Отзыв

официального оппонента на диссертацию Нефедова Павла Владимировича «Неклассические задачи для уравнений в частных производных второго порядка», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

1. Актуальность темы диссертации

Диссертационная работа Нефедова П.В. посвящена исследованию: 1) неклассических краевых задач Трикоми, Франкля, Геллерстедта для трехмерного аналога смешанного эллиптико-гиперболического уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$L[u] = u_{xx} + sign(y)u_{yy} + \gamma u_{zz} = 0, \qquad u = u(x, y, z), \tag{1}$$

с областью эллиптичности уравнения (1), ограниченной цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси OZ $(y > 0, -1 < x < 1,$ $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le \pi)$ и областью гиперболичности уравнения (1) – характеристической призмой с прямоугольной плоской областью вырождения $\{y = 0, 0 < x < 1{,}0 < z < \pi\}$; 2) неклассических адгезионных задач для двумерного уравнения Лапласа в круге $(r \le 1)$ и полуплоскости $(|x| < +\infty, y > 0)$ с краевым условием

$$(u_r + \alpha u_{r\Theta} + \beta u_{\Theta\Theta})|_{r=1} = f(\Theta),\ \ u = u(r, \Theta), 0 \le \Theta \le 2\pi, \tag{2}$$

(в случае полуплоскости в (2) $r = y, \Theta = x$ и условие (2) на $y = 0$), $\alpha, \beta = const.$

Многомерные (в основном, трехмерные) аналоги задач Трикоми (А.В. Бицадзе, 1956г., 1962г.; А.М. Ежов, 1973г.), Геллерстедта (А.М. Нахушев, 1968г.) слабо изучены. Связано это с возникающими значительными трудностями при отыскании корректной постановки многомерных задач для уравнений смешанного типа и методами их решения. Потребность изучения многомерных задач для уравнений смешанного типа огромна, поскольку позволяет увидеть более точную физическую картину процесса, например, в трансзвуковой газовой динамике.

Исследование краевых задач для эллиптических уравнений с неклассическим условием (2) вызвано важными приложениями в механике и нанотехнологиях. Эти задачи, интерес к которым возрос в последние два десятилетия, связан с моделированием адгезионных свойств твердых деформируемых тел, так как моделирование поверхностных свойств в средах с развитой микроструктурой позволяет значительно уточнить прогноз их свойств.

Тема диссертационного исследования Нефедова П.В. актуальна как с теоретических позиций развития теории дифференциальных уравнений, так и ввиду важных прикладных возможностей при решении задач трансзвуковой газовой динамики и адгезионных задач взаимодействия различных материалов.

2. Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту

Диссертационная работа Нефедова П.В. является новым научным достижением в развитии теории многомерных уравнений смешанного типа и теории неклассических задач для эллиптических уравнений.

Диссертация содержит 105 страниц и состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка литературы, включающего 86 наименований.

Во введении дана краткая характеристика исследования: обоснована актуальность темы, приведены основные результаты, определена их научная новизна и значимость.

Результаты диссертации являются новыми и представлены в пяти главах. Применение спектрального метода при решении трехмерных аналогов задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта (предложен в двумерном случае Е.И. Моисеевым) позволяет исследовать корректность постановок этих задач, выявить структурные свойства решений и дает возможность получения точных априорных оценок решения. Кроме того, спектральный метод решения трехмерных задач позволяет отказаться от метода сведения этих задач к двумерным, что предлагалось ранее, и последующего метода приведения двумерных задач к сингулярным интегральным уравнениям, который имеет ряд недостатков теоретического и практического плана.

