

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Нефедов Павел Владимирович

**Неклассические задачи для уравнений в частных производных
второго порядка**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., академик РАН, профессор

Моисеев Евгений Иванович

Москва – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ		4
1. Глава 1. Постановка и разрешимость аналога задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области		29
1.1. <i>Постановка задачи Трикоми</i>		29
1.2. <i>Решение задачи Трикоми</i>		31
1.3. <i>Единственность решения задачи Трикоми</i>		43
2. Глава 2. Постановка и разрешимость аналога задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области		45
2.1. <i>Постановка задачи Франкля</i>		45
2.2. <i>Решение задачи Франкля</i>		47
2.3. <i>Обоснование регулярности полученного решения задачи Франкля</i>		51
3. Глава 3. Постановка и разрешимость аналога задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области		68
3.1. <i>Постановка задачи Геллерстедта</i>		68
3.2. <i>Решение задачи Геллерстедта</i>		70
3.3. <i>Обоснование регулярности полученного решения задачи Геллерстедта</i>		72

4. Глава 4. Постановка и разрешимость адгезионной задачи для уравнения Лапласа в круге		75
4.1. <i>Постановка адгезионной задачи в круге</i>		75
4.2. <i>Решение адгезионной задачи в круге</i>		77
5. Глава 5. Постановка и разрешимость адгезионной задачи для уравнения Лапласа в полуплоскости		83
5.1. <i>Постановка адгезионной задачи в полуплоскости</i>		83
5.2. <i>Решение адгезионной задачи в полуплоскости</i>		84
5.3. <i>Единственность регулярного решения адгезионной задачи в полуплоскости</i>		92
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ		96
7. ЛИТЕРАТУРА		98

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория дифференциальных уравнений с частными производными, берущая начало с работ Леонарда Эйлера, в настоящее время является одним из важнейших разделов современного математического анализа и находит обширные приложения в различных разделах механики и физики, в частности, в аэро- и гидродинамике, трансзвуковой газодинамике [1] и акустике, магнитной гидродинамике и физике плазмы, теории упругости и пластичности, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака [2].

В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования вырождающихся гиперболических и эллиптических уравнений, а также уравнений смешанного типа.

Повышенный интерес к этим классам уравнений, конечно же, объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и их многочисленными приложениями в гидродинамике, в различных разделах механики сплошных сред, акустике, в теории электронного рассеяния и многих иных областях естествознания. Исследования последних лет также показали, что такие уравнения являются основой при моделировании биологических процессов.

Важная роль в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными в 20-ом веке принадлежит таким выдающимся математикам как С.Л.Соболев, И.Г.Петровский, М.А.Лаврентьев, М.В.Келдыш, А.Н.Тихонов, Л.С.Понтрягин, А.А.Самарский, А.В.Бицадзе, В.С.Владимиров, В.А.Ильин и др.

Особое место в теории дифференциальных уравнений с частными производными занимает теория уравнений смешанного типа. В монографии А.В.Бицадзе [3] отмечено, что дифференциальные уравнения в частных производных смешанного типа стали объектами систематических исследований с конца сороковых годов прошлого века.

С этого времени были исследованы различные постановки краевых задач для уравнений смешанного типа как в нашей стране, так и за рубежом. На сегодняшний день в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых подробно изучаются такие задачи.

Нельзя не отметить тех ученых, которым принадлежит значительный вклад в развитие теории уравнений смешанного типа, что, тем самым, повлияло на развитие данного раздела теории дифференциальных уравнений в целом. Среди этих математиков: Ф.И.Франкль, М.А.Лаврентьев, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, В.А.Ильин, Е.И.Моисеев, С.П.Пулькин, А.М.Нахушев, М.М.Смирнов, В.Н.Врагов, А.П.Солдатов, А.Н.Зарубин, О.А.Репин, Т.Ш.Кальменов, К.Б.Сабитов, А.А.Килбас, Л.С.Пулькина, А.В.Псху и др.

Впервые внимание на практическую значимость уравнений смешанного типа обратил С.А.Чаплыгин в 1902 году в работе «О газовых струях» [4].

Дальнейшие теоретические основополагающие результаты были получены итальянским математиком Франческо Трикоми [5], который поставил и решил первую краевую задачу для следующего модельного уравнения смешанного типа

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

и шведским математиком Свеном Геллерстедтом [6], развившем результаты Трикоми для уравнения смешанного типа более общего вида

$$\text{sign}(y) |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где параметр $m > 0$.

Систематически уравнения смешанного типа стали изучаться лишь с середины 40-х годов прошлого века после того, как Франкль указал на возможность их приложения в околосвуковой и сверхзвуковой газовой динамике [7-8]. В 1945 г. Франкль обнаружил приложение задачи Трикоми в теории сопел Лавалья, а затем в других разделах трансзвуковой газовой динамики. В дальнейшем выяснилось, что уравнения смешанного типа также применимы в

магнитогидродинамике, геометрии, биологии и других областях естественных наук.

Позже И.Н.Векуа были найдены приложения этих уравнений и в других разделах физики и механики, в частности, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек [2].

Таким образом, в 50-х годах прошлого века работами Ф.И.Франкля [7], А.В.Бицадзе [3], К.И.Бабенко [9], М.М.Смирнова [10] было положено начало современной теории уравнений смешанного типа.

В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа. В дальнейшем эти краевые задачи изучались многими авторами как в нашей стране, так и за рубежом.

Большое внимание уделяется вопросам корректности постановки краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа. Интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в прогнозировании уровня грунтовых вод, в математической биологии и других областях. Поэтому разработка методов решений краевых задач для уравнений смешанного типа является одной из важных проблем современной теории дифференциальных уравнений.

Обобщение классических результатов Трикоми по уравнениям в частных производных смешанного типа ведется в настоящее время в основном по четырем первым из следующих направлений:

1) усложнение уравнения смешанного типа за счет:

- добавления новых слагаемых;
- повышения порядка самого уравнения;

- добавления новых линий вырождения;
- 2) усложнение области смешанного типа, в которой ищется решение;
- 3) изменение граничных условий задачи или условий “склеивания” искомого решения на линии вырождения;
- 4) изучение спектральных свойств уравнений смешанного типа;
- 5) распространение идей и методов решения краевых задач со случая уравнения смешанного типа на случай систем таких уравнений.

Следует отметить, что системы уравнений смешанного эллиптического-гиперболического типа второго порядка исследованы в настоящее время сравнительно мало.

Обсудим далее некоторые известные задачи и результаты, полученные в теории уравнений смешанного типа.

В 1945 году Ф.И.Франкль впервые показал приложения краевых задач для уравнений смешанного типа в трансзвуковой газовой динамике. В дальнейшем М.А.Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + \text{sign}(y) u_{yy} = 0, \quad (2)$$

для которого технические затруднения, связанные с вычислениями, минимальны по сравнению с аналогичными задачами для уравнения (1).

Уравнение смешанного типа – это дифференциальное уравнение с частными производными, которое в области своего задания принадлежит различным типам (эллиптическому, гиперболическому или параболическому).

В общем случае линейное (квазилинейное) дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными и с непрерывными в области задания Ω коэффициентами, имеющее следующий вид [11]

$$A(x, y) u_{xx} + 2B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (3)$$

называется уравнением смешанного типа, если в этой области дискриминант $\Delta = \Delta(x, y) = A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y)$ характеристической формы $Q(dx, dy) = A dy^2 + 2B dx dy + C dx^2$, не будучи там тождественно равным нулю, может все же обращаться в нуль на некотором непустом множестве точек области Ω .

Далее предполагается, что это множество точек, задаваемое равенством $\Delta = 0$, имеет жорданову меру нуль и определяет на плоскости переменных (x, y) некоторую кривую $\delta \subset \Omega$.

Такая плоская кривая δ , определяемая уравнением $\Delta = 0$, называется параболической линией уравнения (1) или линией вырождения (или изменения) типа уравнения (3).

Если дискриминант характеристической формы Δ в области задания Ω не меняет своего знака при переходе точки (x, y) через параболическую линию δ , то уравнение (3) относится к вырожденным уравнениям эллиптико-параболического (в случае, если $\Delta \geq 0$) или гиперболо-параболического (в случае, если $\Delta \leq 0$) типа.

Область Ω задания уравнения смешанного типа обычно называют смешанной областью, и, соответственно, краевые задачи для уравнений второго порядка в частных производных, которые рассматриваются в смешанных областях, принято называть смешанными краевыми задачами.

Часть Ω^+ (или Ω^-) смешанной области Ω , где уравнение в частных производных (3) принадлежит эллиптическому (или гиперболическому) типу, называется областью эллиптичности (или, соответственно, гиперболичности).

При некоторых предположениях относительно гладкости коэффициентов уравнения (3) $A(x, y)$, $B(x, y)$ и $C(x, y)$, а также линии δ вырождения типа доказывается существование невырожденного действительного преобразования независимых переменных (x, y) , которое в окрестности выбранной точки (x, y) линии δ вырождения типа, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, приводит уравнение (3) со знакопеременным дискриминантом Δ характеристической формы к одному из

следующих канонических видов (обозначения для независимых переменных здесь сохранены)

$$y^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (4)$$

или

$$u_{xx} + y^{2m+1} u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) являются уравнениями смешанного типа (эллиптического-гиперболического типа) в любой области независимых переменных (x, y) , которая содержит внутри себя интервал линии вырождения типа $y = 0$.

Уравнение смешанного типа (3) называется уравнением 1-ого рода (соответственно 2-ого рода), если всюду вдоль параболической линии δ вырождения типа характеристическая форма $Q \neq 0$ (соответственно $Q = 0$).

Уравнение Чаплыгина, имеющее вид

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (6)$$

где коэффициент $k = k(y)$ представляет собой монотонную и непрерывно дифференцируемую функцию переменного 'у' такую, что $k(y) > 0$ при $y > 0$ и $k(y) < 0$ при $y < 0$, типичный пример уравнения смешанного типа 1-ого рода. Случай $k(y) > 0$ соответствует дозвуковому течению, а $k(y) < 0$ - сверхзвуковому течению газа. В частном случае, если $k(y) = y$, уравнение (6) принято называть уравнением Трикоми.

В СССР изучению уравнений смешанного типа традиционно большое внимание уделялось в научных школах, созданных академиками М.А.Лаврентьевым и А.В.Бицадзе.

Так, к примеру, интересным и важным примером уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами при старших производных является так называемое уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$\text{sign}(y) u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (7)$$

Одной из основных краевых задач для уравнения смешанного типа 1-ого рода является задача Трикоми, которая для уравнения вида (4) ставится следующим образом.

Пусть некоторая двумерная область Ω представляет собой конечную односвязную область на плоскости независимых переменных (x, y) , ограниченную простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, лежащую в полуплоскости $y > 0$, и участками AC и BC характеристик уравнения (4) с началом в точке $C(\frac{1}{2}, y_c)$, где некоторое $y_c < 0$.

Постановка задачи Трикоми заключается в отыскании такого решения $u = u(x, y)$ уравнения (4), которое непрерывно в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω и принимает заданные значения на кривой $\sigma \cup AC$.

В теории задачи Трикоми важную роль играет принцип экстремума Бицадзе, который для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (7) формулируется следующим образом.

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (5), принадлежащее классу $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и обращающееся в нуль на характеристике $AC: x + y = 0, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ – в замыкании $\overline{\Omega^+}$ области эллиптичности $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ своего экстремума достигает на кривой σ .

Этот принцип, из которого следует единственность и устойчивость решения задачи Трикоми, а также обоснование альтернативного метода его отыскания, был обобщен впоследствии на достаточно широкий класс линейных и квазилинейных уравнений смешанного типа.

В частности, этому классу принадлежит уравнение Чаплыгина (и Трикоми), если коэффициент $k = k(y)$ представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию, для которой дополнительно, при $y < 0$, выполняется неравенство

$$\frac{5}{4} \left(\frac{dk}{dy} \right)^2 \geq k \frac{d^2 k}{dy^2}.$$

Заметим, что принцип экстремума Бицадзе остается верен и для смешанного уравнения

$$\text{sign}(y) |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (8)$$

где $m = \text{const} > 0$.

Решение задачи Трикоми для уравнения (8) в соответствующей смешанной области Ω удастся выписать явно в том случае, если эллиптическая часть границы этой области совпадает с так называемым нормальным контуром σ_0 , задаваемым уравнением

$$x^2 + \left(\frac{2}{m+2} \right)^2 y^{m+2} = \frac{1}{4}.$$

В общем случае при определенных ограничениях, налагаемых на жорданову кривую σ и на класс искомых решений, краевая задача Трикоми для уравнения (8) редуцируется к некоторому сингулярному интегральному уравнению, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения.

Следует отметить, что метод интегральных уравнений весьма эффективно применяется при доказательстве существования решения задачи Трикоми и иных смешанных краевых задач для более общих дифференциальных уравнений вида

$$\text{sign}(y) |y|^m u_{xx} + u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (9)$$

со степенным вырождением типа порядка m .

В работах [12-13] удалось сформулировать и доказать принцип максимума модуля для гиперболических уравнений в односвязных и многосвязных областях произвольной формы и с его помощью поставить разрешимые краевые задачи [14-15]. К рассмотрению гиперболических уравнений в многосвязных областях приводят рассуждения о плоских, особым образом вынужденных колебаниях струны. Это позволило для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (7) поставить краевые задачи в конечных областях с двусвязными подобластями гиперболичности, доказать единственность их решений, а также разрешимость одной из них [16].

В отличие от известных краевых задач для уравнений смешанного типа в работе [17] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе ставится краевая задача в областях с бесконечными многосвязными подобластями гиперболичности. Вначале ставится краевая задача в области с бесконечной подобластью гиперболичности в виде разности двух характеристических треугольников. Доказывается ее однозначная разрешимость в явном виде. Далее полученные результаты оказывается возможным обобщить на области с многосвязными подобластями гиперболичности.

Современные подходы и методы теории функций и функционального анализа, в особенности метод априорных оценок, позволили существенно расширить круг уравнений смешанного типа и смешанных областей, для которых имеет место единственность и существование (обобщенного) решения как задачи Трикоми, так и ряда других смешанных краевых задач.

Дальнейшим обобщением задачи Трикоми является общая смешанная краевая задача Бицадзе, которая в случае уравнения (7) ставится следующим образом.

Пусть двумерная область Ω – односвязная смешанная область, ограниченная лежащей в полуплоскости $y > 0$ простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и выходящими из этих точек (гладкими) монотонными кривыми Γ_0 и Γ_1 , пересекающимися в точке $C(x_1, y_1)$, причем $y_1 < 0$.

Предполагается, что кривые Γ_0 и Γ_1 принадлежат области, ограниченной характеристиками $x + y = 1$, $x - y = 1$ и отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1, y = 0$. Через B_0 и B_1 обозначены точки пересечения характеристик $x - y = x_0$ и $x + y = x_0$ с кривыми Γ_0 и Γ_1 , где x_0 – любая фиксированная точка из полуинтервала $x_1 + y_1 < x_0 \leq x_1 - y_1$ ($y_1 < 0$), а через γ_0 и γ_1 – части кривых Γ_0 и Γ_1 , лежащие между точками A, B_0 и B, B_1 соответственно.

Смешанная краевая задача Бицадзе заключается в нахождении регулярного решения уравнения (7) в двумерной области $\Omega \setminus \{y \neq 0, x \pm y \neq x_0\}$, которое в

целом непрерывно в замыкании области $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные первые производные в Ω при $x \pm y \neq x_0$ и удовлетворяет заданным краевым условиям на кривых σ , γ_0 и γ_1 .

Проблема существования и единственности решения этой задачи как для уравнения (7), так и для более общих уравнений смешанного типа решена при некоторых дополнительных ограничениях геометрического характера, которые накладываются на границу области Ω и, в первую очередь конечно, на кривую σ .

Можно считать, что общая смешанная задача Бицадзе полностью решена в частном случае, когда кривая Γ_1 совпадает (при $x_0=1$) с выходящей из точки B характеристикой BC .

Важным следствием корректности постановки общей смешанной задачи Бицадзе, например, для уравнения (7), является тот факт, что постановка задачи Дирихле для смешанных областей вида Ω будет некорректной независимо от величины и формы области гиперболичности Ω^- .

Для весьма широкого класса линейных уравнений вида

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y) \quad (10)$$

установлено, что на корректность постановки задачи Дирихле в соответствующих смешанных областях вида Ω существенное влияние может оказать поведение коэффициента $a(x, y)$.

Новый тип смешанных краевых задач представляет так называемая задача Франкля [7]. Предполагается, что односвязная двумерная область Ω ограничена:

- гладкой кривой σ с концами в точках $A(0,1)$ и $B(a,0)$, расположенной в первой четверти $x > 0$, $y > 0$;
- отрезком CB : $a_1 \leq x \leq a$, $y = 0$;
- отрезком AA' : $-1 \leq y \leq 1$, $x = 0$;
- характеристикой рассматриваемого уравнения смешанного типа (например, уравнения (6)), проходящей через точки $A'(0,-1)$ и $C(a_1,0)$.

Смешанная задача Франкля формулируется следующим образом. Решение задачи Франкля состоит в отыскании в области Ω такого решения $u = u(x, y)$ уравнения смешанного типа, для которого на участке границы $\sigma \cup CB$ заданы значения функции $u(x, y)$, а на отрезке $A'A$ ($-1 \leq y \leq 1$, $x = 0$) заданы дополнительные (так называемые “нелокальные”) условия специального вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, y) - u(0, -y) = f(y).$$

Подобная задача достаточно подробно исследована в основном для модельных уравнений в частных производных смешанного типа. Так, можно считать, что задача Франкля решена для уравнения (6) в том случае, когда кривая $\sigma: x = x(s), y = y(s)$ такова, что $\frac{dy}{ds} \geq 0$, где под ‘s’ здесь понимается длина кривой σ , отсчитываемая в направлении от точки $B(a, 0)$.

Сформулированные выше основные краевые задачи для уравнений смешанного типа 1-ого рода с соответствующими изменениями перенесены на уравнения смешанного типа 2-ого рода. Эти изменения в первую очередь объясняются тем, что задача Дирихле для эллиптических уравнений с характеристическим вырождением на части границы не всегда является корректно поставленной.

В постановку краевых задач для уравнения (1) в смешанных областях привносится новый элемент в том случае, если параболическая линия δ вырождения типа для этого уравнения одновременно представляет собой и линию вырождения порядка уравнения, как это, к примеру, имеет место в случае следующего модельного уравнения

$$y^{2m} u_{xx} + y u_{yy} + \beta u_y = 0, \quad (11)$$

где m – некоторое натуральное число, а β – константа, удовлетворяющая неравенству $1 - 2m \leq 2\beta < 1$.

Для смешанных уравнений (6), (8), (11), помимо ранее указанных задач, исследован также ряд принципиально новых краевых задач, которые в основном

характеризуются тем, что вся граница $\sigma \cup AC \cup BC$ области Ω , в которой и ставится краевая задача Трикоми, является носителем краевых условий:

- на кривой σ задано, например, краевое условие Дирихле;
- на участке границы $AC \cup BC$ области Ω задано некоторое нелокальное граничное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или его (дробной) производной определенного порядка.

К подобным задачам, в частности, относятся корректно поставленные самосопряженные смешанные краевые задачи.

Также изучаются краевые задачи для уравнений смешанного типа и систем таких уравнений в областях, содержащих внутри себя части нескольких линий вырождения типа или же одну замкнутую линию вырождения типа.

