следующие утверждения.

1. Для любой функции φ^* из класса $\mathcal{F}$ с параметрами $\{p_i, \varphi_i^*\}$ функция $S\varphi^*$ будет принадлежать $\mathcal{F}$ с параметрами $\{p_{ik}, \psi_{ik}^*\}$, где

$$\begin{cases} \{p_{ik}\} \subseteq \{p_i\}, \\ \psi_{ik}^* = \varphi_{ik}^* - \rho_{ik}, \\ \rho_{ik} = \rho(p_{ik} \mid \mathbb{Q}(t, t_1)). \end{cases} \quad (3.8)$$

2. Для любых функции φ_1^*, φ_2^* из класса $\mathcal{F}$ таких, что $\varphi_1^*(p) \leq \varphi_2^*(p)$ при всех $p \in \mathbb{R}^n$, выполняется $S\varphi_1^*(p) \leq S\varphi_2^*(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Введём функцию $f_1(p) = \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$, эффективная область которой совпадает с эффективной областью функции $\varphi^*(p)$: $\text{dom } f_1(p) = \text{dom } \varphi^*(p)$. Поскольку $\varphi^*(p) \in \mathcal{F}$, множество $\text{dom } f_1(p)$ можно разбить на симплексы, на каждом из которых функция $\varphi^*(p)$ является аффинной. Тогда на каждом симплексе $f_1(p)$ равна разности аффинной функции $\varphi^*(p)$ и выпуклой функции $\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t_1))$.

Рассмотрим аффинную функцию, принимающую в вершинах рассматриваемых симплексов такие же значения, что и $f_1(p)$, и обозначим её $f_2(p)$. В точках $\{p_i\}$ функция $f_2(p)$ принимает значения $f_2(p_i) = \varphi^*(p_i) - \rho_i$. В общем случае $f_2(p)$ не будет выпуклой. Она будет нижней оценкой исходной функции: $f_2(p) \leq f_1(p)$ для всех $p \in \text{dom } f_1$. Возьмем $f_3(p) = \text{conv } f_2(p)$. По свойству овыпукления функции, f_3 — наибольшая выпуклая функция, не превосходящая f_2 . Из приведённых рассуждений следует, что $f_3(p) = \text{conv } f_1(p) = S\varphi^*(p)$.

Известно, что надграфик овыпукления функции совпадает с выпуклой оболочкой надграфика функции:

$$\text{epi}(\text{conv } f_2) = \text{conv}(\text{epi } f_2).$$

Поскольку f_2 — кусочно-аффинная функция, существует D такое, что $\max_i \{\varphi^*(p_i) - \rho_i\} < D < \infty$, и множество $\mathcal{D} = \text{epi } f_2 \cap \{f_2(p) \leq D\}$ будет многогранником в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда построение $S\varphi^*(p)$, сводится к построению выпуклой оболочки множества $\mathcal{D}$, которое может быть выполнено при помощи алгоритма QuickHull [35] или какого-либо другого алгоритма построения выпуклой оболочки множества [41].

В процессе построения выпуклой оболочки множества $\mathcal{D}$ часть точек из множества $\{p_i\}$ может быть отброшена, новые точки не добавляются. Из получившегося выпуклого многогранника можно однозначно восстановить функцию $S\varphi^*(p) = \text{conv } f_2(p)$. По построению, $S\varphi^* \in \mathcal{F}$ с параметрами (3.8).

Второе утверждение теоремы следует из свойства овыпукления функции. □

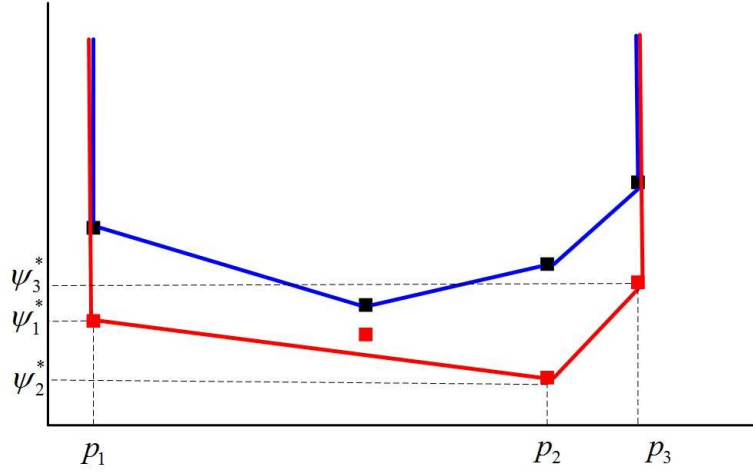
На рисунке 3.2 показан пример применения оператора S . Исходная функция расположена на этом рисунке выше, она определяется четырьмя точками-параметрами $\{p_i\}$ и значениями в них. Результирующая функция расположена на рисунке ниже и определяется параметрами $\{p_i, \psi_i^*\}_{i=1}^3$, одна из точек-параметров исходной функции была исключена при построении.

3.3.3 Свойства оператора T

Рассмотрим оператор T (3.7):

$$T^{[t, t_1]} \psi^*(p) = \psi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t_1]).$$

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения.*

Рис. 3.2: Применение оператора S .

1. Пусть функция ψ^* принадлежит классу $\mathcal{F}$ с параметрами $\{p_j, \psi_j^*\}$. Тогда существуют операторы T_- , T_+ , такие, что $T_- \psi^*(p) \leq T \psi^*(p) \leq T_+ \psi^*(p)$ для всех p , функции $T_- \psi^*$, $T_+ \psi^* \in \mathcal{F}$ с параметрами $\{p_{\nu-}, \phi_{\nu-}^*\}$ и $\{p_{\nu+}, \phi_{\nu+}^*\}$, которые определяются из исходных параметров $\{p_j, \psi_j^*\}$ и вида оператора T , а именно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{p_{\nu-}\} \subseteq \{p_j^{(1)}\} \cup \{p_{j-}^{(2)}\}, \\ \{p_{\nu+}\} \subseteq \{p_j^{(1)}\} \cup \{p_{j+}^{(2)}\}, \\ \{p_j^{(1)}\} = \{p_j \in \text{dom } \psi^*(p) \cap \mathcal{B}_V[t, t_1]\} \\ \{p_{j-}^{(2)}\} \in \Gamma_+, \\ \{p_{j+}^{(2)}\} \in \Gamma_-, \\ \phi_{\nu-/+}^* = \psi_\nu^*, \text{ если } \nu \in \{j^{(1)}\}, \\ \phi_{\nu-/+}^* = \psi^*(p_\nu), \text{ если } \nu \in \{j_-^{(2)}\} \text{ или } \nu \in \{j_+^{(2)}\}, \end{array} \right.$$

где поверхность Γ_- — это часть границы $\partial B_V[t, t_1]$, проходящая по области $\text{dom } \psi^*(p)$, а Γ_+ — многогранная поверхность, состоящая из касательных гиперплоскостей к Γ_- .

2. Если две функции $\psi_1^* \in \mathcal{F}$, $\psi_2^* \in \mathcal{F}$ и $\psi_1^*(p) \leq \psi_2^*(p)$, для всех $p \in \mathbb{R}^n$ то $T_- \psi_1^*(p) \leq T_- \psi_2^*(p)$, $T_+ \psi_1^*(p) \leq T_+ \psi_2^*(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. На рисунке 3.3 схематически показан результат прибавления к функции индикаторной функции множества. Такая операция может изменить область определения исходной функции:

$$\text{dom } T \psi^*(p) = \text{dom } \psi^*(p) \cap \mathcal{B}_V[t, t_1].$$

Тогда часть точек $\{p_j\}$, определяющих исходную функцию, может не попасть в множество $\mathcal{B}_V[t, t_1]$.

Обозначим через Γ_- часть границы $\partial B_V[t, t_1]$, проходящую по области $\text{dom } \psi^*(p)$. Рассмотрим некоторый набор точек, лежащих на Γ_- , и обозначим его как $\{p_{j-}^{(2)}\}$. На рисунке они обозначены кружками вдоль границы. В этих точках проведём опорные гиперплоскости ко множеству $\mathcal{B}_V[t, t_1]$. Они будут проходить снаружи этого множества, поскольку множество

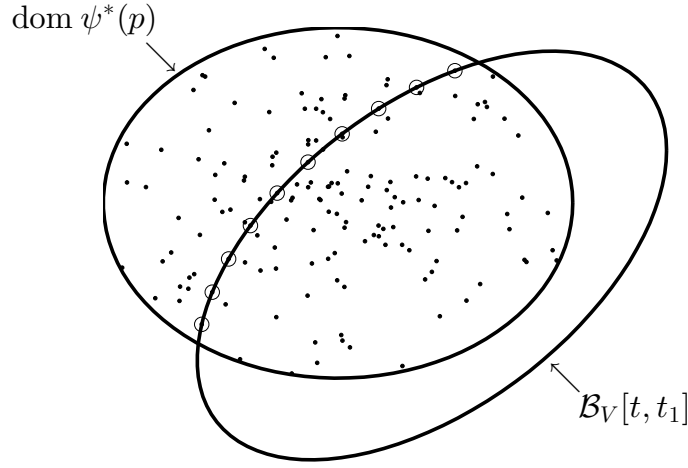


Рис. 3.3: Прибавление индикаторной функции.

