Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Нефедов Павел Владимирович

Неклассические задачи для уравнений в частных производных второго порядка

Специальность 01.01.02 − дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель: **Моисеев Евгений Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, декан факультета ВМК МГУ

Официальные оппоненты: **Зарубин Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений физико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Орловский государственный университет»

Репин Олег Александрович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и эконометрики Института систем управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный экономический университет»

Ведущая организация: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»*

Защита диссертации состоится «23» сентября 2015 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу:

119991, ГСП-1, город Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, 2-й учебный корпус, д. 1, стр. 52, факультет ВМК, аудитория 685.

Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня по тел.: (495) 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МГУ имени М.В.Ломоносова. С текстом автореферата диссертации можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ в разделе: «Наука» − «Работа диссертационных советов» − «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «___» ______________ 2015 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.43

доктор физико-математических наук,

профессор Е.В.Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Главным предметом изучения в настоящей диссертационной работе являются аналоги смешанных задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях и неклассические краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости.

Особое место в теории дифференциальных уравнений с частными производными занимает теория уравнений смешанного типа.

В известной монографии А.В.Бицадзе[1] отмечено, что дифференциальные уравнения в частных производных смешанного типа стали объектами систематических исследований с конца сороковых годов прошлого века.

С этого времени были изучены различные постановки краевых задач для уравнений смешанного типа как в нашей стране, так и за рубежом. На сегодняшний день в математической литературе имеются многочисленные работы, посвященные этой тематике.

Нельзя не отметить тех ученых, которым принадлежит значительный вклад в становление теории уравнений смешанного типа, что, тем самым, повлияло на развитие данного раздела теории дифференциальных уравнений в целом. Среди этих математиков: Ф.И.Франкль, М.А.Лаврентьев, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, В.А.Ильин, Е.И.Моисеев, С.П.Пулькин, А.М.Нахушев, М.М.Смирнов, В.Н.Врагов, А.П.Солдатов, А.Н.Зарубин, О.А.Репин, Т.Ш.Кальменов, К.Б.Сабитов, А.А.Килбас, Л.С.Пулькина, А.В.Псху и др.

Впервые внимание на практическую значимость уравнений смешанного типа обратил С.А.Чаплыгин в 1902 году в работе «О газовых струях»[2].

Дальнейшие основополагающие результаты были получены итальянским математиком Франческо Трикоми, который поставил и решил первую краевую задачу для следующего модельного уравнения смешанного типа:

---

[1] *Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Изд-во «Наука», 1981. - 448 с.*
[2] *Чаплыгин С.А. О газовых струях. М.–Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. - 144 с.*

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

и шведским математиком Свеном Геллерстедтом, развившим результаты Трикоми для уравнения смешанного типа более общего вида

$$sign(y)\,|y|^m\,u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где параметр $m > 0$.

Систематически уравнения смешанного типа стали изучаться лишь с середины 40-х годов прошлого века после того, как Ф.И. Франкль указал на возможность их приложения в околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамике. В 1945 году он обнаружил приложение задачи Трикоми в теории сопел Лаваля, а затем в других разделах трансзвуковой газовой динамики. В дальнейшем выяснилось, что уравнения смешанного типа также применимы в магнитогидродинамике, геометрии, биологии и других областях естественных наук.

Позже И.Н.Векуа были найдены приложения этих уравнений и в других разделах физики и механики, в частности в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек[3].

Таким образом, в середине 50-х годов прошлого века работами Ф.И.Франкля, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, М.М.Смирнова было положено начало современной теории уравнений смешанного типа.

В дальнейшем М.А.Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + sign(y)\,u_{yy} = 0,$$

для которой технические затруднения, связанные с вычислениями, минимальны по сравнению с аналогичными задачами для уравнения (1).

Значительные сложности возникают при отыскании корректно поставленных

[3] *Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Москва: Изд-во “Наука”, 1982, 288 с.*

задач для уравнений смешанного типа с несколькими (больше двух) независимыми переменными. В этом направлении имеется целый ряд теоретически важных результатов.

Например, известно, что для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sign}(z)\, u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \tag{2}$$

представляющего собой достаточно простой пример уравнения смешанного типа с тремя независимыми переменными и с плоскостью $z = 0$ вырождения типа, корректно поставленной является следующая краевая задача.

Пусть трехмерная конечная односвязная область Ω ограничена некоторой кусочно-гладкой поверхностью Σ, задаваемой уравнением $z = f(x, y) \geq 0$, и характеристиками $S_1 : x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$, $S_2 : x - x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ уравнения (2).

Требуется найти непрерывную в области Ω функцию $u = u(x, y, z)$ с непрерывными внутри области Ω производными 1-ого порядка, удовлетворяющую уравнению (2) внутри области Ω при $z \neq 0$ и обращающуюся в нуль на поверхности Σ, а также на одной из характеристик S_1 или S_2.

Доказано[4] существование слабого и единственность сильного решения этой задачи, а также аналогичной задачи для более общего уравнения

$$\operatorname{sign}(x_n)\, u_{x_0 x} + \Delta_{(x)} u = f(x_0, x),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\Delta_{(x)}$ − оператор Лапласа по совокупности переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для смешанного уравнения вида[5]

$$x_0^{2m}\, \Delta_{(x)} u - x_0\, u_{x_0 x} + (m - \frac{1}{2})\, u_{x_0} = 0 \tag{3}$$

с пространственно-ориентированной гиперплоскостью $x_0 = 0$ вырождения типа в смешанной области Ω специального вида поставлены и исследованы краевые задачи, в которых часть границы $\partial\Omega$, лежащая в полупространстве $x_0 < 0$,

---

[4] *Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях. ДАН СССР, Т. 110, № 6, 1956, Стр. 731-734.*

[5] *Бицадзе А.В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменений типа. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 80-летию академика Н.И.Мусхелишвили). М.: Изд-во «Наука», 1972. Стр. 47-52.*

является носителем данных для функции $u = u(x_0, x)$, а лежащая в полупространстве $x_0 > 0$ часть границы $\partial\Omega$ (характеристический коноид уравнения (3)) является носителем некоторых средних (интегральных) характеристик функции $u(x_0, x)$.