Аналоги задачи Трикоми рассматривались и для некоторых других классов уравнений смешанного типа и систем уравнений смешанного типа с двумя независимыми переменными, а также для уравнений в частных производных более высокого порядка.

В работе [18] рассматривается уравнение Геллерстедта с запаздывающим аргументом в специальной области. В частности, в этой работе отмечается, что, несмотря на весьма удовлетворительное состояние теории уравнений смешанного типа, известной своими важными приложениями, полученные до последнего времени результаты не в полной мере отражают многие реальные процессы в физических системах, которые в действительности могут зависеть и от предыстории. Так, учет последствия при решении задач теории многослойных оболочек с кривизной переменного знака [2] приводит к необходимости изучения дифференциально-разностных уравнений смешанного типа.

Вследствие этого, в данной работе предлагается метод построения алгоритма вычисления регулярного решения начально-краевой задачи для модельного уравнения с запаздыванием следующего вида

$$\text{sign}(y) |y|^m u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - |y|^m u(x - \tau, y) = 0, \quad (12)$$

где уравнение (12) рассматривается в области специального вида, ограниченной в частности характеристиками и так называемой «нормальной кривой», а параметры $0 < m, \tau \equiv \text{const}$.

Для решения начально-краевой задачи для уравнения (12) методом интегральных уравнений строится алгоритм вычисления регулярного решения начально-краевой задачи для уравнения (12), который позволяет получить в явном виде рекуррентные формулы решения поставленной задачи.

В работе [19] для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области изучен аналог задачи Дирихле с условиями сопряжения на линии изменения типа, и установлены критерии единственности и существования решения этой задачи.

Заметный вклад в проблему постановки и исследования смешанных и краевых задач для уравнений и систем уравнений гипербола-параболического типа внес В.Н.Врагов [20-22]. В частности, им был предложен простой и эффективный метод решения смешанных задач для эволюционных уравнений, когда в граничные условия входят производные по времени.

Как было замечено в работе [23], по сложившейся традиции все традиционные (модельные) задачи математической физики, описываемые уравнениями гиперболического, параболического или же эллиптического типов, принято называть классическими.

Довольно долгое время этих типов уравнений было вполне достаточно, чтобы описать феномены большинства моделей математической физики таких, как, например, система уравнений Максвелла, моделирующая динамику электромагнитного поля, или система уравнений Навье-Стокса, моделирующая течение вязкой несжимаемой жидкости и т.п.

Термин «неклассические уравнения математической физики» ввел в обиход В.Н.Врагов для того, чтобы обособить область своих исследований. Первоначально это были уравнения смешанного типа, простейшим из которых является классическое уравнение Трикоми (1), а также так называемые

вырождающиеся уравнения, примером которых может служить уравнение Келдыша [24]

$$u_{xx} - y u_{yy} - a u_y = 0, \quad (13)$$

которое эллиплично в верхней полуплоскости и имеет параболическое вырождение на той части границы, которая лежит на оси Ox . Уравнение (13) описывает некоторые феномены газодинамики высоких скоростей.

В работах В.Н.Врагова решена известная проблема М.В.Келдыша о гладкости решений так называемой задачи E для вырождающихся на границе области эллиптических уравнений и систем уравнений второго порядка.

Значительные сложности возникают при отыскании корректно поставленных задач для уравнений смешанного типа с несколькими (≥ 3) независимыми переменными. Тем не менее, и в этом направлении был получен целый ряд теоретически важных результатов.

Например, показано, что для уравнения смешанного типа

$$\text{sign}(z) u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \quad (14)$$

представляющего собой достаточно простой пример уравнения смешанного типа с тремя независимыми переменными и с плоскостью $z=0$ вырождения типа, корректно поставленной является следующая краевая задача.

Пусть трехмерная конечная и односвязная область Ω ограничена некоторой кусочно-гладкой поверхностью Σ , задаваемой уравнением $z = f(x, y) \geq 0$, и характеристиками $S_1: x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$, $S_2: x - x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ уравнения (14).

Необходимо найти непрерывную в области Ω функцию $u = u(x, y, z)$ с непрерывными внутри области Ω производными 1-ого порядка, удовлетворяющую уравнению (14) внутри области Ω при $z \neq 0$ и обращающуюся в нуль на поверхности Σ , а также на одной из характеристик S_1 или S_2 .

Доказано существование слабого и единственность сильного решения этой задачи и подобной задачи для более общего уравнения вида

$$\text{sign}(x_n) u_{x_0 x} + \Delta_{(x)} u = f(x_0, x), \quad (15)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\Delta_{(x)}$ – оператор Лапласа по совокупности переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для смешанного уравнения вида

$$x_0^{2m} \Delta_{(x)} u - x_0 u_{x_0 x} + \left(m - \frac{1}{2}\right) u_{x_0} = 0 \quad (16)$$

с пространственно ориентированной гиперплоскостью $x_0 = 0$ вырождения типа в смешанной области Ω специального типа поставлены и исследованы краевые задачи, в которых часть границы $\partial\Omega$, лежащая в полупространстве $x_0 < 0$, является носителем данных для функции $u = u(x_0, x)$, а лежащая в полупространстве $x_0 > 0$ часть границы $\partial\Omega$ (характеристический коноид уравнения (16)) является носителем некоторых средних (интегральных) характеристик функции $u(x_0, x)$.

Исследовались и другие модельные уравнения смешанного типа в трехмерных (как ограниченных, так и неограниченных) областях, в т.ч. уравнения вида

$$z^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ и } z^{2m+1} (u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0. \quad (17)$$

Также был установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для широкого класса самосопряженных уравнений смешанного типа в трехмерных областях цилиндрической формы.

В настоящее время исследование подобных задач с несколькими (не менее трех) независимыми переменными находится в самом начале, и основные результаты следует ожидать еще только в будущем.

Необходимо отметить, что при изучении как классических уравнений математической физики, так и неклассических, в т.ч. уравнений смешанного типа, спектральный метод является одним из наиболее эффективных инструментов исследования поставленных задач [25].

Применение спектрального метода при решении нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа позволяет исследовать корректность постановок

этих задач, выявить структурные свойства решений и дает возможность получения точных априорных оценок решения [26].

Классический обзор результатов по спектральной теории дифференциальных операторов, порождаемых дифференциальными выражениями с обыкновенными производными, а также дифференциальными выражениями с частными производными эллиптического типа, содержится в работе [27]. Основное внимание в этой работе уделяется несамосопряженному случаю. На примере аналога одномерной нелокальной задачи Самарского-Ионкина [28] со спектральным параметром, входящим в дополнительное граничное условие, продемонстрирована специфика несамосопряженных краевых задач для уравнения теплопроводности.

Для уравнений смешанного типа спектральные свойства краевых задач активно изучались с 80-х годов прошлого века. В работе [29] С.М.Пономарев выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области, являющейся круговым сектором.

В работе [30] Е.И.Моисеев доказал базисность этой системы и, используя его, предложил спектральный метод решения краевых задач для уравнений смешанного типа. В частности, удалось получить решения некоторых уравнений в виде функциональных рядов, а также получить интегральные представления решений. Вопросы, связанные с базисностью и полнотой некоторых систем элементарных функций, подробно рассмотрены в работе [31].

Полнота собственных функций задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе была доказана К.Б.Сабитовым и А.Н.Кучкаровой [32].

Полнота собственных функций задач Трикоми, Неймана-Трикоми и Геллерстедта для уравнения

$$|y|^{m+1} u_{xx} + y u_{yy} + q u_y + \lambda |y|^{m+1} u = 0, \quad (18)$$

где $q < 1$ и $m > -2$, была доказана Е.И.Моисеевым и Ф.Могими при выполнении условия $m + 2q > 0$ [33].

Спектральные вопросы видоизмененной задачи Франкля для уравнений смешанного типа начали рассматриваться относительно недавно в работах академика Е.И.Моисеева и его учеников. В частности, вопросами полноты и базисности собственных функций в эллиптической части области видоизмененной задачи Франкля с условием сшивки первого рода занимался ученик Е.И.Моисеева, иранский математик Н.Аббаси [34].

В Главах 1–3 настоящей работы рассмотрены аналоги задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для модельного уравнения смешанного типа Лавреньева-Бицадзе в случае трехмерных областей, представляющих собой цилиндрическую поверхность в области эллиптичности уравнения и характеристическую призму в области гиперболичности уравнения с прямоугольной областью вырождения.

Особое внимание уделяется регулярности полученного решения и накладываемых условий на граничную функцию в области эллиптичности, достаточных для существования классического решения. Для аналога задачи Трикоми изучен вопрос единственности регулярного решения. Для доказательства регулярности полученных решений используются различные интегральные оценки, свойства специальных функций, а также явные интегральные представления для коэффициентов биортогонального разложения по различным тригонометрическим системам. Основные результаты, полученные в Главах 1-3, опубликованы в работах [79-84].

В Главах 4 и 5 настоящей диссертации рассматриваются также две специальные краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости, имеющие важные приложения в механике и нанотехнологиях.

Эти задачи непосредственно связаны с моделированием адгезионных свойств твердых деформируемых тел. Интерес к моделированию адгезии существенно возрос в последнее два десятилетия, так как моделирование поверхностных свойств в средах с развитой микроструктурой позволяет значительно уточнить прогноз их свойств. Например, свойства наполненных композитов с очень малыми микро- и наноразмерными включениями, для которых плотность границ

контакта различных фаз композитного материала весьма велика, в значительной степени определяется именно свойствами поверхности контакта. Более того, поверхностные свойства твердых тел могут изменяться в широких пределах при использовании так называемых технологических процессов функционализации включений. Учет адгезионных свойств, таким образом, представляет большой прикладной интерес. В математическом отношении учет свойств поверхности деформируемых тел приводит к неклассическим краевым задачам специального вида. Первые упоминания о различных свойствах взаимодействующих веществ, а также первые математические модели для подобных задач были опубликованы в ранних работах Лапласа и Пуассона [35-41].

Континуальные модели, учитывающие поверхностные свойства контактируемых деформируемых сред, впервые были предложены в работах Гуртина и Мурдоха [42-45]. При этом контактные условия для скачка нормальных напряжений на поверхности контакта были сформулированы в виде закона Лапласа-Янга, а определяющие соотношения для поверхностных напряжений имели форму уравнений закона Гука, записанных для деформаций, определенных на поверхности [46-47]. Фактически именно законом Гука, сформулированным на поверхности тела, задавались модели адгезионных взаимодействий.

В дальнейшем была предложена более общая форма контактных взаимодействий, когда адгезионные свойства поверхностей деформируемых сред учитывались при формулировке условий контакта и для нормальных, и для касательных напряжений [48-50]. Обобщенная модель Янга–Лапласа использовалась для решения ряда прикладных задач, особенно при моделировании эффективных свойств дисперсно-армированных композитов [51-57].

Вариационная модель адгезионных взаимодействий твердых деформируемых сред была сформулирована в работах [58-64]. Показано, что в общем случае плотность потенциальной энергии поверхности для линейной постановки определяется квадратичной формой $U_F(d_{ks}) = \frac{A_{ijmn} d_{ij} d_{mn}}{2}$, в которой d_{ij} – тензор

дисторсии ($d_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$), а тензор модулей упругости поверхностных свойств A_{ijnm}

имеет следующий вид

$$A_{ijnm} = [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\ + (\mu^F + \chi^F) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\ + (\mu^F - \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)],$$

где λ^F , μ^F , χ^F и δ^F – адгезионные модули, n_i – компоненты вектора нормали к поверхности тела, а $(\delta_{ij} - n_i n_j)$ – плоский тензор Кронекера, определенный на поверхности с нормалью n_i .

Вариацию потенциальной энергии поверхности можно также представить в виде $\delta U_F(d_{ks}) = (1/2) a_{ij} \delta d_{ij}$, где $a_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial R_{ij}}$ – тензор поверхностных напряжений, определяемый собственными свойствами поверхности ($a_{ij} = A_{ijnm} d_{mn}$). Такая вариационная модель адгезии является обобщением модели Янга-Лапласа и позволяет моделировать многие известные поверхностные эффекты (капиллярность, смачиваемость, поверхностное натяжение и т.п.).

Нетрудно проверить, что вариационная формулировка, учитывающая адгезионные свойства, приводит к неклассической краевой задаче с разрешающим оператором Ламе. Эта краевая задача формулируется относительно вектора перемещений и приводит к появлению в естественных статических краевых условиях вторых производных от перемещений по касательным координатам, определенным на поверхности тела. Подобная ситуация возникает и при использовании более частной модели Янга-Лапласа.

Несмотря на то, что континуальные модели адгезии все более широко используются для уточненного моделирования деформации однородных и неоднородных материалов, условия существования решения неклассических краевых задач, возникающих при моделировании свойств поверхности, к настоящему времени не установлены. Тем не менее, исследование прикладных

тестовых задач показало, что решения подобных задач не всегда существуют. Поэтому проблема определения условий существования решений представляется весьма важной.

В работе [65] изучаются условия существования решения гармонического уравнения (модельная задача теории упругости с учетом адгезии в плоской постановке) с граничным условием, содержащим вторые производные по контурной координате от искомой функции двух координат.

Отметим, что при более полном описании модели адгезии в статических граничных условиях [66] могут появиться слагаемые со смешанными вторыми производными (касательной и нормальной). Действительно, приведем следующие соображения. Будем рассматривать линейные вариационные формы, не предполагая наличие потенциалов энергий деформаций. Это позволяет формально получать вариационную постановку для диссипативных процессов. Рассмотрим σ_{ij} тензор напряжений, определенный в точке тела на поверхности с нормалью $\{n_k\}$ [67-71]. Определим тензор напряжений, определенный на поверхности тела $a_{km} = \sigma_{ij} \eta_{ik} \eta_{jm}$, $\eta_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k$. Очевидно, что $a_{km} n_k = 0$, $a_{km} n_m = 0$, так как тензор $\eta_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k$ является тензором Кронекера, определенным на поверхности, и свертка этого тензора с нормалью равна нулю. Нормальное давление в рассматриваемой точке поверхности определяется величиной $t_n = \sigma_{ij} n_j$ [72]. Пусть теперь на поверхности имеет место трение, которое задается следующим равенством: $\tau_{km}^{fr} = k_{km} t_n$, здесь k_{km} – тензор коэффициентов трения, τ_{km}^{fr} – поверхностные напряжения, определенные трением, t_n – величина давления в точке с нормалью $\{n_k\}$, т.е. t_n – скаляр.

Рассмотрим вариационную форму, соответствующую адгезии на поверхности. Она будет иметь вид: $\delta U_F(\gamma_{ij}) = \tau_{ij} \delta \gamma_{ij}$, где γ_{ij} – тензор деформации, определенный на поверхности, образуемой посредством касательных производных вектора перемещений в рассматриваемой точке.

Предположим, что тензор напряжений τ_{ij} представляется в виде суммы $\tau_{ij} = a_{ij} + \tau_{ij}^{fr}$. Напомним, что тензор a_{ij} является тензором поверхностных усилий, связанным с собственными свойствами поверхности (например, с поверхностным натяжением). В той части поверхности, где имеет место трение, в вариационном уравнении появляются слагаемые вида $k_{km} t_n \delta \gamma_{ij}$. Далее учтем, что определяющее соотношение для компоненты нормального давления t_n содержит нормальные производные от перемещений. Тогда вариационная формулировка граничных условий дает естественные граничные условия при вариации перемещений, в которых в результате интегрирования по частям интеграла $\oint_{\partial F} k_{km} t_n \delta \gamma_{ij} d\sigma_F$ (этот интеграл берется по поверхности тела F) появятся смешанные производные, содержащие как нормальные, так и касательные производные.

Рассмотрим, в частности, модель упругой среды, несжимаемой в направлении одной из координат, например, в направлении оси Ox . Перемещения в таком теле определяются одной компонентой перемещений $V(x, y)$. Дифференциальное уравнение равновесия (проекция усилий на ось Oy), записанное относительно перемещения $V(x, y)$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{G}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь E , G - модуль упругости в направлении координаты Oy и модуль сдвига соответственно. Нормальные и касательные напряжения записываются следующим образом $\sigma_y = E \frac{\partial V}{\partial y}$, $\tau = G \frac{\partial V}{\partial x}$. Напряжения σ_x могут быть найдены по касательным напряжениям в результате интегрирования второго уравнения равновесия (проекция на ось Ox). Рассмотрим граничное условие на плоскости с нормалью, совпадающей с осью Oy .

В рассматриваемой постановке граничное условие содержит следующее слагаемое, связанное с трением $kE \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, k - коэффициент трения. Таким

образом, на плоскости с нормалью, совпадающей с осью Oy , граничное условие имеет следующий общий вид

$$E \frac{\partial V}{\partial y} + \delta^F \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + k E \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = P_y^F,$$

где E – модуль упругости в направлении координаты Oy , δ^F – модуль адгезионных свойств, k – коэффициент трения, P_y^F – усилие, заданное на поверхности [73].

Основные результаты, представленные в Главах 4 и 5, опубликованы в работах [85-86].

Далее перейдем непосредственно к обсуждению целей и содержания настоящей диссертационной работы.

Цель работы состоит в нахождении аналитического представления регулярных решений неклассических задач для уравнений в частных производных второго порядка в различных областях. Рассмотрены аналоги смешанных краевых задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае, когда области, в которых рассматриваются данные уравнения в частных производных второго порядка, являются трехмерными.

Помимо этого подробно изучены неклассические задачи для уравнения Лапласа, возникающие при моделировании адгезионных взаимодействий в круге и на полуплоскости.

Научная новизна. В данной работе впервые рассмотрен ряд задач смешанного типа для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области. Доказаны регулярность построенных решений, а также единственность классического решения задачи Трикоми, получены различные интегральные оценки и равномерные оценки на коэффициенты биортогонального разложения функции по системам тригонометрических функций.

Также рассмотрены неклассические задачи в двумерной области для уравнения Лапласа с граничным условием специального вида, возникающие в результате моделирования адгезионных взаимодействий различных веществ в разных средах.

Стоит отметить, что полученные аналитические результаты могут быть полезны и при численном решении подобных задач математической физики.

Практическая значимость и актуальность. Теоретические решения рассматриваемых в данной работе задач и применяемые методы могут быть использованы при математическом моделировании процессов околосвукового и сверхзвукового течения сжимаемой среды в газовой динамике, а также при моделировании адгезионных процессов.

Методы исследования. В работе используются общие подходы и методы решения дифференциальных уравнений, методы решения классических уравнений математической физики, спектральный метод решения уравнений в частных производных и методы теории функций комплексного переменного.

Апробация работы. Результаты настоящей работы были представлены в виде научных докладов на следующих конференциях и семинарах:

- научная конференция «Ломоносов», Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (город Москва; 2012, 2013 и 2014 г.г.);
- научная конференция «Тихоновские чтения–2012» (город Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова; 2012 г.);
- 38th International Conference “Applications of Mathematics in Engineering and Economics” (AMEE’12) (Technical University of Sofia, Sozopol, Bulgaria, 8-13 June 2012);
- научная конференция «Ломоносовские чтения–2014» (город Москва, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК; 2014 г.);

- научно-исследовательский семинар кафедры функционального анализа и его приложений факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова под руководством академика РАН Е.И.Моисеева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6-ти печатных работах [79-81] и [84-86] в изданиях, входящих в список ВАК:

- работы [79-81] опубликованы в британском специализированном научном журнале “Integral Transforms and Special Functions” (impact factor – 0,814);
- работы [84-86] опубликованы в ведущих российских рецензируемых научных журналах.

