

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИДСТУ СО РАН  
академик



И.В. Бычков

«10» ноября 2014 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Ускова Евгения Ивановича «Ньютоновские методы решения задач оптимизации с нерегулярными ограничениями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и кибернетика

Диссертационная работа Ускова Евгения Ивановича посвящена исследованию задач оптимизации с нерегулярными ограничениями, а также построению новых эффективных численных алгоритмов решения задач данного класса.

**Актуальность** работы вызвана, с одной стороны, тем, что подобные задачи возникают во многих практических приложениях, например, в задачах с распадающимися ограничениями. Примерами таких задач являются задачи поиска равновесий (например, по Нэшу), задачи иерархического (многоуровневого) управления, введенные в рассмотрение в России Н.Н. Моисеевым и Ю.Б. Гермейером, задачи отыскания оптимального дизайна топологий сложных механических конструкций и др.

С другой стороны, задачи оптимизации с нерегулярными ограничениями представляют значительный теоретический интерес, поскольку в большинстве случаев они оказываются (неявно) невыпуклыми, а потому теоретическое исследование и, тем более, эффективное численное решение подобных задач связаны с преодолением серьезных математических трудностей и препятствий. В частности, в случае той или иной нерегулярности ограничений задачи оптимизации двойственные траектории большинства современных методов оптимизации обычно притягиваются к так называемым критическим множителям Лагранжа, при этом, как следствие, чаще всего теряется сверхлинейная скорость сходимости методов.

Несмотря на указанные обстоятельства, в известной литературе можно отыскать небольшое число публикаций по задачам оптимизации с нерегулярными ограничениями, что делает их малоисследованными.

Отметим одну особенность исследований в диссертации Е.И. Ускова, заключающуюся в рассмотрении сингулярностей задачи с классических позиций, таких как скорость сходимости, поведение двойственной траектории, регуляризация алгоритмов и т.д.

Диссертационная работа, состоящая из введения, четырех глав, трех приложений, заключения и списка литературы из 94 источников, прежде всего, вызывает уважение объемом проделанной работы (161 страница убористого текста без приложений). Думается, для одной диссертации хватило бы глав I и IV, и приложения В. При этом бы, конечно, «пропали» впечатляющие результаты сравнения метода модифицированных функций Лагранжа (МФЛ), метода последовательного квадратичного программирования (SQP), стабилизированного метода последовательного квадратичного программирования (s-SQP) и метода последовательного квадратичного

программирования, стабилизированного вдоль подпространства вырожденности (s-sSQP), с известными пакетами прикладных программ.

**Первая глава** посвящена исследованию эффекта притяжения двойственных траекторий ньютоновских методов к критическим множителям Лагранжа, являющихся основной причиной медленной сходимости современных алгоритмов выпуклой оптимизации в нерегулярных задачах.

Так на примере метода последовательного квадратичного программирования (SQP) анализируются возможные сценарии поведения двойственной траектории и доказывается сходимость этой траектории к критическому множителю. При этом скорость «прямой» сходимости оказывается лишь линейной.

Далее исследуются частные классы задач оптимизации, например, так называемые чисто квадратичные задачи (или задачи с квадратичными ограничениями-равенствами). Эффект притяжения здесь играет определяющую роль в сходимости SQP.

Предваряя две последующие главы, в конце главы I рассматриваются два метода МФЛ и s-SQP, способные подавлять эффект притяжения.

**В главе II** для задач оптимизации с нерегулярными ограничениями рассматривается метод МФЛ с точки зрения глобальной сходимости при нарушении условий регулярности.

Особый интерес вызывает задача с комплиментарными ограничениями, для которой построена теория глобальной сходимости.

Полученные результаты убедительно демонстрируют хорошие свойства метода МФЛ, в частности, надежность и качество получаемых решений, а также возможность ускорения финальной фазы метода МФЛ посредством ньютоновских технологий.

**В главе III** исследуется проблема глобализации сходимости стабилизированного метода последовательного квадратичного программирования. Эта проблема поставлена достаточно давно, но, насколько известно, позитивные ответы получены лишь в данной работе.

При этом разработано несколько методик глобализации сходимости, что влечет, в том числе, сверхлинейные скорости сходимости. В частности, с использованием гладких штрафных функций удалось достичь сравнительно высокой эффективности по отношению к стандартному SQP.

**Заключительная четвертая глава** обращает на себя внимание своей направленностью на разработку нового алгоритма решения нерегулярных задач, использующего специфику нерегулярных ограничений-равенств. Это метод SQP, стабилизированный вдоль подпространства сингулярности (вырожденности). Для него сначала обоснована локальная сверхлинейная сходимость. Затем этот алгоритм «глобализуется» так, что имеет место глобальная сходимость, а скорость становится сверхлинейной. Думается, что этот метод завоеует вскоре определенную популярность как среди теоретиков сходимости, так и при численном решении невыпуклых и вырожденных задач оптимизации.

Отдельно хочется сказать о приложениях А, Б и В диссертации, где виден впечатляющий объем вычислительных экспериментов и программистской работы. Но объем работы здесь не главное. Убедительный анализ и выводы демонстрируют сочетание высокого математического уровня и отличной программистской подготовки соискателя.

В диссертации получены следующие **основные результаты**.