Исследовались и другие модельные уравнения смешанного типа в трехмерных (как ограниченных, так и неограниченных) областях, в т.ч. уравнения вида

$$z^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ и } z^{2m+1}(u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0.$$

В целом же в настоящее время исследование подобных задач с несколькими (не менее трех) независимыми переменными находится в самом начале, и основные результаты следует ожидать еще только в будущем.

Необходимо отметить, что при изучении как классических, так и неклассических уравнений математической физики, в т.ч. уравнений смешанного типа, спектральный метод является одним из наиболее эффективных инструментов исследования.

Применение спектрального метода при решении нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа позволяет исследовать корректность постановок этих задач, выявить структурные свойства решений и дает возможность получения точных априорных оценок решения.

Классический обзор результатов по спектральной теории дифференциальных операторов, порождаемых дифференциальными выражениями с обыкновенными производными, а также дифференциальными выражениями с частными производными эллиптического типа, содержится в работе В.А. Ильина и Л.В. Крицкова[6].

Для уравнений смешанного типа спектральные свойства краевых задач активно изучались с 80-х годов прошлого века. В своей работе С.М.Пономарев[7] выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения

---

[6] *Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам. Москва: ВИНИТИ, Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор, Т. 96, 2006. Стр. 5–105.*

[7] *Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. (Диссер. докт. физ.-мат. наук), Москва, МИАН, 1981.- 163 с.*

Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области в случае, когда она является круговым сектором.

В своем исследовании Е.И.Моисеев[8] доказал базисность этой системы и, используя это, предложил спектральный метод решения краевых задач для уравнений смешанного типа. В частности, ему удалось получить решения некоторых уравнений в виде функциональных рядов, а также построить интегральные представления решений. Вопросы, связанные с базисностью и полнотой некоторых возникающих в этой связи систем элементарных функций, подробно рассмотрены в работе Моисеева Е.И. с соавторами[9].

Полнота собственных функций задачи Геллерстедта для уравнения Лавреньтева-Бицадзе была доказана К.Б.Сабитовым и А.Н.Кучкаровой.

Полнота собственных функций задач Трикоми, Неймана-Трикоми и Геллерстедта для уравнения

$$|y|^{m+1} u_{xx} + y\, u_{yy} + q\, u_y + \lambda |y|^{m+1} u = 0,$$

где $q<1$ и $m>-2$, была доказана Е.И.Моисеевым и Ф.Могими при выполнении условия $m+2q>0$.

Спектральные вопросы видоизмененной задачи Франкля для уравнений смешанного типа начали рассматриваться относительно недавно в работах академика Е.И.Моисеева и его учеников. В частности, вопросами полноты и базисности собственных функций в эллиптической части области видоизмененной задачи Франкля с условием сшивки первого рода занимался ученик Е.И.Моисеева, иранский математик Н.Аббаси.

Вторая часть данной диссертационной работы (Главы 4-5) посвящена изучению специальных краевых задач для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости, имеющих важные приложения в механике и нанотехнологиях.

Эти задачи непосредственно связаны с моделированием адгезионных свойств твердых деформируемых тел. Интерес к моделированию адгезии существенно

---

[8] *Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, 1987, Т. 23, № 1, Стр. 177–179.*
[9] *Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций. Москва: Вычислительный центр РАН, 2004, 146 с.*

возрос в последнее два десятилетия, так как моделирование поверхностных свойств в средах с развитой микроструктурой позволяет значительно уточнить прогноз их свойств. Например, свойства наполненных композитов с очень малыми микро- и наноразмерными включениями, для которых плотность границ контакта различных фаз композитного материала весьма велика, в значительной степени определяется именно свойствами поверхности контакта. Более того, поверхностные свойства твердых тел могут изменяться в широких пределах при использовании так называемых технологических процессов функционализации включений. Учет адгезионных свойств, таким образом, представляет большой прикладной интерес. В математическом отношении учет свойств поверхности деформируемых тел приводит к неклассическим краевым задачам специального вида.

Континуальные модели, учитывающие поверхностные свойства контактируемых деформируемых сред, впервые были предложены в работах Гуртина и Мурдоха[10]. При этом контактные условия для скачка нормальных напряжений на поверхности контакта были сформулированы в виде закона Лапласа-Янга, а определяющие соотношения для поверхностных напряжений имели форму уравнений закона Гука, записанных для деформаций, определенных на поверхности[11]. Фактически именно законом Гука, сформулированным на поверхности тела, задавались модели адгезионных взаимодействий. Рассмотрим, в частности, модель упругой среды, несжимаемой в направлении одной из координат, например, в направлении оси Ox. Перемещения в таком теле определяются одной компонентой перемещений $V(x,y)$. Дифференциальное уравнение равновесия (проекция усилий на ось Oy), записанное относительно перемещения $V(x,y)$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{G}{E}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0.$$

Здесь E, G − модуль упругости в направлении координаты ‘ y ’ и модуль

[10] *Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal., 1975, 57. P. 291–323.*

[11] *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1985, 200 с.*

сдвига. Нормальные и касательные напряжения записываются в виде

$$\sigma_n = E\,\frac{\partial V}{\partial y},\ \sigma_\tau = G\,\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Напряжения σ_x могут быть найдены по касательным напряжениям в результате интегрирования второго уравнения равновесия (проекция на ось Ox). Рассмотрим граничное условие на плоскости с нормалью, совпадающей с осью Oy.

В рассматриваемой постановке граничное условие содержит следующее слагаемое, связанное с трением $k\,E\,\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, где k − коэффициент трения. Таким образом, на плоскости с нормалью, совпадающей с осью Oy, граничное условие имеет следующий общий вид:

$$E\,\frac{\partial V}{\partial y} + \delta^F\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + k\,E\,\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = P_y^F,$$

где E − модуль упругости в направлении координаты Oy, δ^F − модуль адгезионных свойств, k − коэффициент трения, P_y^F − усилие, заданное на поверхности[12].