$\mathcal{B}_V[t, t_1]$ выпукло. Аппроксимируем границу Γ_- касательной многогранной поверхностью Γ_+ , образуемой этими гиперплоскостями.

Поскольку множество $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ выпукло, поверхность Γ_+ можно задать как выпуклую оболочку точек, лежащих на Γ_+ . Обозначим их как $\{p_{j_-}^{(2)}\}$. Значения функции $\psi^*(p)$ в точках $\{p_{j_-}^{(2)}\}$ и $\{p_{j_+}^{(2)}\}$ можно вычислить как $\psi^*(p_{j_-}^{(2)})$ и $\psi^*(p_{j_+}^{(2)})$.

Заметим, что по проведённому построению, в точках $\{p_{j_-}^{(2)}\}$: $T_- \psi^*(p_{j_-}^{(2)}) \leq T \psi^*(p_{j_-}^{(2)})$, а в точках $\{p_{j_+}^{(2)}\}$: $T \psi^*(p_{j_+}^{(2)}) \leq T_+ \psi^*(p_{j_+}^{(2)})$.

Второе утверждение теоремы следует из построения операторов T_- , T_+ . $\square$

3.3.4 Аппроксимации функций цены

Рассмотрим сопряжённые функции $V^*(t, p)$ и $W^*(t, p)$ (3.6) и перейдём к построению нижней оценки $\tilde{V}_-^*(t, p) \in \mathcal{F}$ и верхней оценки $\tilde{W}_+^*(t, p) \in \mathcal{F}$, таких что $\tilde{V}_-^*(t, p) \leq V^*(t, p)$ и $\tilde{W}_+^*(t, p) \geq W^*(t, p)$.

В предыдущем разделе мы предположили, что функция $\varphi^* \in \mathcal{F}$. В рассматриваемой задаче это требование, вообще говоря, не выполняется, но для любой выпуклой функции φ^* , у которой $\text{dom } \varphi^*$ — выпуклый компакт, существуют нижняя и верхняя оценки $\varphi_-^*(p)$, $\varphi_+^*(p)$ из класса $\mathcal{F}$, такие что $\varphi_-^*(p) \leq \varphi^*(p) \leq \varphi_+^*(p)$. Из доказанных выше свойств операторов S и T следуют утверждения.

Теорема 3.3. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_-^*(t, p)$ и $\tilde{W}_+^*(t, p)$, определяемые соотношениями

$$\begin{cases} \tilde{V}_-^*(t, p) = T_-^{[t, t_1]} S^{[t, t_1]} \varphi_-^*(p), \\ \tilde{W}_+^*(t, p) = S^{[t, t_1]} T_+^{[t, t_1]} \varphi_+^*(p), \end{cases}$$

являются нижней и верхней оценками V^* и W^* из (3.6), такими что $V^*(t, p) \geq \tilde{V}_-^*(t, p)$ и $W^*(t, p) \leq \tilde{W}_+^*(t, p)$.

Теорема 3.4. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_+(t, x)$ и $\tilde{W}_-(t, x)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned}\tilde{V}_+(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_-^{[t, t_1]} S^{[t, t_1]} \varphi_-^*(p) \}, \\ \tilde{W}_-(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - S^{[t, t_1]} T_+^{[t, t_1]} \varphi_+^*(p) \},\end{aligned}\quad (3.9)$$

являются верхней и нижней оценкой для минимаксной и максиминной функций цены $V(t, x)$ из (3.4) и $W(t, x)$ из (3.5), такими что: $V(t, x) \leq \tilde{V}_+(t, x)$ и $W(t, x) \geq \tilde{W}_-(t, x)$.

3.4 Аппроксимации функции цены с коррекциями

В разделе 2.4.3 были введены минимаксная и максиминная функции цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}(t, x)$ (2.30), $W_{\mathcal{T}}(t, x)$ (2.31) и показано, что сопряжённые к ним функции $V_{\mathcal{T}}^*(t, p)$, $W_{\mathcal{T}}^*(t, p)$ представими в виде суперпозиции операторов S , T :

$$\begin{aligned}V_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= T^{[t, \tau_{N-1}]} S^{[t, \tau_{N-1}]} \dots T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(p), \\ W_{\mathcal{T}}^*(t, p) &= S^{[t, \tau_{N-1}]} T^{[t, \tau_{N-1}]} \dots S^{[\tau_2, \tau_1]} T^{[\tau_2, \tau_1]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} T^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi^*(p),\end{aligned}$$

где τ_i — точки разбиения $\mathcal{T}$ отрезка $[t, t_1]$, $t < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$.

Воспользуемся оценками (3.9). Тогда

$$\begin{aligned}V_{\mathcal{T}}(t, x) &= V(t, x; \tau_{N-1}, V_{\mathcal{T}}(\tau_{N-1}, x)) \leq \\ &\leq \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - T_-^{[t, \tau_{N-1}]} S^{[t, \tau_{N-1}]} \dots T_-^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p) \} = \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{T_- S \dots T_- S T_- S}_{N+1} \varphi_-^*(p) \},\end{aligned}\quad (3.10)$$

где в последнем равенстве зависимость операторов от времени опущена для сокращения записи.

Аналогично можно построить аппроксимации для максиминной функции цены с коррекциями $W_{\mathcal{T}}$ при помощи операторов S и T_+ . Таким образом, верна следующая теорема:

Теорема 3.5. Пусть функции $\varphi_-^*(p) \in \mathcal{F}$ и $\varphi_+^*(p) \in \mathcal{F}$ — нижняя и верхняя оценки функции $\varphi^*(p)$. Тогда функции $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ и $\tilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{T_- S \dots T_- S T_- S}_{N+1} \varphi_-^*(p) \}, \\ \tilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x) &= \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, x \rangle - \underbrace{S T_+ \dots S T_+ S T_+}_{N+1} \varphi_+^*(p) \},\end{aligned}\quad (3.11)$$

являются верхней и нижней оценкам минимаксной и максиминной функций цены с коррекциями $V_{\mathcal{T}}$ и $W_{\mathcal{T}}$, такими что: $V_{\mathcal{T}}(t, x) \leq \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ и $W_{\mathcal{T}}(t, x) \geq \tilde{W}_{\mathcal{T}_-}(t, x)$.

Здесь, также как и в (3.10), зависимость операторов от времени опущена для сокращения записи.

3.5 Численный алгоритм синтеза управления

Правило управления, описанное в разделе 2.5.2, позволяет построить закон управления, гарантирующий получение значения функционала $J(\cdot)$ не хуже, чем $\mathcal{V}(t, x)$. Вместо функции цены мы будем использовать найденную аппроксимацию $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$ (3.11). Полученный таким образом синтез будет оптимальным и гарантирует достижение значения функционала $J(\cdot)$ не хуже, чем $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$.

Для построения управления не обязательно знать функцию цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}$, однако необходимо вычислить градиент функции цены $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)}{\partial x}$.

Приведём численный алгоритм построения синтеза управления.

1. Для рассматриваемой системы (3.1) с помощью замены (2.27) перейти к системе с нулевой матрицей A (3.2).
2. Задать на рассматриваемом интервале времени $[t, t_1]$ разбиение $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^N$: $\tau_i = t_1 - \sigma i$, $\sigma = \frac{1}{N}(t_1 - t)$, где N — количество интервалов в разбиении.
3. Задать сетку разбиения в сопряжённом пространстве $\{p_i\}_{i=1}^I$, где p_i — n -мерные векторы. Вычислить сопряжённую функцию к терминальному слагаемому $\varphi^*(p)$ на этой сетке. В качестве набора $\{p_i\}_{i=1}^I$ можно брать равномерную сетку в $\mathcal{B}_V[t_1, t_1]$, либо генерировать случайное множество точек с равномерным распределением в той же области.