Работы [82-83] оформлены как тезисы докладов в сборниках трудов научных конференций.

Таким образом, по теме диссертации автором опубликовано 8 печатных работ, из них - 6 работ в журналах, входящих в список ВАК.

Личный вклад автора, отражающий основные результаты, выносимые на защиту, заключается в их непосредственном получении, его вклад при этом был решающим. Физические постановки математических задач, обсуждаемых в работах [85-86], принадлежат соавторам (в первую очередь – профессору С.А.Лурье).

Все соавторы цитируемых работ принимали самое активное и непосредственное обсуждение полученных результатов и их возможной практической интерпретации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 105 страниц.

Библиография, приведенная в списке литературы, содержит всего 86 наименований, в т.ч. 8 печатных работ, опубликованных автором (лично и в соавторстве) по теме диссертации.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику РАН Е.И.Моисееву за постоянное внимание и поддержку в работе, главному научному сотруднику ИПРИМ РАН, д.т.н., профессору С.А.Лурье за постановку актуальных физических задач из второй части диссертации (Главы 4-5), обсуждение полученных результатов и внимание к работе, доценту кафедры общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова Л.В.Крицкову за поддержку и помощь при подготовке текста диссертации, а также всему коллективу кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова за обсуждение рассматриваемых задач и интерес к полученным результатам.

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

В Главе 1 настоящей работы будет рассмотрен аналог краевой задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай. Такие задачи представляют значительный интерес, т.к. здесь возникают определенные трудности при отыскании корректно поставленных задач для уравнений смешанного типа с тремя и более независимыми переменными.

Исследование подобных задач в настоящее время находится в самом начале.

1.1. Постановка задачи Трикоми

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в трехмерной области:

$$L[u] = u_{xx} + \operatorname{sign}(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (1.1)$$

где $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, причем область D можно представить в виде $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$:

$$D^{(+)} = \{(x, y, z) : y > 0, -1 < x < 1, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \pi\},$$

$$D^{(-)} = \{(x, y, z) : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1, 0 < z < \pi\}.$$

Заметим, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) трехмерная область $D^{(+)}$ определяется следующим образом:

$$D^{(+)} = \{(r, \varphi, z) : r < 1, 0 < \varphi < \pi, 0 < z < \pi\}.$$

Несложно видеть, что в области переменных $D^{(+)}$ уравнение (1) является уравнением эллиптического типа (т.к. здесь $\text{sign}(y) > 0$), а в области $D^{(-)}$ - гиперболического типа (т.к. $\text{sign}(y) < 0$), причем внутри прямоугольника $\{0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq \pi\}$ имеет место вырождение типа для уравнения (1.1).

Таким образом, в области D уравнение (1.1) является уравнением смешанного типа.

Рассмотрим далее следующую краевую задачу (задачу Трикоми) для определенного в (1.1) дифференциального оператора второго порядка $L[u]$.

В трехмерной области $D = \overline{D^{(+)}} \cup \overline{D^{(-)}}$ требуется найти регулярное решение дифференциального уравнения (1.1), принадлежащее классу $u \in C(\overline{D^{(+)}} \cup \overline{D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-)})$ и удовлетворяющее на границе области D дополнительным (краевым) условиям:

$$u(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \psi(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq \pi, \quad (1.2)$$

$$u(x, y, z)|_{x=-r, y=0} = 0, \quad r \leq 1, 0 \leq z \leq \pi, \quad (1.3)$$

$$u(x, y, z)|_{x=-y} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq z \leq \pi, \quad (1.4)$$

$$u(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, \quad (1.5)$$

$$u(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad -y \leq x \leq y+1, -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \quad (1.6)$$

$$u(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, \quad (1.7)$$

$$u(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \quad -y \leq x \leq y+1, -\frac{1}{2} \leq y \leq 0. \quad (1.8)$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi = \psi(\varphi, z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “А”):

- 1) $\psi = \psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha}$;
- 2) $\psi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, \pi) = 0$ (это следует из (1.2), (1.6)-(1.7));
- 3) $|\psi''_{zz}(\varphi, z)| \leq A \cdot (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1}$, где $\varphi \in (\pi - \delta, \pi)$ и $A = \text{const } \varepsilon_1 = 1 + \Delta, \Delta > 0$.

(A)

1.2. Решение задачи Трикоми

В области эллиптичности $D^{(+)}$ уравнение (1.1) удобно решать путем перехода к цилиндрическим координатам (r, φ, z) :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где полярный радиус $r \leq 1$, полярный угол $0 \leq \varphi \leq \pi$ и $0 \leq z \leq \pi$.

В цилиндрических координатах (r, φ, z) трехмерный оператор Лапласа Δ имеет вид:

$$\Delta_{(r, \varphi, z)} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Путем разделения переменных решение уравнения (1.1) в области D было найдено в следующем виде:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin \left(\left(n - \frac{1}{4} \right) (\varphi - \pi) \right) \cdot \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}, \quad y > 0 \text{ (область } D^{(+)}),$$

$$u(x, y, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \sin kz \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\frac{n-\frac{1}{4}}{2}} \cdot \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}, \quad y < 0 \text{ (область } D^{(-)}),$$

(1.9)

где под $I_\nu = I_\nu(z)$ понимают модифицированную функцию Бесселя первого рода [74]:

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

принимаящую вещественные значения при вещественных значениях параметра ν (порядок функции) и z .

Далее определим пока еще неизвестные коэффициенты σ_{nk} из представления решения в виде (1.9). Вспомним, что на поверхности $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), $0 \leq z \leq \pi$ (т.е. при $y > 0$) мы имеем граничное условие (1.2) $u(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \psi(\varphi, z)$, которое с учетом вида первого из рядов (1.9) дает нам следующее соотношение:

$$u(r, \varphi, z)|_{r=1} = \psi(\varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi). \quad (1.10)$$

Известно, что тригонометрическая система синусов $T_s = \{\sin kz\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в функциональном пространстве $L_2[0, \pi]$ [75].

В силу этого, умножив обе части ряда (1.10) на $\sin kz$ и проинтегрировав далее по z в пределах от $z = 0$ до $z = \pi$, получим, что

$$\Psi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\varphi, z) \sin kz dz = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi). \quad (1.11)$$

Из работы [30] следует, что тригонометрическая система $F_s = \{\sin(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi)\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, \pi]$. В силу этого коэффициенты σ_{nk} находятся из биортогонального разложения функции

$\Psi_k(\varphi)$ по тригонометрической системе $F_s = \left\{ \sin\left(n - \frac{1}{4}\right)(\varphi - \pi) \right\}_{n=1}^{\infty}$. Сделаем замену $\phi = \varphi - \pi$, где $-\pi \leq \phi \leq 0$. Тогда $\sin\left(n - \frac{1}{4}\right)(\varphi - \pi) = \sin\left(n - \frac{1}{4}\right)\phi$.

Таким образом, вместо тригонометрической системы F_s получим тригонометрическую систему $F_s^{(1)} = \left\{ -\sin\left(n - \frac{1}{4}\right)\phi \right\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Представление (1.11) примет вид

$$\Psi_k(\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin\left(n - \frac{1}{4}\right)\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (1.12)$$

Тогда коэффициенты σ_{nk} определяются равенствами

$$\sigma_{nk} = -\int_0^{\pi} \Psi_k(\varphi) h_n^s(\varphi) d\varphi, \quad (1.13)$$

где

$$h_n^s(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_{\beta}^k \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^{-\beta} \sin(n-k)\varphi, \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (1.14)$$

Итак, нам удалось построить решение краевой задачи Трикоми (1.1)-(1.8) в виде (1.9) с явным определением коэффициентов разложения по формулам (1.13). Далее необходимо установить, что данное формально построенное решение является регулярным.

Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1. Регулярное решение краевой задачи Трикоми (1.1)-(1.8) существует и представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося

функционального ряда (1.9) при выполнении условий (А) на граничную функцию $\psi(\varphi, z)$.

Доказательство. В силу того, что система тригонометрических функций $\{\sin(n - \frac{1}{4})\phi\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, \pi]$, ряд (1.10) сходится в пространстве $L_2[\Omega]$, где двумерная область $\Omega = \{(0 \leq \varphi \leq \pi) \times (0 \leq z \leq \pi)\}$.

Исследуем далее вопрос о равномерной и абсолютной сходимости ряда (1.10). Сначала заметим, что первый из рядов в (1.9) сходится равномерно (со скоростью геометрической прогрессии) при $r < 1$ в силу свойства монотонности модифицированной функции Бесселя первого рода [74]:

$$\frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \leq 1, \quad r < 1. \quad (1.15)$$

Таким образом, нетривиальным является вопрос о равномерной сходимости первого из рядов в (1.9) в точке $r = 1$.

Что касается второго из рядов в представлении (1.9), то в случае $\sqrt{x^2 - y^2} \neq 1$ равномерная сходимость будет доказана с использованием следующих неравенств

$$\left| \frac{x+y}{x-y} \right| < 1, \quad \sqrt{x^2 - y^2} < 1, \quad \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \leq 1. \quad (1.16)$$

Заметим, что $\sqrt{x^2 - y^2} = 1$ только в случае $x=1, y=0$. Но в этом случае второй из рядов в (1.9) совпадает с первым в точке $r=1, \varphi=0$. Поэтому для доказательства регулярности построенного решения (1.9) достаточно доказать, что ряд (1.10) сходится равномерно.

Итак, изучим далее вопрос равномерной сходимости ряда (1.10), т.е. равномерной сходимости следующего функционального ряда

$$u(r, \varphi, z)|_{r=1} = \psi(\varphi, z)|_{\varphi=\phi+\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin(n - \frac{1}{4})\phi, \quad (1.17)$$

где коэффициенты ряда (1.17) определяются по формулам

$$\sigma_{nk} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\varphi, z) h_n^s(\varphi) \sin kz \, dz d\varphi. \quad (1.18)$$

Далее будем считать, что граничная функция $\psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha}$, и выполнено условие $\psi(\varphi, z)|_{z=0} = \psi(\varphi, z)|_{z=\pi} = 0$.

Тогда равенство (1.18) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{nk} = \frac{4}{(k\pi)^2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin kz dz \right) h_n^s(\varphi) d\varphi. \quad (1.19)$$

Представление (1.19) дает «хорошее» условие убывания σ_{nk} по k ($|\sigma_{nk}| \leq \frac{C}{k^2}$).

Далее оценим порядок убывания (малости) коэффициентов (1.19) по индексу n .

Для этого используем результаты работы [31], в которой было получено следующее интегральное представление для функций $h_n^s(\varphi)$:

$$h_n^s(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sin(n - \frac{1}{4})\varphi + \frac{(-\sqrt{2})^n \sin \varphi}{\pi^2 \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2t \cos \varphi + t^2} dt \quad (1.20)$$

С учетом представления (1.20) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{nk} = & \frac{8}{\pi(\pi k)^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin(n - \frac{1}{4})\varphi d\varphi \right) \sin kz dz + \\ & + \frac{(-\sqrt{8})^n}{\pi^2(\pi k)^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi \right) \sin kz dz.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Далее рассмотрим интеграл

$$\Theta_k^{(1)}(\varphi) = \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin kz dz. \quad (1.22)$$

Так как по условию вторая частная производная $\psi''_{zz} \in C^\alpha$, т.е. принадлежит классу Гёльдера в том смысле, что по совокупности аргументов (φ, z) в области D выполняется неравенство

$$|\psi''_{zz}(\varphi_1, z_1) - \psi''_{zz}(\varphi_2, z_2)| \leq C_\alpha (|\varphi_1 - \varphi_2| + |z_1 - z_2|)^\alpha,$$

где $C_\alpha = \text{const}$, то имеет место оценка

$$|\Theta_k^{(1)}(\varphi)| = \left| \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin kz dz \right| \leq \frac{C_0}{k^\alpha}, \quad C_0 = \text{const}. \quad (1.23)$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\alpha_{kn} = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi \right) \sin kz dz. \quad (1.24)$$

Оценим внутренний интеграл из формулы (1.24), который обозначим

$$\omega_n(\varphi) = \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t\cos\varphi+t^2} dt. \quad (1.25)$$

Выясним, обращается ли функция

$$f(t, \varphi) = 1 + 2t\cos\varphi + t^2 \quad (1.26)$$

в какой-либо точке в нуль, т.е., иначе говоря, исследуем вопрос о корнях уравнения $f(t, \varphi) = 0$.

Очевидно, что при любых значениях $t \in [0, 1]$ и $\varphi \in [0, \pi]$ справедлива оценка

$$f(t, \varphi) \geq f(t, \pi) = 1 - 2t + t^2 = (t - 1)^2 \geq 0. \quad (1.27)$$

Таким образом, единственным корнем уравнения $f(t, \varphi) = 0$ является точка $M_0(t = 1, \varphi = \pi)$. Иных корней это уравнение не имеет (при условии, что $\varphi \in [0, \pi]$).

Представим функцию $f = f(t, \varphi)$, определенную равенством (1.26) в следующем виде:

$$f(t, \varphi) = 1 + 2t\cos\varphi + t^2 = (1-t)^2 + 2t(1+\cos\varphi) = (1-t)^2 + 4t\cos^2\frac{\varphi}{2}. \quad (1.28)$$

Далее воспользуемся следующим очевидным неравенством

$$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)^\varepsilon (a^2 + b^2)^{1-\varepsilon} \geq a^{2\varepsilon} b^{2(1-\varepsilon)}, \quad (1.29)$$

которое выполняется для $\forall \varepsilon: 0 \leq \varepsilon \leq 1$.

На основании неравенства (1.29) получим следующую оценку

$$f(t, \varphi) = (1-t)^2 + 4t \cos^2 \frac{\varphi}{2} \geq (1-t)^{2\varepsilon} \left(2\sqrt{t} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2(1-\varepsilon)}. \quad (1.30)$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \Theta_{kn}^{(2)}(z) &= \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi \leq \\ &\leq 2 \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1-t)^{2\varepsilon} \left(2\sqrt{t} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2(1-\varepsilon)}} dt \right) d\varphi = \\ &= 2^{2\varepsilon-1} \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}-(1-\varepsilon)}(1-t)^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}}{\left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2(1-\varepsilon)}} dt \right) d\varphi = \\ &= 2^{2\varepsilon-1} \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2\varepsilon-\frac{3}{2}} \left(\int_0^1 t^{n-\frac{3}{2}+\varepsilon} (1-t)^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} dt \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Учтем дополнительное третье условие (А) на поведение второй частной производной ψ''_{zz} . Так будем считать, что $|\psi''_{zz}(\varphi, z)| \leq A \cdot (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1}$, где $\varphi \in (\pi - \delta, \pi)$, $A = \text{const}$ и некоторое $\varepsilon_1 > 1$ (т.е. $\varepsilon_1 = 1 + \Delta$, $\Delta > 0$).

В итоге получим следующую оценку для интеграла из (1.31):

$$\begin{aligned} \Theta_{kn}^{(2)}(z) &= \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi \leq \\ &\leq T_{kn}^{(2)} + A \int_{\pi-\delta}^\pi (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2\varepsilon-\frac{3}{2}} B(n + \varepsilon - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - 2\varepsilon) d\varphi = \\ &= T_{kn}^{(2)} + A \int_{\pi-\delta}^\pi (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2\varepsilon-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(n + \varepsilon - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} - 2\varepsilon)}{\Gamma(n + 1 - \varepsilon)} d\varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

В оценке (1.32) через $T_{kn}^{(2)}$ обозначен сходящийся интеграл

$$T_{kn}^{(2)}(z) = \int_0^{\pi-\delta} \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1+2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi. \quad (1.33)$$

Для бета-функции Эйлера имеет место асимптотическая оценка [74]

$$B(n + \varepsilon - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - 2\varepsilon) = \frac{\Gamma(n + \varepsilon - \frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2} - 2\varepsilon)}{\Gamma(n + 1 - \varepsilon)} \leq \frac{C_1}{n^{\frac{3}{2}-2\varepsilon}}, C_1 = const. \quad (1.34)$$

Возьмем теперь такое $\varepsilon \in [0, 1]$, чтобы $\frac{3}{2} - 2\varepsilon > 1$, т.е. выберем $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Тогда интеграл $J(\varepsilon_1) = \int_{\pi-\delta}^{\pi} (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\varphi$ является сходящимся

при $\varepsilon_1 > 1$.

Докажем это утверждение. Действительно, справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} |J(\varepsilon_1)| &= \left| \int_{\pi-\delta}^{\pi} (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1} \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\varphi \right| = \{ \vartheta = \pi - \varphi, \varphi = \pi - \vartheta, d\varphi = -d\vartheta \} = \\ &= \left| - \int_{\delta}^0 \vartheta^{\varepsilon_1} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi - \vartheta}{2} \right) \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\vartheta \right| = \left| \int_0^{\delta} \vartheta^{\varepsilon_1} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} \vartheta^{\varepsilon_1} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\vartheta \leq \int_0^{\delta} \vartheta^{\varepsilon_1} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{2\varepsilon - \frac{3}{2}} d\vartheta = \\ &= \int_0^{\delta} \frac{\vartheta^{\varepsilon_1}}{\left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{\frac{3}{2}-2\varepsilon}} d\vartheta = \int_0^{\delta} \zeta(\vartheta) d\vartheta, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где функция $\zeta(\vartheta) = \frac{\vartheta^{\varepsilon_1}}{\left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{\frac{3}{2}-2\varepsilon}}$.

Напомним, что ранее $\varepsilon \in [0, 1]$ было выбрано так, чтобы было выполнено условие $\frac{3}{2} - 2\varepsilon > 1$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Асимптотика подынтегральной функции $\zeta(\vartheta)$ при $\vartheta \rightarrow 0+$ имеет вид

$$\zeta(\vartheta) \leq C \vartheta^{\varepsilon_1 - (\frac{3}{2} - 2\varepsilon)} = C \vartheta^{\varepsilon_1 + 2\varepsilon - \frac{3}{2}}, \quad (1.36)$$

где $C = \text{const}$.

Следовательно, при $\varepsilon_1 + 2\varepsilon - \frac{3}{2} \geq 0$, т.е. при $\varepsilon_1 \geq \frac{3}{2} - 2\varepsilon > 1$, интеграл (1.35) сходится.

Так как $\varepsilon_1 = 1 + \Delta$, $\Delta > 0$, то $\Delta \geq \frac{1}{2} - 2\varepsilon$ и $\varepsilon < \frac{1}{4}$, т.е. при выборе $\varepsilon \approx \frac{1}{4}$ можно добиться того, что величина Δ будет сколь угодно мала, и, следовательно, $\varepsilon_1 > 1$.

Тем самым, доказана следующая оценка:

$$\Theta_{kn}^{(2)}(z) = \int_0^\pi \psi''_{zz}(\varphi, z) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}} \left(\int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2t \cos \varphi + t^2} dt \right) d\varphi \leq \frac{C}{n^\gamma}, \quad (1.37)$$

где $\gamma > 1$.

Таким образом, в итоге имеем, что

$$\sigma_{nk} = \frac{1}{n^\gamma} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \sigma_{nk}^{(1)}, \quad (1.38)$$

где $\gamma > 1$, а коэффициенты $\sigma_{nk}^{(1)}$ ограничены в совокупности.

Следовательно, ряд (1.17) сходится абсолютно и равномерно в силу признака Вейерштрасса.

Для регулярности построенного решения (1.9) также необходимо доказать, что продифференцированный ряд (1.9) сходится равномерно в области D .