Цель диссертационной работы

В свете перечисленных выше работ приобретают актуальность следующие задачи.

Во-первых, важным представляется нахождение в явном аналитическом виде регулярных решений аналогов смешанных краевых задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в различных трехмерных областях. Особое внимание уделяется условиям, которым удовлетворяет искомая функция на границе, для существования классического решения.

[12] *Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. Gradient theory of media with conserved dislocations. Particular models: generalized Cosserats media model with surface effects, porous media, media with free forming (media with «twinning»), generalized pseudo-continuum. In book: Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats, Springer, 2010. P. 110-119.*

Во-вторых, вызывают значительный теоретический и прикладной интерес вопросы разрешимости и единственности решений некоторых специально поставленных неклассических краевых задач для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости, моделирующих адгезионные взаимодействия различных материалов.

Основные результаты работы

1. В явном аналитическом виде (в виде двойных рядов с явно найденными коэффициентами) найдены регулярные (классические) решения аналогов смешанных задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для модельного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях. Доказана единственность регулярного решения аналога задачи Трикоми.
2. Получены равномерные и абсолютные оценки на коэффициенты биортогонального разложения граничной функции по двум переменным для различных тригонометрических систем, соответствующих решаемой задаче.
3. Сформулированы достаточные условия, которым удовлетворяет искомая функция на границе, для существования классических решений аналогов смешанных задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта в трехмерных областях.
4. Найдены регулярные решения неклассических задач Лапласа в круге и на полуплоскости, сформулированы дополнительные условия существования решения в зависимости от значений коэффициентов, входящих в граничное условие. Изучены вопросы единственности неклассической задачи Лапласа в полуплоскости в зависимости от значений коэффициентов, входящих в граничное условие.

Методы исследования

В работе используются общие подходы и методы решения дифференциальных уравнений, методы решения классических уравнений математической физики, спектральный метод решения уравнений в частных производных и методы теории функций комплексного переменного.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы

В данной работе впервые рассмотрен ряд задач смешанного типа для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области. Доказаны регулярность построенных решений, а также единственность классического решения задачи Трикоми, получены различные интегральные и равномерные оценки на коэффициенты биортогонального разложения функции по системам тригонометрических функций.

Также рассмотрены неклассические задачи в двумерной области для уравнения Лапласа с граничным условием специального вида, возникающие в результате моделирования адгезионных взаимодействий различных веществ в разных средах.

Стоит отметить, что полученные аналитические результаты могут быть полезны и при численном решении подобных задач математической физики.

Решения рассматриваемых в данной работе задач и применяемые методы могут быть использованы при математическом моделировании процессов околозвукового и сверхзвукового течения сжимаемой среды в газовой динамике, а также при моделировании адгезионных процессов.

Апробация работы

Результаты настоящей работы были представлены в виде научных докладов на следующих конференциях и семинарах:

- научная конференция «Ломоносов», Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (город Москва; 2012, 2013 и 2014 г.г.);
- научная конференция «Тихоновские чтения–2012» (город Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова; 2012 г.);
- 38th International Conference “Applications of Mathematics in Engineering and Economics” (AMEE’12) (Technical University of Sofia, Sozopol, Bulgaria, 8-13 June 2012);

- научная конференция «Ломоносовские чтения–2014» (город Москва, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК; 2014 г.);
- научно-исследовательский семинар кафедры функционального анализа и его приложений факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова под руководством академика РАН Е.И.Моисеева.

Публикации

Основные результаты диссертации представлены в 6-и печатных работах [1-6]. Работы [1-3] опубликованы в британском специализированном научном журнале “Integral Transforms and Special Functions” (impact factor − 0,814), а работы [4-6] опубликованы в ведущих российских рецензируемых научных журналах, входящих в список ВАК. Работы [7-8] оформлены как тезисы докладов в сборниках трудов научных конференций.

Таким образом, по теме диссертации автором опубликовано 8 печатных работ, из которых 6 работ − в научных журналах, входящих в список ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 105 страниц.

Библиография, приведенная в списке литературы, содержит всего 86 наименований, в т.ч. 8 печатных работ, опубликованных автором (лично и в соавторстве) по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Содержание диссертационной работы можно разбить на две относительно независимые части. Часть первая (Главы 1-3) посвящена изучению вопросов разрешимости и отысканию в явном аналитическом виде решений аналогов задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для смешанного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1,4], второй главы – в работах [2,4], третьей главы – в работе [3].

Во второй части настоящей работы (Главы 4-5) рассмотрены неклассические краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости. Здесь особое внимание уделяется вопросам существования и единственности решений этих задач, непосредственно связанных с математическим моделированием адгезионных свойств твердых деформируемых тел.

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [5], а пятой главы – в работе [6].

В **первой главе** представленной работы рассмотрен аналог краевой задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай. Такие задачи представляют значительный интерес, т.к. здесь возникают определенные трудности при отыскании корректно поставленных задач для уравнений смешанного типа с тремя и более независимыми переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в трехмерной области:

$$L[u] = u_{xx} + sign(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (4)$$

где $u = u(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$, причем область D можно представить в виде $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$:

$$D^{(+)} = \left\{(x,y,z) : y > 0, -1 < x < 1,\ x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < \pi\right\},$$

$$D^{(-)} = \left\{(x,y,z) : -\tfrac{1}{2} < y < 0, -y < x < y+1,\ 0 < z < \pi\right\}.$$

Заметим, что в цилиндрических координатах (r,φ,z) трехмерная область $D^{(+)}$ определяется следующим образом:

$$D^{(+)}=\{(r,\varphi,z): r<1, 0<\varphi<\pi, 0<z<\pi\}.$$

Несложно видеть, что в области $D^{(+)}$ уравнение (4) является уравнением эллиптического типа (т.к. здесь $sign(y)>0$), а в области $D^{(-)}$ - гиперболического типа (т.к. $sign(y)<0$), причем внутри прямоугольника $\{0\le x\le 1, y=0, 0\le z\le\pi\}$ имеет место вырождение самого уравнения (4).

Таким образом, в области D уравнение (4) является уравнением смешанного типа.