Напомним, что шар $\mathcal{B}_V[t, t_1]$ определяется как

$$\mathcal{B}_V[t, t_1] = \{\ell \in \mathbb{R}^n : \max_{\xi \in [t, t_1]} \|B^T(\xi)\ell\| \leq 1\}. \quad (3.12)$$

4. По правилу (3.11) вычислить сопряжённую функцию цены на разбиении по времени $\mathcal{T}$ и на заданной сетке по переменной p в сопряжённом пространстве $\{p_i\}_{i=1}^I$:

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, p) = T_-^{[s, \tau_k-1]} S^{[s, \tau_k-1]} \dots T_-^{[\tau_1, \tau_0]} S^{[\tau_1, \tau_0]} T_-^{[\tau_0, \tau_0]} S^{[\tau_0, \tau_0]} \varphi_-^*(p), \quad (3.13)$$

где $s \in \mathcal{T}$, $s = \tau_k$ для некоторого $k = 0, \dots, N$.

5. Найти градиент аппроксимации функции цены $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, x)}{\partial x}$. Из (3.15) следует, что в том случае, когда максимизатор $\hat{p}$ в (3.15) единственный, градиент $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, x)}{\partial x} = \hat{p}$. Иначе, если $\text{Arg max}_{p \in \mathbb{R}^n} (\langle p, x \rangle - \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, x)) = \hat{\mathcal{P}}$, то $\langle \frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, x)}{\partial x}, \xi \rangle = \max_{p \in \hat{\mathcal{P}}} \langle p, \xi \rangle$.
6. Для определения того, надо ли применять управления в момент (s, x) , следует воспользоваться правилом управления, полученным в разделе 2.5.2. Функция $\mathcal{H}_2(s, x)$ будет равна

$$\mathcal{H}_2(s, x) = 1 - \|B^T(s) \frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, x)}{\partial x}\| = 1 - \|B^T(s) \hat{p}\|,$$

если максимизатор $\hat{p}$ в (3.15) единственный. Если же в выражении (3.15) максимум достигается на множестве значений $\hat{\mathcal{P}}$, то определим $\hat{p} = \text{Arg max}_{p \in \hat{\mathcal{P}}} \|B^T(s)p\|$. Тогда снова

$$\mathcal{H}_2(s, x) = 1 - \|B^T(s)\hat{p}\|,$$

и далее оба эти случая мы рассматриваем вместе, подразумевая соответствующее значение $\hat{p}$.

Если $\mathcal{H}_2(s, x) > 0$, то $dU(s, x) = 0$, и управление не применяется, а если $\mathcal{H}_2(s, x) = 0$, то следует применить импульсное управление. Таким образом, если $\hat{p}$ лежит внутри шара $\mathcal{B}_V[s, t_1]$ (3.12), то $\mathcal{H}_2(s, x) > 0$, и управлять не надо, а если $\hat{p}$ лежит на границе этой области, то $\mathcal{H}_2(s, x) = 0$, и надо применить управление. Направление удара определяется вектором

$$d = -B^T(s)\hat{p}. \quad (3.14)$$

7. Если получено, что в момент времени (s, x) следует применить управление, то его величина определяется из условия, что $\mathcal{H}_1(s + 0, x(s + 0)) = 0$, где $x(s + 0)$ — положение после применения управления.

Сначала рассмотрим случай без помехи. Будем рассматривать точки вдоль направления удара (3.14): $y = x + \alpha B(s)d$, $\alpha > 0$ (здесь x — текущая точка, для которой мы определили, что $\mathcal{H}_2(s, x) = 0$). Тогда $\mathcal{H}_1(s, y) = \frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, y)}{\partial s}$. Найдём векторы $\hat{p}$ в точке y в моменты времени s и $s + \sigma$ и обозначим их $\hat{p}^{(s)}$ и $\hat{p}^{(s+\sigma)}$. Если $\hat{p}^{(s+\sigma)} = \hat{p}^{(s)}$, то $\frac{\partial \tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, y)}{\partial s} = 0$, и $\mathcal{H}_1(s, y) = 0$. Иначе $\mathcal{H}_1(s, y) > 0$.

Теперь обратимся к случаю с помехой. Из соотношения (3.13) следует, что

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, p) = T^{[s, s+\sigma]} S^{[s, s+\sigma]} \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s + \sigma, p).$$

Определим промежуточную функцию $f(s + \sigma, p) = S^{[s, s+\sigma]} \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s + \sigma, p)$. Тогда $\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, p) = T^{[s, s+\sigma]} f(s + \sigma, p)$. Переход от $\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s + \sigma, p)$ к $f(s + \sigma, p)$ позволяет учесть в функции $f(s + \sigma, p)$ влияние помехи, оказываемое в момент s , и далее рассматривать случай без помехи. Следует воспользоваться схемой, описанной в предыдущем абзаце: определить $\hat{p}$ для функций $f(s + \sigma, p)$ и $\tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, p)$ и сравнить их. В случае равенства $\mathcal{H}_1(s, y) = 0$. Иначе $\mathcal{H}_1(s, y) > 0$.

Таким образом можно получить управление и траекторию для системы с матрицей $A = 0$ и затем, выполнив обратную замену переменных, получить управление и траекторию исходной системы.

Если надо вычислить непосредственно аппроксимацию функции цены в момент времени $s \in \mathcal{T}$ в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$, то её можно найти через сопряжённую функцию:

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(s, x) = \max_{p \in \mathbb{R}^n} \{\langle p, x \rangle - \tilde{V}_{\mathcal{T}_-}^*(s, p)\}. \quad (3.15)$$

3.6 Примеры применения численного алгоритма синтеза управления

В данном разделе мы рассмотрим примеры построения синтеза управления при помощи алгоритма, предложенного в третьей главе.

Сразу отметим, что мы будем строить синтез для приближенной задачи, полученной из исходной задачи при помощи дискретизации по времени. Как было доказано выше (теорема 2.14), дискретизация по времени даёт ошибку в вычислении сопряжённой функции цены не более, чем

$$\max_{p \in \text{dom } \varphi^*} \|V_{\mathcal{T}}^*(t, p) - \mathcal{V}^*(t, p)\| \leq O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где N — количество интервалов в разбиении по времени. Здесь важна оценка сопряжённой функции цены, поскольку, как было показано в предыдущем разделе, именно значение сопряжённой функции определяет момент и величину управления.

Теперь оценим влияние дискретизации по p при определении аппроксимации сопряжённой функции цены, предложенной в третьей главе, то есть величину

$$\max_{p \in \text{dom } V_{\mathcal{T}}^*(t, p)} \|V_{\mathcal{T}}^*(t, p) - \tilde{V}_{\mathcal{T}}^*(t, p)\|.$$

Воспользуемся представлением (3.13) через операторы

$$\begin{aligned} S^{[t, t+\sigma]} \varphi^*(p) &= \text{conv} \{ \varphi^*(p) - \rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma)) \}, \\ T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p) &= \psi^*(p) + \mathcal{I}(p \mid \mathcal{B}_V[t, t+\sigma]). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi^*(p)$ — кусочно-аффинная выпуклая функция. Тогда $S^{[t, t+\sigma]} \varphi^*(p)$ — также будет кусочно-аффинной выпуклой функцией, и дискретизация по p не добавляет ошибки при её вычислении.

Необходимо оценить ошибку при переходе от $T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)$ к его оценке при помощи кусочно-аффинной выпуклой функции $T_-^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)$, на малом отрезке $[t, t+\sigma]$, $\sigma = \frac{t_1 - t}{N}$.

Пусть $\psi^*(p)$ — липшицева с константой L_{ψ^*} . Пусть область дискретизации по переменной p — это n -мерный куб со стороной $2p_{\max}$ и разбиением на N_p элементов по каждому измерению. Тогда оценка $T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)$ при помощи кусочно-аффинной выпуклой функции $T_-^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)$ на указанной сетке по переменной p даёт ошибку не более

$$\max_{p \in \text{dom } \psi^*} \|T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p) - T_-^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)\| \leq L_{\psi^*} \frac{2p_{\max} \sqrt{n}}{N_p} \leq (L_{\varphi^*} + L_{\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma))}) \frac{2p_{\max} \sqrt{n}}{N_p},$$

где L_{φ^*} , $L_{\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma))}$ — константы Липшица для функций $\varphi^*(p)$ и $\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma))$. Поскольку

$$\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma)) \leq M \|p\| \sigma,$$

где $M > 0$ — радиус шара, в который вложены значения отображения $\mathcal{Q}(s)$ для всех $s \in [t, t_1]$, то $L_{\rho(p \mid \mathbb{Q}(t, t+\sigma))} = M\sigma = M \frac{t_1 - t}{N}$.

Пусть терминальное слагаемое имеет вид

$$\varphi(x) = d(x, \mathcal{B}_\varepsilon(0)), \quad (3.16)$$

т.е. это расстояние от точки x до шара малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле. Тогда $\varphi^*(p) = \varepsilon \|p\|$, и $L_{\varphi^*} = \varepsilon$.