Мы докажем равномерную сходимость в области $D^{(+)}$, поскольку после этого равномерная сходимость решения в области $D^{(-)}$ очевидна.

Формальное дифференцирование решения по переменной φ в области $D^{(+)}$ дает следующее соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (n - \frac{1}{4}) \sigma_{nk} \sin kz \cos(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi) \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}. \quad (1.39)$$

Получим оценку на следующее выражение

$$\begin{aligned} \left| \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \right| &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{kr}{2})^{2m+n-\frac{1}{4}}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2m+n-\frac{1}{4}}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}} = \frac{(\frac{kr}{2})^{n-\frac{1}{4}}}{(\frac{k}{2})^{n-\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{kr}{2})^{2m}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2m}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}} \leq \{ \text{т.к. } 0 < r < 1 \} \leq \\ &\leq r^{n-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2m}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2m}}{m! \Gamma(m+n+\frac{3}{4})}} = r^{n-\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

верную для $\forall n, k \in N$.

Используя полученную оценку, далее имеем, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \varphi, z) \right| &= \left| \sum_{n,k=1}^{\infty} (n - \frac{1}{4}) \sigma_{nk} \sin kz \cos(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi) \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \right| \leq \\ &\leq C_1 \sum_{n,k=1}^{\infty} (n - \frac{1}{4}) r^{n-\frac{1}{4}} \leq M_1 \end{aligned} \quad (1.41)$$

и

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z}(r, \varphi, z) \right| = \left| \sum_{n,k=1}^{\infty} k \sigma_{nk} \cos kz \sin(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi) \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \right| \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} k |\sigma_{nk}| r^{n-\frac{1}{4}} \leq M_2, \quad (1.42)$$

где C_1 , M_1 и M_2 некоторые константы.

Таким образом, сходимость функционального ряда (1.39) доказана.

Равномерная сходимость продифференцированного ряда (1.9) по переменной z в области $D^{(+)}$ очевидна в силу оценки $|\sigma_{nk}| < \frac{C}{k^2}$ и убывания оцениваемого члена со скоростью «геометрической прогрессии» по r .

Формальное дифференцирование по переменной r дает нам следующий ряд

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} k \sigma_{nk} \sin kz \sin(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi) \frac{\left(I_{n+\frac{3}{4}}(kr) + \frac{n-\frac{1}{4}}{kr} I_{n-\frac{1}{4}}(k) \right)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}. \quad (1.43)$$

Равномерную сходимость продифференцированного ряда (1.9) по переменной r в области $D^{(+)}$ изучим, воспользовавшись следующим свойством модифицированной функции Бесселя [74]:

$$I'_n(z) = I_{n+1}(z) + \frac{n}{z} I_n(z).$$

Принимая во внимание свойство монотонности (строгое возрастание) гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ при $z > 2$, имеем оценку:

$$\left| \frac{I_{n+\frac{3}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)} \right| = \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{n+\frac{3}{4}}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{n-\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1 + \frac{(\frac{kr}{2})^2}{2!\Gamma(n+\frac{11}{8})} + \dots}{1 + \frac{(\frac{k}{2})^2}{2!\Gamma(n+\frac{11}{8})} + \dots} \leq \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{n+\frac{3}{4}}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{n-\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1 + \frac{(\frac{kr}{2})^2}{2!\Gamma(n+\frac{7}{4})} + \dots}{1 + \frac{(\frac{k}{2})^2}{2!\Gamma(n+\frac{11}{8})} + \dots} \leq \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{n+\frac{3}{4}}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{n-\frac{1}{4}}} \leq \frac{k}{2} r^{n+\frac{3}{4}}, \quad (1.44)$$

также верную для $\forall n, k \in N$.

Тогда сходимость ряда (1.43) следует из полученной оценки (1.44).

Используя аналогичные оценки (с учетом того, что $\psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha}$) получим, что функциональные ряды, полученные из рядов (1.9) формальным дифференцированием дважды, также сходятся равномерно, что и доказывает регулярность (в классическом смысле) построенного решения задачи (1.1)-(1.8).

Тем самым, Теорема 1 полностью доказана [79].

1.3. Единственность решения задачи Трикоми

Важным вопросом в теории уравнений смешанного типа является обоснование единственности регулярного решения задачи. Поэтому в этом разделе изучим вопрос единственности решения поставленной задачи (1.1)-(1.8). Ответ на данный вопрос сформулируем в виде Теоремы 2.

Теорема 2. Регулярное решение краевой задачи Трикоми (1.1)-(1.8) единственно.

Доказательство. Предположим, что поставленная задача (1.1)-(1.8) имеет неединственное решение, т.е. существует как минимум два различных решения исходной задачи.

Через $u = u_1 - u_2$ обозначим их разность.

Рассмотрим далее функции

$$u_k(r, \varphi) = \int_0^\pi u(r, \varphi, z) \sin kz \, dz. \quad (1.45)$$

При $r < 1$ введенные функции при $\forall k \geq 1$ удовлетворяют спектральному уравнению

$$u_{k\,xx} + \operatorname{sign}(y) u_{k\,yy} - k^2 u_k = 0. \quad (1.46)$$

В верхней полуплоскости $y > 0$ на единичной окружности $r = 1$ выполнено однородное краевое условие

$$u_k|_{r=1} = u_k(1, \varphi) = \int_0^{\pi} u(1, \varphi, z) \sin kz \, dz = 0. \quad (1.47)$$

В нижней полуплоскости $y < 0$ соответственно выполнены следующие однородные краевые условия

$$u_k(x, y)|_{x=-r, y=0} = 0, \quad r \leq 1, \quad (1.48)$$

$$u_k(x, y)|_{x=-y} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.49)$$

$$u_k(x, y)|_{y=x-1} = 0, \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0. \quad (1.50)$$

Используя результаты работы [76], можно утверждать, что решение двумерной краевой задачи (1.46)-(1.50) тождественно равно нулю в рассматриваемой двумерной области при $\forall k \geq 1$.

Так как тригонометрическая система синусов $T_s = \{\sin kz\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в функциональном пространстве $L_2[0, \pi]$, придем к выводу, что разность решений $u = u_1 - u_2 \equiv 0$.

Это доказывает единственность решения поставленной задачи (1.1)-(1.8) [84].

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

В Главе 2 настоящей работы будет рассмотрен аналог краевой задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай.

Для поиска решения краевой задачи в виде функционального ряда и обоснования его регулярности будет использован спектральный метод.

2.1. Постановка задачи Франкля

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в трехмерной области D :

$$L[u] = u_{xx} + \operatorname{sign}(y) \cdot u_{yy} + \operatorname{sign}(x + y) \cdot u_{zz} = 0, \quad (2.1)$$

где функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, причем трехмерная область D представима в виде объединения $D = D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)}$:

$$D^{(+)} = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, x^2 + y^2 < 1, y > 0, 0 < z < \pi\},$$

$$D^{(-1)} = \{(x, y, z) : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1, 0 < z < \pi\},$$

$$D^{(-2)} = \{(x, y, z) : 0 < x < \frac{1}{2}, x - 1 < y < -x, 0 < z < \pi\}.$$

Заметим, что область $D^{(+)}$ удобнее определить в цилиндрических координатах (r, φ, z) в следующем виде:

$$D^{(+)} = \{(r, \varphi, z) : r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < z < \pi\}.$$

Несложно видеть, что в области D уравнение (2.1) является уравнением смешанного типа (при $y > 0$, т.е. в области $D^{(+)}$, уравнение (2.1) является уравнением эллиптического типа, а при $y < 0$ - уравнением гиперболического типа), для которого далее рассмотрим следующую краевую задачу (аналог задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе).

В определенной выше трехмерной области D требуется найти регулярное решение дифференциального уравнения (2.1), принадлежащее классу $u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-1)}) \cap C^2(D^{(-2)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)})$ и удовлетворяющее на границе области D дополнительным (краевым) условиям:

$$u(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \psi(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \pi, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z)|_{x=0, -1 < y < 1} = 0, \quad 0 \leq z \leq \pi, \quad (2.3)$$

$$u(x, y, z)|_{x=0} = u(x, -y, z)|_{x=0}, \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \pi, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z)|_{y=0+} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z)|_{y=0-}, \quad 0 < x < 1, 0 \leq z \leq \pi, \quad (2.5)$$

$$u(x, y, z)|_{z=0} = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad (2.6)$$

$$u(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \quad (x, y, z) \in D. \quad (2.7)$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi = \psi(\varphi, z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “А”):

- 1) $\psi = \psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha}$;
 2) $\psi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, \pi) = 0$ (это следует из (2.2), (2.6)-(2.7)).
- (A)

2.2. Решение задачи Франкля

В работе [34] были найдены собственные значения и отвечающие им собственные функции для спектральной задачи, соответствующей поставленной выше задаче Франкля (2.1)-(2.7).

Используя данный результат, решение задачи (2.1)-(2.7) в трехмерной области D может быть представлено в следующем виде (в области $D^{(+)}$ решение удобнее записать в цилиндрических координатах) [82]:

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \frac{I_{4n}(kr)}{I_{4n}(k)} \cos 4n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \frac{I_{4n-1}(kr)}{I_{4n-1}(k)} \cos(4n-1)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right), (r, \varphi, z) \in D^{(+)}, \\
 u(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \frac{I_{4n}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n}(k)} \omega_{-1,1}^{4n}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \frac{I_{4n-1}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n-1}(k)} \omega_{-1,2}^{4n-1}(x, y) \right), (x, y, z) \in D^{(-1)}, \\
 u(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \frac{I_{4n}(k\sqrt{y^2 - x^2})}{I_{4n}(k)} \omega_{-2,1}^{4n}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \frac{I_{4n-1}(k\sqrt{y^2 - x^2})}{I_{4n-1}(k)} \omega_{-2,2}^{4n-1}(x, y) \right), (x, y, z) \in D^{(-2)},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где для удобства записи решения в областях $D^{(-1)}$ и $D^{(-2)}$ использованы обозначения:

$$\omega_{-1,1}(x, y) = \frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad \omega_{-1,2}(x, y) = \frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\omega_{-2,1}(x, y) = \frac{\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y-x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad \omega_{-2,2}(x, y) = \frac{\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{y-x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

а под $I_\nu = I_\nu(z)$ подразумевается модифицированная функция Бесселя первого рода [74]:

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

принимая вещественные значения при вещественных значениях параметра ν (порядок функции) и z .

В работе [30] показано, что тригонометрическая система функций $T_{\cos}(\varphi) = \{\cos 4n\varphi\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\cos(4n-1)(\frac{\pi}{2} - \varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ является полной и образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, \pi]$, вследствие чего функция $u = u(r, \varphi, z)$ может быть разложена, и притом единственным образом, в тригонометрический ряд по данной системе функций $T_{\cos}(\varphi)$.

Таким образом, нашей последующей задачей является определение в явном виде коэффициентов этого разложения A_{nk} и B_{nk} .

Используя краевое условие (2.2), получим, что:

$$u(r, \varphi, z)|_{r=1} = \psi(\varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos 4n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \cos(4n-1)(\frac{\pi}{2} - \varphi) \right), \quad (2.9)$$

где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Умножим обе части равенства (2.9) на $\sin kz$ и проинтегрируем далее по переменной z в пределах от 0 до π .

Получим следующее соотношение:

$$\psi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(\varphi, z) \sin kz \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos 4n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \cos(4n-1)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad (2.10)$$

где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим далее функцию

$$\Phi_k(\varphi) = \psi_k\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \psi_k(\varphi). \quad (2.11)$$

Тогда, с учетом (2.9), имеем, что:

$$\Phi_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk}^{(1)} \sin(4n-1)\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.12)$$

где $B_{nk}^{(1)} = \sqrt{2}B_{nk}$ и $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $\Phi_k(\varphi) = -\Phi_k\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, вследствие чего в равенстве (2.10) для определения коэффициентов B_{nk} достаточно считать, что угол φ принадлежит сегменту $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Из результатов, полученных в работе [30], следует, что тригонометрическая система функций $T_{\sin}(\varphi) = \left\{ \sin(4n-1)\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, \frac{\pi}{4}]$ с параметрами $\beta = -\frac{1}{2}$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, введенными в указанной выше работе [30].

В соответствии с результатами этой работы коэффициенты $B_{nk}^{(1)}$ можно представить в следующем виде:

$$B_{nk}^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi_k(\varphi) h_n(\varphi) d\varphi,$$

где

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos \frac{\varphi}{2})^{-\frac{1}{2}}}{(tg \frac{\varphi}{2})^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^n B_{n-k} \sin k\varphi, \quad B_l = \sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} C_{-\frac{1}{2}}^{l-m} C_0^m \quad \text{и} \quad C_l^n = \frac{l(l-1) \cdot \dots \cdot (l-n+1)}{n!}.$$

Отметим, что так как $C_0^0 = 1$, а остальные коэффициенты $C_0^n = 0$ при $n \geq 1$, то формула для вычисления коэффициентов B_l сильно упрощается, принимая простой вид $B_l = (-1)^l C_{-\frac{1}{2}}^l$.

Таким образом, можно считать, что коэффициенты B_{nk} найдены в явном виде:

$$B_{nk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi_k(\varphi) h_n(\varphi) d\varphi, \quad (2.13)$$

где функции $\Phi_k(\varphi)$ определяются равенствами (2.11).

Далее для нахождения в явном виде коэффициентов A_{nk} воспользуемся соотношением (2.9). Введем обозначение

$$f_k(\varphi) = \psi_k(\varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \cos(4n-1)(\frac{\pi}{2} - \varphi). \quad (2.14)$$

Заметим, что введенные в (2.14) функции $f_k(\varphi)$ можно также представить соотношением:

$$f_k(\varphi) = \psi_k(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \sin(4n-1)\varphi, \quad (2.15)$$

где коэффициенты B_{nk} определены равенствами (2.13), а угол $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Из соотношения (2.10) получим, что:

$$f_k(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos 4n\varphi. \quad (2.16)$$

Отметим, что из представления (2.16) можно сделать вывод, что $f_k(\varphi) = f_k(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Таким образом, представление (2.13) при определении коэффициентов A_{nk} можно рассматривать при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Так как тригонометрическая система $T_{\cos}^{(\frac{\pi}{4})}(\varphi) = \{\cos 4n\varphi\}_{n=0}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве $L_2[0, \frac{\pi}{4}]$, то представление (2.16) является рядом Фурье функции $f_k(\varphi)$ по тригонометрической системе функций $T_{\cos}^{(\frac{\pi}{4})}(\varphi)$, вследствие чего коэффициенты A_{nk} определяются как:

$$A_{nk} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_k(\varphi) \cos 4n\varphi d\varphi. \quad (2.17)$$

Таким образом, нами найдено решение поставленной задачи Франкля (2.1)-(2.7) в виде функциональных рядов (2.8), коэффициенты которых A_{nk} и B_{nk} определены явным образом равенствами (2.17) и (2.13) соответственно [83].

Далее изложим в виде теоремы основной результат Главы 2.

2.3. Обоснование регулярности полученного решения задачи Франкля

Сформулируем в виде теоремы следующее утверждение.

Теорема 3. Найденное решение задачи (2.1)-(2.7) в виде рядов (2.8) с коэффициентами, определенными в (2.13) и (2.17), является регулярным решением поставленной задачи Франкля в трехмерной области D при выполнении условий (A) на граничную функцию $\psi(\varphi, z)$.

Доказательство:

1) Исследуем скорость убывания коэффициентов B_{nk} по n и k .

Из (2.13) имеем:

$$B_{nk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi_k(\varphi) h_n(\varphi) d\varphi,$$

$$\text{где } \Phi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\varphi, z) \sin kz dz.$$

Для оценки скорости убывания коэффициентов B_{nk} воспользуемся интегральным представлением функций $h_n(\varphi)$, полученным в работе [31]:

$$\begin{aligned} h_n(\varphi) &= \sin(4(n - \frac{1}{4})\varphi + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\pi^2} \frac{(2 \cos \frac{\varphi}{2})^{-\frac{1}{2}}}{(tg \frac{\varphi}{2})^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \varphi \cdot u^{n-\frac{1}{2}}}{(1+u)^{-\frac{1}{2}} (u^2 - 2u \cos \varphi + 1)} du = \\ &= \sin(4(n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\pi^2 \sqrt{2 \sin \frac{\varphi}{2}}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \frac{\sin \varphi u^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{1+u}}{(u^2 - 2u \cos \varphi + 1)} du = \\ &= \sin(4(n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\pi^2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}}} \int_0^1 \frac{u^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{1-u} du}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} = \\ &= \sin(4(n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}}} \omega_n(\varphi) = \\ &= \sin(4(n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \omega_n(\varphi), \end{aligned} \tag{2.18}$$

где принято обозначение:

$$\omega_n(\varphi) = \int_0^1 \frac{u^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{1-u}}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du .$$

Введем обозначение $\bar{\psi}(\varphi, z) = \psi(\frac{\pi}{2} - \varphi, z) - \psi(\varphi, z)$, где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Итак, оценим скорость убывания коэффициентов B_{nk} по n и k .

При вышеперечисленных предположениях относительно свойств функции $\psi(\varphi, z)$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |B_{nk}| &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \bar{\psi}(\varphi, z) \sin kz dz \right) h_n(\varphi) d\varphi \right| = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{k^2} \left(\int_0^{\pi} \bar{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \cos kz dz \right) h_n(\varphi) d\varphi \right| = \\ &= \frac{C_B}{k^2} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\pi} \bar{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin kz h_n(\varphi) dz \right|, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $C_B = \text{const} > 0$.

Заметим, что здесь мы использовали $\bar{\psi}(\varphi, 0) = \bar{\psi}(\varphi, \pi) = 0$, а это, в свою очередь, следует из условий (2.2), (2.6)-(2.7), на основании которых $\psi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, \pi) = 0$.

Таким образом, нами получено, что $B_{nk} = O(k^{-2})$ при каждом фиксированном значении параметра n .

Далее оценим скорость убывания коэффициентов B_{nk} по параметру n , используя для этого представление (2.18).

Перепишем (2.19), используя (2.18), в виде:

$$|B_{nk}| = \frac{C_B}{k^2} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_1(\varphi) \left(\int_0^{\pi} \bar{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin kz dz \right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(\varphi) \left(\int_0^{\pi} \bar{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin kz dz \right) d\varphi \right|,$$

где для сокращения записи приняты обозначения: $f_1(\varphi) = \sin\left((4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ и $f_2(\varphi) = \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \omega_n(\varphi)$.

Далее имеем очевидную оценку:

$$|B_{nk}| \leq \frac{C_B}{k^2} \left(\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) f_1(\varphi) d\varphi \sin kz dz \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin kz dz d\varphi \right| \right).$$

Первый из интегралов в этой оценке обозначим I_1 , а второй — I_2 соответственно. Таким образом, оценка примет вид

$$|B_{nk}| \leq \frac{C_B}{k^2} (|I_1| + |I_2|). \quad (2.20)$$

В силу условия гёльдеровости, наложенного ранее на функцию $\psi_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \in C^\alpha(D^{(+)})$, и того, что эта функция является непрерывной, придем к выводу, что для интеграла I_1 верна оценка:

$$|I_1| \leq \frac{C_{I_1}}{n^\gamma}, \quad (2.21)$$

где константа $C_{I_1} > 0$ и показатель степени $\gamma > 1$.

Докажем это утверждение.