Рассмотрим далее следующую краевую задачу (задачу Трикоми) для определенного в (4) дифференциального уравнения второго порядка $L[u]$.

В трехмерной области $D=\overline{D^{(+)}\cup D^{(-)}}$ требуется найти регулярное решение дифференциального уравнения (4), принадлежащее классу $u\in C(\overline{D^{(+)}\cup D^{(-)}})\cap C^2(D^{(+)})\cap C^2(D^{(-)})\cap C^1(D^{(+)}\cup D^{(-)})$ и удовлетворяющее на границе области D дополнительным (краевым) условиям:

$$u(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi, y=\sin\varphi}=\psi(\varphi,z), \quad 0\le\varphi\le\pi, 0\le z\le\pi, \tag{5}$$

$$u(x,y,z)\big|_{x=-r, y=0}=0, \quad r\le 1, 0\le z\le\pi, \tag{6}$$

$$u(x,y,z)\big|_{x=-y}=0, \quad 0\le x\le \tfrac{1}{2}, 0\le z\le\pi, \tag{7}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=0}=0, \quad x^2+y^2\le 1, y\ge 0, \tag{8}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=0}=0, \quad -y\le x\le y+1, -\tfrac{1}{2}\le y\le 0, \tag{9}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=\pi}=0, \quad x^2+y^2\le 1, y\ge 0, \tag{10}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=\pi}=0, \quad -y\le x\le y+1, -\tfrac{1}{2}\le y\le 0. \tag{11}$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi=\psi(\varphi,z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “А1”):

1) $\psi=\psi(\varphi,z)\in C^{2,\alpha}$;

2) $\psi(\varphi,0)=\psi(\varphi,\pi)=0$; (A1)

3) $\left|\psi''_{zz}(\varphi,z)\right|\le A\cdot(\pi-\varphi)^{\varepsilon_1}$, где $\varphi\in(\pi-\delta,\pi)$ и $A=const$, $\varepsilon_1=1+\Delta$, $\Delta>0$.

Методом разделения переменных решение уравнения (4) в области D найдено в следующем виде:

$$u(r,\varphi,z)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\sigma_{nk}\sin kz\cdot\sin\left((n-\tfrac{1}{4})(\varphi-\pi)\right)\cdot\frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)},\ y>0\ (\text{область}\ D^{(+)}),$$

$$u(x,y,z)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\sigma_{nk}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\sin kz\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n-\frac{1}{4}}{2}}\cdot\frac{I_{n-\frac{1}{4}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)},\ y<0\ (\text{область}\ D^{(-)}), \tag{12}$$

где под $I_\nu=I_\nu(z)$ понимают модифицированную функцию Бесселя первого рода:

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

принимающую вещественные значения при вещественных значениях параметра ν (порядок функции) и переменной z.

Коэффициенты σ_{nk} определяются равенствами

$$\sigma_{nk}=-\int_0^{\pi}\Psi_k(\varphi)h_n^s(\varphi)\,d\varphi, \tag{13}$$

где

$$\Psi_k(\varphi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(\varphi,z)\sin kzdz=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{nk}\sin(n-\tfrac{1}{4})(\varphi-\pi),$$

$$h_n^s(\varphi)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}C_\beta^k\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\beta}\sin(n-k)\varphi,\ \beta=\frac{1}{2}.$$

Сформулируем основную теорему первой главы настоящей работы.

Теорема 1. *Регулярное решение аналога краевой задачи Трикоми (4)-(11) в трехмерной области D существует и представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося функционального ряда (12) с коэффициентами, определенными равенством (13), при выполнении условий (A1) на граничную функцию* $\psi(\varphi,z)$.

Важным вопросом в теории уравнений смешанного типа является обоснование единственности регулярного решения задачи. Поэтому в этом разделе изучим вопрос единственности решения поставленной задачи (4)-(11). Ответ на данный вопрос дан в Теореме 2.

Теорема 2. *Регулярное решение краевой задачи Трикоми (4)-(11) единственно.*

Во **второй главе** рассмотрен аналог краевой задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай. Для поиска решения задачи в виде функциональных рядов и обоснования его регулярности будет использован спектральный метод.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в трехмерной области D:

$$L[u] = u_{xx} + sign(y) \cdot u_{yy} + sign(x+y) \cdot u_{zz} = 0, \tag{14}$$

где функция $u = u(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$, причем трехмерная область D представима в виде объединения $D = D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)}$:

$$D^{(+)} = \left\{(x,y,z): 0 < x < 1,\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0, 0 < z < \pi\right\},$$

$$D^{(-1)} = \left\{(x,y,z): -\tfrac{1}{2} < y < 0,\ -y < x < y+1,\ 0 < z < \pi\right\},$$

$$D^{(-2)} = \left\{(x,y,z): 0 < x < \tfrac{1}{2},\ x-1 < y < -x,\ 0 < z < \pi\right\}.$$

Заметим, что область $D^{(+)}$ удобнее определить в цилиндрических координатах (r,φ,z) в следующем виде:

$$D^{(+)} = \left\{(r,\varphi,z): r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2},\ 0 < z < \pi\right\}.$$

Несложно видеть, что в области D уравнение (14) является уравнением смешанного типа (при $y > 0$, т.е. в области $D^{(+)}$, уравнение (14) является уравнением эллиптического типа, а при $y < 0$ - уравнением гиперболического типа), для которого далее рассмотрим следующую краевую задачу (аналог задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе).