Таким образом, $L_{\psi^*} = \varepsilon + M \frac{t_1 - t}{N}$, и оценка $T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)$ при помощи кусочно-аффинной выпуклой функции дает ошибку не более

$$\max_{p \in \text{dom } \psi^*} \|T^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p) - T_-^{[t, t+\sigma]} \psi^*(p)\| \leq \left(\varepsilon + M \frac{t_1 - t}{N} \right) \frac{2p_{\max} \sqrt{n}}{N_p}.$$

Оператор T применяется $(N - 1)$ раз, и суммарная ошибка будет составлять не более

$$\begin{aligned} \max_{p \in \text{dom } V_{\mathcal{T}}^*(t, p)} \|V_{\mathcal{T}}^*(t, p) - \tilde{V}_{\mathcal{T}^-}^*(t, p)\| &\leq \left(\varepsilon + M \frac{t_1 - t}{N} \right) \frac{2p_{\max} \sqrt{n}}{N_p} (N - 1) = \\ &= \varepsilon O\left(\frac{N}{N_p}\right) + O\left(\frac{1}{N_p}\right). \end{aligned}$$

При терминальных функциях указанного вида (3.16) для стремления ошибки к нулю достаточно увеличения точек разбиения N_p . При терминальных функциях, у которых константа Липшица сопряженной функции $\varphi^*(p)$ не будет мала, необходимо дополнительно, чтобы $\frac{N}{N_p} \rightarrow 0$.

3.6.1 Пример 1

Вернёмся к примеру, рассмотренному во второй главе в разделе 2.7.1. Рассматривается движение точки на прямой в соответствии с уравнением

$$dx(t) = \left(\frac{3}{2} - (t - 1)^2 \right) dU + v(t) dt, \quad t \in [0, 2.5].$$

Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Цель управления U из класса функций ограниченной вариации — минимизировать функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[0, 2.5]} U(\cdot) + |x(2.5 + 0)|,$$

несмотря на наличие помехи.

Напомним, что функция цены в задаче синтеза в этом примере может быть найдена аналитически, и она равна

$$\mathcal{V}(t, x) = \begin{cases} \frac{2}{3}|x| - \frac{2}{3}t - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln(2 - \sqrt{3}) + 2\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } t \in [0, 1], \\ \frac{|x|}{\frac{3}{2} - (t - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}(t - 1) - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(t - 1) + \sqrt{3}} \right| - \\ \quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ |x| - t + \frac{5}{2}, & \text{при } t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]. \end{cases}$$

Приведём здесь полученное во второй главе правило синтеза

- Если точка (t, x) находится в области $t \in [0, 1]$ или $t \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2.5\right]$, то управлять не надо.
- В области $\left\{t \in \left(1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), |x| > 0\right\}$ требуется применить импульсное управление, переводящее x в ноль.

Для данного примера при помощи алгоритма, описанного в данной главе, была построена аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x)$. На рисунке 3.4 показаны полученная аналитически функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ и её верхняя оценка $\tilde{V}_{T_+}(t, x)$.

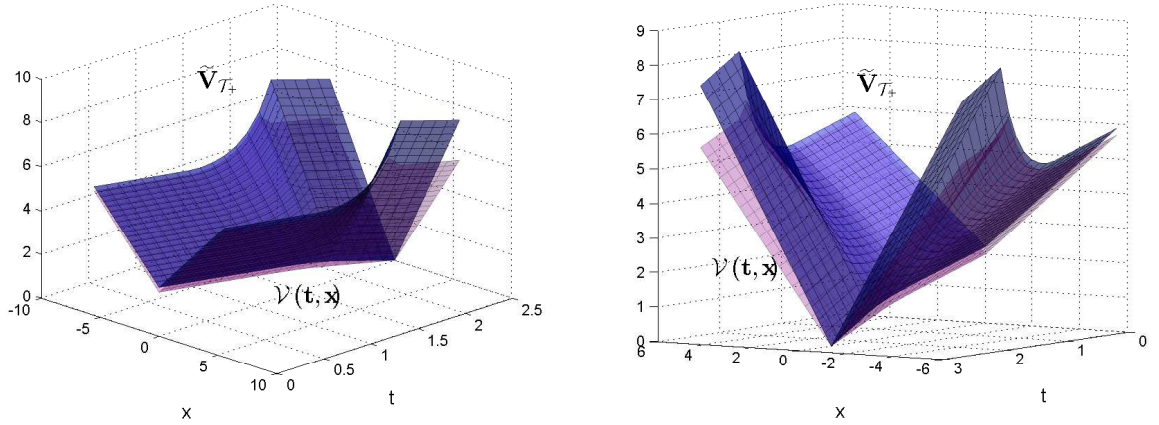


Рис. 3.4: Пример 1. Функция цены $\mathcal{V}(t, x)$ и её верхняя аппроксимация $\tilde{V}_{T_+}(t, x)$ (разные ракурсы). Аппроксимация $\tilde{V}_{T_+}(t, x)$ проходит на рисунке выше, чем исходная функция цены $\mathcal{V}(t, x)$.

Ниже приведены примеры построения траекторий при различных значениях параметров. Траектории построены на отрезке времени $[0, 2.5]$, начальная точка $x(0) = 5$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(0, x(0)) = 5.5$. На рисунке 3.5 приведены траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = \sin(40t)$. Значение функционала равно $J(U) = 3.3$. На рисунке 3.6 показаны траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = 1$. Значение функционала равно $J(U) = 5.4$.

На рисунках видно, что первый скачок траектории в ноль происходит не при $t = 1$, а чуть позже. Это связано с использованием аппроксимации функции цены, а не её точного значения. В целом, вид управления для данного примера с использованием аппроксимации функции цены совпадает с аналитическими результатами, полученными в Главе 2.

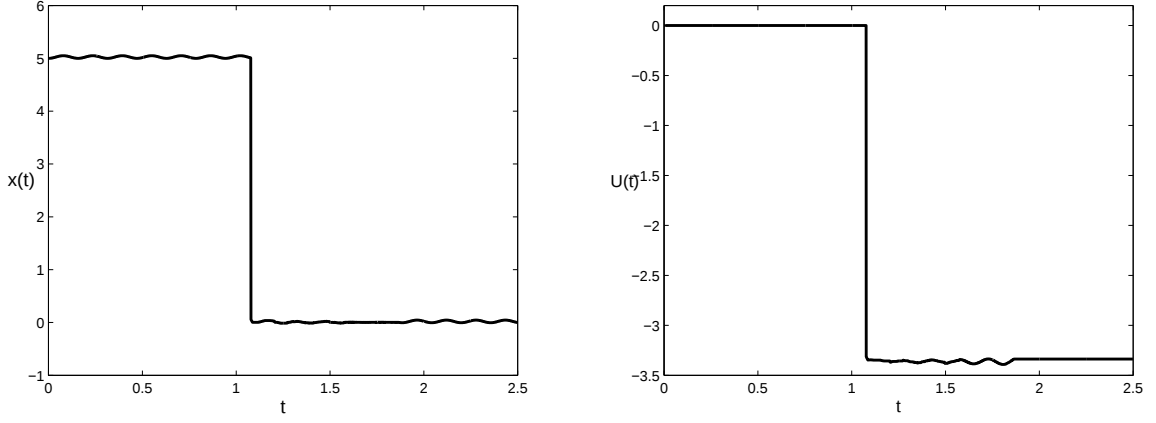


Рис. 3.5: Пример 1. Траектория $x(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = \sin(40t)$.

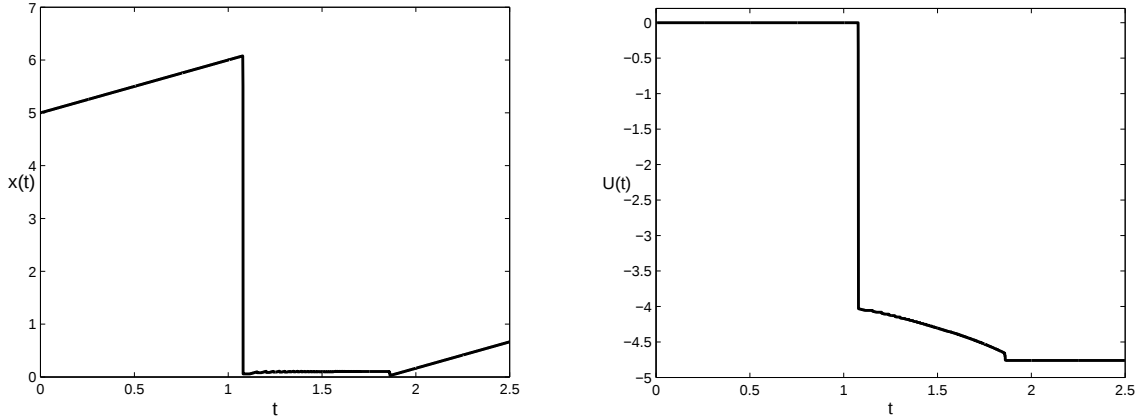


Рис. 3.6: Пример 1. Траектория $x(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = 1$.

