

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

УДК 517.956.321

Рогожников Алексей Михайлович

**Решение смешанных задач и оптимизация граничных
управлений для уравнения продольных колебаний
составного стержня**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., академик РАН, профессор

Ильин Владимир Александрович

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Крицков Леонид Владимирович

Содержание

Введение	3
Глава 1. Классические постановки смешанных задач, описывающих продольные колебания стержня с присоединенными массами	19
1.1. Формулировка классической смешанной задачи	19
1.2. Единственность решения	21
1.3. Вспомогательные определения	23
1.4. Существование классического решения для неоднородной правой части	33
1.5. Финально-краевая задача	46
Глава 2. Обобщенное решение смешанной задачи о возбуждении колебаний в составном стержне с точечными нагрузками	48
2.1. Классическая постановка задачи о возбуждении колебаний в изначально покоящемся стержне при помощи граничных условий	48
2.2. Формулировка смешанной задачи	49
2.3. Единственность решения	51
2.4. Явный вид решения смешанной задачи	53
Глава 3. Метод построения явного вида решения	67
Глава 4. Оптимальное управление колебаниями составного стержня	76
4.1. Постановка задач о возбуждении колебаний при помощи граничного управления	76
4.2. Решение задачи о возбуждении колебаний в частном случае	77
4.3. Приведение задач граничного управления к эквивалентному виду	79
4.4. Вспомогательные утверждения о матрицах	84
4.5. Решение задачи о возбуждении колебаний за кратные промежутки времени	90
Заключение	94
Литература	95

Введение

Актуальность темы. Главным предметом изучения в настоящей диссертационной работе является задача граничного управления продольными колебаниями в составном стержне, состоящем из конечного числа участков, на каждом из которых стержень обладает постоянными характеристиками. Исследуемые колебания описываются одномерным разрывным волновым уравнением.

Волновое уравнение является весьма общей математической моделью для большого числа физических процессов, описывающих механические колебания различных конструкций, колебания электромагнитного поля, распространение акустических волн в жидкостях и газах.

В приложениях возникают задачи, связанные с генерацией определенного режима колебаний в системе или с успокоением имеющихся нежелательных вибраций в различных конструкциях. Одним из часто применяемых методов для решения указанных задач является граничное управление, при котором посредством некоторых механизмов производится управление состоянием системы на границе (например, заданием смещения на конце или приложением силы) или какой-то её части. Отметим, что подобный подход не является единственно возможным и другое активно развивающееся направление — распределенное управление системами. Вне зависимости от типа управления ставится вопрос о возможности перевода системы из некоторого начального состояния в конечное; в исследуемом случае состояние (как начальное, так и конечное) описывается профилем смещения и профилем скорости.

Исследование задач управления системами с распределенными параметрами в данный момент представляет собой довольно обширный раздел математики. В круг вопросов, рассматриваемых обычно при изучении вопросов управления, входят возможность полного управления (т.е. разрешимость задач управления при произвольном конечном состоянии), условия на конечное (и начальное) состояние, при которых задача становится разрешима, а также поиск оптимального в каком-то смысле управления, если задача управления разрешима.

Волновое уравнение в этом плане исследовано весьма тщательно, и имеется множество результатов, касающихся разных случаев. Одними из первых и самых значимых являются результаты Ж.Л. Лионса [7, 8], который предложил метод одновременного исследования задачи управления и задачи наблюдения, получивший название Hilbert Uniqueness Method (HUM). Указанный метод позволил исследовать многомерное волновое уравнение (одномер-

ное входит как частный случай), кроме того, Лионсом был предложен способ синтеза граничного управления, основанный на методе HUM. Стоит отметить, что область применения разработанного подхода не ограничивается волновым уравнением: Лионс и его последователи многократно его обобщали на различные системы.

Другой результат, получивший в литературе название Geometric Control Condition (геометрическое условие управляемости), был представлен в статье [3], и описывает точные условия на подмножество границы системы, на котором производится граничное управление, и время управления, при которых задача граничного управления для многомерного волнового уравнения становится разрешима.

В работах [21, 22] Ф. П. Васильева и соавторов задачи граничного управления изучаются в свете новой интерпретации двойственности линейных задач управления и наблюдения, предложенной в статье [19]. В указанных работах разработаны методы численного построения решения и показана их сходимость. Отдельно отметим впервые представленные в работе [66] М. М. Потаповым взаимодвойственные аппроксимации двойственных задач, для которых была доказана сходимость решений не только по невязке, но и по аргументу.

Другой, более наивный, подход к численному решению задачи управления системы с распределенными параметрами, состоит в применении пространственной дискретизации уравнения, т.е. замене дифференциального уравнения в частных производных достаточно большой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, после чего задача управления формулируется для полученной дискретизации и применяются хорошо известные методы оптимального управления системами дифференциальных уравнений. Этот подход довольно активно развивается Э. Зуазуа. В своей статье [12] он описывает проблемы, с которыми сталкивается этот подход на примере одномерного волнового уравнения: полученные численно управления расходятся при уменьшении шага пространственной сетки. Им были объяснены причины этого явления и предложены различные регуляризации задачи, которые он последовательно исследовал в работах [9, 12, 13].

Результаты по смешанным задачам и задачам граничного управления для уравнения колебаний в системах с кусочно-постоянными характеристиками в основном касаются уравнений на квазиодномерных системах (уравнения на графах, как часто называют этот раздел). Задачи, рассматривавшиеся авторами, весьма близки к теме настоящей диссертации, поскольку поведение решений смешанных задач крайне похоже (в частности, в обоих случаях пространство делится на участки, на каждом из которых имеется однородное волновое уравнение, а в точках соприкосновения участков действуют определенные условия сопряжения). С одной стороны, рассматриваемая в настоящей работе задача об управлении колебаниями

стержня может быть сведена к задаче на линейном графе, с другой стороны, предлагаемый в диссертации подход к решению смешанных задач и построению граничного управления может быть обобщен для произвольных графов. Перечислим некоторые известные результаты этой области.

В работах [4, 5, 14] исследовалась точная и приближенная граничная управляемость волнового уравнения на графе, были установлены достаточные условия на спектр оператора Лапласа на графе, при которых указанные задачи разрешимы. Систематическое изложение спектральной теории на графах можно найти в монографии [65].

К. Аммери и соавторами было доказано убывание со временем решения волнового уравнения на древесном графе [1, 2], если на одном из концов наложить поглощающее граничное условие, дополнительно потребовав взаимной иррациональности времен прохождения сигнала по разным участкам (результаты подобного рода в литературе называются стабилизацией решения).

В работе Шмидта [10] введено графическое правило (правило расстановки знаков), позволяющее установить разрешимость задачи управления для линеаризованного уравнения плоских колебаний двумерной сети из струн.

В серии работ [45, 46, 48–50, 52] В. А. Ильина и Е. И. Моисеева был разработан подход к управлению одномерным волновым уравнением, основанный на получении явного вида решения смешанной задачи путем полного учета отраженных волн. Ими и их учениками исчерпывающим образом было изучено волновое уравнение, описывающее продольные колебания однородного стержня [29, 31–33, 55, 60–64]: в замкнутой форме приведены обобщенные решения смешанных задач с различными классическими и нелокальными граничными условиями, с использованием которых построены граничные управления. Поскольку при достаточно большом времени управления решение задачи управления неединственно, то отыскивались оптимальные управления в смысле минимизации интеграла граничной энергии (отдельно отметим работы [47, 51], где рассматривался более общий случай оптимизации интеграла от степени $p \geq 1$ модуля управления или его производной, который при $p = 2$ является упомянутым интегралом граничной энергии). Обобщенные решения искали в классе, требующем наличия конечной энергии.

В монографии [27] Л. Н. Знаменской систематически изложены результаты по управлению колебаниями однородного стержня с классическими граничными условиями за критическое время, там же приводится история развития задачи об управлении одномерными упругими колебаниями, описываются применявшиеся методы решения и указаны примеры приложений, приводящих к подобным постановкам. Помимо перечисленных задач рассмат-

ривались постановки для разрывного волнового уравнения: отметим работы [40, 41], где представлены оптимальные граничные управления для стержня, состоящего из двух участков с одинаковыми импедансами. Это ограничение позволяет заменой пространственной переменной свести задачу к однородному волновому уравнению. Также В. А. Ильиным была решена [34] смешанная задача и задача управления за минимальный промежуток времени для стержня, состоящего из двух участков при условии равенства времени прохождения сигнала по каждому из них, но без ограничения на импедансы.

Возможность построения управлений вызвала интерес к получению в замкнутой форме решений смешанных задач. А. А. Кулешовым в статьях [56, 57] были предъявлены решения смешанных задач для колебаний стержня, состоящего из двух участков, возбуждаемых граничными условиями первого и второго рода, без дополнительных ограничений. Указанное решение записано в виде суммы с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. В работе О. В. Коровиной, В. Л. Прядиева [54] представлено решение начально-краевой задачи на графе при однородных граничных условиях Дирихле и Неймана с использованием суммирования по некоторому множеству ломаных на этом графе.

В работах А. В. Боровских [16, 17] исследовались колебания неоднородной струны с плавно изменяющимися характеристиками материала. При времени управления, не превышающем времени прохождения сигнала, были установлены необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи, а также представлено граничное Дирихле-управление.

В серии работ А. И. Егорова и Л. Н. Знаменской [24–26] исследуется управляемость колебаний многозвенных систем. Близкая к теме настоящей работы задача была рассмотрена ими в работах [25, 26], где исследовалась управляемость разрывного волнового уравнения при помощи воздействия управляющим объектом с сосредоточенными параметрами в одной из точек соединения. Авторам удалось доказать управляемость системы при дополнительных условиях согласования, однако предложенная техника ведет к громоздким вычислениям, которые необходимо проделать вручную.

Цель диссертационной работы. В свете перечисленных выше работ приобретают актуальность следующие задачи.

Во-первых, важным представляется получение универсальной формы решения в явном виде для широкого класса смешанных задач, включающего как частные случаи большую часть уже рассмотренных.

Во-вторых, вызывает интерес использование полученных формул для решения задач граничного управления, в частности, для получения явного вида оптимальных граничных управлений в смысле минимизации интеграла граничной энергии.

Основные результаты работы.

1. В настоящей работе представлено обобщенное решение смешанной задачи, описывающей продольные колебания стержня, состоящего из произвольного конечного числа участков, на каждом из которых характеристики (плотность и модуль Юнга) постоянны, также допускается, чтобы в стыках между участками находились прикрепленные к стержню точечные массы. Колебания в изначально покоящемся стержне вызываются граничными условиями первого, второго, третьего рода или произвольной их комбинацией. Доказана единственность полученного решения.
2. Разработан новый подход к получению явного вида решений смешанных задач с использованием компактной матричной формы записи.
3. Существенно опираясь на полученный явный вид решения, были исследованы задачи управления колебаниями составного стержня без точечных масс, подчиненного условию равенства времени прохождения сигнала по каждому из участков. Управление производится смещением с двух концов, либо смещением с левого конца при закреплённом правом. Для указанных задач представлены оптимальные в смысле минимизации интеграла граничной энергии управления за промежутки времени, кратные времени прохождения сигнала по одному участку.

Методы исследования. В работе используется теория дифференциальных уравнений, матричный анализ, метод множителей Лагранжа, метод сжимающих отображений.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы. Разработан общий метод построения решения смешанной задачи для разрывного уравнения колебаний с классическими линейными граничными условиями. Продемонстрирована возможность решения задач оптимального граничного управления колебаниями с помощью найденных формул. Стоит отметить, что полученная форма решения смешанной задачи может быть использована для численного моделирования колебаний.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Ломоносов», Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2012 и 2013 гг.;
- научная конференция «Тихоновские чтения», факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, октябрь 2013 г.;

- научный семинар кафедры оптимального управления ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством Ф.П. Васильева;
- научный семинар кафедры математического моделирования ИАВТ МЭИ по дифференциальным уравнениям.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [71–75], из которых работы [71–74] опубликованы в журналах, входящих в список ВАК. Все результаты, вошедшие в диссертацию и в перечень опубликованных работ, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 101 страница. Библиография содержит 75 наименований.

Основное содержание работы

В первой главе исследуется классическая постановка смешанной задачи о возбуждении колебаний в составном стержне, а также вводится ряд понятий, необходимых для записи решения.