Первая глава диссертации посвящена доказательству существования и единственности регулярного решения трехмерного аналога задачи Трикоми для уравнения (1) $(\gamma = 1)$ в цилиндрическом брусе $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$ с образующей параллельной оси OZ $(0 \le z \le \pi)$, эллиптическая часть которого – полуцилиндр $D^{(+)} = \{(x,y,z): y > 0,\ -1 < x < 1,\ x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < \pi\}$, гиперболическая – характеристическая призма $D^{(-)} = \left\{(x,y,z): -\frac{1}{2} < y < 0,\ -y < x < y + 1,\ 0 < z < \pi\right\}$ с прямоугольной плоской областью вырождения $J = \{(x,y,z): y = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < z < \pi\}$. Носителями краевых условий являются поверхности $\partial D^{(+)} \backslash J$ и $\partial D^{(-)} \backslash (J \cup \Omega)$, где $\Omega = \left\{(x,y,z): y < 0, y = x - 1,\ \frac{1}{2} < x < 1, 0 < z < \pi\right\}$. Методом Фурье найдены регулярные решения задачи Трикоми для уравнения (1) в форме двойных рядов в областях $D^{(+)}$, $D^{(-)}$. При этом учитывалось, что тригонометрическая система синусов $\{sin\,kz\}|_{k=1}^{+\infty}$ является полной и ортогональной в $L_2[0,\pi]$, а система $\left\{sin\,(n - \frac{1}{4})(\varphi - \pi)\right\}\Big|_{n=1}^{+\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$. Результаты оформлены в виде теорем, отражающих высокую математическую эрудицию диссертанта.

Вторая глава изучает впервые рассматриваемый трехмерный аналог задачи Франкля для уравнения (1) $(\gamma = sign(x+y))$ в цилиндрическом брусе $D = D^{(+)} \cup D^{(-1)} \cup D^{(-2)}$ с образующей параллельной оси OZ $(0 \le z \le \pi)$, эллиптическая часть которого – четверть цилиндра $D^{+} = \{(x,y,z): y > 0,\ 0 < x < 1,\ x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < \pi\}$;
гиперболическая область $D^{(-1)}$ совпадает с $D^{(-)}$ первой главы, а
$D^{(-2)} = \left\{(x,y,z): 0 < x < \frac{1}{2}, x - 1 < y < -x, 0 < z < \pi\right\}$; с прямоугольной плоской областью вырождения типа J из первой главы. Носителями граничных условий являются поверхности $\partial D^{(+)} \backslash J$, $\partial(D^{(-1)} \cup D^{(-2)}) \backslash (J \cup$

Ω), где $\Omega = \{(x,y,z): y < 0, y = x - 1,\ 0 < x < 1, 0 < z < \pi\}$, а на плоскости $\{x = 0, -1 < y < 1, 0 < z < \pi\}$ задано нелокальное условие (условие Франкля), характеризующее собой прямой скачок уплотнения. Найдено регулярное решение (методом разделения переменных) задачи Франкля для уравнения (1) в форме двойных рядов в областях $D^{(+)}, D^{(-1)}, D^{(-2)}$, получены их интегральные представления. Проведена тонкая доказательная математическая работа. Результаты оформлены в виде теорем.

В третьей главе рассматривается трехмерный аналог уравнения Лаврентьева-Бицадзе (1) $(\gamma = 1)$ и исследуется «внутренняя» задача Геллерстедта в цилиндрическом брусе $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$ с образующей параллельной оси OZ $(0 \le z \le \pi)$, эллиптическая часть которого – область $D^{(+)}$ совпадает с $D^{(+)}$ первой главы; гиперболическая часть $D^{(-)} = \left\{(x,y,z): \left\{D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}\right\} \times (0 < z < \pi)\right\}$, причем $D_{xy}^{(-1)}$ – область $D^{(-)}$ первой главы, а $D_{xy}^{(-2)}$ – область симметричная $D_{xy}^{(-1)}$ относительно плоскости $x = 0$. Найдено регулярное решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^1(D^{(+)} \cup D^{(-)})$ методом Фурье в форме двойных рядов в областях $D^{(+)}, D^{(-)}$; проведено обоснование регулярности полученного решения трехмерной «внутренней» задачи Геллерстедта. Результаты оформлены в виде теорем.