В определенной выше трехмерной области D требуется найти регулярное решение дифференциального уравнения (14), принадлежащее классу

$$u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-1)}) \cap C^2(D^{(-2)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)})$$

и удовлетворяющее на границе области D дополнительным (краевым) условиям:

$$u(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi, y=\sin\varphi} = \psi(\varphi,z), \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le \pi, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)\bigg|_{x=0,-1<y<1} = 0, \qquad 0 \le z \le \pi, \tag{16}$$

$$u(x,y,z)\big|_{x=0} = u(x,-y,z)\big|_{x=0}, \qquad 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le \pi, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)\bigg|_{y=0+} = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)\bigg|_{y=0-}, \qquad 0 < x < 1,\ 0 \le z \le \pi, \tag{18}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=0} = 0, \qquad (x,y,z) \in D, \tag{19}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=\pi} = 0, \qquad (x,y,z) \in D. \tag{20}$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi = \psi(\varphi,z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “A2”):

$$\begin{aligned} &1)\ \psi = \psi(\varphi,z) \in C^{2,\alpha}; \\ &2)\ \psi(\varphi,0) = \psi(\varphi,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{A2}$$

Решение задачи (14)-(20) в трехмерной области D может быть представлено в следующем виде (в области $D^{(+)}$ решение удобнее записать в цилиндрических координатах):

$$u(r,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \frac{I_{4n}(kr)}{I_{4n}(k)} \cos 4n\varphi + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \frac{I_{4n-1}(kr)}{I_{4n-1}(k)} \cos(4n-1)(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) \end{aligned} \right), (r,\varphi,z) \in D^{(+)},$$

$$u(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \frac{I_{4n}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n}(k)} \omega_{-1,1}^{4n}(x,y) + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \frac{I_{4n-1}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n-1}(k)} \omega_{-1,2}^{4n-1}(x,y) \end{aligned} \right), (x,y,z) \in D^{(-1)}, \tag{21}$$

$$u(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin kz\cdot\left(\begin{array}{l}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_{nk}\dfrac{I_{4n}(k\sqrt{y^2-x^2})}{I_{4n}(k)}\omega_{-2,1}^{4n}(x,y)+\\+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_{nk}\dfrac{I_{4n-1}(k\sqrt{y^2-x^2})}{I_{4n-1}(k)}\omega_{-2,2}^{4n-1}(x,y)\end{array}\right),\ (x,y,z)\in D^{(-2)},$$

где для удобства записи решения в областях $D^{(-1)}$ и $D^{(-2)}$ использованы обозначения:

$$\omega_{-1,1}(x,y)=\frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},\qquad \omega_{-1,2}(x,y)=\frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\omega_{-2,1}(x,y)=\frac{\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y-x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},\qquad \omega_{-2,2}(x,y)=\frac{\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{y-x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

а под $I_\nu = I_\nu(z)$ подразумевается модифицированная функция Бесселя первого рода

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

принимающая вещественные значения при вещественных значениях параметра ν (порядок функции) и аргумента z.

Коэффициенты A_{nk} и B_{nk} найдены явно:

$$A_{nk}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f_k(\varphi)\cos 4n\varphi\, d\varphi,\ \ f_k(\varphi)=\psi_k(\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}B_{nk}\sin(4n-1)\varphi, \tag{22}$$

$$B_{nk}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Phi_k(\varphi)h_n(\varphi)\,d\varphi, \Phi_k(\varphi)=\psi_k(\tfrac{\pi}{2}-\varphi)-\psi_k(\varphi), \psi_k(\varphi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(\varphi,z)\sin kz\,dz.$$

Сформулируем в виде теоремы следующее утверждение.

Теорема 3. *Найденное решение задачи (14)-(20) в виде рядов (21) с коэффициентами, определенными в (22), является регулярным решением поставленной задачи Франкля в трехмерной области* D *при выполнении условий (A2) на граничную функцию* $\psi(\varphi,z)$.

При доказательстве данной теоремы существенным моментом являлось отыскание коэффициентов A_{nk} из представления (22) в явном виде.

Представление суммы функционального ряда (22) в интегральной форме

Для проведения дальнейших рассуждений введем комплексную переменную $Z = re^{i\varphi}$ (здесь комплексную переменную ‘ Z ’ следует отличать от просто переменной ‘ z ’, вторая производная по которой от искомого решения входит в уравнение (14)), где $0 < r < 1$ и $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Через функцию $\overline{\Phi}(\varphi)$ обозначим $\overline{\Phi}(\varphi) = \Phi_k(\frac{\varphi}{4})$.

Далее рассмотрим функцию комплексного переменного:

$$F(Z) = F(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} r^{4n-1} \sin(4n-1)\varphi. \tag{23}$$

Заметим, что радиус сходимости ряда (23) равен $R = 1$, т.е. ряд сходится внутри круга $|Z| < 1$. Путем надлежащих преобразований данный ряд был просуммирован, в результате чего получено следующее интегральное представление:

$$F(Z) = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \sqrt{\sin\tfrac{\vartheta}{2}} \sin(\tfrac{\vartheta-\pi}{4}) \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta+\vartheta}{2}\sin\frac{\theta-\vartheta}{2}} d\theta,$$

где $Z = e^{i\frac{\vartheta}{4}}$, $0 \le \vartheta \le \pi$.

В **третьей главе** настоящей диссертационной работы рассмотрен аналог краевой задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай. Решение аналога задачи Геллерстедта в трехмерном случае найдено в виде двойных функциональных рядов при помощи сведения исходной задачи к двум другим уже изученным, а именно к аналогам задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях.

Изучается дифференциальное уравнение второго порядка, рассматриваемое в трехмерной области D:

$$L[u] = u_{xx} + sign(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{24}$$

где функция $u = u(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$, причем трехмерная область D представима в виде:

$$D = D^{(+)} \cup D^{(-)}:$$

$$D^{(+)} = \left\{(x,y,z): D_{xy}^{(+)} \times (0 < z < \pi)\right\},$$

$$D^{(-)} = \left\{(x,y,z): \{D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}\} \times (0 < z < \pi)\right\},$$

где двумерные (в плоскости переменной $z = 0$) области $D_{xy}^{(+)}$, $D_{xy}^{(-1)}$ и $D_{xy}^{(-2)}$ определены соответственно соотношениями:

$$D_{xy}^{(+)} = \left\{(x,y): -1 < x < 1,\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\right\},$$

$$D_{xy}^{(-1)} = \left\{(x,y): -1 < x < 0,\ y < 0, -x - 1 < y < x\right\},$$

$$D_{xy}^{(-2)} = \left\{(x,y): 0 < x < 1,\ y < 0,\ -x < y < x - 1\right\}.$$

Сразу заметим, что в “верхней” области $D_{xy}^{(+)}$ вместо декартовых (x, y) координат более удобно использовать полярные координаты (r,φ) , где $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $r < 1,\ 0 \le \varphi \le \pi$. Соответственно, в области $D^{(+)}$ решение уравнения (24) естественно искать не в декартовых, а в цилиндрических координатах (r,φ,z).