3.6.2 Пример 2

Рассмотрим одномерную систему с функционалом другого вида

$$dx(t) = 0.5xdt + dU(t) + v(t)dt$$

на интервале времени $t \in [0, 1]$. Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Цель управления $U(\cdot)$ из класса функций ограниченной вариации — минимизировать функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[0,1]} U(\cdot) + \max\{|x(1+0)| - 1, 0\},$$

несмотря на наличие помехи.

На рисунке 3.7 показана аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, x)$.

На рисунке 3.8 приведены траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = \sin(40t)$ из начальной точки $x_0 = 2$. Траектория построена на отрезке времени $[0, 1]$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(0, x_0) = 2.2$. Значение функционала равно $J(U) = 2.0$. В данном примере шаг сетки по переменной t при расчёте функции цены и траектории составлял 0.0017, по переменной x шаг сетки при расчёте функции цены был равен 0.0276.

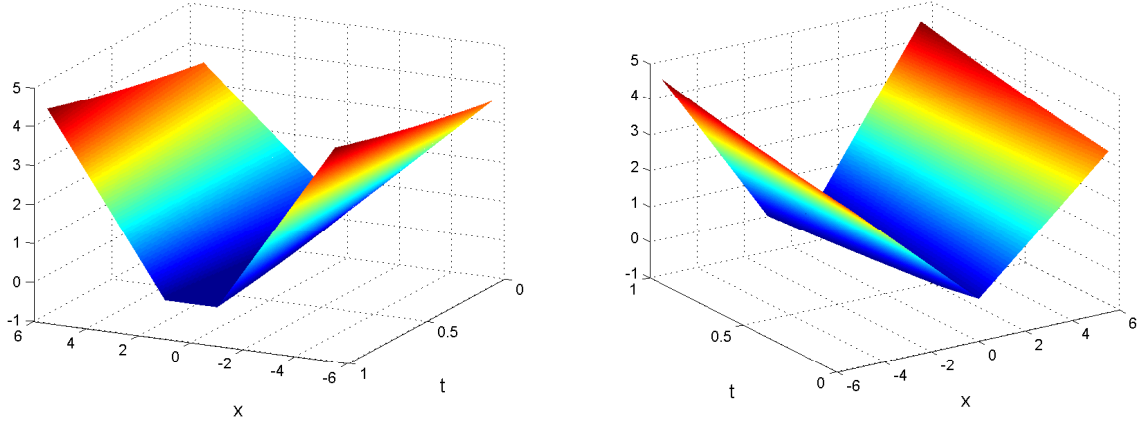


Рис. 3.7: Пример 2. Аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x)$, разные ракурсы.

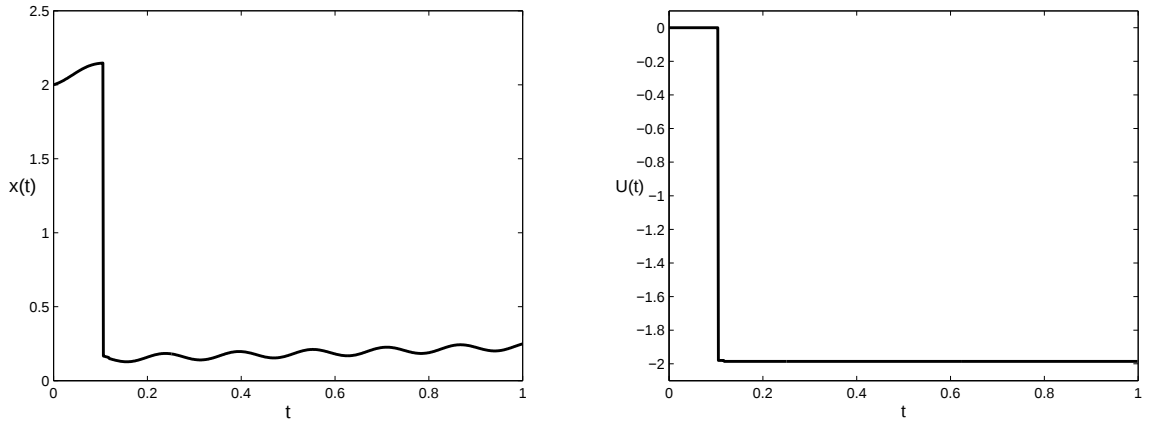


Рис. 3.8: Пример 2. Траектория $x(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = \sin(40t)$.

3.6.3 Пример 3

Рассмотрим двумерную систему с одномерным управлением и помехой

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= \left(\frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}t - 1 \right)^2 \right) dU + v(t)dt, \\ dx_2(t) &= dU \end{aligned}$$

на интервале времени $t \in [0, 1]$. Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Цель управления $U(\cdot)$ из класса функций ограниченной вариации — минимизировать функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[0,1]} U(\cdot) + \|x(1 + 0)\|,$$

несмотря на наличие помехи, где $x = (x_1, x_2)^T$ — фазовый вектор.

На рисунке 3.9 показаны аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x_1, x_2)$ при $x_2 = -1.07$ (слева) и при $x_2 = 1.98$ (справа).

Далее приведены примеры построения траекторий при различных значениях параметров. Траектории построены на отрезке времени $[0, 1]$. На рисунке 3.10 приведены траектория и

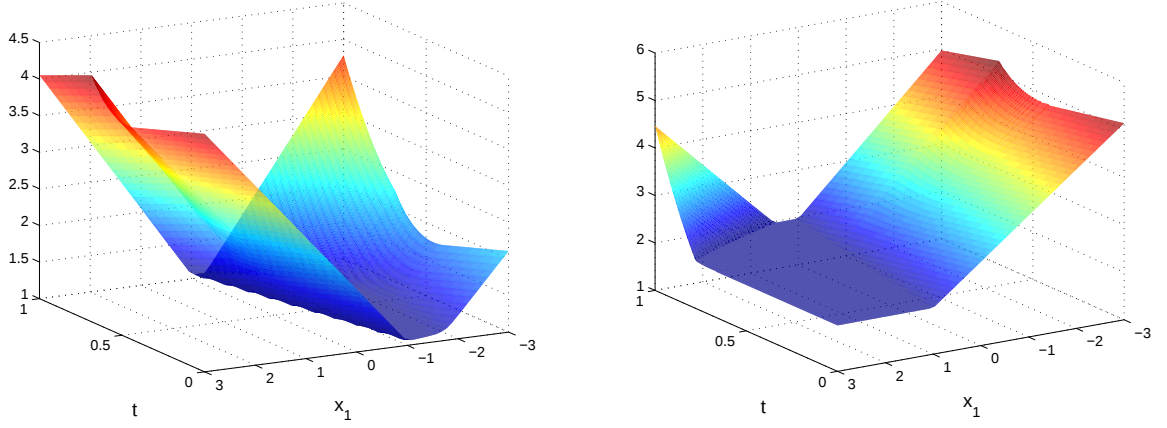


Рис. 3.9: Пример 3. Аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x_1, x_2)$ при $x_2 = -1.07$ (слева) и при $x_2 = 1.98$ (справа).

управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = \sin(20t)$ из начальной точки $x_0 = (-1, 1)$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(0, x_0) = 2.6$. Значение функционала равно $J(U) = 2.2$. На рисунке 3.11 показаны траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = 1$ из начальной точки $x_0 = (2, 2)$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(0, x_0) = 2.1$. Значение функционала равно $J(U) = 2.0$. В данном примере шаг сетки по переменной t при расчёте функции цены и траектории составлял 0.0026, по переменным x_1, x_2 шаг сетки при расчёте функции цены был равен 0.0678.

