Отзыв официального оппонента

Зуева Юрия Анатольевича

на диссертацию Золотых Николая Юрьевича «Расшифровка пороговых и близких к ним функций», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация Н. Ю. Золотых посвящена задаче расшифровки пороговых и близких к ним функций и связанным с этими проблемами вопросам. Под расшифровкой понимается восстановление неизвестной функции из известного класса с помощью вопросов о значении функции в точке. Задача расшифровки дискретных функций и смежные задачи активно исследуются в различных разделах дискретной математики и математической кибернетики: теории тестов, теории надежности управляющих систем, распознавании образов, машинном обучении, дискретной оптимизации и др.

Если рассматривать задачу расшифровки дискретной функции общего вида, то для её полного восстановления требуется выяснить её значения на всем множестве наборов её аргументов. Однако в тех случаях, когда априори известна принадлежность исследуемой функции некоторому классу, для восстановления функции оказывается возможным ограничиться существенно меньшим числом вопросов, и задача восстановления с помощью минимального числа задаваемых вопросов становится нетривиальной.

Впервые задачи подобного рода были рассмотрены в начале шестидесятых годов прошлого века советским учёным В. К. Коробковым, которым изучалась проблема восстановления монотонной булевой функции. В. К. Коробковым было также указано на связь задачи расшифровки монотонной функции с задачами дискретной оптимизации. Его работы породили целый поток исследований по восстановлению монотонных булевых функций.

В дальнейшем наряду с монотонными функциями стали рассматриваться и другие классы функций. Задача расшифровки пороговой функции впервые была рассмотрена В. Н. Шевченко. Данный класс функций также тесно связан с задачами дискретной оптимизации, а используемые здесь методы опираются на классические результаты теории линейных неравенств, теории игр и линейного программирования. В диссертации кроме пороговых и близких к ним функций (дизъюнкции и конъюнкции пороговых), определённых на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}^n$, рассматриваются также пороговые функции, определённые на множестве целочисленных точек заданного политопа. Такое обобщение расширяет сферу практических приложений задачи расшифровки, например, в распознавании образов и целочисленном линейном программировании.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой задачи и приводится краткое изложение диссертации.

В первой главе рассматриваются основные свойства пороговых и близких к ним функций. Исследуются мощностные свойства рассматриваемых классов. Устанавливаются оценки числа вершин выпуклых оболочек множества нулей и множества единиц функции. Эти результаты используются в других главах диссертации. Особое внимание уделяется задаче построения вершин и экстремальных лучей выпуклого полиэдра, заданного системой линейных неравенств. Диссертант предлагает модификацию хорошо известного «метода двойного описания», предложенного Т. Моцкиным и др. Теоретическое обоснование и результаты вычислительного эксперимента подтверждают в ряде важных случаев превосходство в производительности предложенного диссертантом метода. Заметим, что эти результаты представляют и самостоятельный интерес, так как задача построения двойственного описания полиэдра является одной из центральных в теории систем линейных неравенств и появляется в многочисленных приложениях: глобальной оптимизации, теория игр, вычислительной геометрии, компьютерной алгебре, вычислительной биологии и др.

Во второй главе предлагаются алгоритмы расшифровки пороговых и близких к ним функций. Построен алгоритм A_0 расшифровки в классе функций, каждую из которых можно представить как дизъюнкцию некоторых пороговых и как конъюнкцию некоторых пороговых функций. Для расшифровки пороговых функций предложен более производительный алгоритм A_1. В классе пороговых функций k-значной логики он использует не более $O(\log^n k)$ обращений к оракулу (при фиксированном числе переменных n). Это значительно улучшает известную ранее оценку $O(\log^{(n-1)[n/2]+n} k)$ (T. Hegedüs, 1995). Для расшифровки пороговых функций, зависящих от 2 переменных, предлагается алгоритм A_2 с оракульной сложностью, не превосходящей $6\log(k-1)+4$. Рассматривается задача расшифровки пороговых функций, заданных «расширенным» оракулом, принимающим на вход не только точки из области определения функции, но и произвольные точки. Построенный алгоритм использует для расшифровки не более $\frac{1}{2} n^4 \log(n+1) + 2n^3 \log k$ обращений к расширенному оракулу пороговой функции. Все предлагаемые алгоритмы при фиксированном n имеют полиномиальную вычислительную трудоемкость.