Четвертая глава посвящена исследованию неклассической краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в круге $D = \{(r,\Theta): r < 1, 0 \le \Theta < 2\pi\}$ на границе которого выполняется условие (2). Задача имеет важные приложения в механике сплошных сред и относится к проблеме моделирования адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел. Решение задачи найдено методом Фурье в классе $u \in C^2(\overline{D})$, когда $f \in C^{2,\delta}(0, 2\pi)$. Вопрос разрешимости задачи в зависимости от значений параметров α и β оформлен в форме теоремы с достаточно прозрачным доказательством.

Пятая глава рассматривает неклассическую краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа в полуплоскости $D = \{(x,y): -\infty < x <$

$+\infty, y > 0\}$ с граничным условием (2). Для построения решения $u \in C^2(\bar{D})$ используются интегральные преобразования Фурье и Гильберта, исследуются условия разрешимости задачи в зависимости от соотношений коэффициентов граничного условия. Проведена очень тонкая математическая работа, результаты которой оформлены в виде теорем.

3. Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все представленные в диссертационной работе результаты строго математически обоснованы. Они позволят получить ряд новых подходов для изучения свойств решений новых классов многомерных дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа и неклассических задач для эллиптических уравнений, будут существенно использованы для дальнейшего развития теории таких уравнений.

4. Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации

Представленная диссертационная работа носит как теоретический, так и практический характер. Её результаты проясняют сущность и свойства решений новых многомерных задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа и неклассических задач для эллиптических уравнений.

Практическая значимость работы обусловлена эффективным применением спектрального метода в решении многомерных задач трансзвуковой газовой динамики, адгезионных задач взаимодействия различных веществ в разных средах.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Московском, Орловском, Белгородском, Воронежском, Самарском, Кабардино-Балкарском, Казанском университетах и академических институтах РАН, а так же при создании программ специальных курсов, читаемых аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов университетов.

5. Публикации результатов в научной печати.

Все основные положения и результаты диссертации своевременно и полно опубликованы в 8 работах, среди которых 6 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК.

Положения и выводы диссертационной работы прошли серьезную научную апробацию.

6. **Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которой она представлена к защите**

Тематика работы, её содержание и методы исследования полностью соответствуют специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

7. **Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК**

Работа оформлена согласно требованиям соответствующей инструкции ВАК России. Её содержание правильно и полно отражено в автореферате. По содержанию диссертации имеются замечания, касающиеся немногочисленных опечаток, которые не ставят под сомнение значимость результатов, полученных автором.

8. **Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует**

Работа Нефедова П.В. является законченным научным исследованием, выполненным на высоком научном уровне, имеющим внутреннее единство, содержащим совокупность новых научных результатов, которые квалифицируются как новые научные достижения. Она удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК России к кандидатским диссертациям. Представленные в диссертации оригинальные результаты, а так же используемый в ней математический аппарат свидетельствует о высокой математической культуре автора и соответствует его квалификации кандидата физико-математических наук.

9. **Заключение**

Исходя из изложенного, диссертационная работа «Неклассические задачи для уравнений в частных производных второго порядка», удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», а её автор Нефедов Павел Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» за решение трехмерных аналогов краевых задач Трикоми, Франкля, Геллерстедта для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа Лаврентьева-Бицадзе и адгезионных задач для уравнения Лапласа в круге и на полуплоскости, что в совокупности имеет важное значение для развития теории и практики дифференциальных уравнений.

Официальный оппонент,
заведующий кафедрой математического анализа и
дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВПО «Орловский государственный
университет», доктор физико-математических наук,
профессор, А.Н. Зарубин

Подпись профессора А.Н. Зарубина
заверяю, ученый секретарь Ученого совета
ФГБОУ ВПО «Орловский государственный
университет» Н.Н. Чаадаева

«9» 09 2015

ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026, РФ, Орловская область, г.Орел, ул.Комсомольская, д.95
Телефон: (4862)77-78-25
E-mail: matdiff@yandex.ru