Рассматриваются колебания стержня, состоящего из n последовательно соединенных участков, при этом на i -том участке ($i = 1, 2, \dots, n$), расположенном на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, стержень обладает постоянными плотностью ρ_i , модулем Юнга k_i и скоростью распространения сигнала (скоростью звука) $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$. К стыкам участков x_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ прикреплены точечные массы $m_i \geq 0$ (случай $m_i = 0$ означает отсутствие массы). Множество точек стыка, где массы положительны, обозначим через X , а множество остальных точек стыка обозначим через Y . Продольные колебания такого стержня, испытывающего воздействие внешней силы с плотностью $f(x, t)$, описываются разрывным волновым уравнением

$$u_{tt} = a_i^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{в прямоугольнике } Q_i = (x_{i-1}, x_i) \times (0, T), \quad i \in \overline{1, n} \quad (1)$$

и удовлетворяют условиям сопряжения в точках стыка $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ при $t \in [0, T]$

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad (2)$$

$$m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t), \quad (3)$$

стержень считаем изначально покоящимся

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad u_t(x, 0) \equiv 0 \quad x \in [x_0, x_n]. \quad (4)$$

Полагается наложенным одно из линейных граничных условий на левом конце:

- Управление смещением (I род)

$$u(x_0, t) = \mu(t). \quad (L_I)$$

- Управление силой (II род)

$$u_x(x_0, t) = \mu(t). \quad (L_{II})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \mu(t), \text{ где } h_1 > 0. \quad (L_{III})$$

Аналогично на правом конце полагаем наложенным одно из граничных условий

- Управление смещением (I род)

$$u(x_n, t) = \nu(t). \quad (R_I)$$

- Управление силой (II род)

$$-u_x(x_n, t) = \nu(t). \quad (R_{II})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$-u_x(x_n, t) - h_2 u(x_n, t) = \nu(t), \text{ где } h_2 > 0. \quad (R_{III})$$

Для указанной смешанной начально-краевой задачи доказана единственность классического решения, принадлежащего классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i , и представлен явный вид решения смешанной задачи с однородными граничными условиями $\mu(t)$, $\nu(t)$ и ненулевой правой частью $f(x, t)$, от которой требуется принадлежность классу $C^1(\overline{Q})$ и принадлежность её носителя объединению незамкнутых прямоугольников $\bigcup_{i=1}^n Q_i$. Эта вспомогательная теорема используется во второй главе для доказательства единственности обобщенного решения.

Введем метрическое линейное пространство V , состоящее из непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, причем таких, что для каждой функции $f(t)$ из V существует число $t_0 \in \mathbb{R}$, что $f(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Расстояние между двумя функциями $x, y \in V$ задается следующим образом

$$\rho(x, y) = \begin{cases} e^{-t_{inf}}, & t_{inf} = \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Также вводятся пространство V^n векторов длины n , компонентами которых являются функции из V , и метрика на этом пространстве:

$$\rho_n(x, y) = \max_{j \in \overline{1, n}} \rho(x_j, y_j) \quad x, y \in V^n.$$

Для $\rho(\cdot, \cdot)$, $\rho_n(\cdot, \cdot)$ доказан ряд свойств, важнейшее из которых — полнота пространств V , V^n относительно соответствующих метрик. Введена операция умножения матрицы на вектор из пространства V^n :

Определение 1. Пусть $f = [f_1 \dots f_n]^T \in V^n$, а матрица $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Вектор $g = [g_1 \dots g_m]^T \in V^m$, элементы которого определены как $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, назовем их произведением. Операцию будем записывать как $g = Af$. Договоримся, что вместо числа в некоторых клетках матрицы могут стоять операторы, действующие в пространстве V . При этом, если в ячейке вместо a_{ij} стоит оператор L_{ij} , то вместо $a_{ij} f_j$ в линейной комбинации должен стоять результат применения оператора $L_{ij} f_j$.

Помимо этого определим несколько операторов, действующих во введенных пространствах:

Определение 2 (оператор запаздывания). Оператор запаздывания P_τ ($\tau \in \mathbb{R}$) действует на $f \in V$ следующим образом:

$$g = P_\tau f, \quad g(t) = f(t - \tau) \quad g \in V.$$

Для нас будет важен оператор запаздывания, действующий на элементы пространства V^n :

$$P \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ P_{t_2} f_2 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \end{bmatrix}.$$

В этой формуле n — количество участков в стержне, а t_i — время прохождения сигналом i -того участка. Именно такой конкретный оператор P будет использоваться в дальнейшем.

Определение 3. Пусть $\beta > 0$, $f \in V$, оператором эха назовем оператор E_β , строящий отраженную волну по пришедшей при граничном условии третьего рода и действующий следующим образом:

$$(E_\beta f)(t) = f(t) - 2\beta \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-\beta\tau} d\tau.$$

Эквивалентная форма действия этого оператора (звездочкой обозначена операция свертки, $\theta(t)$ — функция Хевисайда):

$$E_\beta f = f - 2\beta \theta(t) e^{-\beta t} * f.$$

Определение 4 (операторы преломления и отражения). Пусть i и j — номера соседних участков, m — масса точечного груза в соединяющем их стыке. Тогда операторы отражения $\widehat{R}_{ij}$ и преломления $\widehat{T}_{ij}$ действуют на $f \in V$ следующим образом:

$$\widehat{T}_{ij} f = \begin{cases} \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}, & m > 0 \\ \frac{2z_i}{z_i+z_j} f, & m = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{R}_{ij} f = \widehat{T}_{ij} f - f.$$

Коэффициенты z_i, z_j — импедансы соответствующих участков

$$z_i = a_i \rho_i = \sqrt{k_i \rho_i} = k_i / a_i.$$

Во второй главе изучаются продольные колебания, возбуждаемые в изначально покоящемся составном стержне неоднородными граничными условиями первого, второго или третьего рода. Правая часть волнового уравнения при этом полагается нулевой: $f(x, t) \equiv 0$. Используется класс $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$, введенный В. А. Ильиным:

Определение 5. Пусть $\mathcal{D} = (a < x < b) \times (t_1 < t < t_2)$ — прямоугольник на плоскости (x, t) . Класс $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$ состоит из непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций, обобщенные производные которых $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ принадлежат не только классу $L_2(\mathcal{D})$, но и классу $L_2[a \leq x \leq b]$ при всех $t \in [t_1, t_2]$ и классу $L_2[t_1 \leq t \leq t_2]$ при всех $x \in [a, b]$.

Определение 6. Введем класс $\overline{W}_2^1$, от функций которого потребуем принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а также принадлежность классу $W_2^2(0 \leq t \leq T)$ при $x \in X$, т.е. в нагруженных точках стыка.

Определение 7. Обобщенным решением смешанной задачи (1)–(4) с нулевой правой частью $f(x, t) \equiv 0$, одним из граничных условий (L_I)–(L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I)–(R_{III}) на правом назовем функцию $u(x, t)$ из класса $\overline{W}_2^1$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) \equiv 0$ при $x \in [x_0, x_n]$, условию $u_t(x_i, 0) = 0$ при $x_i \in X$, т.е. в нагруженных точках

стыка, и следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \\
& + \sum_{x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt + \\
& + \begin{cases} \int_0^T [-k_1 \mu(t) \Phi_x(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_I\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{III}\text{)} \end{cases} + \\
& + \begin{cases} \int_0^T [k_n \nu(t) \Phi_x(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_I\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{III}\text{)} \end{cases} = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

для любой «пробной» функции $\Phi(x, t)$, непрерывной в замыкании $\overline{Q}$ прямоугольника $Q = (x_0, x_n) \times (0, T)$, принадлежащей классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i , удовлетворяющей следующим ограничениям в финальный момент времени

$$\Phi(x, T) \equiv 0 \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0, \quad (6)$$

условиям на концах стержня в соответствии с наложенными граничными условиями:

$$\begin{aligned}
& \Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_I\text{)} \\
& \Phi_x(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\
& \Phi_x(x_0, t) - h_1 \Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_{III}\text{)} \\
& \Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_I\text{)} \\
& \Phi_x(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\
& \Phi_x(x_n, t) + h_2 \Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_{III}\text{)},
\end{aligned}$$

а также условию согласования в точках безмассового стыка:

$$0 = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t), \quad x_i \in Y.$$

В зависимости от типа граничного условия на левом конце наложим требования на $\mu(t)$:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\mu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\mu(0) = 0$.

- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

В полной аналогии наложим требования на $\nu(t)$ в зависимости от типа граничного условия на правом конце:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\nu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\nu(0) = 0$.
- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

Доказаны теоремы:

Теорема 1. Смешанная задача (1)–(4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I) – (R_{III}) на правом имеет единственное обобщенное решение из класса $\overline{W}_2^1$.

Теорема 2. Единственное обобщенное из класса $\overline{W}_2^1$ решение задачи (1)–(4) с нулевой правой частью, одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) и одним из условий (R_I) – (R_{III}) при **четном** числе участков n имеет следующий вид в прямоугольнике $\overline{Q}_i$:

$$u(x, t) = \begin{cases} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{нечетных} \\ \tilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{четных,} \end{cases} \quad (7)$$

где функции $U_1 \dots U_n, \tilde{U}_1 \dots \tilde{U}_n$, определяются из соотношений

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A и B размера $n \times n$ определены формулами

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix},$$

где блок J_{ij} размера 2×2 составлен из операторов отражения и преломления:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{ij} & \hat{T}_{ji} \\ \hat{T}_{ij} & \hat{R}_{ji} \end{bmatrix},$$

а операторы $\hat{R}_{left}$ и $\hat{R}_{right}$ формируют профиль волны, отраженной соответственно левым или правым концом, по пришедшей волне. Они определены следующим образом

$$\hat{R}_{left} f = \begin{cases} -f & \text{при условии (L_I)} \\ f & \text{при условии (L_{II})} \\ E_{a_1 h_1} f & \text{при условии (L_{III})} \end{cases}$$

$$\hat{R}_{right} f = \begin{cases} -f & \text{при условии (R_I)} \\ f & \text{при условии (R_{II})} \\ E_{a_n h_2} f & \text{при условии (R_{III})}. \end{cases}$$

Через $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$ обозначены волны, порожденные граничными условиями соответственно на левом и правом концах. В зависимости от типа граничного условия они определяются следующим образом на сегменте $t \in [0, T]$:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при условии (L_I)} \\ -a_1 \int_0^t \mu(\tau) d\tau & \text{при условии (L_{II})} \\ -a_1 \int_0^t e^{-a_1 h_1(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau & \text{при условии (L_{III})} \end{cases}$$

$$\underline{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{при условии (R_I)} \\ -a_n \int_0^t \nu(\tau) d\tau & \text{при условии (R_{II})} \\ -a_n \int_0^t e^{-a_n h_2(t-\tau)} \nu(\tau) d\tau & \text{при условии (R_{III})}. \end{cases}$$

Вне зависимости от типов граничных условий продолжим функции $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ нулем при $t < 0$ и произвольным непрерывным образом на полуось $t > T$, чтобы полученные функции лежали в классе V .

Теорема 3. Для задачи (1)–(4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) и одним из условий (R_I) – (R_{III}) при **нечетном** числе участков n решение из класса $\bar{W}_2^1$ определяется по формуле (7), где функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ определены соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

с матрицами A и B размера $n \times n$, имеющими вид

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

В **третьей главе** изложен метод построения решений смешанных задач, приводящий к такому виду решения, объясняется роль введенных метрических пространств. Рассуждения проиллюстрированы на нескольких примерах.

В **четвертой главе** изучаются вопросы управления колебаниями в составном стержне. В этой главе предполагается, что в точках стыка отсутствуют точечные массы, время прохождения сигнала по каждому из участков одинаково (обозначим его через s), а на концах стержня наложены граничные условия Дирихле. Исследуются следующие две задачи управления:

Задача граничного управления I. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые переводят изначально покоящийся стержень в конечное состояние

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad x \in [x_0, x_n] \quad (8)$$

за промежуток времени T . Описывающие конечное состояние функции принадлежат классам: $\varphi(x) \in W_2^1[x_0, x_n]$, $\psi(x) \in L_2[x_0, x_n]$.

Задача граничного управления II. Будем полагать правый конец зафиксированным, т.е. функция $\nu(t)$, имеющая смысл смещения правого конца стержня, полагается нулевой:

$\nu(t) \equiv 0$. Требуется найти управление $\mu(t)$, переводящее стержень из состояния покоя в конечное состояние (8), подчиненное условию согласования $\varphi(x_n) = 0$.

Управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ ищутся в классе функций, допустимых с точки зрения смешанной задачи: от них требуется принадлежность классу $W_2^1[0, T]$ и равенство нулю в начальный момент времени $\mu(0) = \nu(0) = 0$. Поскольку при достаточно большом времени управления решение указанных задач неединственно, то отыскивается оптимальное, т.е. такое, которое минимизирует интеграл граничной энергии, имеющий вид

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt + \int_0^T (\nu'(t))^2 dt$$

для задачи граничного управления I и следующий вид для задачи граничного управления II

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt.$$

При решении существенным образом используется полученный во второй главе вид решения смешанной задачи, который преобразуется с учетом ограничений, принятых в этой главе. Выражения для функций U_i , $\tilde{U}_i$ принимают следующий вид, справедливый как при четном, так и при нечетном числе участков n :

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_n(t) \\ \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \dots \\ \tilde{U}_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\lceil t/s \rceil - 1} C^m [\mu(t - ms)p + \nu(t - ms)q],$$

где матрица C размера $2n \times 2n$ составлена из уже введенных матриц A и B , которые при ограничениях, принятых в настоящей главе, могут рассматриваться как числовые:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

а p и q — векторы длины $2n$:

$$p_i = \delta_{i,1}$$

$$q_i = \begin{cases} \delta_{i,n} & \text{при четном } n \\ \delta_{i,2n} & \text{при нечетном } n \end{cases}.$$

Из финальных условий следуют равенства для функций U_i , $\tilde{U}_i$ при $\tau \in [0, s]$:

$$U'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases}$$

$$\tilde{U}'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases},$$

правые части которых являются функциями, непосредственно вычисляемыми из финальных данных. Обозначим их соответственно через $\alpha_i(\tau)$, $\alpha_{n+i}(\tau)$. Введем следующий вектор

$$\bar{\alpha}(\tau) = [\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \dots, \alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau), \alpha_{n+2}(\tau), \dots, \alpha_{2n}(\tau)]^T.$$

Предположим также, что время управления T кратно времени прохождения сигнала по каждому из участков $T = ks$. Функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ зададим в виде системы функций из класса L_2 , каждая из которых задает производную функции на некотором промежутке. Временной интервал разбивается на промежутки $[T - (m+1)s, T - ms]$, $m = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} \mu'(T - t - ms) &= \mu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s] \\ \nu'(T - t - ms) &= \nu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s]. \end{aligned}$$

В совокупности с условиями согласования $\mu(0) = \nu(0) = 0$ введенная система функций однозначно задает функции $\mu(t)$, $\nu(t)$.

Задачи граничного управления далее формулируются в терминах $\mu_m(t)$, $\nu_m(t)$. Вводятся матрица E_k размера $2n \times 2k$ и матрица F_k размера $2n \times k$, имеющие следующий вид в записи по столбцам:

$$E_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p, q, Cq, \dots, C^{k-1}q]$$

$$F_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p].$$

Также вводятся вектор $\bar{\mu\nu}(\tau)$ длины $2k$, вектор $\bar{\mu}(\tau)$ длины k :

$$\bar{\mu\nu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T$$

$$\bar{\mu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T$$

и вспомогательный вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ длины $2k$.

Доказаны вспомогательные утверждения о свойствах введенных матриц C , E_k и F_k , при помощи которых доказываются следующие две теоремы о виде оптимальных граничных управлений:

Теорема 4. Для времени управления $T = ks$ при $k \geq 2n$ функции μ_m , определяющие оптимальное решение задачи граничного управления II, задаются соотношением

$$\bar{\mu}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau).$$

Теорема 5. Для времени управления $T = ks$ при $k > n$ функции μ_m и ν_m , определяющие оптимальное решение задачи граничного управления I, задаются соотношением

$$\bar{\mu\nu}(\tau) = \frac{1}{2} \lambda_1 (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k e - e) + E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau),$$

где константа λ_1 определяется из уравнения

$$\frac{1}{2} \lambda_1 s [((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e)] = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau.$$

При $k = n$ решение задачи управления I единственно, существует тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau = 0,$$

и определяется формулой

$$\bar{\mu\nu}(\tau) = E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau).$$

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю В. А. Ильину за постоянное внимание, поддержку в работе и несомненно полезные советы.

Автор благодарит Л. В. Крицкова за поддержку и помощь при подготовке диссертации.

Также автор выражает благодарность А. А. Кулешову за обсуждения рассматриваемых задач и интерес к полученным результатам.

Автор очень признателен Т. Н. Лихоманенко за полезные обсуждения, неугасающее внимание к работе на всех её этапах и неоценимую поддержку.

Классические постановки смешанных задач, описывающих продольные колебания стержня с присоединенными массами

В настоящей главе исследуются классические решения смешанных задач и вводится ряд понятий, необходимых для их записи в явном виде. Демонстрируется применение введенной терминологии на примере вспомогательной теоремы о существовании классического решения с ненулевой правой частью.

1.1. Формулировка классической смешанной задачи

Рассмотрим нагруженный стержень, состоящий из n участков, которые последовательно пронумеруем от 1 до n . Введем точки x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) так, чтобы i -й участок находился на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. В таких обозначениях x_0 и x_n — соответственно левый и правый концы стержня, а $x_1, \dots, x_{n-1}$ — точки стыка. Будем считать, что на i -м участке стержень имеет плотность ρ_i , модуль Юнга k_i и скорость распространения сигнала $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$. Время прохождения волны по i -му участку обозначим через $t_i = (x_i - x_{i-1})/a_i$.

В точках стыка участков расположим прикрепленные точечные грузы, чтобы в точке x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) находился груз массы $m_i \geq 0$. Множество точек стыка, где грузы имеют положительную массу, обозначим через X , а множество остальных точек стыка обозначим через Y .

Изучим колебания, возбуждаемые в изначально покоящемся стержне граничными управлениями с обоих концов на промежутке времени $[0, T]$. Классическое решение указанной задачи $u(x, t)$, заданное в замыкании прямоугольника $Q = (x_0, x_n) \times (0, T)$ должно удовлетворять разрывному волновому уравнению

$$u_{tt} = a_i^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{в прямоугольнике } Q_i = (x_{i-1}, x_i) \times (0, T), \quad i \in \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad u_t(x, 0) \equiv 0, \quad x \in [x_0, x_n] \quad (1.2)$$

а также следующим условиям сопряжения в точках стыка $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ при $t \in [0, T]$

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1.3)$$

$$m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t). \quad (1.4)$$

Условие (1.4) является вторым законом Ньютона, выписанным для точечного груза на стыке. В случае, когда груза нет, условие принимает форму

$$0 = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t)$$

и приобретает физический смысл непрерывности натяжения в точке стыка.

Наложим на левый конец одно из классических условий

- Управление смещением (I род)

$$u(x_0, t) = \mu(t); \quad (L_I)$$

- Управление силой (II род)

$$u_x(x_0, t) = \mu(t); \quad (L_{II})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \mu(t), \text{ где } h_1 > 0. \quad (L_{III})$$

Аналогично на правом конце полагаем наложенным одно из граничных условий

- Управление смещением (I род)

$$u(x_n, t) = \nu(t); \quad (R_I)$$

- Управление силой (II род)

$$-u_x(x_n, t) = \nu(t); \quad (R_{II})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$-u_x(x_n, t) - h_2 u(x_n, t) = \nu(t), \text{ где } h_2 > 0. \quad (R_{III})$$

Определение 1.1. Классическим решением задачи (1.1)–(1.4) с одним из граничных условий на левом конце (L_I)–(L_{III}) и одним из граничных условий (R_I)–(R_{III}) на правом назовем непрерывную в замыкании $\overline{Q}$ прямоугольника $Q = (x_0 < x < x_n) \times (0 < t < T)$ функцию $u(x, t)$, дважды непрерывно дифференцируемую в каждом из прямоугольников $Q_i = (x_{i-1} < x < x_i) \times (0 < t < T)$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и непрерывно дифференцируемую в замыкании $\overline{Q}_i$ каждого из них. Потребуем, чтобы в нагруженных точках стыка решение имело вторую производную по времени, т.е. $u(x_i, t) \in C^2[0 \leq t \leq T]$ при $x_i \in X$. Функция должна

удовлетворять волновому уравнению (1.1), однородным начальным условиям (1.2), условию сопряжения (1.4) в точках стыка, а также выбранной паре граничных условий.

Граничные управления μ , ν будем подразумевать принадлежащими классу $C^2[0 \leq t \leq T]$ при граничном условии первого рода и классу $C^1[0 \leq t \leq T]$ при граничных условиях второго и третьего рода. Функцию $f(x, t)$ в правой части уравнения (1.1), имеющую физический смысл плотности силы, полагаем непрерывной в $\bar{Q}$ и непрерывно-дифференцируемой в каждом из прямоугольников $\bar{Q}_i$.¹

Потребуем согласования граничных условий с однородными начальными данными. При граничном условии первого рода на левом конце управление должно удовлетворять условию

$$\mu(0) = \mu'(0) = 0, \mu''(0) = f(x_0, 0)$$

при граничном условии второго или третьего рода

$$\mu(0) = 0, \mu'(0) = 0.$$

Аналогично для правого конца от функции граничного управления потребуем выполнения

$$\nu(0) = \nu'(0) = 0, \nu''(0) = f(x_n, 0)$$

при условии первого рода, а при граничном условии второго или третьего рода:

$$\nu(0) = 0, \nu'(0) = 0.$$

1.2. Единственность решения

Теорема 1.1. *Смешанная начально-краевая задача (1.1)–(1.4) с одним из граничных условий на левом конце (L_I)–(L_{III}) и одним из граничных условий на правом (R_I)–(R_{III}) имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность решения однородной задачи, т.е. при $\mu(t) \equiv 0$, $\nu(t) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$. Рассмотрим энергию системы в момент времени t :

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [k_i u_x^2(x, t) + \rho_i u_t^2(x, t)] dx + \frac{1}{2} \sum_{x_i \in X} m_i u_t^2(x_i, t)$$

¹ Более тонкое требование состоит в непрерывности частной производной f_x .

Воспользуемся стандартными энергетическими соображениями [70, стр. 50]. Нетрудно видеть, что в начальный момент времени энергия равна нулю, поскольку $u_x(x, 0) \equiv 0$, $u_t(x, 0) \equiv 0$. Рассмотрим производную по времени от энергии

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [k_i u_x(x, t) u_{xt}(x, t) + \rho_i u_t(x, t) u_{tt}(x, t)] dx + \sum_{x_i \in X} m_i u_t(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-k_i u_{xx}(x, t) u_t(x, t) + \rho_i u_t(x, t) u_{tt}(x, t)] dx + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n k_i u_x u_t \Big|_{x=x_{i-1}+0}^{x_i-0} + \sum_{x_i \in X} m_i u_t(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_t(x, t) [\rho_i u_{tt}(x, t) - k_i u_{xx}(x, t)] dx + k_n u_x(x_n, t) u_t(x_n, t) - k_1 u_x(x_0, t) u_t(x_0, t) + \\
&\quad + \sum_{x_i \in X} m_i u_t(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) + u_t(x_i, t) [k_i u_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} u_x(x_i + 0, t)] = \\
&= k_n u_x(x_n, t) u_t(x_n, t) - k_1 u_x(x_0, t) u_t(x_0, t).
\end{aligned}$$

Проинтегрировав получившееся выражение, получим

$$E(t) - E(0) = \int_0^t [k_n u_x(x_n, \tau) u_t(x_n, \tau) - k_1 u_x(x_0, \tau) u_t(x_0, \tau)] d\tau.$$

Покажем, что оба слагаемых неположительны. При граничных условиях первого или второго рода это очевидно, поскольку при граничном условии первого рода на конце $u_t \equiv 0$, при граничном условии второго рода на конце стержня $u_x \equiv 0$. При условии третьего рода на левом конце

$$\begin{aligned}
\int_0^t -k_1 u_x(x_0, \tau) u_t(x_0, \tau) d\tau &= -k_1 h_1 \int_0^t u(x_0, \tau) u_t(x_0, \tau) d\tau = \\
&= -k_1 h_1 \frac{1}{2} u^2(x_0, \tau) \Big|_{\tau=0}^t = -k_1 h_1 \frac{1}{2} u^2(x_0, t) \leq 0,
\end{aligned}$$

аналогично на правом конце

$$\begin{aligned}
\int_0^t k_n u_x(x_n, \tau) u_t(x_n, \tau) d\tau &= -k_n h_2 \int_0^t u(x_n, \tau) u_t(x_n, \tau) d\tau = \\
&= -k_n h_2 \frac{1}{2} u^2(x_n, \tau) \Big|_{\tau=0}^t = -k_n h_2 \frac{1}{2} u^2(x_n, t) \leq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, можем заключить $E(t) \leq 0$, а в силу неотрицательности энергии $E(t) \equiv 0$. Нетрудно заключить, что $u_x(x, t) \equiv 0$, $u_t(x, t) \equiv 0$ в прямоугольниках $\bar{Q}_i$, $i \in 1, 2, \dots, n$. В силу того, что в начальный момент времени решение нулевое $u(x, 0) \equiv 0$, получаем $u(x, t) \equiv 0$. $\square$

1.3. Вспомогательные определения

Настоящий раздел играет вспомогательную роль: в нем введены определение метрического пространства V и операции на нём, а также доказаны некоторые их полезные свойства. Воспользуемся следующими определениями:

Определение 1.2. V — линейное пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, причем для любой функции $f(t)$ из V существует $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что функция $f(t)$ обращается в нуль при $t < t_0$.

Определение 1.3. V^n — линейное пространство n -мерных векторов с элементами из пространства V .