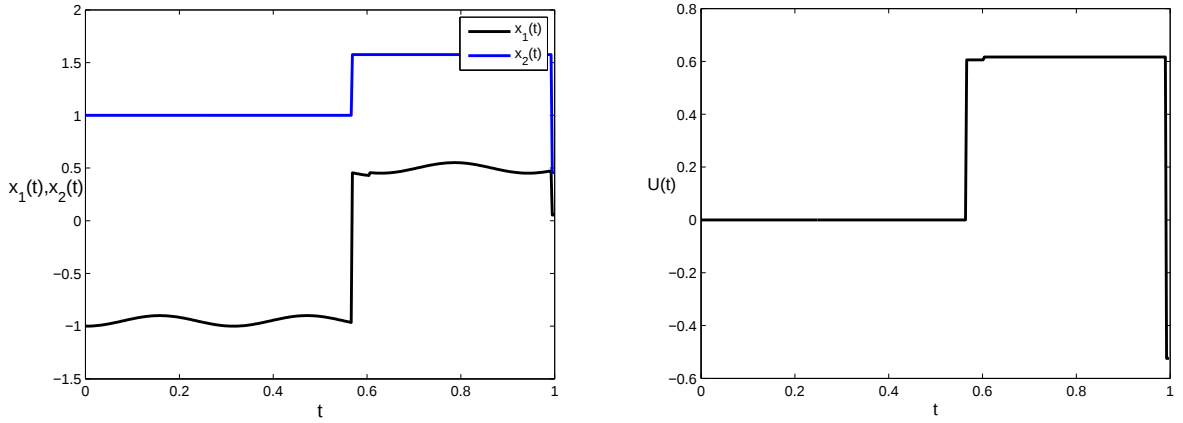


Рис. 3.10: Пример 3. Траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = \sin(20t)$.

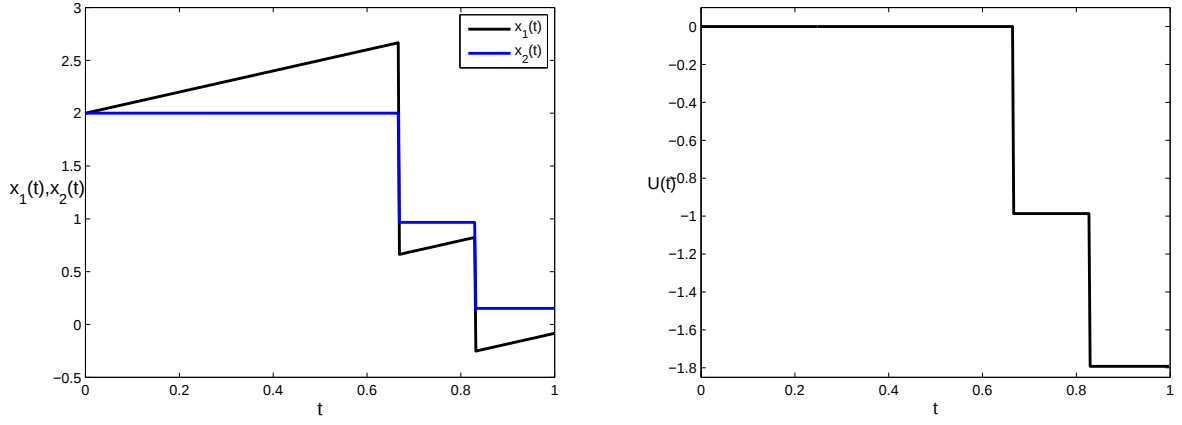


Рис. 3.11: Пример 3. Траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управление $U(t)$ при помехе $v(t) = 1$.

3.6.4 Пример 4

Вернёмся к системе, рассмотренной в примере из Главы 1 (1.65).

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= x_2 dt, \\ dx_2(t) &= -\omega^2 x_1 dt + dU + v dt \end{aligned}$$

на интервале времени $t \in [t_0, t_1] = [0, \frac{\pi}{\omega}]$ при $\omega = 3$. Задано ограничение на помеху $|v(t)| \leq 1$. Цель управления $U(\cdot)$ из класса функций ограниченной вариации — минимизировать функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \text{Var}_{[t_0, t_1]} U(\cdot) + \|x(t_1 + 0)\|,$$

несмотря на наличие помехи, где $x = (x_1, x_2)^T$ — фазовый вектор.

На рисунке 3.12 показаны аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x_1, x_2)$ при $x_2 = -0.71$ (слева) и при $x_2 = 0.64$ (справа).

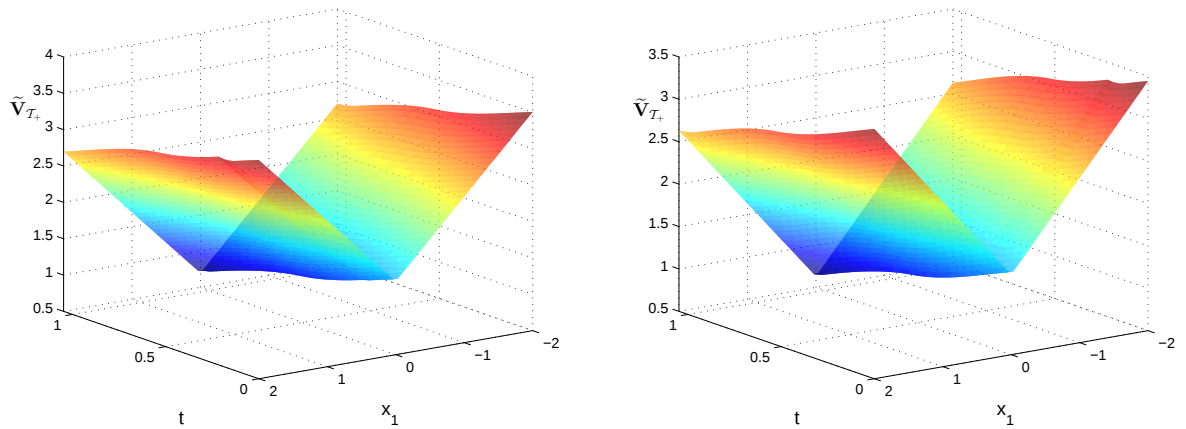


Рис. 3.12: Пример 4. Аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{T_+}(t, x_1, x_2)$ при $x_2 = -0.71$ (слева) и при $x_2 = 0.64$ (справа).

Далее приведены примеры построения траекторий при различных значениях параметров. Траектории построены на отрезке времени $[0, \frac{\pi}{\omega}]$. На рисунке 3.13 приведены траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = -1$ из начальной точки $x_0 = (1, 1)$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(0, x_0) = 2.9$. Значение функционала равно $J(U) = 2.2$. На рисунке 3.14 показаны траектория и управление $U(t)$ для системы при помехе $v(t) = \cos(5t)$ из начальной точки $x_0 = (1, -1)$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{T_+}(0, x_0) = 2.8$. Значение функционала равно $J(U) = 2.2$. В данном примере шаг сетки по переменной t при расчёте функции цены и траектории составлял 0.0026, по переменным x_1, x_2 шаг сетки при расчёте функции цены был равен 0.0678.

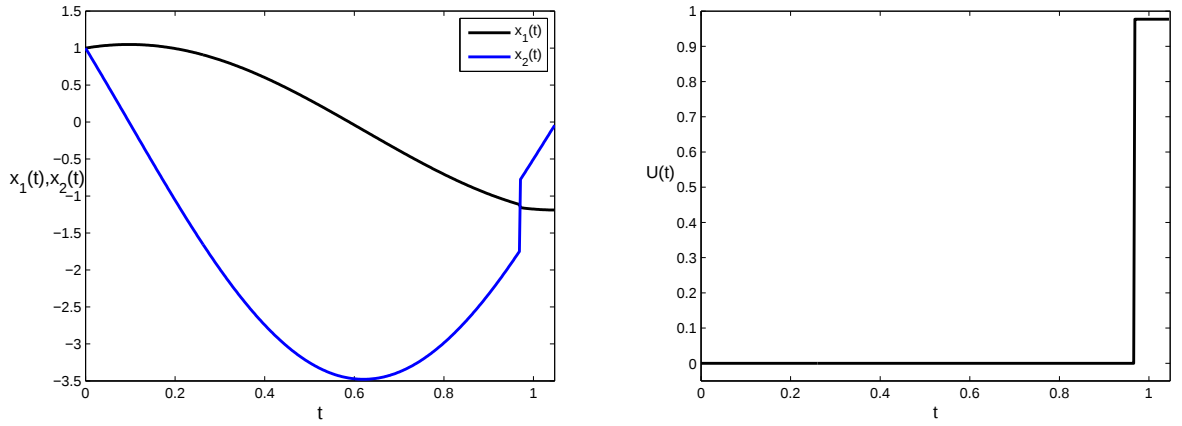


Рис. 3.13: Пример 4. Траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управление $U(t)$ из начальной точки $(1, 1)$ при помехе $v(t) = -1$.