Так как $\psi_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \in C^\alpha(D^{(+)})$, то

$$\left| \overline{\psi}_{zz}^{(2)}(\varphi, z) \right| = \left| \psi_{zz}^{(2)}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, z\right) - \psi_{zz}^{(2)}(\varphi, z) \right| \leq C_\alpha \left| \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right|^\alpha.$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin((4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) d\varphi \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\pi}{2} - 2\varphi)^\alpha \left| \sin((4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}) \right| d\varphi = \{t = \frac{\pi}{2} - 2\varphi\} = \\
& = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^\alpha \left| \sin \frac{(4n-1)t}{2} \right| dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \left| \sin \frac{(4n-1)t}{2} \right| dt = \{\phi = \frac{t}{2}\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\phi}{2})^\alpha \left| \sin(4n-1)\phi \right| d\phi = \\
& = \frac{1}{2^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^\alpha \left| \sin(4n-1)\phi \right| d\phi = \{\theta = (4n-1)\phi\} = \frac{1}{2^\alpha (4n-1)^{\alpha+1}} \int_0^{\pi n - \frac{\pi}{4}} \theta^\alpha \left| \sin \theta \right| d\theta \leq \frac{C}{n^\gamma},
\end{aligned}$$

где показатель $\gamma > 1$.

Перейдем далее к оценке интеграла I_2 :

$$|I_2| = \left| \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \omega_n(\varphi) \overline{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) d\varphi \right) \sin kz dz \right|.$$

В силу условия гёльдеровости функции $\overline{\psi}_{z^2}^{(2)}$ имеет место оценка:

$$\left| \int_0^\pi \overline{\psi}_{z^2}^{(2)}(\varphi, z) \sin kz dz \right| \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \omega_n(\varphi) d\varphi \right|$, где функция $\omega_n(\varphi)$ была

определена нами ранее. Имеет место следующая оценка:

$$1 - 2u \cos \varphi + u^2 = (1-u)^2 + 4u \cos^2 \frac{\varphi}{2} \geq (1-u)^{2\varepsilon} (2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi}{2})^{2(1-\varepsilon)}$$

при $\forall \varepsilon \in [0, 1]$.

Тогда

$$\begin{aligned}
g_n^{(2)} &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \omega_n(\varphi) d\varphi \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\frac{1}{2}} u^{n-\frac{1}{2}} du}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} d\varphi \right| \geq \\
&\geq \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\frac{1}{2}} u^{n-\frac{1}{2}} du}{(1-u)^{2\varepsilon} (2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi}{2})^{2(1-\varepsilon)}} d\varphi \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_3(\varphi) \left(\int_0^1 u^{n-\frac{3}{2}+\varepsilon} (1-u)^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} du \right) d\varphi \right| = \\
&= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_3(\varphi) B(n+\varepsilon-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-2\varepsilon) d\varphi \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_3(\varphi) \frac{\Gamma(n+\varepsilon-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-2\varepsilon)}{\Gamma(n+1-\varepsilon)} d\varphi \right|,
\end{aligned}$$

где принято обозначение $f_3(\varphi) = \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} (\cos \frac{\varphi}{2})^{2\varepsilon-\frac{3}{2}}$.

Из классической монографии по специальным функциям [74] известно, что:

$$B(n+\varepsilon-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-2\varepsilon) = \frac{\Gamma(n+\varepsilon-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-2\varepsilon)}{\Gamma(n+1-\varepsilon)} \leq \frac{C}{n^{\frac{3}{2}-2\varepsilon}}.$$

Выберем произвольный пока еще параметр ε ($\forall \varepsilon \in [0,1]$) так, чтобы было выполнено неравенство $\frac{3}{2}-2\varepsilon > 1$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

При таком выборе значения ε имеем, что:

$$g_n^{(2)} \leq \frac{C}{n^\gamma}, \quad (2.22)$$

где $\gamma > 1$.

Следовательно, из представления (2.13) коэффициентов B_{nk} и полученных только что оценок (2.21) и (2.22) заключаем, что:

$$|B_{nk}| \leq \frac{C}{k^2 n^\gamma}, \quad (2.23)$$

причем параметр $\gamma > 1$.

2) Оценим теперь скорость убывания коэффициентов A_{nk} по n и k . Из (2.17) известно, что A_{nk} являются коэффициентами Фурье функции $f_k(\varphi)$ по тригонометрической системе $T_{\cos}^{(\pi/4)}(\varphi) = \{\cos 4n\varphi\}_{n=0}^{\infty}$, где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Изучим свойства функции $f_k(\varphi)$, пользуясь ее определением (2.15).

Так как $\psi(\varphi, z) \in C_{\varphi}^2(D^{(+)})$, то очевидно, что функция $\psi_k(\varphi) \in C(0, \frac{\pi}{2})$. Изучим свойства ряда:

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \sin(4n-1)\varphi. \quad (2.24)$$

Имеем, что в силу оценки (2.23) $|F(\varphi)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_{nk}| \leq C$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (2.24) сходится, причем равномерно, к непрерывной функции $F(\varphi)$, тем самым показано, что функция $f_k(\varphi) \in C(0, \frac{\pi}{2})$.

Далее докажем, что функция $f_k(\varphi)$ является также и гёльдеровой. Для этого нам потребуется просуммировать ряд (2.24) и получить его явный вид в интегральной форме.

Представление суммы функционального ряда (2.24) в интегральной форме.

Для проведения дальнейших рассуждений введем комплексную переменную $Z = re^{i\varphi}$ (прим. - здесь заметим, что комплексную переменную 'Z' следует отличать от просто переменной 'z', вторая производная по которой от искомого решения входит в уравнение (2.1)), где $0 < r < 1$ и $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Через функцию $\bar{\Phi}(\varphi)$ обозначим $\bar{\Phi}(\varphi) = \Phi_k(\frac{\varphi}{4})$.

Далее рассмотрим функцию комплексного переменного:

$$F(Z) = F(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} r^{4n-1} \sin(4n-1)\varphi. \quad (2.25)$$

Заметим, что радиус сходимости ряда (2.25) равен $R=1$, т.е. ряд сходится внутри круга $|Z|<1$.

Далее произведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
F(Z) &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} Z^{4n-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \overline{\Phi}(\theta) h_n(\theta) d\theta Z^{4n-1} = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi}(\theta) h_n(\theta) Z^{4n-1} d\theta = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi}(\theta) \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{k=1}^n \sin k\theta \overline{B}_{n-k} Z^{4n-1} d\theta = \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi}(\theta) \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{k=1}^n \sin k\theta \overline{B}_{n-k} Z^{4n-1} d\theta.
\end{aligned}$$

Меняя далее порядок суммирования, что возможно, т.к. ряд сходится равномерно при $r<1$, получим, что функция $F(Z)$ может быть окончательно представлена как:

$$\begin{aligned}
F(Z) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\Phi}(\theta) \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{n=k}^{\infty} \sin k\theta \overline{B}_{n-k} Z^{4n-1} d\theta = \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=k}^{\infty} \overline{B}_{n-k} Z^{4n-1} d\theta = \\
&\quad \{m=n-k, n=m+k\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{m=0}^{\infty} \overline{B}_m Z^{4(m+k)-1} d\theta = \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{Z} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} Z^{4k} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{B}_m Z^{4m} d\theta,
\end{aligned}$$

где под $\overline{B}_k$ понимаются ранее определенные величины $B_k = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_{-\frac{1}{2}}^{k-m} C_0^m$.

Отдельно далее вычислим сумму:

$$\begin{aligned}
 S_1(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} Z^{4k} = \{t = e^{i\theta}\} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} Z^{4k} (t^k - t^{-k}) = \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (t Z^4)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Z^4}{t}\right)^k \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-t Z^4} - \frac{1}{1-t^{-1} Z^4} \right) = \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-t Z^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right).
 \end{aligned}$$

Далее вычислим сумму $S_2(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} Z^{4m} \overline{B}_m$.

Итак,

$$\begin{aligned}
 S_2(Z) &= \sum_{m=0}^{\infty} Z^{4m} \overline{B}_m = \sum_{m=0}^{\infty} Z^{4m} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m-l} C_{\frac{1}{2}}^{m-l} C_0^l = \\
 &= \{\text{меняем порядок суммирования}\} = \sum_{l=0}^{\infty} C_0^l \sum_{m=l}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{m-l} (-1)^{m-l} Z^{4m} = \{p = m-l, m = p+l\} = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} C_0^l \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^l C_{\frac{1}{2}}^p Z^{4(p+l)} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_0^l Z^{4l} \sum_{p=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^p Z^{4p} = \\
 &= \{C_0^0 = 1, C_0^l = 0 \text{ при } \forall l = 1, 2, 3, \dots\} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^p Z^{4p} = \sqrt{1-Z^4}.
 \end{aligned}$$

С учетом выражений, полученных нами для сумм $S_1(\theta)$ и $S_2(Z)$, имеем, что:

$$\begin{aligned}
 F(Z) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{2iZ} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{1}{1-t Z^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) \sqrt{1-Z^4} d\theta = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{2iZ} \sqrt{1-Z^4} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{1}{1-t Z^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) d\theta,
 \end{aligned}$$

где $t = e^{i\theta}$, $\theta = \arg t$ и $0 < \arg t < \pi$. Тогда $dt = ie^{i\theta} d\theta$ или $d\theta = \frac{dt}{it}$.

Окончательно, учитывая, что $\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}}{2i}} = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{2i\sqrt{t}}}$, получим:

$$F(Z) = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \operatorname{Im} \sqrt{i} \frac{\sqrt{1-Z^4}}{Z} \int_{C_+} \frac{\overline{\Phi}(\arg t)}{t^{\frac{3}{4}} \sqrt{t-1}} \left(\frac{1}{1-tZ^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) dt, \quad (2.26)$$

где интегрирование осуществляется по контуру C_+ , представляющим собой верхнюю полуокружность $|Z|=1$ с началом в точке $Z = e^{-i\pi} = -1$ и концом в точке $Z = e^{-i0} = 1$.

Заметим, что $\lim_{|Z| \rightarrow 1-0} F(Z) = f_k(\varphi)$, где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Исследуем свойства полученного интеграла (2.26). В частности покажем, что интеграл в точках $Z = \pm 1$ принимает вещественные значения, причем $F(1) = F(-1) = 0$.

Итак, перейдем к следующему интегралу:

$$F(Z) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{2iZ} \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{1}{1-tZ^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) \sqrt{1-Z^4} d\theta. \quad (2.27)$$

Возможно иное представление полученного выше интеграла (2.27). Для этого введем комплексную переменную $t = e^{i\theta}$, $\theta = \arg t$ и $0 < \theta = \arg t < \pi$. Тогда $dt = ie^{i\theta} d\theta$ или $d\theta = \frac{dt}{it}$.

Далее, учитывая, что $\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} = \sqrt{\frac{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}}{2i}} = \frac{t-1}{\sqrt{2i\sqrt{t}}}$, получим:

$$\begin{aligned}
F(Z) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{2iZ} \int_{C_+} \frac{\overline{\Phi}(\arg t) \sqrt{2i} t^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{t-1}} \left(\frac{1}{1-tZ^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) \frac{dt}{it} \sqrt{1-Z^4} = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \operatorname{Im} \frac{\sqrt{i}}{Z} \int_{C_+} \frac{\overline{\Phi}(\arg t)}{t^{\frac{3}{4}} \sqrt{t-1}} \left(\frac{1}{1-tZ^4} - \frac{t}{t-Z^4} \right) dt \sqrt{1-Z^4}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Преобразуем интеграл (2.27) следующим образом (при $|Z| \rightarrow 1-0$), положив $t = e^{i\theta}$, где $0 < \theta = \arg t < \pi$, и $Z = e^{i\varphi}$, где $0 < \varphi = \arg Z < \frac{\pi}{4}$. Тогда, соответственно, $Z^4 = e^{i4\varphi} = e^{i\vartheta}$, $0 < \vartheta < \pi$.

В терминах новой угловой переменной $\vartheta \in (0, \pi)$ радикал $\sqrt{1-Z^4}$ можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-Z^4} &= \sqrt{1-e^{i\vartheta}} = \sqrt{1-(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - 2i \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}} = \\
&= \{\sin \frac{\vartheta}{2} > 0 \text{ при } 0 < \vartheta < \pi\} = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2} - i \cos \frac{\vartheta}{2}} = \\
&= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \sqrt{-i} \sqrt{-\frac{1}{i} \sin \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2}} = \{-\frac{1}{i} = i\} = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \sqrt{-i} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\vartheta}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Далее имеем, что:

$$\frac{\sqrt{1-Z^4}}{Z} = \frac{\sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\vartheta}{2}}}{e^{i\frac{\vartheta}{4}}} = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\vartheta}{4}}.$$

Теперь преобразуем выражение $\zeta(t, Z) = \frac{1}{1-tZ^4} - \frac{t}{t-Z^4}$. С учетом введенных обозначений имеем:

$$\zeta(t, Z) = \frac{1}{1-e^{i(\theta+\vartheta)}} - \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{i\vartheta}} = \frac{1}{1-e^{i(\theta+\vartheta)}} - \frac{1}{1-e^{i(\vartheta-\theta)}}.$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
1 - e^{i(\theta+\vartheta)} &= 1 - \cos(\theta + \vartheta) - i \sin(\theta + \vartheta) = 2 \sin^2 \frac{\theta+\vartheta}{2} - 2i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \cos \frac{\theta+\vartheta}{2} = \\
&= 2 \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \cdot (\sin \frac{\theta+\vartheta}{2} - i \cos \frac{\theta+\vartheta}{2}) = -2i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} e^{i \frac{\theta+\vartheta}{2}}.
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично преобразовывается и выражение

$$1 - e^{i(\vartheta-\theta)} = -2i \sin \frac{\vartheta-\theta}{2} e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}}.$$

Тогда имеем, что:

$$\frac{1}{1 - e^{i(\theta+\vartheta)}} = -\frac{1}{2i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2}} e^{-i \frac{\theta+\vartheta}{2}}, \quad \frac{1}{1 - e^{i(\vartheta-\theta)}} = -\frac{1}{2i \sin \frac{\vartheta-\theta}{2}} e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}}.$$

Следовательно, выражение $\varsigma(t, Z)$ примет вид:

$$\varsigma(t, Z) = -\frac{1}{2i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2}} e^{-i \frac{\theta+\vartheta}{2}} - \frac{1}{2i \sin \frac{\vartheta-\theta}{2}} e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{e^{-i \frac{\theta+\vartheta}{2}}}{\sin \frac{\theta+\vartheta}{2}} + \frac{e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}}}{\sin \frac{\vartheta-\theta}{2}} \right).$$

Тогда получим, что:

$$\begin{aligned}
F(Z) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{(-2i)} \frac{1}{2i} \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{i \frac{\vartheta}{4}} \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{e^{-i \frac{\theta+\vartheta}{2}}}{\sin \frac{\theta+\vartheta}{2}} + \frac{e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}}}{\sin \frac{\vartheta-\theta}{2}} \right) d\theta = \\
&= \frac{1}{16\pi} \operatorname{Im} \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{i \frac{\vartheta}{4}} \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-i \frac{\theta+\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta-\theta}{2} + e^{i \frac{\vartheta-\theta}{2}} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2}}{\sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta-\theta}{2}} d\theta.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Положим $f_4(\vartheta, \theta) = \frac{\overline{\Phi}(\theta)}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta-\theta}{2}}$. Рассмотрим далее следующий интеграл:

$$S(\vartheta) = \int_0^\pi f_4(\vartheta, \theta) (\cos \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} - i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} + \cos \frac{\theta-\vartheta}{2} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} + i \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2}) d\theta.$$

Несложно видеть, что тригонометрическое выражение, стоящее здесь под знаком интеграла, преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta, \theta) &= \cos \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} - i \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} + \cos \frac{\theta-\vartheta}{2} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} + i \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} = \\ &= \cos \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2} + \cos \frac{\theta-\vartheta}{2} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} = \sin \left(\frac{\theta-\vartheta}{2} + \frac{\theta+\vartheta}{2} \right) = \sin \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл
$$S(\vartheta) = \int_0^\pi f_4(\vartheta, \theta) \sigma(\vartheta, \theta) d\theta = \int_0^\pi f_4(\vartheta, \theta) \sin \theta d\theta$$

принимает действительные значения.

Обозначим как:

$$\begin{aligned} \Lambda(\vartheta) &= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} (\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) (\cos \frac{\vartheta}{4} + i \sin \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) = \\ &= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\cos \frac{\vartheta}{4} + i \sin \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) = \\ &= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\cos \frac{\vartheta}{4} + i \sin \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) = \\ &= (\sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} - i \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}}) (\cos \frac{\vartheta}{4} + i \sin \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) = \\ &= \left(\sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{4} + i \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{4} - i \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{4} + \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{4} \right) S(\vartheta) = \tag{2.31} \\ &= (\sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{4} + \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) + i (\sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{4} - \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{4}) S(\vartheta) = \\ &= (\cos \frac{\vartheta}{4} + \sin \frac{\vartheta}{4}) \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} S(\vartheta) + i (\sin \frac{\vartheta}{4} - \cos \frac{\vartheta}{4}) \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} S(\vartheta) = \\ &= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta+\pi}{4} S(\vartheta) + i \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta-\pi}{4} S(\vartheta) = \\ &= \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(\sin \frac{\vartheta+\pi}{4} + i \sin \frac{\vartheta-\pi}{4} \right) S(\vartheta). \end{aligned}$$

Итак, в результате всех этих преобразований нами получено, что:

$$\operatorname{Im} \Lambda(\vartheta) = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(\sin \frac{\vartheta}{4} - \cos \frac{\vartheta}{4} \right) \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2}} d\theta. \quad (2.32)$$

Таким образом, интеграл $F(Z)$ может быть представлен как:

$$F(Z) = \frac{1}{16\pi} \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(\sin \frac{\vartheta}{4} - \cos \frac{\vartheta}{4} \right) \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2}} d\theta, \quad (2.33)$$

где $Z = e^{i\frac{\vartheta}{4}}$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Так как $\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$, то дальнейшее преобразование интеграла $F(Z)$ приводит нас к следующему представлению:

$$F(Z) = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \sqrt{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin \left(\frac{\vartheta-\pi}{4} \right) \int_0^\pi \frac{\overline{\Phi}(\theta) \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta+\vartheta}{2} \sin \frac{\theta-\vartheta}{2}} d\theta, \quad (2.34)$$

Очевидно, что этот интеграл является несобственным интегралом, зависящим от параметра (здесь этим параметром является угол ϑ , меняющийся на сегменте $\vartheta \in [0, \pi]$).

Выделим особые точки интеграла (2.34):

- $\theta = \vartheta$ (т.к. при $\theta = \vartheta$ знаменатель подынтегральной функции обнуляется: $\sin \frac{\theta-\vartheta}{2} = 0$);
- $\theta = \vartheta = 0$ (угловая точка контура интегрирования C_+ , в которой знаменатель подынтегральной функции обнуляется: $\sin \frac{\theta+\vartheta}{2} = 0$);
- $\theta = \vartheta = \pi$ (угловая точка контура интегрирования C_+ , в которой знаменатель подынтегральной функции обнуляется: $\sin \frac{\theta+\vartheta}{2} = 0$).

Но при $\vartheta = 0$ (что соответствует значению $Z = 1$) получим, что $F(1) = 0$, т.к. здесь множитель перед интегралом $\sin \frac{\vartheta}{2} = 0$, а непосредственно сам интеграл по

переменной θ сходится в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$ (этот интеграл является несобственным интегралом 2-ого рода, и сходимость в этих точках следует из признака сравнения).