Введем на пространстве V **метрику** (запись $x = y$ подразумевает равенство функций как элементов пространства V)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} e^{-t_{inf}}, & t_{inf} = \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Отметим, что выражение определено для любых пар элементов x и y из пространства V , поскольку величина t_{inf} определена и конечна для любых не равных друг другу элементов V (для произвольных функций это, разумеется, не так). Симметричность, неотрицательность введенной метрики, а также выполнение аксиомы тождества

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

очевидны. Докажем неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in V$$

для введенной метрики. Рассмотрим функцию

$$t_{inf}(x, y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\}, \quad x, y \in V,$$

принимаящую в том числе значение плюс бесконечность в случае равенства функций x и y . Рассмотрим множество точек $\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\}$, в которых функции x и y не равны. Поскольку для любого вещественного t выполнено $x(t) \neq y(t) \Rightarrow (x(t) \neq z(t)) \vee (z(t) \neq y(t))$, то выполнено следующее множественное соотношение для произвольных $x, y, z \in V$

$$\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} \subset \{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq z(t)\} \cup \{t \in \mathbb{R} : z(t) \neq y(t)\},$$

из чего заключаем, что

$$\inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} \geq \min(\inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq z(t)\}, \inf\{t \in \mathbb{R} : z(t) \neq y(t)\}),$$

или, что то же самое,

$$t_{inf}(x, y) \geq \min(t_{inf}(x, z), t_{inf}(z, y)).$$

Поскольку функция e^{-x} монотонно убывает, то справедливо (здесь и далее считаем, что $e^{-\infty} = 0$)

$$e^{-t_{inf}(x, y)} \leq \max(e^{-t_{inf}(x, z)}, e^{-t_{inf}(z, y)}),$$

а это означает, что

$$\rho(x, y) \leq \max(\rho(x, z), \rho(z, y)) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, неравенство треугольника доказано, значит V — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, более того ультраметрическое, т.е. для любых трех его элементов выполнено более сильное условие

$$\rho(x, y) \leq \max(\rho(x, z), \rho(z, y)).$$

Утверждение 1.1. Пространство V полно относительно введенной на нем метрики.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Предъявим элемент пространства V , к которому сходится эта последовательность. Обозначим этот элемент x . Возьмем $\varepsilon = e^{-\hat{t}}$, тогда существует такое N , что при произвольных $m, n \geq N(\varepsilon)$ справедливо $\rho(x_m, x_n) \leq e^{-\hat{t}}$, а значит функции x_m и x_n совпадают на интервале $(-\infty, \hat{t})$.

Следовательно, начиная с номера N , все функции x_n попарно совпадают на полуоси $(-\infty, \hat{t})$, таким образом, поточечно последовательность функций x_n сходится на всей прямой $\mathbb{R}$. Положим x равным этому поточечному пределу

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t)$$

Покажем, что x принадлежит классу V . Поскольку при $n \geq N$ все функции x_n совпадают на полуоси $(-\infty, \hat{t})$, то x совпадает с любой из них на этой полуоси, а значит x на этой полуоси также непрерывна и также равна нулю при $t < t_0$ для некоторого t_0 . В силу произвольности $\hat{t}$ функция $x(t)$ непрерывна на всей вещественной оси и тем самым принадлежит классу V .

Теперь докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к x . Произвольное $\varepsilon > 0$ представим в виде $\varepsilon = e^{-\hat{t}}$. Как было установлено, при $n \geq N(\varepsilon)$ все x_n совпадают между собой на полуоси $(-\infty, \hat{t})$, а следовательно совпадают с x на этом же множестве. Из этого следует, что $\rho(x_n, x) \leq e^{-\hat{t}} = \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$, т.е. последовательность x_n действительно сходится к x . $\square$

Свойства метрики

1. Пространство V полно относительно введенной метрики.
2. $\rho(x, y) = \exp(-\inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\})$, при этом считаем, что $e^{-\infty} = 0$.
3. $\rho(x, y) \leq \max[\rho(x, z), \rho(z, y)]$.
4. $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$.

Свойство следует из свойства 2 и равенства следующих множеств

$$\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} = \{t \in \mathbb{R} : x(t) - y(t) \neq 0\}.$$

5. $\rho(x, y) \leq e^{-t_0} \Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \leq t_0$.

Свойство непосредственно следует из свойства 2.

6. Сходящаяся по метрике последовательность функций из пространства V на каждом ограниченном сверху множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, начиная с некоторого номера, совпадает с предельной функцией.
7. Сходящаяся по метрике последовательность функций из пространства V сходится к предельной функции поточечно на всей прямой.
8. $\rho(x + y, 0) \leq \max[\rho(x, 0), \rho(y, 0)]$

$$\rho(x + y, 0) \leq \max[\rho(x + y, x), \rho(x, 0)] = \max[\rho(y, 0), \rho(x, 0)].$$

9. Обобщение предыдущего свойства: $\rho(x_1 + x_2 + \dots + x_k, 0) \leq \max_{i \in \overline{1, k}} \rho(x_i, 0)$

$$\begin{aligned} \rho(x_1 + x_2 + \dots + x_k, 0) &\leq \max[\rho(x_k, 0), \rho(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}, 0)] \leq \\ &\leq \max[\rho(x_k, 0), \rho(x_{k-1}, 0), \rho(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-2}, 0)] \leq \dots \leq \max_{i \in \overline{1, k}} \rho(x_i, 0). \end{aligned}$$

10. Пусть $c \in \mathbb{R}$, тогда $\rho(cx, 0) \leq \rho(x, 0)$, а при $c \neq 0$ справедливо равенство $\rho(cx, 0) = \rho(x, 0)$.

Воспользуемся свойством 2 и вложением (которое переходит в равенство при $c \neq 0$):

$$\{t \in \mathbb{R} : cx(t) \neq 0\} \subset \{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq 0\}.$$

Определение 1.4. Введем метрику на пространстве V^n (x_j — компоненты вектора x , принадлежащие пространству V):

$$\rho_n(x, y) = \max_{j \in \overline{1, n}} \rho(x_j, y_j) \quad x, y \in V^n.$$

Утверждение 1.2. Пространство V^n полно относительно введенной метрики.

Доказательство. Схема в точности повторяет доказательство полноты пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\{x^i\}_{i=1}^{+\infty}$ — фундаментальная последовательность, $x^i \in V^n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, l \geq N \quad \rho_n(x^k, x^l) \leq \varepsilon.$$

Поскольку² $\rho(x_j^k, x_j^l) \leq \rho_n(x^k, x^l)$ при $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, l \geq N \quad \rho(x_j^k, x_j^l) \leq \rho_n(x^k, x^l) \leq \varepsilon \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, n,$$

что буквально является определением фундаментальности последовательности $\{x_j^i\}_{i=1}^{+\infty}$ при любом $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, имеем покомпонентный предел $x : x_j = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_j^i$. Докажем, что он является пределом относительно введенной метрики:

$$x_j = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_j^i \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \rho(x_j, x_j^i) = 0.$$

Взяв максимум по j , имеем

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_n(x, x^i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \max_{j \in \overline{1, n}} \rho(x_j, x_j^i) \leq \sum_{j=1}^n \lim_{i \rightarrow +\infty} \rho(x_j, x_j^i) = 0,$$

что и требовалось. □

Свойства метрики $\rho_n(\cdot, \cdot)$

1. Пространство V^n полно относительно введенной метрики.

2. $\rho_n(x, y) \leq \max[\rho_n(x, z), \rho_n(z, y)]$

$$\begin{aligned} \rho_n(x, y) &= \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(x_i, y_i) \leq \max_{i \in \overline{1, n}} \max[\rho(x_i, z_i), \rho(z_i, y_i)] = \\ &= \max \left[\max_{i \in \overline{1, n}} \rho(x_i, z_i), \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(z_i, y_i) \right] = \max[\rho_n(x, z), \rho_n(z, y)]. \end{aligned}$$

3. $\rho_n(x, y) = \rho_n(x - y, 0)$

$$\rho_n(x, y) = \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(x_i, y_i) = \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(x_i - y_i, 0) = \rho_n(x - y, 0).$$

² Под x_j^k подразумевается j -тая компонента x^k

$$4. \rho_n(x, y) \leq e^{-t_0} \Leftrightarrow x_i(t) = y_i(t) \quad \forall t \leq t_0 \quad \forall i \in \overline{1, n}$$

$$\rho_n(x, y) \leq e^{-t_0} \Leftrightarrow \rho(x_i, y_i) \leq e^{-t_0} \quad \forall i \in \overline{1, n} \Leftrightarrow x_i(t) = y_i(t) \quad \forall t \leq t_0 \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

5. Сходящаяся по метрике последовательность функций из пространства V^n на каждом ограниченном сверху множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, начиная с некоторого номера, совпадает с предельным элементом, т.е. $x_i^m(t) = x_i(t)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, $t \in \mathcal{D}$, $m \geq N$.

Следует из предыдущего свойства.

6. Сходящаяся по метрике последовательность функций из пространства V^n сходится к предельной функции поточечно на всей прямой.

$$7. \rho_n(x + y, 0) \leq \max[\rho_n(x, 0), \rho_n(y, 0)] \quad x, y \in V^n.$$

$$8. \rho_n(x^1 + x^2 + \dots + x^k, 0) \leq \max_{i \in \overline{1, k}} \rho_n(x^i, 0) \quad x^1, x^2, \dots, x^k \in V^n.$$

Последние два свойства доказываются в полной аналогии с одномерным случаем.

Утверждение 1.3 (критерий сходимости ряда). Ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} x^m$, составленный из элементов x^m пространства V^n , сходится по метрике $\rho_n(\cdot, \cdot)$ тогда и только тогда, когда общий член ряда стремится к нулю

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \rho_n(x^m, 0) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_l = \sum_{m=1}^l x^m$. Критерием сходимости ряда является фундаментальность последовательности его частичных сумм. Из фундаментальности S_l следует стремление общего члена к нулю

$$\rho_n(x^l, 0) = \rho_n(S_l - S_{l-1}, 0) = \rho_n(S_l, S_{l-1}) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow +\infty.$$

Обратное также верно

$$\rho_n(S_{l+p}, S_l) = \rho_n(S_{l+p} - S_l, 0) = \rho_n\left(\sum_{m=l+1}^{l+p} x^m, 0\right) = \max_{m \in \overline{l+1, l+p}} \rho_n(x^m, 0) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow +\infty,$$

а значит, сходимость ряда равносильна стремлению к нулю общего члена. $\square$

Замечание 1.1. Если при $m > N$ выполнено $\rho(x^m, 0) \leq e^{-\hat{t}}$, т.е. $x_i^m(t) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$, $t \leq \hat{t}$, то сумма ряда совпадает с частичной суммой S_N на промежутке $(-\infty, \hat{t}]$. Это позволяет ограничиться рассмотрением конечной суммы слагаемых, если нас интересуют значения суммы ряда на множестве $(-\infty, \hat{t}]$ для некоторого вещественного $\hat{t}$.

Введем следующие операции:

Определение 1.5 (умножение матрицы на вектор). Пусть вектор $f = [f_1 \dots f_n]^T \in V^n$, а матрица $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Вектор $g = [g_1 \dots g_m]^T \in V^m$, элементы которого определены как $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, назовем их произведением. Операцию будем записывать как $g = Af$. Договоримся, что вместо числа в некоторых клетках матрицы могут стоять операторы, действующие в пространстве V . При этом, если в ячейке вместо a_{ij} стоит оператор L_{ij} , то вместо $a_{ij} f_j$ в линейной комбинации должен стоять результат применения оператора $L_{ij} f_j$.

Утверждение 1.4. Введенная операция умножения действует из V^n в пространство V^m .

Доказательство. $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, при этом $a_{ij} f_j \in V$ вне зависимости от того, является a_{ij} оператором или коэффициентом. Сумма нескольких элементов V также принадлежит V , поэтому $g_i \in V$, а значит $g \in V^m$. $\square$

Определение 1.6 (оператор запаздывания). Введем оператор запаздывания P_τ ($\tau \in \mathbb{R}$), действующий на $f \in V$ следующим образом:

$$g = P_\tau f, \quad g(t) = f(t - \tau) \quad g \in V.$$

Более важны для нас будут операторы запаздывания, действующие на элементы пространств V^n и V^{2n} :

$$P \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ P_{t_2} f_2 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \end{bmatrix} \quad \tilde{P} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \\ P_{t_1} f_{n+1} \\ \vdots \\ P_{t_n} f_{2n} \end{bmatrix}.$$

В этой формуле n — количество участков в стержне, а t_i — время прохождения сигналом i -того участка. Именно такие конкретные операторы P и $\tilde{P}$ будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1.7. Пусть $\beta > 0$, $f \in V$, оператором эха назовем оператор E_β , строящий отраженную волну по пришедшей при граничном условии третьего рода и действующий следующим образом:

$$(E_\beta f)(t) = f(t) - 2\beta \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-\beta\tau} d\tau.$$

Эквивалентная форма действия этого оператора (звездочкой обозначена операция свертки, $\theta(t)$ — функция Хевисайда):

$$E_\beta f = f - 2\beta \theta(t) e^{-\beta t} * f.$$

Замечание 1.2. Рассмотрим предельные случаи $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow +\infty$, тогда имеется следующая равномерная по t на полуоси $(-\infty, \hat{t})$ при произвольном $\hat{t} \in \mathbb{R}$ сходимость

$$(E_\beta f)(t) \rightrightarrows f(t) \quad \beta \rightarrow 0,$$

$$(E_\beta f)(t) \rightrightarrows -f(t) \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

То есть в предельных случаях оператор либо отражает волну в фазе, либо в противофазе, что соответствует граничным условиям второго и первого рода соответственно.