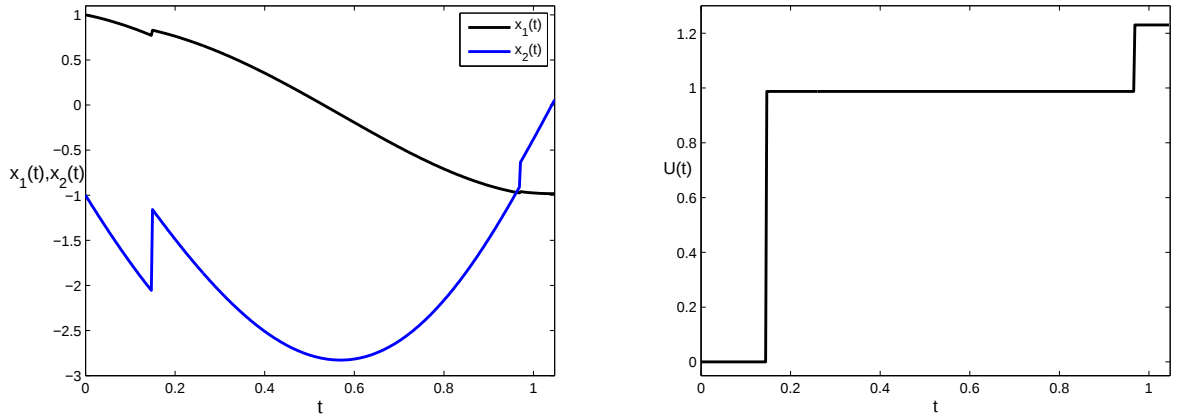
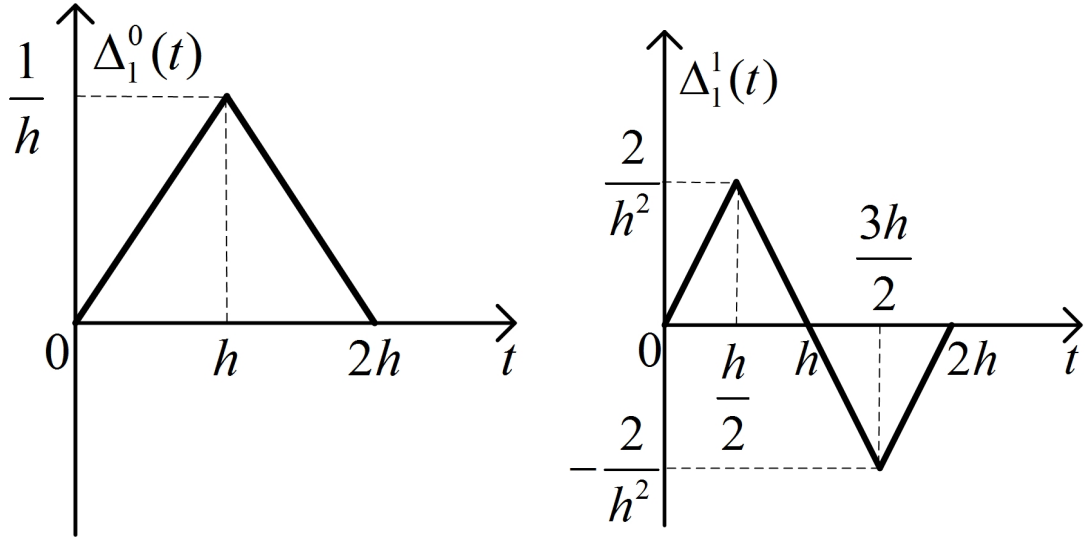


Рис. 3.14: Пример 4. Траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управление $U(t)$ из начальной точки $(1, -1)$ при помехе $v(t) = \cos(5t)$.

Рис. 3.15: $\Delta_1^0(t)$ и $\Delta_1^1(t)$

3.6.5 Пример 5

Теперь для колебательной системы из предыдущего примера найдём синтез быстрых управлений. Рассматриваем систему

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= x_2 dt, \\ dx_2(t) &= -\omega^2 x_1 dt + dU + v dt \end{aligned}$$

на интервале времени $t \in [t_0, t_1] = [0, \frac{\pi}{\omega}]$ при $\omega = 2$. Ограничение на помеху и функционал задачи — такие же, как и в предыдущем примере.

Схема перехода к быстрым управлениям, основанная на результатах статьи [12], описана в первой главе, в разделе 1.4. Будем использовать непрерывные аппроксимации дельта-функции и её первой производной, найденные в разделе 1.3. Они имеют вид

$$\Delta_1^0(t) = \begin{cases} \frac{t}{h^2}, & \text{при } 0 \leq t < h, \\ \frac{2}{h} - \frac{t}{h^2}, & \text{при } h \leq t \leq 2h, \end{cases} \quad \Delta_1^1(t) = \begin{cases} \frac{4t}{h^3}, & \text{при } 0 \leq t < \frac{h}{2}, \\ \frac{4}{h^2} - \frac{4t}{h^3}, & \text{при } \frac{h}{2} \leq t < \frac{3h}{2}, \\ -\frac{8}{h^2} + \frac{4t}{h^3}, & \text{при } \frac{3h}{2} \leq t \leq 2h. \end{cases}$$

и схематически представлены на рисунке 3.15.

Для некоторого малого h перейдём к системе вида (1.63)

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= y_2 dt - h dU_0^y(t) + dU_1^{(y)}(t), \\ dy_2(t) &= -\omega^2 y_1 dt + dU_0^y(t) + h\omega^2 dU_1^{(y)}(t) + v dt, \end{aligned}$$

для неё построим аппроксимацию функции цены и синтез импульсного управления $(U_0^{(y)}, U_1^{(y)})$.

После этого по формуле (1.64) получим быстрое управление для исходной системы:

$$u(t) = \int_{t_0}^t \Delta_1^0(t - \tau) dU_0^{(y)}(\tau) + \int_{t_0}^t \Delta_1^1(t - \tau) dU_1^{(y)}(\tau).$$

В примере взято значение $h = 0.1$. На рисунке 3.16 показана аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, y_1, y_2)$ при $y_2 = -0.5$.

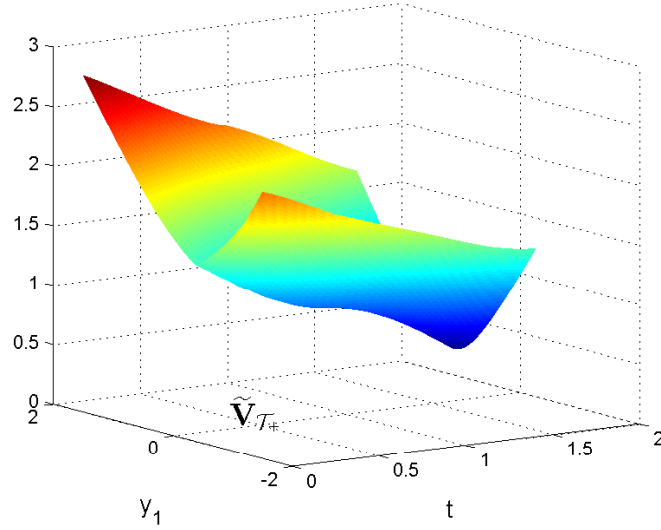


Рис. 3.16: Пример 5. Аппроксимация функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(t, y_1, y_2)$ при $y_2 = -0.5$.

На рисунке 3.17 приведены управления $(U_0^{(y)}(t), U_1^{(y)}(t))$, полученные при реализации помехи $v(t) = \sin 20t$ и известной начальной точке $x_0 = (0.5, -0.5)$. На рисунке 3.18 приведены траектория исходной системы и быстрое управление $u(t)$. Значение аппроксимации функции цены $\tilde{V}_{\mathcal{T}_+}(0, x_0) = 2.0$. Значение функционала равно $J(U) = 1.1$. В данном примере шаг сетки по переменной t при расчёте функции цены и траектории составлял 0.0039, по переменным x_1, x_2 шаг сетки при расчёте функции цены был равен 0.0303.

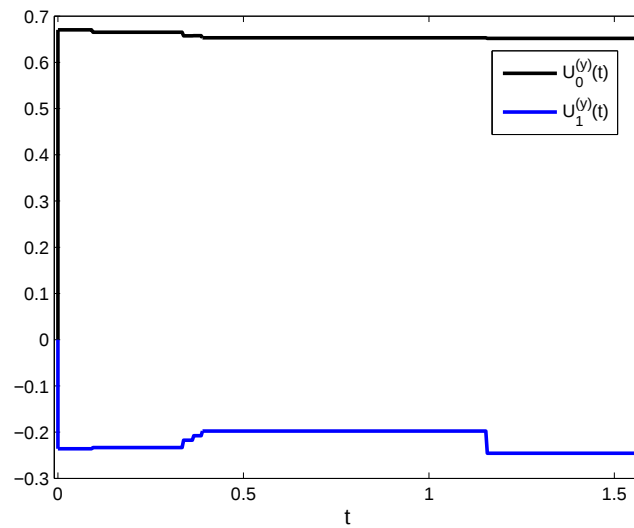


Рис. 3.17: Пример 5. Управления $(U_0^{(y)}, U_1^{(y)})$. Начальная точка траектории $x_0 = (0.5, -0.5)$, помеха $v(t) = \sin 20t$.