Третья глава посвящена получению нижних оценок сложности расшифровки пороговых функций. Заметим, что ранее нетривиальных нижних оценок сложности рассматриваемой задачи известно не было. Получено два качественных описания строения разрешающего множества (проверяющего теста) пороговой функции – такого множества точек области определения, значений функции в котором достаточно для однозначного ее восстановления на всей области определения. На этой основе получена асимптотика $\Theta(\log^{n-2} k)$ (при фиксированном $n \geq 2$) длины обучения пороговой функции, т. е. максимального значения мощности разрешающего множества или, что эквивалентно, максимального числа соседних пороговых функций. Установленная асимптотика длины обучения дает нижнюю оценку $\Omega(\log^{n-2} k)$ оракульной сложности алгоритма расшифровки пороговой функции. Для получении верхней оценки длины обучения диссертантом использован метод, являющийся модификацией метода В. Н. Шевченко для оценки числа вершин выпуклой оболочки целочисленных точек полиэдра. На основе полученных верхних оценок длины обучения построена модификация алгоритма A_1 с оракульной сложностью $O(\log^{n-1} k)$. Для пороговых функций, зависящих от 2 переменных, установлены точное значение длины обучения, равное 4, и асимптотическое значение 7/2 средней мощности минимального разрешающего множества.

Четвёртая глава диссертации посвящена установлению связи между задачей расшифровки пороговой функции и задачей нахождения диофантового приближения.

При разработке алгоритмов расшифровки используются методы линейного и целочисленного линейного программирования (метод эллипсоидов, методы нахождения вершин полиэдров и др.). При получении верхних и нижних оценок сложности используются методы линейного и целочисленного линейного программирования, теории чисел. Существенным образом используются результаты о числе вершин выпуклой оболочки целочисленных точек полиэдра, полученные В. Н. Шевченко и его учениками. На основе этих методов диссертантом построен новый метод оценивания числа неприводимых точек полиэдра. Этот метод заслуживает особого внимания и может быть использован при решении других задач.

Среди основных результатов диссертации выделим следующие:

1) предложен алгоритм расшифровки пороговой функции k-значной логики с числом обращений к оракулу $O(\log^{n-1} k)$, что значительно улучшает известную ранее оценку; для этой задачи установлена

близкая (при фиксированном числе переменных n) нижняя оценка сложности $\Omega(\log^{n-2} k)$;

2) установлена асимптотика $\Theta(\log^{n-2} k)$ (при фиксированном числе переменных $n \geq 2$) длины обучения пороговой функции k-значной логики;
3) предложен новый метод оценки числа неприводимых точек полиэдра, позволивший установить асимптотику их числа при фиксированной размерности n;
4) предложена новая модификации комбинаторного теста проверки смежности экстремальных лучей в методе двойного описания.

Оппонент считает необходимым сделать по диссертации следующие замечания:

1) Предваряющий диссертацию список используемых обозначений, который занимает 5 страниц и которым приходится постоянно пользоваться при чтении диссертации, затрудняет изучение работы. По-видимому, лучше было бы предварять каждую главу используемыми в ней обозначениями;

2) Предлагаемые в конце первой главы эвристические приёмы ускорения классического алгоритма двойного описания подтверждены вычислительными экспериментами. Однако хотелось бы видеть также и решение с их помощью серьёзных прикладных задач.

Сделанные замечания ни в коей мере не снижают общей положительной оценки диссертации.

Диссертация Н. Ю. Золотых написана на актуальную тему и представляет несомненный интерес для специалистов в области дискретной математики и математической кибернетики. Результаты диссертации являются новыми и научно обоснованными. Они подтверждены строгим доказательством лемм и теорем. По результатам диссертации опубликовано

17 работ, 11 из которых – в изданиях, рекомендуемых ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Н. Ю. Золотых является законченной научно-квалификационной работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Таким образом, диссертация Н. Ю. Золотых удовлетворяет критериям, которым должна отвечать диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

На основе вышеизложенного считаю, что Золотых Николай Юрьевич достоин присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры Высшей математики
Московского государственного университета
технологий и управления им. К. Г. Разумовского

Ю. А. Зуев

Подпись Ю.А. Зуева

И.М. Агишзова
30.01.2014