Рассуждая по аналогии, можно показать, что и при $\vartheta=\pi$ (что соответствует значению $Z=e^{i\pi}=-1$) получим: $F(-1)=0$.

Таким образом, нами показано, что действительно $F(1)=F(-1)=0$

Заметим, что помимо «угловых» особыми точками интеграла (26) являются точки, где $t=Z^4$ (т.е. это внутренние точки дуги окружности C_+ от 0 до π). Но здесь, на основании формулы Сохоцкого-Племеля [77], легко убедиться, что если функция $\overline{\Phi}(\theta)$ принадлежит классу Гёльдера (а это непосредственно вытекает из наложенных требований на граничную функцию $\psi(\varphi, z)$), то и функция $f_k(\varphi) \in C^\alpha$ (т.е. является гёльдеровой) [78].

Далее, из принадлежности функции $f_k(\varphi)$ классу $f_k(\varphi) \in C^\alpha$ и ее непрерывности следует нужная нам оценка на коэффициенты A_{nk} , а именно:

$$|A_{nk}| \leq \frac{1}{k^2 n^\gamma},$$

где показатель степени $\gamma > 1$.

Тем самым, требуемая нам оценка на коэффициенты A_{nk} получена.

Таким образом, нами показано, что ряды, входящие в представление решения задачи Франкля (2.8), равномерно и абсолютно сходятся в $D^{(+)}$. Далее необходимо исследовать равномерную сходимость рядов в гиперболической области $D^{(-)}$.

Сначала рассмотрим область гиперболичности решения $D^{(-1)}$. Формально решение здесь представлено в виде второго из функциональных рядов (2.8).

При $\sqrt{x^2 - y^2} \neq 1$ (т.е. при $x \neq 1, y \neq 0$; при $x = 1, y = 0$ решение в виде ряда в области $D^{(-1)}$ совпадает с регулярным решением в области $D^{(+)}$, представленным рядом в точке $r = 1$) второй из рядов (12) сходится равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса.

Действительно, верна следующая асимптотика, полученная нами в Главе 1:

$$\frac{I_{4n}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n}(k)} = O^*\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^{4n}.$$

Таким образом, придем к оценке

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{4n} \frac{I_{4n}(k\sqrt{x^2 - y^2})}{I_{4n}(k)} \leq \\ & \leq \left(\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{2} \right)^{4n} = \left(\frac{(x+y) + (x-y)}{2} \right)^{4n} = |x|^{4n}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $|x| < 1$.

В силу оценки (2.35) формально полученный ряд внутри области $D^{(-1)}$ является равномерно сходящимся по признаку Вейерштрасса.

Аналогично докажем равномерную сходимость ряда, формально представляющего решение в области $D^{(-2)}$.

Здесь имеем, что

$$\frac{I_{4n}(k\sqrt{y^2 - x^2})}{I_{4n}(k)} = O^*\left(\sqrt{y^2 - x^2}\right)^{4n}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\left(\frac{\left(\frac{x+y}{y-x} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y-x}{x+y} \right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{4n} \frac{I_{4n}(k\sqrt{y^2-x^2})}{I_{4n}(k)} \leq \quad (2.36)$$

$$\leq \left(\left(\left(\frac{x+y}{y-x} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y-x}{x+y} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{2} \right)^{4n} = \left(\frac{(x+y) + (y-x)}{2} \right)^{4n} = |y|^{4n},$$

где $|y| < 1$.

В силу оценки (2.36) формально полученный функциональный ряд внутри области $D^{(-2)}$ является равномерно сходящимся по признаку Вейерштрасса.

Таким образом, мы получили, что ряды, представляющие решения в области $D^{(-)}$, сходятся равномерно и абсолютно. Для того, чтобы полученное решение задачи Франкля (2.8) было классическим необходимо, чтобы продифференцированные (до второго порядка включительно) ряды сходились также равномерно.

Здесь, однако, заметим, что это следует из полученных ранее оценок на коэффициенты A_{nk} и B_{nk} , а также из равномерных оценок на модифицированную функцию Бесселя первого рода, полученных в Главе 1.

Схема доказательства полностью совпадает со схемой, приведенной в Главе 1.

Тем самым, доказательство Теоремы 3 завершено [80].

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

В Главе 3 настоящей работы будет рассмотрен аналог краевой задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, обобщенного на трехмерный случай.

Решение аналога задачи Геллерстедта в трехмерном случае будет найдено в виде функциональных рядов при помощи сведения исходной задачи к двум другим - аналогу задачи Франкля и аналогу задачи Трикоми в трехмерных областях.

3.1. Постановка задачи Геллерстедта

В настоящей работе изучается дифференциальное уравнение второго порядка, рассматриваемое в трехмерной области D :

$$L[u] = u_{xx} + \text{sign}(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (3.1)$$

где функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, причем трехмерная область D представима как:

$$D = D^{(+)} \cup D^{(-)};$$

$$D^{(+)} = \{(x, y, z) : D_{xy}^{(+)} \times (0 < z < \pi)\},$$

$$D^{(-)} = \{(x, y, z) : \{D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}\} \times (0 < z < \pi)\},$$

где двумерные (в плоскости переменной $z=0$) области $D_{xy}^{(+)}$, $D_{xy}^{(-1)}$ и $D_{xy}^{(-2)}$ определены соответственно соотношениями:

$$D_{xy}^{(+)} = \{(x, y) : -1 < x < 1, x^2 + y^2 < 1, y > 0\},$$

$$D_{xy}^{(-1)} = \{(x, y) : -1 < x < 0, y < 0, -x - 1 < y < x\},$$

$$D_{xy}^{(-2)} = \{(x, y) : 0 < x < 1, y < 0, -x < y < x - 1\}.$$

Сразу заметим, что в “верхней” области $D_{xy}^{(+)}$ вместо декартовых (x, y) координат более удобно использовать полярные координаты (r, φ) , где $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r < 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$. Соответственно, в области $D^{(+)}$ решение уравнения (3.1) естественно искать не в декартовых, а в цилиндрических координатах (r, φ, z) .

В трехмерной области D уравнение (3.1) является уравнением смешанного типа (при $y > 0$, т.е. в “верхней” области $D^{(+)}$, уравнение (1) является уравнением эллиптического типа, а при $y < 0$, т.е. в “нижней” области $D^{(-)}$, уравнение (3.1) представляет собой уже уравнение гиперболического типа), для которого далее рассматривается следующая краевая задача, известная в литературе как задача Геллерстедта [6] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

В указанной трехмерной области D требуется найти регулярное (т.е. классическое) решение дифференциального уравнения (3.1), принадлежащее функциональному классу

$$u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-)})$$

и удовлетворяющее на границе трехмерной области D дополнительным (граничным) условиям:

$$u(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = f(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \psi(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi, z \leq \pi, \quad (3.2)$$

$$u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \{(x, y, z) : (|x| \leq 1, y < 0, y = \pm x) \times (0 \leq z \leq \pi)\}, \quad (3.3)$$

$$u(x, y, z)|_{z=0} = u(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \quad (x, y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}. \quad (3.4)$$

Дополнительно потребуем, чтобы граничная функция $\psi = \psi(\varphi, z)$ удовлетворяла следующим условиям (условия “А”):

- 1) $\psi = \psi(\varphi, z) \in C^{2,\alpha}$;
- 2) $\psi(\varphi, 0) = \psi(\varphi, \pi) = 0$ (это следует из (3.2), (3.6)-(3.7));
- 3) $|\psi''_{zz}(\varphi, z)| \leq A \cdot (\pi - \varphi)^{\varepsilon_1}$, где $\varphi \in (\pi - \delta, \pi)$ и $A = \text{const } \varepsilon_1 = 1 + \Delta, \Delta > 0$.

(A)

3.2. Решение задачи Геллерстедта

Будем искать решение задачи (3.1)-(3.4) в следующем виде:

$$u(x, y, z) = U(x, y, z) + V(x, y, z),$$

где функции $U = U(x, y, z)$ и $V = V(x, y, z)$ положим соответственно равными:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(u(x, y, z) + u(-x, y, z)), \quad (3.5)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(u(x, y, z) - u(-x, y, z)). \quad (3.6)$$

Рассмотрим далее краевую задачу, которая может быть сформулирована относительно вспомогательной функции $V = V(x, y, z)$:

$$L[V] = V_{xx} + \text{sign}(y) \cdot V_{yy} + V_{zz} = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad (3.7)$$

$$V(x, y, z) \Big|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \frac{(f(x, y, z) - f(-x, y, z)) \Big|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi}}{2} = \overline{\psi_V}(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi, z \leq \pi, \quad (3.8)$$

$$V(x, y, z) \Big|_{x=0} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \pi, \quad (3.9)$$

$$V(x, y, z) \Big|_{z=0} = V(x, y, z) \Big|_{z=\pi} = 0, \quad (x, y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}, \quad (3.10)$$

$$V(x, y, z) \Big|_{x=-y} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq z \leq \pi. \quad (3.11)$$

Заметим, что условие (3.9) имеет место в силу симметрии решения $u = u(x, y, z)$ в области $D^{(-)}$ относительно оси Oy ($u(x, y, z) = u(-x, y, z)$), если только $(x, y, z) \in D^{(-)}$. Выполнение условия (3.11) также объясняется симметрией решения $u = u(x, y, z)$ в области $D^{(-)}$ относительно оси Oy .

Таким образом, сформулированная краевая задача (3.7)-(3.11) относительно

функции $V = V(x, y, z)$ представляет собой трехмерную задачу Трикоми в области D .

Регулярное (классическое) решение аналога задачи Трикоми в трехмерном случае (3.7)-(3.11) путем разделения переменных найдено в следующем виде:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin\left((n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi)\right) \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(kr)}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}, \\ (x, y, z)|_{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} \in D^{(+)}; \\ \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n-\frac{1}{4}}{2}} \frac{I_{n-\frac{1}{4}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-\frac{1}{4}}(k)}, \\ (x, y, z) \in D^{(-)}, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $I_\nu = I_\nu(z)$ модифицированная функция Бесселя первого рода, а коэффициенты σ_{nk} из представлений (3.12) определяются как:

$$\sigma_{nk} = - \int_0^\pi \psi_k(\varphi) h_n^s(\varphi) d\varphi, \quad (3.13)$$

$$\psi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \overline{\psi_V(\varphi, z)} \sin kz dz, \quad (3.14)$$

$$h_n^s(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_\beta^k (2 \cos \frac{\varphi}{2})^{-\beta} \sin(n-k)\varphi, \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

Из Главы 1 известно, что приведенное решение задачи Трикоми (3.7)-(3.11) в виде рядов (3.12) является регулярным в рассматриваемой трехмерной области D .

Перейдем далее к решению задачи (3.1)-(3.4), переформулированной в терминах вспомогательной функции $U = U(x, y, z)$.

Исходя из формулы (3.5), в которой эта функция определена, несложно получить следующую краевую задачу, которую достаточно рассмотреть на интервале $0 < x < 1$ в силу симметрии (четности) функции $U = U(x, y, z)$ относительно оси Oy :

$$L[U] = U_{xx} + \text{sign}(y) \cdot U_{yy} + U_{zz} = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad (3.16)$$

$$U(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = \frac{(f(x, y, z) + f(-x, y, z))|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi}}{2} = \overline{\psi_U}(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi, z \leq \pi, \quad (3.17)$$

$$U(x, y, z)|_{z=0} = U(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \quad (x, y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}, \quad (3.18)$$

$$U(x, y, z)|_{y=-x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)|_{x=0} = 0,$$

$$(x, y, z) \in \{(x, y, z) : \{(x, y) \in D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}\} \times (0 < z < \pi)\}. \quad (3.19)$$

Используя метод разделения переменных для решения задачи (3.16)-(3.19), можно получить следующее представление решения указанной задачи:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos((2n + \frac{1}{2})(\frac{\pi}{2} - \varphi)) \frac{I_{2n+\frac{1}{2}}(kr)}{I_{2n+\frac{1}{2}}(k)}, \\ (x, y, z)|_{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} \in D^{(+)}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} A_{nk} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\frac{2n+\frac{1}{2}}{2}} \frac{I_{2n+\frac{1}{2}}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2n+\frac{1}{2}}(k)}, \\ (x, y, z) \in D^{(-)}, \end{cases} \quad (3.20)$$

где

$$A_{nk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_k(\varphi) h_n^c(\varphi) d\varphi, \quad (3.21)$$

$$h_n^c(\varphi) = \frac{2}{\pi} \cos(n + \frac{1}{4})\varphi + \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{2 \cos \frac{\varphi}{2}}}{\pi^2} \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} (1+t)}{1 + 2t \cos \varphi + t^2} dt,$$

$$\psi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \overline{\psi_U}(\varphi, z) \sin kz dz.$$

3.3. Обоснование регулярности полученного решения задачи Геллерстедта

Теорема 4. Решение $u = u(x, y, z)$ поставленной задачи (3.1)-(3.4) в виде функциональных рядов (3.12) и (3.20) с коэффициентами, определенными в (3.13)

и (3.21), является регулярным (классическим) решением поставленной задачи Геллерстедта в трехмерной области D при условии выполнения условий (А) относительно граничной функции $\psi(\varphi, z)$, где решение ищется в виде $u = u(x, y, z) = U(x, y, z) + V(x, y, z)$.

Доказательство. Покажем, что построенное нами решение (3.20) $U = U(x, y, z)$ также является регулярным в трехмерной области D .

Для этого найдем коэффициенты A_{nk} из представлений (3.20).

На верхней границе области $D^{(+)}$ при $r = 1$ и $\varphi \in [0, \pi]$ выполнено граничное условие:

$$U(r, \varphi, z)|_{r=1} = \psi_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \overline{\psi_U}(\varphi, z) \sin kz \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos(n + \frac{1}{4})\varphi.$$

Отметим, что в силу результатов работы [30] тригонометрическая система косинусов $T_{\cos}(\varphi) = \{\cos(n + \frac{1}{4})\varphi\}_{n=0}^{\infty}$ является полной на сегменте $\varphi \in [0, \pi]$.

Тогда сразу же имеем, что

$$A_{nk} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_k(\varphi) h_n^c(\varphi) \, d\varphi,$$

где функции $h_n^c(\varphi)$ были определены ранее в виде

$$h_n^c(\varphi) = \frac{2}{\pi} \cos(n + \frac{1}{4})\varphi + \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{2 \cos \frac{\varphi}{2}}}{\pi^2} \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} (1+t)}{1 + 2t \cos \varphi + t^2} \, dt.$$

Из результатов, полученных в Главе 2, известно, что имеет место следующая оценка коэффициентов A_{nk} из представления (3.21):

$$|A_{nk}| \leq \frac{1}{k^2 n^{1+\gamma}}, \quad (3.22)$$

где $\gamma > 0$, что гарантирует абсолютную и равномерную сходимость ряда (3.20) в области $D^{(+)}$.

Также в Главе 2 было показано, что в области $D^{(-)}$ справедлива оценка:

$$\left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{2n+\frac{1}{2}}{2}} I_{2n+\frac{1}{2}}(k\sqrt{x^2-y^2}) \leq \rho^{2n+\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

где некоторое $\rho \in (0,1)$.

Таким образом, можно утверждать, что и в области $D^{(-)}$ решение задачи (3.16)-(3.19) $U = U(x, y, z)$ также является регулярным (т.е. классическим).

Приведенные выше рассуждения и выводы из них завершают доказательство сформулированной выше Теоремы 4 [81].

ГЛАВА 4

ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ АДГЕЗИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ

В Главе 4, посвященной неклассической задаче Лапласа, рассматривается краевая задача для уравнения Лапласа внутри круга D , на границе которого задается граничное условие специального вида. Исследуются условия разрешимости задачи в классе регулярных гармонических функций внутри области D , принадлежащих классу функций C^2 в замыкании круга.

Данная задача имеет важные приложения в механике сплошных сред и относится к проблеме моделирования адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел.

4.1 Постановка адгезионной задачи в круге

В двумерной области D , представляющей единичный круг $D = \{(r, \theta) : r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, (r, \theta) \in D, \quad (4.1)$$

$$u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta}|_{r=1} = f(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (4.2)$$

где α и β - некоторые вещественные константы.

Решение задачи (4.1)-(4.2) ищется в классе $u \in C^2(\bar{D})$. Заметим, что краевая задача для уравнения Лапласа (4.1)-(4.2) не является классической, так как краевое условие (4.2) не является ни одним из условий первого, второго или третьего родов, которые традиционно рассматриваются в математической физике при изучении граничных задач для уравнения Лапласа [11].

Далее сформулируем и докажем теорему о разрешимости поставленной задачи (4.1)-(4.2) в зависимости от значений действительных параметров α и β .

Теорема 5. Необходимым условием разрешимости краевой задачи (4.1)-(4.2) является выполнение следующих требований, накладываемых на граничную функцию $f = f(\theta)$:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0, \quad f(0) = f(2\pi), \quad f(\theta) \in C^{2,\delta}(0, 2\pi), \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.3)$$

В зависимости от соотношения между действительными параметрами α и β имеют место также следующие утверждения:

1. Случай $\alpha = 0, \beta \neq 0$:

1.а. Если $\beta = \frac{1}{m}$, где некоторое $m \in \mathbb{N}$, то помимо выполнения условий (4.3)

необходимо потребовать, чтобы имели место следующие равенства:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = 0. \quad (4.4)$$

Решение задачи (4.1)-(4.2) в таком случае представимо, причем единственным образом, в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + r^m (\overline{a_m} \cos m\theta + \overline{b_m} \sin m\theta), \quad (4.5)$$

где коэффициенты $a_0, \overline{a_m}, \overline{b_m}$ являются произвольными действительными числами, а

$$a_n = \frac{A_n}{n(1-\beta n)}, \quad b_n = \frac{B_n}{n(1-\beta n)}.$$

1.б. Если для любого натурального числа $k \in \mathbb{N}$: $\beta k - 1 \neq 0$, то решение задачи (4.1)-(4.2) представимо, причем единственным образом, в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(1-\beta n)} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad (4.6)$$

где коэффициент A_0 является произвольным действительным числом.

2. В общем случае, когда $\alpha\beta \neq 0$, решение задачи (4.1)-(4.2) также представимо, причем единственным образом, в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad (4.7)$$

где коэффициент A_0 является произвольным действительным числом, а коэффициенты A_n, B_n ($n \geq 1$) являются коэффициентами Фурье.

4.2. Решение адгезионной задачи в круге

Доказательство. Предварительно заметим, что в простейшем случае $\alpha = \beta = 0$ поставленная выше краевая задача (4.1)-(4.2) является внутренней задачей Неймана для уравнения Лапласа, необходимым условием разрешимости которой, как известно [11], является требование:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0. \quad (4.8)$$

Несложно показать, что условие разрешимости задачи Неймана (4.8) остается необходимым и в случае $\alpha\beta \neq 0$.

Для возможности разложения решения поставленной задачи (4.1)-(4.2) в ряд Фурье и равномерной сходимости этого ряда мы требуем, как указано в (4.3), выполнения естественного условия периодичности $f(0) = f(2\pi)$.