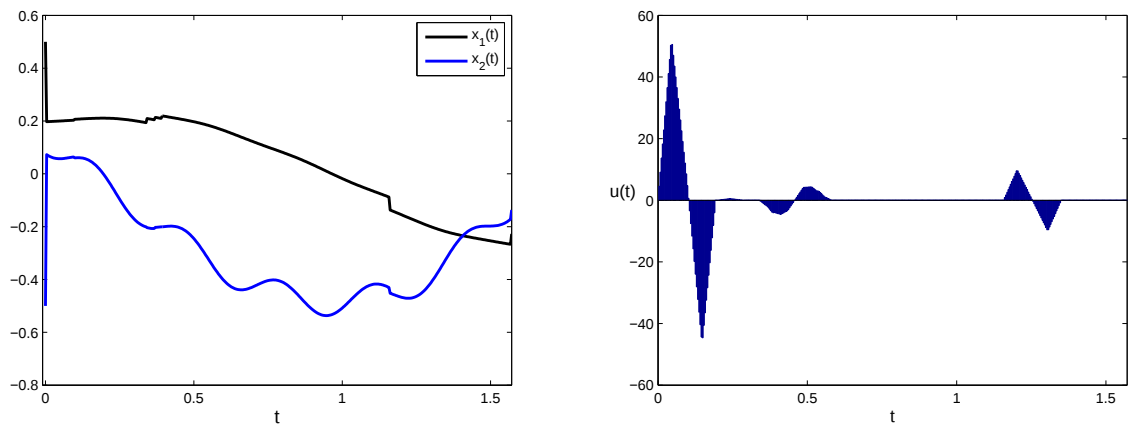


Рис. 3.18: Пример 4. Траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$ и быстрое управление $u(t)$. Начальная точка траектории $x_0 = (0.5, -0.5)$, помеха $v(t) = \sin 20t$.

Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Построены разрывные, непрерывные и гладкие (k раз дифференцируемые) аппроксимации обобщённых управлений с минимальным модулем аппроксимации, её производной, либо её производной k -ого порядка соответственно, которые используются при построении быстрых управлений.
2. Доказан принцип оптимальности в задаче синтеза импульсных и быстрых управлений для линейной системы при наличии неизвестной ограниченной помехи. Доказано, что функция цены удовлетворяет неравенству типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, и получена стратегия импульсного управления. Получены способы описания траекторий замкнутой системы.
3. Получен численный алгоритм построения синтеза импульсного управления при неопределённости, основанный на аппроксимации функции цены.

Литература

1. *Агранович М. С.* Обобщённые функции. М.: МЦНМО, 2008.
2. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
3. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматлит, 1961.
4. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
5. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.
6. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техн. 1982. С. 127–230.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1958.
9. *Гусев М. И.* Оптимальное управление обобщенными процессами при невыпуклых фазовых ограничениях // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1975. С. 64–112.
10. *Дарьин А. Н., Дигаилова И. А., Куржанский А. Б.* О задаче синтеза импульсных управлений по результатам измерений // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. №3. с. 92–105.
11. *Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В.* Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, №11. С. 1491–1500.
12. *Дарьин А. Н., Куржанский А.Б.* Быстрые воздействия в задаче синтеза импульсных управлений при неопределённости // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. №7. С. 963–971.
13. *Дыхта В. А., Самсонок О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
14. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
15. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. №5. С. 670–677.

16. *Красовский Н. Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. №1. С. 3–14.
17. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
18. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
19. *Красовский Н. Н., Репин Ю. М.* К задаче об успокоении линейной системы // ПММ. 1967. Т. 31. №3. С. 460–467.
20. *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. №224. С. 234–248.
21. *Куржанский А. Б.* Оптимальные системы с импульсными управлениями // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1975. С. 131–156.
22. *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, №1. С. 173–183
23. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.
24. *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К управлению линейной системой обобщенными воздействиями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, №8. С. 1360–1370.
25. *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Импульсные управления в моделях гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, №5. С. 716–727.
26. *Миллер Б. М.* Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами // Автомат. и телемех. 1993. №12. С. 3–32.
27. *Понтрягин Л. С.* К теории дифференциальных игр // УМН. 1966. Т. 21, №4. С. 219–274.
28. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
29. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
30. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Издательство Московского университета, 1986.
31. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962.
32. *Субботин А. И.* Минимаксные решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, №2. С. 105–138.

33. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
34. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
35. *Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T.* The Quickhull Algorithm for Convex Hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. V. 22. №4. P. 469–483.
36. *E.N. Barron, R. Jensen, J.L. Menaldi.* Optimal control and differential games with measures // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1993. V. 21, №4. P. 241–268.
37. *R. Bellman.* Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1954. V. 40, №4. P. 231–235.
38. *R. Bellman.* On the Theory of Dynamic Programming // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1952. V. 38, №8. P. 716–719.
39. *Bensoussan A., Lions J. L.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles. P.: Dunod, 1982.
40. *Claeys M., Arzelier D., Henrion D., Lasserre J.-B.* Measures and LMI for impulsive optimal control with applications to space rendezvous problems // American Control Conference. 2012. P. 161–166.
41. *T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein.* Introduction to Algorithms (3rd ed.). MIT Press and McGraw-Hill, 2009.
42. *Crandall M. G., Lions P. L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. №277. P. 1–42.
43. *Daryin A. N., Kurzhanski A. B.* Impulse Control Inputs and the Theory of Fast Controls // 17th IFAC World Congress, Seoul. 2008.
44. *Daryin A. N., Kurzhanski A. B.* Nonlinear Feedback Types in Impulse and Fast Control // 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Toulouse, 2013. P. 235–240.
45. *Daryin A. N., Kurzhanski A. B., Minaeva Yu. Yu.* On the Theory of Fast Controls under Disturbances // 18th IFAC World Congress, Milan. 2011.
46. *Elliott R. J., Kalton N. J.* Cauchy problems for certain Isaacs-Bellman equations and games of survival // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. V. 198. P. 45–72.
47. *Elliott R. J., Kalton N. J.* The existence of value in differential games // Memoirs of the American Mathematical Society. 1972. №126.
48. *Evans L. C., Souganidis P. E.* Differential Games and Representation Formulas for Solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equation // Indiana Univ Math J. 1984. V. 33, №5. P. 773–797.

49. *N. El Farouq, G. Barles, P. Bernhard.* Deterministic minimax impulse control // Appl. Math. Optim. 2010. №61. P. 353–378.
50. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N.Y.: Springer, 1993.
51. *Krasovski N. N., Subbotin A. I.* Positional Differential Games, Springer-Verlag, 1988.
52. *Kurzhanski A.B., Daryin A.N.* Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32, №2. P. 213–227.
53. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External Approximations. Part II: Internal Approximations, Box-Valued Constraints // Optimization methods and software. 2002. V. 17, №. 2. P. 177–237.
54. *Motta M., Rampazzo F.* Dynamic programming for nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls // SIAM J. Control and Optimization. 1996. V.34, №1. P. 199–225.
55. *Neustadt L.W.* Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM Journal on Control. 1964. V. 2, №1. P. 33–53.
56. *Rampazzo F.* Control of non holonomic systems by active constraints // <http://www.math.unipd.it/~rampazzo/>
57. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. Princeton University Press, 1970.
58. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational Analysis. Springer, 1997.
59. *Varaiya P. P.* Existence of solutions to a differential game // SIAM J. Control and Optimization. 1967. V. 5, №1. P. 153–162.

Публикации автора по теме диссертации

60. *Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю.* Аппроксимация импульсных управлений физически реализуемыми быстрыми управлениями // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс. 2010. №35. С. 36–45. (**Перевод:** *Daryin A. N., Minaeva Yu. Yu.* Approximation of impulse controls by physically realizable fast controls // Computational Mathematics and Modeling. 2011. V. 22. №3. P. 278–287.)
61. *Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю.* Синтез импульсных и быстрых управлений при неопределённости // Доклады РАН. 2011. Т. 441. №5. С. 601–605.
62. *Дарьин А. Н., Минаева Ю. Ю.* Численный алгоритм решения задачи синтеза импульсных управлений при неопределённости // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. №3. С. 39–50.