Определение 1.8 (операторы преломления и отражения). Пусть i и j — номера соседних участков, m — масса точечного груза в соединяющем их стыке. Тогда операторы отражения $\hat{R}_{ij}$ и преломления $\hat{T}_{ij}$ действуют на $f \in V$ следующим образом:

$$\hat{T}_{ij} f = \begin{cases} \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}, & m > 0 \\ \frac{2z_i}{z_i+z_j} f, & m = 0 \end{cases}$$

$$\hat{R}_{ij} f = \hat{T}_{ij} f - f.$$

Коэффициенты z_i, z_j обозначают импедансы соответствующих участков:

$$z_i = a_i \rho_i = \sqrt{k_i \rho_i} = k_i / a_i.$$

Замечание 1.3. При нулевой массе m , находящейся на стыке, операторы действуют на функцию умножением на число: $\hat{T}_{ij}$ умножает функцию на $\frac{2z_i}{z_i+z_j}$, а $\hat{R}_{ij}$ умножает функцию на $\frac{z_i-z_j}{z_i+z_j}$. Эти коэффициенты являются коэффициентами преломления и отражения на границе двух сред.

Рассмотрим отдельно следующую свертку:

Утверждение 1.5. Свертка с функцией $\theta(t)e^{-\beta t}$, $\beta > 0$ (в дальнейшем для краткости будем называть её просто сверткой с экспонентой) не выводит из класса V

$$f \in V \Rightarrow \theta(t)e^{-\beta t} * f \in V,$$

увеличивает гладкость на единицу

$$f \in V \cap C^m(-\infty, T] \Rightarrow \theta(t)e^{-\beta t} * f \in V \cap C^{m+1}(-\infty, T] \quad n \geq 0, T \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$f \in V \cap W_2^n(-\infty, T] \Rightarrow \theta(t)e^{-\beta t} * f \in V \cap W_2^{n+1}(-\infty, T] \quad n \geq 0, T \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

и не увеличивает расстояние

$$\rho(\theta(t)e^{-\beta t} * f, \theta(t)e^{-\beta t} * g) \leq \rho(f, g) \quad \forall f, g \in V.$$

Доказательство. Пусть функция $f \in V$ обращается в ноль при $t \leq t_0$. Значение свертки в точке t :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta(t - \tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau$$

равно нулю при $t \leq t_0$, а значит $\rho(\theta(t)e^{-\beta t} * f, 0) \leq \rho(f, 0)$, из чего сразу получаем, что расстояние не увеличивается для любых $f, g \in V$

$$\rho(\theta(t)e^{-\beta t} * f, \theta(t)e^{-\beta t} * g) = \rho(\theta(t)e^{-\beta t} * (f - g), 0) \leq \rho(f - g, 0) = \rho(f, g).$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей формулой для производной свертки:

$$(\theta(t)e^{-\beta t} * f)' = f - \beta \theta(t)e^{-\beta t} * f. \quad (1.7)$$

Формула доказывается непосредственно

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta(t - \tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \right)' &= \left(\int_{t_0}^t f(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \right)' = \\ &= f(t) + \int_{t_0}^t f(\tau) \frac{d}{dt} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = f(t) - \beta \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Свойство (1.5) следует из того, что свертка в правой части (1.7) принадлежит тому же классу гладкости, что и f . Утверждение для классов Соболева (1.6) проверяется с использованием неравенства Гельдера, при помощи которого можно получить неравенство

$$\|\theta(t)e^{-\beta t} * f\|_{L_2(-\infty, T]} = \|\theta(t)e^{-\beta t} * f\|_{L_2[t_0, T]} \leq \text{const}(t_0, T) \|f\|_{L_2[t_0, T]} = \text{const}(t_0, T) \|f\|_{L_2(-\infty, T]},$$

которое приводит к оценке

$$\|\theta(t)e^{-\beta t} * f\|_{W_2^n(-\infty, T]} \leq \text{const}(t_0, T) \|f\|_{W_2^n(-\infty, T]},$$

показывающей, что свертка лежит в том же классе $W_2^n(-\infty, T]$, что и исходная функция. $\square$

Утверждение 1.6. Введенные операции $P_\tau, \hat{T}_{ij}, \hat{R}_{ij}, E_\beta$ не выводят функции из пространства V и не выводят из пространства $V \cap C^n(\mathbb{R})$, более того для произвольных $x, y \in V$

$$\rho(P_\tau x, P_\tau y) \leq e^{-\tau} \rho(x, y) \quad (1.8)$$

$$\rho(\hat{T}_{ij} x, \hat{T}_{ij} y) \leq \rho(x, y)$$

$$\rho(\hat{R}_{ij} x, \hat{R}_{ij} y) \leq \rho(x, y)$$

$$\rho(E_\beta x, E_\beta y) \leq \rho(x, y)$$

Доказательство. Принадлежность при $x \in V$ функций $\widehat{T}_{ij}x$, $\widehat{R}_{ij}x$, $E_\beta x$ пространству V следует из того, что свертка с экспонентой и взятие линейной комбинации не выводят из пространства V . Аналогично показывается, что эти операции не выводят функции из класса $V \cap C^n(\mathbb{R})$. Поскольку

$$\{t \in \mathbb{R} : P_\tau x(t) \neq P_\tau y(t)\} = \{t \in \mathbb{R} : x(t - \tau) \neq y(t - \tau)\} = \{t + \tau : x(t) \neq y(t)\},$$

то $\inf\{t \in \mathbb{R} : P_\tau x(t) \neq P_\tau y(t)\} = \tau + \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\}$, откуда получаем

$$\begin{aligned} \rho(P_\tau x, P_\tau y) &= \exp(-\inf\{t \in \mathbb{R} : P_\tau x(t) \neq P_\tau y(t)\}) = \\ &= e^{-\tau} \exp(-\inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\}) = e^{-\tau} \rho(x, y), \end{aligned}$$

что есть в точности (1.8), даже со знаком равенства. Для оператора преломления

$$\begin{aligned} \rho(\widehat{T}_{ij}x, \widehat{T}_{ij}y) &= \rho(\widehat{T}_{ij}(x - y), 0) = \\ &= \begin{cases} \rho\left(\frac{2z_i}{m}(x - y) * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}, 0\right) \leq \rho(x - y, 0), & m > 0 \\ \rho\left(\frac{2z_i}{z_i+z_j}(x - y), 0\right) = \rho(x - y, 0), & m = 0 \end{cases} \leq \rho(x, y). \end{aligned}$$

Это утверждение используем для доказательства аналогичного:

$$\begin{aligned} \rho(\widehat{R}_{ij}x, \widehat{R}_{ij}y) &= \rho(\widehat{R}_{ij}(x - y), 0) = \rho(\widehat{T}_{ij}(x - y) - (x - y), 0) \leq \\ &\leq \max\left[\rho(\widehat{T}_{ij}(x - y), 0), \rho(-(x - y), 0)\right] \leq \rho(x, y) \end{aligned}$$

Таким же образом доказывается утверждение для оператора эха E_β . □

Утверждение 1.7. Операторы E_β , $\widehat{R}_{ij}$ и $\widehat{T}_{ij}$ коммутируют с оператором запаздывания P_τ для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что применение свертки с экспонентой коммутирует со сдвигом:

$$P_\tau (\theta(t)e^{-\beta t} * f) = \theta(t)e^{-\beta t} * P_\tau f,$$

что является одним из основных свойств свертки [23, стр. 109]. Проверим утверждение, например, для оператора E_β :

$$P_\tau E_\beta f = P_\tau (f - 2\beta\theta(t)e^{-\beta t} * f) = P_\tau f - 2\beta\theta(t)e^{-\beta t} * P_\tau f = E_\beta P_\tau f.$$

□

Обозначим через t_{min} минимальное из времен прохождения сигнала по участку:

$$t_{min} = \min_{i \in \overline{1, n}} t_i.$$

Утверждение 1.8. Операторы сдвига P и $\tilde{P}$ являются сжимающими в соответствующих пространствах:

$$\begin{aligned}\rho_n(Px, Py) &\leq e^{-t_{\min}} \rho_n(x, y) \quad \forall x, y \in V^n \\ \rho_{2n}(\tilde{P}x, \tilde{P}y) &\leq e^{-t_{\min}} \rho_{2n}(x, y) \quad \forall x, y \in V^{2n}.\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое из равенств, второе доказывается по аналогии:

$$\begin{aligned}\rho_n(Px, Py) &= \max_{i \in \overline{1, n}} \rho((Px)_i, (Py)_i) = \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(P_{t_i}x_i, P_{t_i}y_i) = \\ &= \max_{i \in \overline{1, n}} e^{-t_i} \rho(x_i, y_i) \leq e^{-t_{\min}} \max_{i \in \overline{1, n}} \rho(x_i, y_i) = e^{-t_{\min}} \rho_n(x, y).\end{aligned}$$

□

Замечание 1.4. Пусть A — некоторое отображение, действующее в пространстве V . Если для любых двух элементов x, y этого пространства выполнено неравенство с использованием введенной метрики

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \rho(x, y),$$

то отображение A соблюдает принцип причинности: функция $A(x)$ на промежутке $(-\infty, \hat{t})$ зависит только от значений функции x на том же интервале.

Пример 1.1. Приведем примеры функций, лежащих и не лежащих в пространстве V (через $\theta(t)$ обозначена функция Хевисайда)

$$f_1(t) = \theta(t)t, f_2(t) = \theta(t)t^2, f_3(t) = \theta(t) \sin t, f_4(t) = \theta(t + \pi) \sin t \quad f_1, f_2, f_3, f_4 \in V,$$

$$f_5(t) = \theta(t), f_6(t) = 1, f_7(t) = e^t, f_8(t) = \theta(t) \cos(t) \quad f_5, f_6, f_7, f_8 \notin V,$$

а также следующих векторов из пространства V^n (обратим внимание на то, что функция пишется без аргумента, если рассматривается как элемент пространства V)

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 + f_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2f_1 + 7f_3 \\ 0 \\ f_3 - 5f_4 \end{bmatrix} \in V^3.$$

Продemonстрируем операцию умножения матрицы на вектор с использованием уже введенных функций

$$\begin{bmatrix} 2 & P_\tau & 0 \\ 0 & -1 & E_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_1 + P_\tau f_2 \\ -f_2 + E_\beta f_3 \end{bmatrix}.$$

Приведем также расстояния между этими функциями

$$\rho(f_1, f_2) = \rho(f_1, f_3) = \rho(f_2, f_3) = e^0 = 1$$

$$\rho(f_1, f_4) = \rho(f_2, f_4) = \rho(f_3, f_4) = e^\pi$$

$$\rho(P_\tau f_1, P_\tau f_2) = e^{-\tau} \quad \tau \in \mathbb{R}$$

$$\rho(P_\tau f_1, f_2) = \begin{cases} e^0 = 1 & \tau > 0 \\ e^{-\tau} & \tau \leq 0. \end{cases}$$

1.4. Существование классического решения для неоднородной правой части

Предъявим решение для одного частного случая смешанной начально-краевой задачи. Предварительно введем блочную матрицу C размера $2n \times 2n$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где A и B — блочно-диагональные матрицы размера $n \times n$. При **четном** числе участков n они будут иметь следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

где блок J_{ij} размера 2×2 составлен из операторов отражения и преломления:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{ij} & \hat{T}_{ji} \\ \hat{T}_{ij} & \hat{R}_{ji} \end{bmatrix}.$$

При **нечетном** числе участков n матрицы A и B определены иначе:

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Фигурирующие в обоих случаях операторы $\widehat{R}_{left}$ и $\widehat{R}_{right}$ — это операторы, формирующие волну, отраженную соответственно левым или правым концом, по пришедшей волне.

$$\widehat{R}_{left} f = \begin{cases} -f & \text{при условии (L}_I\text{)} \\ f & \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\ E_{a_1 h_1} f & \text{при условии (L}_{III}\text{)} \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\widehat{R}_{right} f = \begin{cases} -f & \text{при условии (R}_I\text{)} \\ f & \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\ E_{a_n h_2} f & \text{при условии (R}_{III}\text{)} \end{cases} \quad (1.13)$$