1. Доказано существование эффекта притяжения двойственных траекторий метода SQP к критическим множителям, в частности, для чисто квадратичной задачи.

2. В условиях вырожденности ограничений теоретически и посредством численного эксперимента доказаны эффективность, робастность и глобальная сходимость метода МФЛ.

3. Разработаны и обоснованы методы глобализации сходимости стабилизированного метода SQP с использованием точных гладких штрафных функций. На некоторых классах задач разработанный метод значительно опережает по эффективности стандартный SQP.

4. Разработан стабилизированный вдоль подпространства вырожденности новый вариант метода SQP, обладающий глобальной сходимостью и значительно превосходящий по эффективности стандартный SQP на задачах с сингулярными ограничениями.

**Научная новизна** результатов диссертации Е.И. Ускова заключена, прежде всего, в выявлении природы возникновения эффекта притяжения двойственной траектории современных методов оптимизации к критическим множителям Лагранжа, в окрестности которых происходит значительное снижение скорости сходимости методов (SQP, МФЛ и др.).

В дополнение к этому в условиях вырожденности ограничений разработаны различные способы и приемы глобализации сходимости и ускорения скорости сходимости стандартных методов оптимизации.

Кроме того, разработан принципиально новый алгоритм SQP, стабилизированный вдоль подпространства вырожденности, а также способы глобализации и ускорения скорости сходимости этого метода.

**Теоретическая и практическая значимость работы** обусловлена местом математических методов и вычислительного эксперимента в современном мире для всех областей человеческой деятельности (экономика, экология, энергетика, космос, геология и т.д.), а также местом оптимизации внутри математики («царица и слуга» всех областей математики, вспомним также, что все физические законы являются следствием принципов экстремальных задач). Поэтому практически все прикладные задачи могут быть решены методами оптимизации. В то же время, обычно эти задачи являются нерегулярными, в частности, невыпуклыми. Следовательно, эффективность используемых алгоритмов оптимизации, например, в смысле достижения глобального решения в невыпуклой задаче, или при вырожденных ограничениях, играет определяющую роль при решении, например, иерархических и комплементарных задач оптимизации, поиске равновесий и т.д.

Поэтому результаты диссертации Е.И. Ускова, касающиеся источников возникновения эффекта притяжения двойственных траекторий современных методов оптимизации к критическим множителям, а также способы, приемы и методы стабилизации, глобализации и ускорения сходимости весьма важны как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

**По работе возникли следующие замечания.**

1. В главе I доказывается глобальная сходимость метода МФЛ к так называемым  $S$ -стационарным точкам задач с комплементарными ограничениями, в то время как для этих задач известны и более сильные понятия стационарности. В работе не исследовано, при каких дополнительных условиях предельные точки метода МФЛ гарантированно окажутся сильно стационарными.

2. Из результатов главы IV неясно, возможно ли обобщить модифицированный SQP со стабилизацией вдоль подпространства сингулярности на случай задач с неравенствами.

3. В каждой главе диссертации используется единая нумерация формул. Например, в главе I их 151, в главе III их 93. Поэтому, видимо, целесообразно было бы ввести сквозную, а нумерацию по параграфам, что значительно облегчило бы чтение текста, который достаточно плотен и насыщен.

4. Практически во всех примерах в работе рассмотрены задачи с ограничениями-равенствами, к тому же лишь с одной допустимой точкой, которая и является решением задачи. Представляется любопытным посмотреть поведение алгоритмов, когда система ограничений имеет несколько решений.

5. Иногда представление численных результатов в приложениях А, Б и В кажется слишком сжатым и сухим с недостаточным количеством комментариев и анализом результатов. Это такой увлекательный детектив, где хочется отыскать главные действующие лица.

Тем не менее, ясно, что все эти недостатки носят технический характер и не снижают высокого научного уровня диссертационного исследования, представляющего собой законченную научно-исследовательскую работу, выполненную в актуальном направлении. Полученные результаты являются новыми, четко сформулированы и полностью строго обоснованы утверждениями, доказанными в виде лемм, предложений и теорем, последних всего около 30 (тридцати).

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих мировых изданиях, весьма жестко рецензируемых, к тому же они неоднократно докладывались на крупнейших международных конференциях.

Работа выполнена на высоком профессиональном уровне и представляет собой законченное исследование.

Автореферат достаточно полно и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным считаем, что диссертация Е.И. Ускова «Ньютоновские методы решения задач оптимизации с нерегулярными ограничениями», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.09 – дискретная математика и кибернетика», соответствует всем требованиям Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и кибернетика.

Отзыв заслушан и утвержден 07 ноября 2014 года на заседании Объединенного семинара ИДСТУ СО РАН (протокол № 2, председатель семинара академик И.В. Бычков).

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)

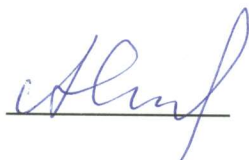
Почтовый адрес: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292

Телефон: +7 (3952) 427100

Факс: +7 (3952) 511616

Адрес электронной почты: [idstu@icc.ru](mailto:idstu@icc.ru)

Заведующий лабораторией  
ИДСТУ СО РАН,  
д.ф.-м.н., профессор,  
Заслуженный деятель науки РФ



А.С. Стрекаловский

Подпись А.С. Стрекаловского заверяю.

Ведущий специалист по кадрам



Л.А. Тимошина