В трехмерной области D уравнение (24) является уравнением смешанного типа (при $y > 0$, т.е. в “верхней” области $D^{(+)}$, уравнение (24) является уравнением эллиптического типа, а при $y < 0$, т.е. в “нижней” области $D^{(-)}$, уравнение (24) представляет собой уже уравнение гиперболического типа), для которого далее рассматривается следующая краевая задача, известная в литературе как задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

В указанной трехмерной области D требуется найти регулярное (т.е. классическое) решение дифференциального уравнения (24), принадлежащее функциональному классу

$$u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-)})$$

и удовлетворяющее на границе трехмерной области D дополнительным (граничным) условиям:

$$u(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi,\, y=\sin\varphi} = f(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi,\, y=\sin\varphi} = \psi(\varphi,z),\ 0 \le \varphi,\ z \le \pi, \tag{25}$$

$$u(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \left\{(x,y,z): (|x| \le 1, y < 0, y = \pm x) \times (0 \le z \le \pi)\right\}, \tag{26}$$

$$u(x,y,z)\big|_{z=0} = u(x,y,z)\big|_{z=\pi} = 0,\ (x,y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}. \qquad (27)$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi = \psi(\varphi, z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “A3”):

$$\begin{aligned}
&1)\ \psi = \psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha};\\
&2)\ \psi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, \pi) = 0; \qquad \text{(A3)}\\
&3)\ \left|\psi''_{zz}(\varphi, z)\right| \le A \cdot (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1},\ \text{где } \varphi \in (\pi - \delta, \pi) \text{ и } A = const; \varepsilon_1 = 1 + \Delta,\ \Delta > 0.
\end{aligned}$$

Будем искать решение задачи (24)-(27) в следующем виде:

$$u(x,y,z) = U(x,y,z) + V(x,y,z),$$

где функции $U = U(x,y,z)$ и $V = V(x,y,z)$ положим соответственно равными:

$$U(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(u(x,y,z) + u(-x,y,z)), \qquad (28)$$

$$V(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(u(x,y,z) - u(-x,y,z)). \qquad (29)$$

Рассмотрим далее краевую задачу, которая формулируется относительно вспомогательной функции $V = V(x,y,z)$ из равенства (29):

$$L[V] = V_{xx} + sign(y) \cdot V_{yy} + V_{zz} = 0,\ (x,y,z) \in D, \qquad (30)$$

$$V(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi, y=\sin\varphi} = \frac{(f(x,y,z) - f(-x,y,z))\big|_{x=\cos\varphi, y=\sin\varphi}}{2} = \overline{\psi_V}(\varphi, z), \qquad (31)$$

$$0 \le \varphi,\ z \le \pi,$$

$$V(x,y,z)\big|_{x=0} = 0,\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le \pi, \qquad (32)$$

$$V(x,y,z)\big|_{z=0} = V(x,y,z)\big|_{z=\pi} = 0,\ (x,y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}, \qquad (33)$$

$$V(x,y,z)\big|_{x=-y} = 0,\ 0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le z \le \pi. \qquad (34)$$

Заметим, что условие (32) имеет место в силу симметрии решения $u = u(x,y,z)$ в области $D^{(-)}$ относительно оси Oy ($u(x,y,z) = u(-x,y,z)$, если только $(x,y,z) \in D^{(-)}$).

Таким образом, сформулированная краевая задача (30)-(34) относительно функции $V = V(x,y,z)$ представляет собой трехмерную задачу Трикоми в области D.

Регулярное (классическое) решение аналога задачи Трикоми в трехмерном случае (30)-(34) при разделении переменных находится в следующем виде:

$$V(x,y,z)=\begin{cases}\sum\limits_{n,k=1}^{\infty}\sigma_{nk}\sin kz\cdot\sin\left((n-\tfrac{1}{4})(\varphi-\pi)\right)\dfrac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)},\\ \qquad (x,y,z)\big|_{x=r\cos\varphi,\,y=r\sin\varphi}\in D^{(+)};\\ \sum\limits_{n,k=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\sigma_{nk}\sin kz\cdot\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n-\frac{1}{4}}{2}}\dfrac{I_{n-\frac{1}{4}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)},\\ \qquad (x,y,z)\in D^{(-)},\end{cases} \tag{35}$$

где $I_\nu=I_\nu(z)$ модифицированная функция Бесселя первого рода, а коэффициенты σ_{nk} из представлений (35) по формулам:

$$\sigma_{nk}=-\int_0^{\pi}\psi_k(\varphi)h_n^s(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\psi_k(\varphi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{\psi_V}(\varphi,z)\sin kz\,dz, \tag{36}$$

$$h_n^s(\varphi)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}C_\beta^k(2\cos\tfrac{\varphi}{2})^{-\beta}\sin(n-k)\varphi,\ \beta=\frac{1}{2}.$$

Из Главы 1 известно, что приведенное решение задачи Трикоми (30)-(34) в виде рядов (35) является регулярным в рассматриваемой трехмерной области D.

Перейдем далее к решению задачи (24)-(27), переформулированной в терминах некоторой вспомогательной функции $U=U(x,y,z)$.