Теорема 1.2. Решение (1.1)–(1.4) с одним из граничных условий (L_I)–(L_{III}) на левом конце и одним из граничных условий (R_I)–(R_{III}) на правом при однородных граничных условиях

$$\mu(t) \equiv 0, \nu(t) \equiv 0$$

существует и представимо в виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} w_i(x, t) + U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \widetilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при нечетных } i \\ w_i(x, t) + \widetilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при четных } i. \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь $w_i(x, t) = G_i(x, t) * f_i(x, t)$, т.е. двумерная свертка двух функций. Под $f_i(x, t)$ подразумевается ограничение функции $f(x, t)$ на прямоугольник $\overline{Q}_i$:

$$f_i(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{при } (x, t) \in \overline{Q}_i \\ 0 & \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q}_i \end{cases},$$

а $G_i(x, t)$ — фундаментальное решение волнового уравнения [23, стр. 156]

$$G_i(x, t) = \frac{1}{2a_i} \theta(a_i t - |x|),$$

где через $\theta(t)$ обозначили функцию Хевисайда. В свою очередь, через $w_i(x, t)$ определяются функции $U_1, U_2 \dots U_n$ и $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2 \dots \widetilde{U}_n$:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \widetilde{U}_1 \\ \widetilde{U}_2 \\ \dots \\ \widetilde{U}_n \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\widetilde{P})^m C \begin{bmatrix} w_{1,+1} \\ w_{2,-1} \\ \dots \\ w_{n,(-1)^{n+1}} \\ w_{1,-1} \\ w_{2,+1} \\ \dots \\ w_{n,(-1)^n} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

где $w_{i,-1}$ и $w_{i,+1}$ — следы функции $w_i(x, t)$ на левом и правом концах i -го участка:

$$\begin{aligned} w_{i,-1}(t) &= w_i(x_{i-1}, t) & t \in \mathbb{R}, \\ w_{i,+1}(t) &= w_i(x_i, t) & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Потребуем³ от функции $f(x, t)$ непрерывной дифференцируемости в $\overline{Q}$ и принадлежности её носителя объединению незамкнутых прямоугольников $\bigcup_{i=1}^n Q_i$, благодаря этому все функции $f_i(x, t)$ будут непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}^2$.

Перед тем, как доказывать собственно теорему, докажем несколько технических лемм. Для краткости введем обозначение для оператора Даламбера

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Лемма 1.1. Функция $w_i(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, для неё выполнены равенства в начальный момент времени $w_i(x, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} w_i(x, 0) = 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и в прямоугольнике Q_i справедливо

$$\square_{a_i} w_i(x, t) = f(x, t). \quad (1.16)$$

Доказательство. Распишем свертку из определения функции $w_i(x, t)$:

$$w_i(x, t) = G_i(x, t) * f_i(x, t) = \frac{1}{2a_i} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{x-a_i(t-\tau)}^{x+a_i(t-\tau)} f_i(y, \tau) dy = \frac{1}{2a_i} \int_0^t d\tau \int_{x-a_i(t-\tau)}^{x+a_i(t-\tau)} f_i(y, \tau) dy.$$

Второе равенство выполнено, поскольку $f_i(y, \tau) = 0$ при $\tau < 0$. Функция $w_i(x, t)$ является решением задачи Коши для уравнения колебаний (1.16) на всей прямой с однородными начальными данными в момент $t = 0$ [70, стр. 64], из чего сразу следует принадлежность классу C^2 в полуплоскости $t > 0$ и классу C^1 в её замыкании, выполнение равенств в начальный момент времени и уравнения (1.16).

Носитель функции $f_i(y, \tau)$ лежит внутри прямоугольника Q_i , т.е. в окрестности границ Q_i функция зануляется. Поэтому $f_i(y, \tau) = 0$ при $\tau \leq t_0$ для некоторого положительного t_0 . Заключаем, что $w_i(x, t)$ зануляется в полуплоскости $t \leq t_0$. Поскольку $w_i(x, t)$ принадлежит классу C^2 в полуплоскости $t > 0$ и зануляется при $t \leq t_0$, то она дважды непрерывно дифференцируема во всей плоскости (x, t) . $\square$

³ Обратим внимание, что мы наложили дополнительные ограничения на функцию $f(x, t)$. С одной стороны, это упрощает выкладки, с другой стороны, в дальнейшем нам не потребуется более общий случай.

Лемма 1.2. При $t \in [0, T]$ выполнены следующие соотношения на производные на концах участка

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) w_i(x_{i-1}, t) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) w_i(x_i, t) &= 0.\end{aligned}$$

Доказательство. Возьмем частные производные полученного выражения для $w_i(x, t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} w_i(x, t) &= \frac{1}{2a_i} \int_{x-a_i(t-t)}^{x+a_i(t-t)} f_i(y, t) dy + \frac{1}{2} \int_0^t [f_i(x + a_i(t - \tau), \tau) + f_i(x - a_i(t - \tau), \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [f_i(x + a_i(t - \tau), \tau) + f_i(x - a_i(t - \tau), \tau)] d\tau \\ \frac{\partial}{\partial x} w_i(x, t) &= \frac{1}{2a_i} \int_0^t [f_i(x + a_i(t - \tau), \tau) - f_i(x - a_i(t - \tau), \tau)] d\tau.\end{aligned}$$

Сложим полученные равенства, предварительно умножив второе на a_i , и положим $x = x_i$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) w_i(x_i, t) = \int_0^t f_i(x_i + a_i(t - \tau), \tau) d\tau = 0.$$

Подынтегральное выражение равно нулю, поскольку функция $f_i(x, t)$ по определению равна нулю при $x > x_i$. Аналогичным образом, учитывая, что $f_i(x, t)$ равна нулю при $x < x_{i-1}$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) w_i(x_{i-1}, t) = \int_0^t f_i(x_{i-1} - a_i(t - \tau), \tau) d\tau = 0.$$

□

Лемма 1.3. Функции $w_{i,+1}(t)$, $w_{i,-1}(t)$ принадлежат классу $C^2(\mathbb{R}) \cap V$ и обращаются в нуль при $t \leq 0$.

Доказательство. Поскольку двумерная функция $w_i(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и обращается в нуль при $t < 0$, то и её следы дважды непрерывно дифференцируемы на прямой и равны нулю при $t \leq 0$. Равенство нулю при $t \leq 0$ можно записать в следующем виде

$$\rho(w_{i,+1}, 0) \leq 1 \quad \rho(w_{i,-1}, 0) \leq 1,$$

которым мы вскоре воспользуемся.

□

Лемма 1.4. Оператор умножения на матрицу C не увеличивает расстояние в пространстве V^{2n}

$$\rho_{2n}(Cx, Cy) \leq \rho_{2n}(x, y) \quad \forall x, y \in V^{2n}.$$

Если все компоненты вектора $x \in V^{2n}$ принадлежат классу $C^2(\mathbb{R}) \cap V$, то компоненты результата умножения матрицы C на вектор x также лежат в этом классе:

$$(Cx)_i \in C^2(\mathbb{R}) \cap V.$$

Доказательство. Поскольку каждый из элементов матрицы C (это либо число⁴, либо один из операторов $\hat{R}_{ij}, \hat{T}_{ij}, E_\beta$) не выводит функции из класса $C^2(\mathbb{R}) \cap V$, то при умножении вектора, все компоненты которого лежат в указанном классе, на матрицу C мы получим вектор, все компоненты которого также лежат в классе $C^2(\mathbb{R}) \cap V$. Покажем, что расстояние не увеличивается

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(Cx, Cy) &= \rho_{2n}(C(x - y), 0) = \max_{i \in \overline{1, 2n}} \rho((C(x - y))_i, 0) = \\ &= \max_{i \in \overline{1, 2n}} \rho\left(\sum_{j=1}^{2n} c_{ij}(x - y)_j, 0\right) \leq \max_{i \in \overline{1, 2n}} \max_{j \in \overline{1, 2n}} \rho(c_{ij}(x - y)_j, 0). \end{aligned}$$

Поскольку c_{ij} либо вещественный коэффициент, либо один из операторов $\hat{R}_{ij}, \hat{T}_{ij}, E_\beta$, то

$$\rho(c_{ij}(x - y)_j, 0) \leq \rho((x - y)_j, 0)$$

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(Cx, Cy) &\leq \max_{i \in \overline{1, 2n}} \max_{j \in \overline{1, 2n}} \rho(c_{ij}(x - y)_j, 0) \leq \max_{i \in \overline{1, 2n}} \max_{j \in \overline{1, 2n}} \rho((x - y)_j, 0) = \\ &= \max_{j \in \overline{1, 2n}} \rho((x - y)_j, 0) = \rho_{2n}(x, y). \end{aligned}$$

□

Лемма 1.5. Ряд (1.15) сходится в пространстве V^{2n} , определяемые им функции $U_i, \tilde{U}_i$ лежат в классе $C^2(\mathbb{R}) \cap V$, и более того, обращаются в нуль при $t \leq 0$.

Доказательство. С использованием леммы 1.4 по индукции мы получаем, что каждое слагаемое в (1.15) является вектором, все компоненты которого лежат в классе $C^2(\mathbb{R}) \cap V$.

Покажем, что оператор $C\tilde{P}$, действующий в пространстве V^{2n} , сжимающий:

$$\rho_{2n}(C\tilde{P}x, C\tilde{P}y) \leq \rho_{2n}(\tilde{P}x, \tilde{P}y) \leq e^{-t_{\min}} \rho_{2n}(x, y).$$

⁴ При граничных условиях первого и второго рода операторы $\hat{R}_{left}$ и $\hat{R}_{right}$ действуют на функцию умножением на число $+1$ или -1 . Удобно в таком случае считать, что в матрице стоит не оператор, а соответствующее число, чем мы сейчас и воспользовались.

Покажем, что общий член ряда стремится к нулю:

$$\rho_{2n}((C\tilde{P})^m Cw, 0) = \rho_{2n}((C\tilde{P})^m Cw, (C\tilde{P})^m 0) \leq e^{-mt_{min}} \rho_{2n}(Cw, 0) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty,$$

здесь введено обозначение w для вектора

$$w = (w_{1,+1}, w_{2,-1}, \dots, w_{n,(-1)^{n+1}}, w_{1,-1}, w_{2,+1}, \dots, w_{n,(-1)^n})^T$$

в правой части (1.15). Следовательно по критерию сходимости (утверждение 1.3) ряд сходится.

Убедимся теперь в том, что функции $U_i, \tilde{U}_i$, определяемые при помощи ряда (1.15), лежат в $C^2(\mathbb{R}) \cap V$. Сходимость ряда в пространстве V^{2n} означает согласно замечанию (1.1), что при произвольном $\hat{t} \in \mathbb{R}$ на промежутке $(-\infty, \hat{t})$ сумма ряда равна некоторой частичной сумме S_l ряда (1.15)

$$S_l = \sum_{m=0}^l (C\tilde{P})^m Cw.$$

Поскольку каждое слагаемое в S_l представляет собой вектор, функции которого принадлежат классу $C^2(-\infty, \hat{t})$, то и их сумма принадлежит этому классу. В силу произвольности $\hat{t}$ заключаем, что $U_i, \tilde{U}_i \in C^2(\mathbb{R}) \cap V$.

Докажем, что $U_i, \tilde{U}_i$ обращаются в нуль при $t \leq 0$, или, что то же самое,

$$\rho_{2n} \left([U_1, U_2, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n]^T, 0 \right) \leq e^0 = 1.$$

Рассмотрим следующее расстояние

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(S_l, 0) &= \rho_{2n} \left(\sum_{m=0}^l (C\tilde{P})^m Cw, 0 \right) \leq \max_{m \in \{0, \dots, l\}} \rho_{2n}((C\tilde{P})^m Cw, 0) \leq \\ &\leq \max_{m \in \{0, \dots, l\}} e^{-mt_{min}} \rho_{2n}(Cw, 0) \leq \rho_{2n}(Cw, 0) \leq \rho_{2n}(w, 0). \end{aligned}$$

Устремляя $l \rightarrow +\infty$, получаем, что

$$\rho_{2n} \left([U_1, U_2, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n]^T, 0 \right) \leq \rho_{2n}(w, 0) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max [\rho(w_{i,+1}, 0), \rho(w_{i,-1}, 0)] \leq 1.$$

Последнее неравенство следует из того, что функции $w_{i,+1}(t), w_{i,-1}(t)$ равны нулю при $t \leq 0$. Согласно свойству метрики $\rho_{2n}(\cdot, \cdot)$, это означает, что все функции $U_i, \tilde{U}_i$ равны нулю при $t \leq 0$. $\square$

Лемма 1.6. В прямоугольнике Q_i выполнено уравнение $\square_{a_i} u(x, t) = f(x, t)$.