С учетом этого из граничного условия (4.2) немедленно следует, что:

$$u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta} \Big|_{r=1, \theta=0} = u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta} \Big|_{r=1, \theta=2\pi}. \quad (4.9)$$

Вычитая из левой части равенства (4.9) правую часть, в случае $\alpha\beta \neq 0$, имеем очевидные равенства:

$$u_r(1, 0) = u_r(1, 2\pi), \quad u_{\theta\theta}(1, 0) = u_{\theta\theta}(1, 2\pi). \quad (4.10)$$

Далее заметим, что в силу граничного условия (4.2) имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} u_r(r, \theta)|_{r=1} d\theta + \alpha \int_0^{2\pi} u_{r\theta}(r, \theta)|_{r=1} d\theta + \beta \int_0^{2\pi} u_{\theta\theta}(r, \theta)|_{r=1} d\theta = \\
&= \left\{ \int_0^{2\pi} u_r(r, \theta)|_{r=1} d\theta = 0 \right\} = \\
&= \alpha(u_r(1, 2\pi) - u_r(1, 0)) + \beta(u_{\theta\theta}(1, 2\pi) - u_{\theta\theta}(1, 0)) = \{\text{условие (4.10)}\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь следует напомнить, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} u_r(r, \theta)|_{r=1} d\theta = 0$$

равен нулю вследствие универсального свойства гармонических функций, в силу которого интеграл от нормальной производной гармонической функции, взятый по замкнутой поверхности, ограничивающей область гармоничности, равен нулю [11] (*прим.*: на границе рассматриваемой области D производная по внешней нормали $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$).

Таким образом, нами показано, что условие (4.8) является необходимым условием разрешимости краевой задачи (4.1)-(4.2) и в общем случае, когда $\alpha\beta \neq 0$.

1. Рассмотрим сначала первый случай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Здесь граничное условие (4.2) имеет вид:

$$u_r + \beta u_{\theta\theta}|_{r=1} = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{4.12}$$

Известно [11], что гармоническая в круге D функция $u = u(r, \theta)$ может быть представлена в виде тригонометрического ряда:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{4.13}$$

Тогда на границе при $r = 1$ на основании условия (4.12) имеем следующее соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos n\theta + nb_n \sin n\theta) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{4.14}$$

Разложим граничную функцию $f = f(\theta)$ в тригонометрический ряд Фурье на сегменте $[0, 2\pi]$, заметив при этом, что нулевой коэффициент в этом разложении

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \quad \text{в силу выполнения условия разрешимости (4.11). Итак,}$$

имеем, что

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad (4.15)$$

где коэффициенты тригонометрического ряда (4.15) определяются как:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Таким образом, на основании (4.14) и (4.15) приходим к простой системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} na_n - \beta n^2 a_n = A_n, \\ nb_n - \beta n^2 b_n = B_n, \end{cases} \quad (4.16)$$

где $n \geq 1$.

Из (4.16) получим, что:

$$a_n = \frac{A_n}{n(1-\beta n)}, \quad b_n = \frac{B_n}{n(1-\beta n)}. \quad (4.17)$$

Рассмотрим далее два случая:

а) пусть $\exists m \in \mathbb{N} : \beta = \frac{1}{m}$. Тогда коэффициенты $A_m = B_m = 0$, и, как результат

этого, мы имеем следующее представление решения краевой задачи (4.1)-(4.2) в виде:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{r^n}{n(1-\beta n)} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + r^m (\overline{a_m} \cos m\theta + \overline{b_m} \sin m\theta). \quad (4.18)$$

В представлении (4.18) коэффициенты $a_0, \overline{a_m}, \overline{b_m}$ являются произвольными действительными числами.

Таким образом, требование равенства нулю коэффициентов Фурье $A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta = 0$ и $B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = 0$ представления граничной функции также является необходимым условием разрешимости краевой задачи (4.1)-(4.2) в рассматриваемом случае.

б) Пусть теперь для $\forall k \in \mathbb{N} : \beta \neq \frac{1}{k}$.

В этом случае решение краевой задачи (4.1)-(4.2) представимо в виде:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(1-\beta n)} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad (4.19)$$

где A_n и B_n - соответствующие коэффициенты Фурье разложения граничной функции $f = f(\theta)$ в тригонометрический ряд.

Здесь, как видно, решение (4.19) определено с точностью до произвольной вещественной константы a_0 .

2. Перейдем теперь к рассмотрению второго (наиболее общего) случая, когда про коэффициенты из граничного условия (4.2) известно, что $\alpha\beta \neq 0$.

Запишем граничное условие (4.2) в следующем виде ($r=1$ и $0 \leq \theta < 2\pi$):

$$\begin{aligned} u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \\ & + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) - \\ & - \beta \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Далее преобразуем соотношение (4.20) к виду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n + \alpha n^2 b_n - \beta n^2 a_n) \cos n\theta + (nb_n - \alpha n^2 a_n - \beta n^2 b_n) \sin n\theta) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таким образом, имеем систему простых линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье решения a_n и b_n :

$$\begin{cases} na_n + \alpha n^2 b_n - \beta n^2 a_n = A_n, \\ nb_n - \alpha n^2 a_n - \beta n^2 b_n = B_n, \end{cases} \quad (4.22)$$

справедливую при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что алгебраическая система уравнений (4.22), неизвестными в которой являются коэффициенты a_n и b_n , совместна при $\forall n \in \mathbb{N}$, так как ее определитель $\Delta_n = \sigma_n^2 + \lambda_n^2$ (здесь приняты обозначения: $\sigma_n = n(1 - n\beta)$ и $\lambda_n = \alpha n^2$) при выполнении условия $\alpha\beta \neq 0$ не обращается в нуль ни при каком натуральном значении $n \geq 1$ (несложно видеть, что определитель $\Delta_n = 0$ при одновременном выполнении одного из условий: $\alpha = 0, \beta = 0$ либо $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{n}$, а оба этих случая уже рассмотрены нами ранее).

Итак, решение системы (4.22) дается следующими равенствами:

$$a_n = \frac{\sigma_n A_n - \lambda_n B_n}{\Delta_n}, \quad b_n = \frac{\lambda_n A_n + \sigma_n B_n}{\Delta_n}. \quad (4.23)$$

Окончательно имеем, что решение краевой задачи (4.1)-(4.2) в рассматриваемом здесь случае представимо в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.24)$$

коэффициенты которого при $\forall n \geq 1$ определяются равенствами (4.23), а коэффициент a_0 , вообще говоря, произволен (т.е. решение краевой задачи (4.1)-(4.2) определено с точностью до произвольной вещественной константы).

Далее изучим вопрос о принадлежности полученного решения $u = u(r, \theta)$ классу $C^2(\bar{D})$. Заметим, что при $r < 1$ (т.е. внутри области D) функциональный ряд, представляющий решение, а также ряды, представляющие вторые производные решения, полученные в результате его формального дифференцирования, сходятся равномерно внутри области D в силу присутствия в соответствующих коэффициентах Фурье множителя вида r^n .

Рассмотрим теперь характер поведения решения на границе области D , т.е. при $r=1$. Здесь для равномерной сходимости как самого функционального ряда, так и ряда из вторых производных его членов достаточно потребовать, чтобы граничная функция $f = f(\theta)$ принадлежала классу $f \in C^{2,\delta}(0, 2\pi)$ для некоторого вещественного параметра $\delta > 0$.

Действительно, в этом случае будут выполнены следующие асимптотики для коэффициентов Фурье из разложения граничной функции $f = f(\theta)$:

$$A_n = \underline{O}\left(\frac{1}{n^{2+\delta}}\right), B_n = \underline{O}\left(\frac{1}{n^{2+\delta}}\right), \quad (4.25)$$

что, в конечном счете, и обеспечивает как равномерную сходимость ряда (4.24), представляющего решение, так и рядов, полученных из него в результате формального дифференцирования и представляющих его вторые производные.

Отметим здесь, что условие принадлежности граничной функции функциональному классу $f \in C^{2,\delta}(0, 2\pi)$ является вполне естественным в силу самой постановки краевой задачи (4.1)-(4.2) [85].

Таким образом, сформулированная выше Теорема 5 полностью доказана.

ГЛАВА 5

ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ АДГЕЗИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В Главе 5, посвященной одной неклассической задаче Лапласа, рассматривается краевая задача для уравнения Лапласа в полуплоскости, на границе которой задается граничное условие специального вида. Исследуются условия разрешимости задачи в классе регулярных гармонических функций внутри области D , принадлежащих классу функций C^2 в замыкании исследуемой области.

Данная задача имеет важные приложения в механике сплошных сред и относится к проблеме моделирования адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел.

5.1. Постановка адгезионной задачи в полуплоскости

В верхней полуплоскости $y > 0$ рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, (x, y) \in D = \{-\infty < x < +\infty, y > 0\}, \quad (5.1)$$

$$u_y + \alpha u_{xy} + \beta u_{xx} \Big|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty, \quad (5.2)$$

где α и β - некоторые вещественные константы.

Решение задачи (5.1)-(5.2) ищется в классе $u \in C^2(\overline{D})$, причем дополнительно будем полагать, что всюду в D :

$$|u(x, y)| \leq M, |u_x(x, y)| \leq M_1, |u_y(x, y)| \leq M_2, \quad (5.3)$$

где M, M_1, M_2 - некоторые константы.

Условие ограниченности первых производных можно переформулировать, если потребовать ограниченности $|grad u| \leq M_3 = const$.

Далее исследуются вопросы, связанные с разрешимостью сформулированной задачи (5.1)-(5.3) и единственностью ее решения.

Необходимо отметить, что так же, как и в Главе 4, в граничное условие (5.2) входит дополнительное слагаемое ($\alpha \neq 0$), которое определяется не моделью адгезии, а связано с введением так называемого «фиктивного сухого трения» [58].

5.2. Решение адгезионной задачи в полуплоскости

Изучим вопрос существования решения краевой задачи (5.1)-(5.3).

Теорема 6. В зависимости от соотношений коэффициентов в граничном условии специального вида решение существует и представимо в указанном виде:

1) Случай $\alpha = 0, \beta > 0$.

В этом случае решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{\beta y} \int_y^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)F(t)}{(t-x)^2 + \eta^2} dt \right) e^{-\beta \eta} d\eta$$

со следующими дополнительными условиями, накладываемыми на граничную функцию $f(x)$:

- $\alpha = 0, \beta > 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau = 0$;
- $f(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$;
- $\exists F(x): f(x) = F'(x)$;
- $|F(x)| < C \cdot |x|^{2-\varepsilon}$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Случай $\alpha = 0, \beta < 0$.

В этом случае решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x, y) = Ae^{-\frac{y}{\beta}} \sin \frac{x}{\beta} + Be^{-\frac{x}{\beta}} \cos \frac{x}{\beta} + v(x, y) + C.$$

Здесь C - произвольная константа, $v(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt$,

$\tilde{\varphi} = H[\Phi]$, $\Phi(x) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^x \sin(x-\tau) F(\tau) d\tau$, где $H[\Phi]$ обозначает преобразование

Гильберта функции Φ со следующими дополнительными условиями [77]:

- $\alpha = 0, \beta < 0$;
- $f(x) \in C^{2,\alpha}(-\infty, +\infty)$;
- $\exists F(x): f(x) = F'(x)$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau = 0$.

3) Общий случай $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

В этом случае решение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$u(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x} \frac{f^*(\zeta) e^{-y|\zeta|}}{|\zeta|(1 + \alpha i|\zeta| - \beta|\zeta|)} d\zeta, \text{ где } f^*(\zeta) \text{ обозначает преобразование}$$

Фурье функции f . Для существования решения необходимым является, чтобы функция $\sigma(x) = x^2 f(x)$ была абсолютно интегрируемой на множестве $R = (-\infty, +\infty)$ и $f(x) \in C^{2,\alpha}(-\infty, +\infty)$.

Доказательство.

1) Для начала рассматривается случай $\alpha = 0, \beta > 0$.

Здесь граничное условие (5.2) принимает вид:

$$u_y + \beta u_{xx} \Big|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty, \quad (5.4)$$

причем $|u(x, y)| \leq M$ в неограниченной области D , а при $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ дополнительно также требуется, что $u(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по (x, y) (это означает регулярность решения на бесконечности).

Через функцию $v = v(x, y)$ здесь обозначается разность функций $v = u - \beta u_y$. Тогда определенная функция $v = v(x, y)$ удовлетворяет следующей краевой задаче в неограниченной области D :

$$\Delta v = 0, (x, y) \in D, \quad (5.5)$$

$$v_y|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty. \quad (5.6)$$

Из (5.5)-(5.6) следует, что при $y > 0$ имеет место интегральное представление:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt. \quad (5.7)$$

Предполагается, что граничную функцию $f = f(x)$ можно представить в виде $f(x) = F'(x)$, т.е. функция F - первообразная для функции $f(x)$ (*прим.* - это «дополнительное» условие на функцию f на самом деле не накладывает каких-либо серьезных ограничений, т.к. если функция f непрерывна, то ее первообразная F может быть представлена в виде интеграла с переменным верхним пределом $F(x) = F(0) + \int_0^x f(\xi) d\xi$).

Тогда из представления (5.7) в результате интегрирования по частям следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{F(t)y}{(x-t)^2 + y^2} \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right) dt = \\ &= \left\{ |F(t)| < C \cdot |t|^{2-\varepsilon}, \varepsilon > 0, C = \text{const} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t-x)F(t)}{\left((x-t)^2 + y^2 \right)^2} dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

С учетом того, что $v(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$, имеет место очевидное представление:

$$v(x, y) = - \int_y^{+\infty} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta. \quad (5.9)$$

Тогда на основании (5.8)-(5.9) можно получить представление функции $v = v(x, y)$ в виде несобственного повторного интеграла:

$$v(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (t-x) F(t) \int_y^{+\infty} \frac{\eta}{((x-t)^2 + \eta^2)^2} d\eta = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x) F(t) J(x, t) dt. \quad (5.10)$$

Внутренний интеграл из представления (5.10) имеет вид:

$$J(x, t) = \int_y^{+\infty} \frac{\eta}{((x-t)^2 + \eta^2)^2} d\eta = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_y^A \frac{\eta}{((x-t)^2 + \eta^2)^2} d\eta. \quad (5.11)$$

Интеграл, стоящий в формуле (5.11) под знаком предела, легко вычислить в явном виде:

$$\begin{aligned} \int_y^A \frac{\eta}{((x-t)^2 + \eta^2)^2} d\eta &= \frac{1}{2} \int_y^A \frac{d(\eta^2 + (x-t)^2)}{((x-t)^2 + \eta^2)^2} = -\frac{1}{2(\eta^2 + (x-t)^2)} \Bigg|_{\eta=y}^{\eta=A} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-t)^2 + A^2} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Так как $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-t)^2 + A^2} = 0$, то имеет место следующее представление функции $v = v(x, y)$:

$$v(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)F(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt. \quad (5.13)$$

Но по определению функция $v = u - \beta u_y = -e^{\beta y} \frac{\partial}{\partial y} (ue^{-\beta y})$, т.е.

$$ve^{\beta y} = -\frac{\partial}{\partial y} (ue^{-\beta y}).$$

Следовательно, имеет место представление:

$$u(x, y)e^{-\beta y} = \int_y^{+\infty} v(x, \eta)e^{-\beta \eta} d\eta. \quad (5.14)$$

Таким образом, окончательно получено, что:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{\beta y} \int_y^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)F(t)}{(t-x)^2 + \eta^2} dt \right) e^{-\beta \eta} d\eta. \quad (5.15)$$

Очевидно, что полученное решение (5.15) принадлежит классу $u \in C^2(\bar{D})$.

Далее формулируются все предположения, для которых получено интегральное представление решения в виде (5.15):

- $\alpha = 0, \beta > 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau = 0$;
- $f(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$;
- $\exists F(x): f(x) = F'(x)$;
- $|F(x)| < C \cdot |x|^{2-\varepsilon}$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Далее рассматривается случай $\alpha = 0, \beta < 0$.

Интегральное преобразование Гильберта задается формулой [77]:

$$H[f] = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt. \quad (5.16)$$

Известно, что образ функции $f = f(t)$ при интегральном преобразовании Гильберта, задаваемом формулой (5.16), заведомо существует, если $f \in C^\alpha(R)$ ($\alpha > 0$).

Имеет место равенство для интегрального преобразования Фурье, взятого в свою очередь от интегрального преобразования Гильберта [77]:

$$F[H[f]] = -i \cdot \text{sign} \zeta F[f]. \quad (5.17)$$

Далее рассматривается следующая задача:

$$\Delta u = 0, (x, y) \in D, \quad (5.18)$$

$$u_y + \beta w_{xx} \Big|_{y=0} = f \Big|_{y=0}, -\infty < x < +\infty, \quad (5.19)$$

причем здесь константа $\beta < 0$ (это случай, не рассмотренный в п.1 настоящей Главы).

Преобразование Фурье задается:

$$u^*(\zeta) = A(\zeta) e^{-y|\zeta|}, \quad (5.20)$$

где

$$A(\zeta)(-|\zeta| - \beta|\zeta|^2) = f^*(\zeta) \quad (5.21)$$

или

$$A(\zeta) = -\frac{f^*(\zeta)}{|\zeta|(1 + \beta|\zeta|)}. \quad (5.22)$$

Здесь и далее символом ‘*’ обозначается образ, полученный в результате применения интегрального преобразования Фурье: $f^* = F[f]$.

Пусть граничная функция представима в виде $f = F'$ (прим.: если $f = f(x)$ – непрерывная функция, то ее первообразную всегда можно получить как интеграл с переменным верхним пределом: $F(x) = F(0) + \int_0^x f(\xi) d\xi$). Дополнительно

предполагается, что $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = 0$.

Последние условия вытекают из аналога условия Неймана разрешимости поставленной задачи.

Относительно функции $F = F(x)$ далее предполагается, что она является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\beta^2 \Phi'' + \Phi = F, \quad (5.23)$$

где $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = 0$.

Решение уравнения (5.23), как известно, имеет следующий вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^x \sin(x - \tau) F(\tau) d\tau. \quad (5.24)$$

Требуется выполнение двух дополнительных условий (условий ортогональности):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0. \quad (5.25)$$

Дополнительные условия ортогональности (5.25) являются следствием того, что решение однородного уравнения не подходит (не является регулярным на бесконечности), так как синусы и косинусы являются немонотонными функциями и не стремятся к нулю на бесконечности.

Тогда

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= -\frac{f^*(\zeta)}{|\zeta|(1+\beta|\zeta|)} = -\frac{i\zeta F^*(\zeta)}{|\zeta|(1+\beta|\zeta|)} = \frac{-i\operatorname{sign}\zeta F^*(\zeta)}{1+\beta|\zeta|} = \\ &= \frac{i\operatorname{sign}\zeta(\beta^2|\zeta|^2-1)\Phi^*(\zeta)}{1+\beta|\zeta|} = -i\operatorname{sign}\zeta(1-\beta|\zeta|)\Phi^*(\zeta). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Итак, функция $A = A(\zeta)$ найдена в виде (5.26).

Тогда решение краевой задачи (5.18)-(5.19) представимо как:

$$u(x, y) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x} \Phi^*(\zeta)(1-\beta|\zeta|)\operatorname{sign}\zeta e^{-y|\zeta|} d\zeta. \quad (5.27)$$

В формуле (5.27) $i \cdot \Phi^*(\zeta)\operatorname{sign}\zeta = -F[H[\Phi]]$, и внутренний интеграл в формуле (5.27) выглядит как:

$$H[\Phi] = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x} \Phi^*(\zeta)\operatorname{sign}\zeta d\zeta. \quad (5.28)$$

Таким образом, достаточно решить следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{\Phi} = H[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)}{x-t} dt. \quad (5.29)$$

Пусть $\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}$.