Исходя из формулы (28), в которой эта функция определена, несложно получить следующую краевую задачу, которую достаточно рассмотреть на интервале $0<x<1$ в силу симметрии (четности) функции $U=U(x,y,z)$ относительно оси Oy:

$$L[U]=U_{xx}+sign(y)\cdot U_{yy}+U_{zz}=0,\qquad (x,y,z)\in D, \tag{37}$$

$$U(x,y,z)\big|_{x=\cos\varphi,y=\sin\varphi}=\frac{(f(x,y,z)+f(-x,y,z))\big|_{x=\cos\varphi,y=\sin\varphi}}{2}=\overline{\psi_U}(\varphi,z),\quad 0\le\varphi,\ z\le\pi, \tag{38}$$

$$U(x,y,z)\big|_{z=0}=U(x,y,z)\big|_{z=\pi}=0,\ (x,y)\in D_{xy}^{(+)}\cup D_{xy}^{(-1)}\cup D_{xy}^{(-2)}, \tag{39}$$

$$U(x,y,z)\big|_{y=-x}=0,\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)\Big|_{x=0}=0,$$
$$(x,y,z)\in\left\{(x,y,z):\{(x,y)\in D_{xy}^{(-1)}\cup D_{xy}^{(-2)}\}\times(0<z<\pi)\right\}. \qquad (40)$$

Используя метод разделения переменных для решения задачи (37)-(40), можно получить следующее представление решения указанной задачи:

$$U(x,y,z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin kz\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_{nk}\cos\left((2n+\frac{1}{2})(\frac{\pi}{2}-\varphi)\right)\dfrac{I_{2n+\frac{1}{2}}(kr)}{I_{2n+\frac{1}{2}}(k)}, \\ \qquad (x,y,z)\big|_{x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi}\in D^{(+)}; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin kz\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}A_{nk}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{2n+\frac{1}{2}}{2}}\dfrac{I_{2n+\frac{1}{2}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2n+\frac{1}{2}}(k)}, \\ \qquad (x,y,z)\in D^{(-)},\end{cases} \qquad (41)$$

где

$$A_{nk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_k(\varphi)h_n^c(\varphi)\,d\varphi,$$

$$h_n^c(\varphi)=\frac{2}{\pi}\cos(n+\frac{1}{4})\varphi+\frac{(-1)^{k+1}\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}}{\pi^2}\int_0^1\frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)}{1+2t\cos\varphi+t^2}dt, \qquad (42)$$

$$\psi_k(\varphi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{\psi_U}(\varphi,z)\sin kz\,dz.$$

Сформулируем в виде теоремы основной результат, полученный в четвертой главе.

Теорема 4. *Решение $u=u(x,y,z)$ поставленной задачи (24)-(27) в виде функциональных рядов (35) и (41) с коэффициентами, определенными в (36) и (42), является регулярным (классическим) решением поставленной задачи Геллерстедта в трехмерной области D при условии выполнения условий (А3) относительно граничной функции $\psi(\varphi,z)$ и может быть найдено в виде $u=u(x,y,z)=U(x,y,z)+V(x,y,z)$ (см. выше (28) и (29)).*

В **четвертой главе**, посвященной одной неклассической задаче для уравнения Лапласа, рассматривается краевая задача внутри круга D, на границе которого задается граничное условие специального вида. Исследуются условия разрешимости задачи в классе регулярных гармонических функций внутри области D, принадлежащих классу функций C^2 в замыкании круга.

Данная задача имеет важные приложения в механике сплошных сред и относится к проблеме моделирования адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел.

В двумерной области *D*, представляющей единичный круг $D=\{(r,\theta): r<1, 0\le\theta<2\pi\}$, рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0,\ (r,\theta)\in D, \tag{43}$$

$$u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta}\big|_{r=1} = f(\theta),\ 0\le\theta<2\pi, \tag{44}$$

где α и β - некоторые вещественные константы.

Решение задачи (43)-(44) ищется в классе $u\in C^2(\overline{D})$. Заметим, что краевую задачу для уравнения Лапласа (43)-(44) нельзя отнести к классической, так как краевое условие (44) не является ни одним из условий первого, второго или третьего родов, которые традиционно рассматриваются в математической физике при изучении граничных задач для уравнения Лапласа.

Вопрос о разрешимости поставленной задачи (43)-(44) в зависимости от значений действительных параметров α и β решается в следующей теореме.

Теорема 5. *Необходимым условием разрешимости краевой задачи (43)-(44) является выполнение следующих требований, накладываемых на граничную функцию* $f=f(\theta)$:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0,\ f(0)=f(2\pi),\ f(\theta)\in C^{2,\delta}(0,2\pi),\ \ 0<\delta<1. \tag{45}$$

В зависимости от соотношения между действительными параметрами α *и* β *имеют место также следующие утверждения*:

1. Случай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$:

1.а) Если $\beta = \dfrac{1}{m}$, *где некоторое* $m \in \mathrm{N}$, *то помимо выполнения условий (45) необходимо потребовать, чтобы имели место следующие равенства*:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta\, d\theta = 0 .$$

Решение задачи (43)-(44) в таком случае представимо единственным образом с точностью до произвольных действительных коэффициентов a_0, $\overline{a_m}$, $\overline{b_m}$ *в виде следующего тригонометрического ряда*:

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) + r^m \left(\overline{a_m}\cos m\theta + \overline{b_m}\sin m\theta\right),$$

где $a_n = \dfrac{A_n}{n(1-\beta n)}$, $b_n = \dfrac{B_n}{n(1-\beta n)}$ ($n \neq m$). *Здесь и далее коэффициенты* A_n, B_n ($n \geq 1$) *являются коэффициентами Фурье функции* $f(\theta)$.

1.б) Если для любого натурального числа $k \in \mathrm{N}$: $\beta k \neq 1$, *то решение задачи (43)-(44) представимо единственным образом с точностью до произвольного действительного коэффициента* A_0 *в виде следующего тригонометрического ряда*:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(1-\beta n)} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right).$$

2. В общем случае, когда $\alpha\beta \neq 0$, *решение задачи (43)-(44) представимо единственным образом с точностью до произвольного действительного коэффициента* A_0 *в виде следующего тригонометрического ряда*:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right).$$

В **пятой главе**, посвященной решению еще одной неклассической задачи для двумерного уравнения Лапласа, рассматривается краевая задача на полуплоскости, на границе которой задано граничное условие специального вида.

Исследуются условия разрешимости задачи в классе регулярных гармонических функций внутри области D, принадлежащих классу функций C^2 в замыкании исследуемой области.