Доказательство. Рассмотрим случай нечетного i , случай четного рассматривается аналогично. Тогда в прямоугольнике Q_i справедливо

$$u(x, t) = w_i(x, t) + U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}).$$

Бегущие волны $U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i})$ и $\tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i})$, профили которых задаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $U_i(t)$ и $\tilde{U}_i(t)$, являются решениями однородного волнового уравнения $\square_{a_i} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) = \square_{a_i} \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) = 0$, что проверяется непосредственным дифференцированием. Следовательно, используя лемму 1.1 получаем, что $u(x, t)$ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (1.1)

$$\square_{a_i} u(x, t) = \square_{a_i} w_i(x, t) + \square_{a_i} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \square_{a_i} \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) = f(x, t).$$

□

Лемма 1.7. *Выполнены однородные начальные условия $u(x, 0) \equiv 0$, $u_t(x, 0) \equiv 0$.*

Доказательство. Из вида решения следует, что

$$u(x, 0) = \begin{cases} w_i(x, 0) + U_i(0 - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(0 + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при нечетных } i \\ w_i(x, 0) + \tilde{U}_i(0 - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(0 + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при четных } i. \end{cases}$$

Обратим внимание, что аргументы у U_i и $\tilde{U}_i$ в этом выражении всегда неположительны. Поскольку $U_i(t) = 0$, $\tilde{U}_i(t) = 0$ при $t \leq 0$ (лемма 1.5), $w_i(x, 0) = 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (лемма 1.1), то $u(x, 0) \equiv 0$.

Аналогично запишем производную по времени исходя из вида решения

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w_i(x, 0) + U'_i(0 - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}'_i(0 + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при нечетных } i \\ \frac{\partial}{\partial t} w_i(x, 0) + \tilde{U}'_i(0 - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U'_i(0 + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } \overline{Q}_i, \text{ при четных } i. \end{cases}$$

Поскольку $U'_i(t) = 0$, $\tilde{U}'_i(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\frac{\partial}{\partial t} w_i(x, 0) = 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (лемма 1.1), то $u_t(x, 0) \equiv 0$. □

Получим соотношения на функции $U_i, \tilde{U}_i$, выделив из ряда (1.15) первое слагаемое:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m Cw = Cw + C\tilde{P} \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m Cw = C \begin{bmatrix} w_{1,+1} \\ w_{2,-1} \\ \dots \\ w_{n,(-1)^{n+1}} \\ w_{1,-1} \\ w_{2,+1} \\ \dots \\ w_{n,(-1)^n} \end{bmatrix} + C\tilde{P} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Из полученного равенства, а также из блочного вида (1.9) матрицы C следует, что

$$U_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} \left(w_{j,(-1)^j} + P_{t_j} \tilde{U}_j \right),$$

$$\tilde{U}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left(w_{j,(-1)^{j+1}} + P_{t_j} U_j \right).$$

Распишем эти равенства с учетом вида матриц A и B :

$$\begin{aligned} U_1 &= \hat{R}_{left} \left(P_{t_1} \tilde{U}_1 + w_{1,-1} \right) \\ U_i &= \hat{R}_{i,i+1} \left(P_{t_i} \tilde{U}_i + w_{i,+1} \right) + \hat{T}_{i+1,i} \left(P_{t_{i+1}} \tilde{U}_{i+1} + w_{i+1,-1} \right) \quad \text{при четных } i \in \overline{2, n-1} \\ U_i &= \hat{R}_{i,i-1} \left(P_{t_i} \tilde{U}_i + w_{i,-1} \right) + \hat{T}_{i-1,i} \left(P_{t_{i-1}} \tilde{U}_{i-1} + w_{i-1,+1} \right) \quad \text{при нечетных } i \in \overline{2, n} \end{aligned}$$

$$\tilde{U}_i = \hat{R}_{i,i+1} (P_{t_i} U_i + w_{i,+1}) + \hat{T}_{i+1,i} (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + w_{i+1,-1}) \quad \text{при нечетных } i \in \overline{1, n-1} \quad (1.18)$$

$$\tilde{U}_i = \hat{R}_{i,i-1} (P_{t_i} U_i + w_{i,-1}) + \hat{T}_{i-1,i} (P_{t_{i-1}} U_{i-1} + w_{i-1,+1}) \quad \text{при четных } i \in \overline{1, n} \quad (1.19)$$

При четном числе участков n также выполнено условие

$$U_n = \hat{R}_{right} \left(P_{t_n} \tilde{U}_n + w_{n,+1} \right),$$

а при нечетном

$$\tilde{U}_n = \hat{R}_{right} (P_{t_n} U_n + w_{n,+1}).$$

Лемма 1.8. Функция $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q}$.

Доказательство. Непрерывность решения внутри каждого из замкнутых прямоугольников $\overline{Q}_i$ следует непосредственно из непрерывности функций $U_i(t), \tilde{U}_i(t), w_i(x, t)$. Чтобы показать непрерывность решения в $\overline{Q}$, необходимо показать, что в каждой точке стыка x_i решение

непрерывно. Для этого необходимо показать, что представления для решения в прямоугольниках Q_i и Q_{i+1} (1.14) совпадают при $x = x_i$:

$$\begin{aligned} w_i(x_i, t) + U_i\left(t - \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}\right) + \tilde{U}_i\left(t + \frac{x_i - x_i}{a_i}\right) &= \\ &= w_{i+1}(x_i, t) + \tilde{U}_{i+1}\left(t - \frac{x_i - x_i}{a_{i+1}}\right) + U_{i+1}\left(t + \frac{x_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right) \quad \text{при нечетных } i, \\ \\ w_i(x_i, t) + \tilde{U}_i\left(t - \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}\right) + U_i\left(t + \frac{x_i - x_i}{a_i}\right) &= \\ &= w_{i+1}(x_i, t) + U_{i+1}\left(t - \frac{x_i - x_i}{a_{i+1}}\right) + \tilde{U}_{i+1}\left(t + \frac{x_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right) \quad \text{при четных } i. \end{aligned} \quad (1.20)$$

(одновременно тем самым мы покажем непротиворечивость представления (1.14), в котором значения функции $u(x, t)$ в точках стыка заданы двумя разными формулами). Рассмотрим более подробно случай нечетного i . Необходимо доказать следующее равенство:

$$\begin{aligned} w_i(x_i, t) + U_i\left(t - \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}\right) + \tilde{U}_i\left(t + \frac{x_i - x_i}{a_i}\right) &= \\ &= w_{i+1}(x_i, t) + \tilde{U}_{i+1}\left(t - \frac{x_i - x_i}{a_{i+1}}\right) + U_{i+1}\left(t + \frac{x_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right). \end{aligned}$$

Упростим выражение и воспользуемся введенными функциями $w_{i,+1}$ и $w_{i,-1}$.

$$\begin{aligned} w_i(x_i, t) + U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) &= w_{i+1}(x_i, t) + \tilde{U}_{i+1}(t) + U_{i+1}(t - t_{i+1}) \\ w_{i,+1}(t) + U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) &= w_{i+1,-1}(t) + \tilde{U}_{i+1}(t) + U_{i+1}(t - t_{i+1}). \end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем с использованием оператора запаздывания (из предыдущих лемм следует, что функции U_i , $\tilde{U}_i$, $w_{i,+1}$ и $w_{i,-1}$ принадлежат классу V , что обосновывает следующую запись равенства)

$$\begin{aligned} w_{i,+1} + P_{t_i}U_i + \tilde{U}_i &= w_{i+1,-1} + \tilde{U}_{i+1} + P_{t_{i+1}}U_{i+1} \\ \tilde{U}_i - \tilde{U}_{i+1} &= w_{i+1,-1} - w_{i,+1} + P_{t_{i+1}}U_{i+1} - P_{t_i}U_i. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями (1.18)–(1.19), которые дают

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= \hat{R}_{i,i+1}(P_{t_i}U_i + w_{i,+1}) + \hat{T}_{i+1,i}(P_{t_{i+1}}U_{i+1} + w_{i+1,-1}) \\ \tilde{U}_{i+1} &= \hat{R}_{i+1,i}(P_{t_{i+1}}U_{i+1} + w_{i+1,-1}) + \hat{T}_{i,i+1}(P_{t_i}U_i + w_{i,+1}). \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_{i+1} = \left[\hat{R}_{i,i+1} - \hat{T}_{i,i+1} \right] (P_{t_i}U_i + w_{i,+1}) - \left[\hat{R}_{i+1,i} - \hat{T}_{i+1,i} \right] (P_{t_{i+1}}U_{i+1} + w_{i+1,-1}),$$

принимая во внимание равенство

$$\widehat{R}_{ij} f - \widehat{T}_{ij} f = -f,$$

следующее из определения оператора отражения, получаем желаемое равенство

$$\widetilde{U}_i - \widetilde{U}_{i+1} = (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + w_{i+1,-1}) - (P_{t_i} U_i + w_{i,+1}),$$

тем самым доказав непрерывность в стыке x_i при нечетных i . Аналогичным образом доказывается для четных i равенство (1.20). $\square$

Лемма 1.9. *Функция $u(x, t)$ удовлетворяет выбранной паре граничных условий.*

Доказательство. Докажем выполнение левого граничного условия. Как было установлено,

$$U_1 = \widehat{R}_{left} (P_{t_1} \widetilde{U}_1 + w_{1,-1}). \quad (1.21)$$

Как именно действует оператор $\widehat{R}_{left}$ зависит от того, какое граничное условие было наложено на левом конце стержня:

- При условии первого рода $\widehat{R}_{left} = -I$ (где I — тождественный оператор) и (1.21) принимает следующий вид:

$$U_1 + w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1 = 0.$$

Подставив вид решения (1.14) в граничное условие (L₁), получаем то же самое выражение:

$$\begin{aligned} 0 = u(x_0, t) &= w_1(x_0, t) + U_1(t - \frac{x_0 - x_0}{a_1}) + \widetilde{U}_1(t + \frac{x_0 - x_1}{a_1}) = \\ &= w_{1,-1}(t) + U_1(t) + \widetilde{U}_1(t - t_1), \end{aligned}$$

т.е. граничное условие соблюдено.

- При условии второго рода $\widehat{R}_{left} = I$ и (1.21) принимает следующий вид:

$$U_1 = w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1. \quad (1.22)$$

Граничное условие на левом конце имеет вид (воспользуемся леммой 1.2 о соотношении производных функции $w_i(x, t)$):

$$\begin{aligned} 0 = u_x(x_0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} w_1(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U_1'(t - \frac{x_0 - x_0}{a_1}) + \frac{1}{a_1} \widetilde{U}_1'(t + \frac{x_0 - x_1}{a_1}) = \\ &= \frac{1}{a_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(x_0, t) - U_1'(t) + \widetilde{U}_1'(t - t_1) \right) = \frac{1}{a_1} \left(w'_{1,-1}(t) - U_1'(t) + \widetilde{U}_1'(t - t_1) \right). \end{aligned}$$

Продифференцировав (1.22) по времени, убеждаемся, что решение удовлетворяет граничному условию.

- При условии третьего рода $\widehat{R}_{left} = E_{a_1 h_1}$. Равенство (1.21) приобретает форму

$$U_1 = E_{a_1 h_1} \left(w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1 \right). \quad (1.23)$$

Распишем граничное условие на левом конце:

$$\begin{aligned} 0 = u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} w_1(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U'_1 \left(t - \frac{x_0 - x_0}{a_1} \right) + \\ &+ \frac{1}{a_1} \widetilde{U}'_1 \left(t + \frac{x_0 - x_1}{a_1} \right) - h_1 \left(w_1(x_0, t) + U_1 \left(t - \frac{x_0 - x_0}{a_1} \right) + \widetilde{U}_1 \left(t + \frac{x_0 - x_1}{a_1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a_1} \left(w'_{1,-1}(t) - U'_1(t) + \widetilde{U}'_1(t - t_1) \right) - h_1 \left(w_{1,-1}(t) + U_1(t) + \widetilde{U}_1(t - t_1) \right). \end{aligned}$$

Иными словами, необходимо убедиться в выполнении следующего равенства

$$\begin{aligned} U'_1(t) + a_1 h_1 U_1(t) &= \left(w'_{1,-1}(t) + \widetilde{U}'_1(t - t_1) \right) - a_1 h_1 \left(w_{1,-1}(t) + \widetilde{U}_1(t - t_1) \right) \\ U'_1 + a_1 h_1 U_1 &= \left(w'_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}'_1 \right) - a_1 h_1 \left(w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1 \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Напомним, что действие оператора эха определено в терминах свертки следующим образом:

$$E_\beta f = f - 2\beta\theta(t)e^{-\beta t} * f.$$

Вычислим производную $E_\beta f$

$$(E_\beta f)' = f' - 2\beta f + 2\beta^2\theta(t)e^{-\beta t} * f = f' - \beta f - \beta E_\beta f$$

$$(E_{a_1 h_1} f)' = f' - a_1 h_1 f - a_1 h_1 E_{a_1 h_1} f.$$

Таким образом, имеем из (1.23) по выведенному равенству для производной:

$$U'_1 = w'_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}'_1 - a_1 h_1 \left(w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1 \right) - a_1 h_1 U_1,$$

перекинув одно слагаемое в левую часть, получим желаемое равенство

$$U'_1 + a_1 h_1 U_1 = \left(w'_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}'_1 \right) - a_1 h_1 \left(w_{1,-1} + P_{t_1} \widetilde{U}_1 \right),$$

а значит, граничное условие снова соблюдено.