Далее рассматривается следующая вспомогательная задача:

$$\Delta v = 0, (x, y) \in D, \quad (5.30)$$

$$v|_{y=0} = \tilde{\varphi}, -\infty < x < +\infty, \quad (5.31)$$

Решение этой задачи (5.30)-(5.31) представимо в виде:

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)y}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (5.32)$$

где $\tilde{\varphi} = H[\Phi]$.

Таким образом, решение задачи (5.18)-(5.19) имеет вид:

$$u(x, y) = Ae^{-\frac{y}{\beta}} \sin \frac{x}{\beta} + Be^{-\frac{x}{\beta}} \cos \frac{x}{\beta} + v(x, y) + C, \quad (5.33)$$

где C - произвольная константа.

Далее также формулируются все сделанные предположения, в которых получено представление решения в виде (5.33):

- $\alpha = 0, \beta < 0$;
- $f(x) \in C^{2,\alpha}(-\infty, +\infty)$;
- $\exists F(x): f(x) = F'(x)$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \frac{\tau}{\beta} d\tau = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau = 0.$

3) Далее рассматривается общий случай $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Формулируется граничная задача:

$$\Delta u = 0, (x, y) \in D = \{-\infty < x < +\infty, y > 0\}, \quad (5.34)$$

$$u_y + \alpha u_{xy} + \beta u_{xx} \Big|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty. \quad (5.35)$$

Преобразование Фурье:

$$u^*(\zeta) = A(\zeta) \exp(-y|\zeta|), \quad (5.36)$$

где

$$A(\zeta)(-|\zeta| - \alpha i|\zeta|^2 + \beta|\zeta|^2) = f^*(\zeta), \quad (5.37)$$

т.е.

$$A(\zeta) = -\frac{f^*(\zeta)}{|\zeta|(1 + \alpha|\zeta| + \beta|\zeta|^2)}. \quad (5.38)$$

Тогда имеет место представление:

$$u(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x} \frac{f^*(\zeta) e^{-y|\zeta|}}{|\zeta|(1 + \alpha|\zeta| + \beta|\zeta|^2)} d\zeta. \quad (5.39)$$

Пусть функция $\sigma(x) = x^2 f(x)$ является абсолютно интегрируемой на множестве $R = (-\infty, +\infty)$. Этого будет достаточно для того, чтобы определенная формулой (5.39) функция $u = u(x, y)$ равномерно стремилась к нулю на бесконечности и являлась решением задачи из требуемого класса функций.

Далее будет показано, что в общем случае решение задачи действительно существует и единственно [86].

5.3. Единственность регулярного решения адгезионной задачи в полуплоскости

Далее методом «от противного» исследуется вопрос о единственности решения задачи (5.1)-(5.3). Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 7. В зависимости от соотношений коэффициентов в граничном условии специального вида возможны следующие случаи:

- $\alpha = 0, \beta < 0$ - решение задачи (5.1)-(5.3) неединственно (показано, что в этом случае существуют два линейно независимых решения задачи);
- $\alpha = 0, \beta > 0$ - решение задачи (5.1)-(5.3) единственно;
- $\alpha \neq 0$ - однородная задача решений, кроме тривиального, не имеет (но имеется неограниченное решение), что и обеспечивает единственность решения поставленной задачи (5.1)-(5.3).

Доказательство. Предполагается, что существует два различных решения поставленной задачи. Пусть это будут соответственно функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, тождественно не равные друг другу в неограниченной области $D = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y > 0\}$.

Рассматривается функция $w(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. Эта функция, отличная от нуля в области D , ищется в классе $w \in C^2(D)$ и удовлетворяет следующей однородной краевой задаче:

$$\Delta w = 0, (x, y) \in D, \quad (5.40)$$

$$w_y + \alpha w_{xy} + \beta w_{xx} \Big|_{y=0} = 0, -\infty < x < +\infty, \quad (5.41)$$

а также дополнительным требованиям (ограничениям):

$$|w(x, y)|, |\operatorname{grad} w(x, y)| \leq M, \quad (5.42)$$

где M - некоторая константа.

Учитывая, что $w_{xx} = -w_{yy}$, из условия (5.35) следует:

$$w_y + \alpha w_{xy} - \beta w_{yy} \Big|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.43)$$

Вводится следующее обозначение $\omega(x, y) = w(x, y) + \alpha w_x(x, y) - \beta w_y(x, y)$.

Тогда при $y = 0$ выполнено:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.44)$$

В этом случае функцию $\omega = \omega(x, y)$ можно чётно продолжить на нижнюю полуплоскость $y < 0$ [77].

Тогда, на основании теоремы Лиувилля [78], можно утверждать, что $\omega(x, y) \equiv \text{const}$ на всей числовой плоскости, т.е.:

$$w + \alpha w_x - \beta w_y \equiv K = \text{const} \quad (5.45)$$

в любой точке плоскости (x, y) .

Далее рассматривается два случая.

Случай 1.

Пусть параметр $\alpha = 0$. Здесь задача (5.40)-(5.41) немного упрощается, принимая вид:

$$\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \{-\infty < x, y < +\infty\}, \quad (5.46)$$

$$w - \beta w_y \equiv K = \text{const}. \quad (5.47)$$

Из уравнения (5.47) следует, что:

$$w(x, y) = A(x)e^{\frac{y}{\beta}} + N(x). \quad (5.48)$$

Функция $A = A(x)$ находится из условия, что функция $w = w(x, y)$ является гармонической, т.е. $\Delta w = 0$.

В результате имеются два линейно независимых решения:

$$w_1(x, y) = \sin \frac{x}{\beta} e^{\frac{y}{\beta}} + N(x) \text{ и } w_2(x, y) = \cos \frac{x}{\beta} e^{\frac{y}{\beta}} + N(x). \quad (5.49)$$

В силу предположения об ограниченности функции $w = w(x, y)$ на бесконечности положительные значения параметра $\beta > 0$ недопустимы, т.к. при $y \rightarrow +\infty$ приводят к неограниченности решения на бесконечности.

Если же параметр $\beta < 0$, то имеются два линейно независимых решения.

Случай 2.

Пусть параметр $\alpha \neq 0$. Выражение $\alpha w_x - \beta w_y$ можно понимать как производную функции $w = w(x, y)$ вдоль некоторого направления l , заданного фиксированным вектором $l = (\alpha, -\beta)$:

$$\alpha w_x - \beta w_y = (l, \text{grad } w) = \frac{\partial w}{\partial l}, \quad (5.50)$$

причем в силу условия $\alpha \neq 0$ это направление l не ортогонально оси $y = 0$.

В такой интерпретации условие (5.50) принимает вид:

$$w + \frac{\partial w}{\partial l} = K. \quad (5.51)$$

Таким образом, если перейти в новую систему координат, порожденную направлением l , выбрав переменную ξ как переменную, отсчитываемую вдоль направления l , а переменную η отсчитывать в направлении, перпендикулярном l , то решение уравнения (5.51) может быть представлено как:

$$w(\xi, \eta) = A(\eta) e^{-l\xi}. \quad (5.52)$$

Так как переменная ξ отсчитывается в направлении, не ортогональном оси $y = 0$, то функция $w = w(\xi, \eta)$, определенная равенством (5.52), не является ограниченной, что является противоречием условию (5.42) ее ограниченности.

Исходя из представленных выше рассуждений, сформулируем краткие выводы:

- если $\alpha = 0, \beta < 0$ – решение задачи (5.1)-(5.3) неединственно (выше показано, что в этом случае существуют два линейно независимых решения задачи);
- если $\alpha = 0, \beta > 0$ – решение задачи (5.1)-(5.3) единственно;
- если $\alpha \neq 0$ – задача (5.1)-(5.3) решений, кроме тривиального, не имеет (но имеется неограниченное решение), что и обеспечивает единственность решения поставленной задачи.

Таким образом, Теорема 7 полностью доказана.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты настоящей работы:

1. В явном аналитическом виде (в виде двойных рядов с соответствующими коэффициентами) найдены регулярные (классические) решения аналогов смешанных задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для модельного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях. Доказана единственность регулярного решения аналога задачи Трикоми.
2. Получены равномерные и абсолютные оценки на коэффициенты биортогонального разложения граничной функции по двум переменным для различных тригонометрических систем, соответствующих решаемой задаче.
3. Сформулированы достаточные условия, которые требуется наложить на граничную функцию для существования классических решений аналогов смешанных задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта в трехмерных областях.
4. Найдены регулярные решения неклассических задач Лапласа в круге и на полуплоскости, сформулированы дополнительные условия существования решения в зависимости от значений коэффициентов, входящих в граничное условие. Изучены вопросы единственности неклассической задачи Лапласа в полуплоскости в зависимости от значений коэффициентов, входящих в граничное условие.

Изложим далее перспективы возможных исследований по тематике представленной диссертации.

В настоящее время известно лишь небольшое количество корректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях. При этом переход от краевых задач, рассматриваемых на плоскости, к трехмерным задачам представляет значительный интерес в силу более точного описания физических процессов (например, околозвукового и сверхзвукового

течения сжимаемой среды в газовой динамике), моделируемых этими уравнениями.

В первой части настоящей работы (Главы 1-3) предложен ряд методов, которые в дальнейшем могут быть развиты и эффективно применены при решении краевых задач для уравнений смешанного типа с тремя и более независимыми переменными.

Предложенные аналитические методы решения математических задач, моделирующих адгезионные взаимодействия веществ на границе их соприкосновения, могут быть положены в основу алгоритмов численного решения указанных задач в ограниченных областях. Так, результаты, полученные во второй части настоящей работы (Главы 4-5), могут быть использованы специалистами в области механики сплошных сред и материаловедения для интерпретации физических процессов, математические модели которых были изучены во второй части настоящей диссертационной работы.

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики: Учебное пособие для студентов механико-математических университетов. Москва–Ижевск: Изд-во «Институт компьютерных исследований», 2003. - 336 с.
2. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Москва: Изд-во «Наука», 1982. - 288 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Изд-во «Наука», 1981. - 448 с.
4. Чаплыгин С.А. О газовых струях. М.–Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. - 144 с.
5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа (пер. с итал.). М.–Л.: Изд-во «Гостехиздат», 1947. - 192 с.
6. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Arkiv för Matematik Astronomie och Fysik, Vol. B 26A, № 3, 1938. P. 1–32.
7. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва: Изд-во «Наука», 1973. - 711 с.
8. Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика, 1956, Т. 20, № 2. С. 196–202.
9. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа. (Диссер. докт. физ.-мат. наук), Москва, 1952. - 191 с.
10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во «Наука», 1970. - 295 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во МГУ, 2004. - 798 с.
12. Лернер М.Е. Принцип максимума для гиперболических уравнений в одно- и многосвязных областях произвольной формы // Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. С. 109-112.

- 13.Лернер М.Е. Принципы максимума для гиперболических уравнений и систем уравнений в неклассических областях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 848-858.
- 14.Лернер М.Е. О разрешимости одной краевой задачи для гиперболических уравнений в неклассических областях // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 704-716.
- 15.Лернер М.Е. О постановке и разрешимости одного класса краевых задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 3. С. 361-365.
- 16.Лернер М.Е., Репин О.А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сибирский математический журнал, 1999, Т. 40, № 6. С. 1260-1275.
- 17.Лернер М.Е., Репин О.А. Краевая задача для уравнения смешанного типа в областях с многосвязными подобластями гиперболичности // Сибирский математический журнал, 2003, Т. 44, № 1. С. 160-177.
- 18.Зарубин А.Н. Об алгоритме решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1997, Т. 37, № 2. С. 184–187.
- 19.Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки, 2009, Т. 86, Вып. 2. С. 273–279.
- 20.Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983. – 84 с.
- 21.Врагов В.Н. О краевых задачах для уравнений смешанного типа на плоскости. Новосибирск: НГУ, 1985. - 30 с.
- 22.Неклассические уравнения математической физики. Сборник научных работ (под ред. д.ф-м.н. А.И.Кожанова). Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2002 г. - 249 с.

- 23.Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Неклассические модели математической физики // Вестник ЮУрГУ (Сер. Матем. моделирование и програм., вып. 14), 2012, № 40 (299). С. 7-17.
- 24.Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР, 1951, Т. 77, № 2. С. 181–183.
- 25.Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Изд-во «Наука», 1991. - 368 с.
- 26.Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Москва: Изд-во МГУ, 1988. - 150 с.
- 27.Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам. Москва: ВИНТИ, Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор, Т. 96, 2006. С. 5–105.
- 28.Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Дифференц. уравнения, 1977, Т. 13, № 2. С. 294–304.
- 29.Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. (Диссер. докт. физ.-мат. наук), Москва, МИАН, 1981. - 163 с.
- 30.Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, 1987, Т. 23, № 1. С. 177–179.
- 31.Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций. Москва: Вычислительный центр РАН, 2004. - 146 с.
- 32.Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н. Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал, 2001, Т. 42, № 5. С. 1147-1161.
- 33.Могими Ф. Спектральные свойства задачи Геллерстедта и связанных с ней двух задач для вырождающегося уравнения смешанного типа. (Диссер. канд. физ.-мат. наук). Москва, МГУ, 2005. – 84 с.

34. Аббаси Н. Спектральные вопросы задачи Франкля для уравнения смешанного типа. (Диссер. канд. физ.-мат. наук), Москва, МГУ, 2009. – 100 с.
35. Cabeon, 1629, *Philosophia Magnetica*, Ferrara, lib. II, cap. 20, (Shuttleworth. 1950 *Proc. Phys. Soc. A*, N 63. P. 444).
36. Segnerj A., 1751, *Comment. Soc. Reg. Gott.*, 1, 301 (Parkash and P.L. Kapur. 1950 *Proc. Phys. Soc. A*. P. 63-457).
37. Young T., 1805, *Collected Works*, 1, 418. (*Philosophical Magazine A*, Volume 78, Issue 5. November 1998. P. 1093–1109).
38. Laplace S., 1806, *Mecanique celeste*, 10. (Molecular theory of capillarity, John Shipley Rowlinson, B. Widom, 1982. – 327 p.).
39. Poisson S.D. *Memoire sur l'equilibre et du mouvement des corps elastiques* // *Memoires de l'Academie des sciences de Paris*, 1829, 8. P. 357-570.
40. Gauss C.F., 1830, *Werke*, 5, 31 (The determination of Gauss: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1982, 7 (2). P. 441).
41. Gibbs J.W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances. In: *The Collected Works of J. Willard Gibbs* (Longmans, Green & Co, New York), 1928. P. 55–353.
42. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1975, 57. P. 291–323.
43. Gurtin M.E. and Murdoch A.I. Surface Stress in Solids // *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14(6). P. 431–440.
44. Gurtin M.E. *An introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press. New York. 1981. - 265 p.
45. Gurtin M.E. and Murdoch A.I. Addenda to our paper A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1975, 59 (4). P. 389–390.
46. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1985. - 200 с.
47. Povstenko Ya.Z. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids // *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, 41 (9). P. 1499–1514.

48. Murdoch A.I. Some fundamental aspects of surface modeling // J. Elasticity, 2005, 80. P. 33–52.
49. Sharma P., Ganti S., Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nanoinhomogeneities // Appl. Phys. Lett., 2003, 82. P. 535–537.
50. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface. Interface Energies // Journal of Applied Mechanics, 2004, 71. P. 663-671.
51. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, 50. P. 2509–2537.
52. Wang J., Duan H.L., Zhang Z., Huang Z.P. An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites // Int. J. Mech. Sci., 2005, 47. P. 701–708.
53. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P. and Karihaloo B.L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress // J. Mech. Phys. Solids, 2005, 53 (7). P. 1574–1596.
54. Duan H.L., Wang J. and Karihaloo B.L. Theory of Elasticity at the Nanoscale // Advances in Applied Mechanics, 2008. P. 1–68.
55. Benveniste Y. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media // J. Mech. Phys. Solids, 2006, 54. P. 708–734.
56. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater., 2001, 33. P. 309–323.
57. Chen T.Y., Dvorak G.J., Yu C.C. Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses // Acta Mech., 2007, 188 (1-2). P. 39-54.
58. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // МТТ, Изв. РАН, 2010, № 4. С. 182-192.
59. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальные модели адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры, 2009, 2 (2). С. 25-43.

60. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // *Computational Materials Science*, 2009, 45(3). С. 709-714.
61. Лурье С.А. Градиентные и адгезионные эффекты в механике деформирования гетерогенных материалов с микро- и наноструктурой // X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (X ВСФПТПМ), 24-30 августа 2011, Нижний Новгород // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2011, 4 (5). С. 47-50.
62. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials // *International Journal of Engineering Science*, 2011, 49. P. 1517-1525.
63. Белов П.А, Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2007, 13 (4). С. 545-561.
64. Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О. Адгезионные взаимодействия в механике сплошных сред // *Математическое моделирование систем и процессов*, 2008, 16. С. 75-85.
65. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. 2010, V. 90, No. 3. P. 231–240.
66. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. – 398 с.
67. Podio-Guidugli P., Caffarelli G.V. Surface interaction potentials in elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1990, 109 (4). P. 343–383.
68. Steigmann D.J., Ogden R.W. Elastic surface-substrate interactions // *Proc. R. Soc. Lond. A (Math. Phys. Eng. Sci.)*, 1982, 455. P. 437–474.
69. Cuenot S., Frertigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy // *Phys. Rev. B* 69, 2004. P. 165410.

- 70.Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Доклады РАН, 2009, 424 (5). С. 618–620.
71. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Доклады РАН. 2009, 429(4). С. 472–476.
- 72.Ma X.-L. Gao H.M., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56. P. 3379–3391.
- 73.Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. Gradient theory of media with conserved dislocations. Particular models: generalized Cosserats media model with surface effects, porous media, media with free forming (media with «twinning»), generalized pseudo-continuum. In book: Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats, Springer, 2010. P. 110-119.
- 74.Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Изд-во «Наука», 1990. - 528 с.
- 75.Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Изд-во «Физматлит», 2007. - 488 с.
- 76.Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1987. Т. 242, № 1. С. 48-51.
- 77.Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения (3-е изд.). М.: Изд-во «Наука», 1968. - 513 с.
- 78.Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Изд-во «Наука», 1969. - 241 с.

Основные публикации автора по теме диссертации

79. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D domain // *Integral Transforms and Special Functions*, 2012, Vol. 23, Issue 10. P. 761-768.
80. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // *Integral Transforms and Special Functions*, 2013, Vol. 24, Issue 7. P. 554-560.
81. Moiseev E.I., **Nefedov P.V.** Gellerstedt problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // *Integral Transforms and Special Functions*, 2014, Vol. 25, Issue 7. P. 509-512.
82. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Аналог задачи Франкля в трехмерном случае // Труды научной конференции «Тихоновские чтения» (тезисы докладов). Москва: факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова (29-31 окт. 2012 г.), Изд-во «Макс Пресс», 2012. С. 9.
83. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Некоторые задачи смешанного типа для уравнений Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях // Труды научной конференции «Ломоносовские чтения» (тезисы докладов). Москва: факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова (14-23 апр. 2014 г.). С. 14-15.
84. Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.**, Холмеева А.А. Аналогии задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // *Дифференц. уравнения*, 2014, Т. 50, № 12. С. 1672-1675.
85. Лурье С.А., Моисеев Е.И., **Нефедов П.В.** Об условиях существования решения для краевых задач в моделях адгезионных взаимодействий // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, № 19 (1). С. 87-96.
86. Моисеев Е.И., Лурье С.А., Корзюк В.И., **Нефедов П.В.** О разрешимости и единственности решений в задачах деформирования однородных и неоднородных структур с учетом адгезионных взаимодействий // *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 4. С. 6-22.