Данная задача имеет важные приложения в механике сплошных сред и относится к проблеме моделирования адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел.

В верхней полуплоскости $y>0$ рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0,\ (x,y) \in D = \{-\infty < x < +\infty, y > 0\}, \tag{46}$$

$$u_y + \alpha u_{xy} + \beta u_{xx}\Big|_{y=0} = f(x),\ -\infty < x < +\infty, \tag{47}$$

где α и β - некоторые вещественные константы.

Решение задачи (46)-(47) ищется в классе $u \in C^2(\overline{D})$, причем дополнительно будем предполагать, что всюду в D:

$$|u(x,y)| \le M,\ |u_x(x,y)| \le M_1,\ |u_y(x,y)| \le M_2, \tag{48}$$

где M, M_1, M_2 - некоторые константы.

Условие ограниченности первых производных можно объединить в требование $|grad\, u| \le M_3 = const$.

Далее исследуются вопросы, связанные с разрешимостью сформулированной задачи (46)-(48) и единственностью ее решения.

Необходимо отметить, что так же, как и в четвертой главе, в граничное условие (47) входит дополнительное слагаемое ($\alpha \ne 0$), которое определяется не моделью адгезии, а связано с введением так называемого «фиктивного сухого трения».

Изучим вопрос существования решения краевой задачи (46)-(48).

Теорема 6. *В зависимости от соотношений коэффициентов в граничном условии специального вида решение существует и представимо в соответствующем виде*:

1) Случай $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{\beta y} \int_{y}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)F(t)}{(t-x)^2 + \eta^2} dt \right) e^{-\beta\eta} d\eta ,$$

где $F(x)$ - *первообразная граничной функции* $f(x)$, *при выполнении следующих дополнительных условий*:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau = 0$;
- $f(x) \in C^2(-\infty,+\infty)$;
- $|F(x)| < C \cdot |x|^{2-\varepsilon}$ *при* $x \to \infty,\ 0 \le \varepsilon < 1.$

2) Случай $\alpha = 0$, $\beta < 0$.

Решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x,y) = Ae^{-\frac{y}{\beta}} \sin\frac{x}{\beta} + Be^{-\frac{x}{\beta}} \cos\frac{x}{\beta} + v(x,y) + C ,$$

где C - *произвольная константа,* $v(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt$,

$\tilde{\varphi} = \mathrm{H}[\Phi]$, $\Phi(x) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{x} \sin(x-\tau)F(\tau)d\tau$ (*здесь* $\mathrm{H}[\Phi]$ *обозначает преобразование Гильберта функции* Φ), $F(x)$ - *первообразная функции* $f(x)$ *со следующими дополнительными условиями*:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\frac{\tau}{\beta}d\tau = 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\frac{\tau}{\beta}d\tau = 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)d\tau = 0.$
- $f(x) \in C^{2,\alpha}(-\infty,+\infty)$;

3) Общий случай $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$.

В этом случае решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x} \frac{f^*(\zeta) e^{-y|\zeta|}}{|\zeta|(1+\alpha i|\zeta| - \beta|\zeta|)} d\zeta,$$

где $f^*(\zeta)$ *обозначает преобразование Фурье функции* f.

Для существования решения необходимо, чтобы функция $\sigma(x) = x^2 f(x)$ *была абсолютно интегрируемой на множестве* $R = (-\infty, +\infty)$ *и требование* $f(x) \in C^{2,\alpha}(-\infty, +\infty)$.

Далее методом «от противного» исследуется вопрос о единственности решения задачи (46)-(48).

Теорема 7. *В зависимости от соотношений коэффициентов в граничном условии специального вида возможны следующие случаи*:

- $\alpha = 0,\ \beta < 0$ − *решение задачи (46)-(48) неединственно (показано, что в этом случае существуют два линейно независимых решения задачи)*;
- $\alpha = 0,\ \beta > 0$ − *решение задачи (46)-(48) единственно*;
- $\alpha \neq 0$ − *однородная задача решений, кроме тривиального, не имеет (хотя при этом имеется неограниченное решение), что обеспечивает единственность решения задачи (46)-(48).*

Благодарности

Автор работы выражает благодарность своему научному руководителю академику РАН Е.И.Моисееву за постоянное внимание и поддержку в работе, главному научному сотруднику ИПРИМ РАН, д.т.н., профессору С.А.Лурье за постановку актуальных физических задач из второй части диссертации (Главы 4-5), обсуждение полученных результатов и внимание к работе, доценту кафедры общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова Л.В.Крицкову за поддержку и помощь при подготовке текста диссертации, а также всему коллективу кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова за обсуждение рассматриваемых задач и интерес к полученным результатам.

Публикации автора по теме диссертации

1. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Tricomi problem for the Lavrent’ev-Bitsadze equation in a 3D domain // Integral Transforms and Special Functions, 2012, Vol. 23, Issue 10. P. 761-768.
2. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions, 2013, Vol. 24, Issue 7. P. 554-560.
3. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Gellerstedt problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions, 2014, Vol. 25, Issue 7. P. 509-512.
4. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.**, Холомеева А.А. Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения, 2014, Т. 50, № 12. С. 1672-1675.
5. Лурье С.А., Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Об условиях существования решения для краевых задач в моделях адгезионных взаимодействий // Механика композиционных материалов и конструкций, 2013, № 19 (1). С. 87-96.
6. Моисеев Е.И., Лурье С.А., Корзюк В.И., **Нефедов П.В.** О разрешимости и единственности решений в задачах деформирования однородных и неоднородных структур с учетом адгезионных взаимодействий // Композиты и наноструктуры, 2013, № 4. С. 6-22.
7. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Аналог задачи Франкля в трехмерном случае // Труды научной конференции «Тихоновские чтения» (тезисы докладов). Москва: факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова (29-31 окт. 2012 г.), Изд-во «Макс Пресс», 2012. С. 9.
8. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Некоторые задачи смешанного типа для уравнений Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях // Труды научной конференции «Ломоносовские чтения» (тезисы докладов). Москва: факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова (14-23 апр. 2014 г.). С. 14-15.