Аналогичным образом проводится проверка на правом конце. □

Лемма 1.10. *Существует вторая производная по времени в точках стыка с массой:*

$$u(x_i, t) \in C^2(0 \leq t \leq T) \quad \forall x_i \in X.$$

Доказательство. Из вида решения следует, что

$$u(x_i, t) = \begin{cases} w_i(x_i, t) + U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) & \text{при нечетных } i \\ w_i(x_i, t) + \tilde{U}_i(t - t_i) + U_i(t) & \text{при четных } i. \end{cases}$$

Поскольку функции $U_i, \tilde{U}_i \in C^2(\mathbb{R})$ (лемма 1.5), $w_i(x_i, t) = w_{i+1}(t) \in C^2(\mathbb{R})$ (лемма 1.3), то функция $u(x_i, t)$ также дважды непрерывно дифференцируема по времени. $\square$

Лемма 1.11. В точках стыка x_i выполнено условие сопряжения (1.4).

Доказательство. Снова рассмотрим более подробно случай нечетного i , случай четного i рассматривается аналогично. Подставим вид решения в (1.4) и воспользуемся доказанными в лемме (1.2) равенствами на производные функции $w_i(x, t)$:

$$\begin{aligned} m_i \left(\tilde{U}_i''(t) + U_i''(t - t_i) + w_{i+1}''(t) \right) &= m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t) = \\ &= z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1}'(t) + U_{i+1}'(t - t_{i+1}) + w_{i+1,-1}'(t) \right) - z_i \left(\tilde{U}_i'(t) - U_i'(t - t_i) - w_{i,+1}'(t) \right). \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим случай $m_i = 0$, тогда выполнение условия сопряжения равносильно выполнению следующего равенства:

$$z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1}'(t) + U_{i+1}'(t - t_{i+1}) + w_{i+1,-1}'(t) \right) - z_i \left(\tilde{U}_i'(t) - U_i'(t - t_i) - w_{i,+1}'(t) \right) = 0,$$

которое перепишем с использованием оператора запаздывания

$$z_{i+1} \tilde{U}_{i+1}' + z_i \tilde{U}_i' = z_{i+1} (P_{t_{i+1}} U_{i+1}' + w_{i+1,-1}') + z_i (P_{t_i} U_i' + w_{i,+1}'(t)). \quad (1.25)$$

Как было установлено при доказательстве непрерывности функции $u(x, t)$,

$$\tilde{U}_i = \hat{R}_{i,i+1} (P_{t_i} U_i + w_{i,+1}) + \hat{T}_{i+1,i} (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + w_{i+1,-1}) \quad (1.26)$$

$$\tilde{U}_{i+1} = \hat{R}_{i+1,i} (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + w_{i+1,-1}) + \hat{T}_{i,i+1} (P_{t_i} U_i + w_{i,+1}).$$

Рассмотрим выражение $z_{i+1} \tilde{U}_{i+1} + z_i \tilde{U}_i$. Нетрудно видеть, что операторы $(z_i \hat{R}_{i,i+1} + z_{i+1} \hat{T}_{i,i+1})$ и $(z_i \hat{T}_{i+1,i} + z_{i+1} \hat{R}_{i+1,i})$ действует на функцию умножением на число, поскольку и оператор отражения, и оператор преломления также действуют умножением на число, т.е.

$$\begin{aligned} (z_i \hat{R}_{i,i+1} + z_{i+1} \hat{T}_{i,i+1}) f &= \left(z_i \frac{z_i - z_{i+1}}{z_i + z_{i+1}} + z_{i+1} \frac{2z_i}{z_i + z_{i+1}} \right) f = \frac{z_i z_{i+1} + z_i^2}{z_i + z_{i+1}} f = z_i f \\ (z_i \hat{T}_{i+1,i} + z_{i+1} \hat{R}_{i+1,i}) f &= \left(z_i \frac{2z_{i+1}}{z_i + z_{i+1}} + z_{i+1} \frac{z_{i+1} - z_i}{z_i + z_{i+1}} \right) f = \frac{z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2}{z_i + z_{i+1}} f = z_{i+1} f. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем равенство

$$z_{i+1}\tilde{U}_{i+1} + z_i\tilde{U}_i = z_{i+1}(P_{t_{i+1}}U_{i+1} + w_{i+1,-1}) + z_i(P_{t_i}U_i + w_{i,+1}),$$

продифференцировав которое придем к (1.25), т.е. условие сопряжения выполнено.

Теперь сосредоточим свое внимание на случае, когда на стыке находится ненулевая масса $m_i > 0$. Снова подробно рассмотрим случай нечетного i , а случай четного рассматривается по аналогии. Необходимо доказать выполнение следующего равенства, эквивалентного условию сопряжения

$$\begin{aligned} m_i \left(\tilde{U}_i''(t) + U_i''(t - t_i) + w_{i,+1}''(t) \right) &= \\ &= z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1}'(t) + U_{i+1}'(t - t_{i+1}) + w_{i+1,-1}'(t) \right) - z_i \left(\tilde{U}_i'(t) - U_i'(t - t_i) - w_{i,+1}'(t) \right) \\ m_i \left(\tilde{U}_i'' + P_{t_i}U_i'' + w_{i,+1}'' \right) &= \\ &= z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1}' + P_{t_{i+1}}U_{i+1}' + w_{i+1,-1}' \right) - z_i \left(\tilde{U}_i' - P_{t_i}U_i' - w_{i,+1}' \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

При доказательстве непрерывности функции $u(x, t)$ было доказано равенство

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_{i+1} = w_{i+1,-1} - w_{i,+1} + P_{t_{i+1}}U_{i+1} - P_{t_i}U_i,$$

выразив из которого $\tilde{U}_{i+1}$ и подставив в (1.27), получим

$$\begin{aligned} m_i \left(\tilde{U}_i'' + P_{t_i}U_i'' + w_{i,+1}'' \right) &= \\ &= z_{i+1} \left(\left[-\tilde{U}_i' + w_{i+1,-1}' - w_{i,+1}' + P_{t_{i+1}}U_{i+1}' - P_{t_i}U_i' \right] + P_{t_{i+1}}U_{i+1}' + w_{i+1,-1}' \right) - \\ &\quad - z_i \left(\tilde{U}_i' - P_{t_i}U_i' - w_{i,+1}' \right) = \\ &= z_{i+1} \left(-\tilde{U}_i' + 2w_{i+1,-1}' - w_{i,+1}' + 2P_{t_{i+1}}U_{i+1}' - P_{t_i}U_i' \right) - z_i \left(\tilde{U}_i' - P_{t_i}U_i' - w_{i,+1}' \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Воспользуемся равенством (1.26), где функции, стоящие в скобках в правой части обозначим через g_i и g_{i+1} :

$$\tilde{U}_i = \hat{R}_{i,i+1}g_i + \hat{T}_{i+1,i}g_{i+1}.$$

Напомним, что действие оператора преломления было определено следующим образом ($m > 0$ — масса, расположенная в стыке):

$$\hat{T}_{ij}f = \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}.$$

Соответственно для оператора отражения:

$$\hat{R}_{ij}f = -f + \hat{T}_{ij}f = -f + \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}.$$

Пользуясь формулой для производной свертки, установим

$$\left(\widehat{T}_{ij}f\right)' = \frac{2z_i}{m}f - \frac{z_i + z_j}{m}\frac{2z_i}{m}f * \theta(t)e^{-(z_i+z_j)t/m} = \frac{2z_i}{m}f - \frac{z_i + z_j}{m}\widehat{T}_{ij}f \quad (1.29)$$

$$\left(\widehat{R}_{ij}f\right)' = -f' + \left(\widehat{T}_{ij}f\right)' = \frac{2z_i}{m}f - \frac{z_i + z_j}{m}\widehat{T}_{ij}f - f' = \frac{z_i - z_j}{m}f - \frac{z_i + z_j}{m}\widehat{R}_{ij}f - f'. \quad (1.30)$$

Вычислим производную $\widetilde{U}'_i$ при помощи полученных формул:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}'_i &= \left(\widehat{R}_{i,i+1}g_i\right)' + \left(\widehat{T}_{i+1,i}g_{i+1}\right)' = \\ &= \frac{z_i - z_{i+1}}{m_i}g_i - \frac{z_i + z_{i+1}}{m_i}\widehat{R}_{i,i+1}g_i - g'_i + \frac{2z_{i+1}}{m_i}g_{i+1} - \frac{z_i + z_{i+1}}{m_i}\widehat{T}_{i+1,i}g_{i+1} = \\ &= \frac{z_i - z_{i+1}}{m_i}g_i - \frac{z_i + z_{i+1}}{m_i}\widetilde{U}_i - g'_i + \frac{2z_{i+1}}{m_i}g_{i+1}. \end{aligned}$$

Умножив обе части на m_i и перебросив слагаемое, получим

$$\begin{aligned} m_i\left(\widetilde{U}'_i + g'_i\right) &= (z_i - z_{i+1})g_i - (z_i + z_{i+1})\widetilde{U}_i + 2z_{i+1}g_{i+1} = \\ &= z_{i+1}\left(2g_{i+1} - g_i - \widetilde{U}_i\right) - z_i(\widetilde{U}_i - g_i). \end{aligned}$$

Полученное выражение продифференцируем

$$m_i\left(\widetilde{U}''_i + g''_i\right) = z_{i+1}\left(2g'_{i+1} - g'_i - \widetilde{U}'_i\right) - z_i(\widetilde{U}'_i - g'_i),$$

что с учетом принятых обозначений g_i, g_{i+1} в точности совпадает с (1.28), а значит условие сопряжения (1.27) выполнено, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы. Принадлежность решения $u(x, t)$ классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i следует из принадлежности функций w_i классу $C^2(\mathbb{R}^2)$ (лемма 1.1) и принадлежности функций $U_i, \widetilde{U}_i$ классу $C^2(\mathbb{R})$ (лемма 1.5). Непрерывность решения уже была нами доказана (лемма 1.8), наличие второй производной по времени в нагруженных точках стыка следует из леммы 1.10. Также было проверено, что выполняются волновое уравнение (лемма 1.6), начальные условия (лемма 1.7), условия сопряжения (лемма 1.11) и выполнение граничных условий (лемма 1.9). Таким образом, все условия из определения решения выполнены.

1.5. Финально-краевая задача

Рассмотрим в имеющихся обозначениях следующую смешанную финально-краевую задачу: будем искать классическое решение $u(x, t)$ (т.е. принадлежащее классам $C^2(Q_i)$ и $C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i при $i = 1, 2, \dots, n$) неоднородного разрывного волнового

уравнения (1.1), удовлетворяющее условию непрерывности (1.3) и условию сопряжения (1.4) в точках стыка x_i при $i = 1, 2, \dots, n - 1$, удовлетворяющее одному из однородных граничных условий $(L_I)-(L_{III})$ на левом конце и одному из однородных граничных условий $(R_I)-(R_{III})$ на правом. Отличие состоит в том, что вместо выполнения однородных начальных условий (1.2) потребуем, чтобы в конечный момент времени T стержень покоился:

$$u(x, T) \equiv 0, \quad u_t(x, T) \equiv 0 \quad x \in [x_0, x_n]. \quad (1.31)$$

Теорема 1.3. *Классическое решение смешанной задачи (1.1), (1.31), (1.3)–(1.4) с одним из граничных условий на левом конце $(L_I)-(L_{III})$ и одним из граничных условий на правом $(R_I)-(R_{III})$ при однородных граничных условиях*

$$\mu(t) \equiv 0, \quad \nu(t) \equiv 0$$

существует и единственно.

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение:

$$u(x, t) = v(x, T - t)$$

Функция $v(x, t)$ является решением рассматривавшейся ранее начально-краевой задачи с неоднородной правой частью $f(x, t)$ и аналогичными однородными граничными условиями тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ — решение рассматриваемой в данной теореме финально-краевой задачи с правой частью $f(x, T - t)$. Существование и единственность решения непосредственно следуют из уже доказанных аналогичных утверждений для начально-краевой задачи. Это же соответствие позволяет указать явный вид решения финально-краевой задачи. $\square$

Обобщенное решение смешанной задачи о возбуждении колебаний в составном стержне с точечными нагрузками

В настоящей главе рассматриваются обобщенные постановки смешанных задач, доказывается единственность обобщенного решения и предъявляется его явный вид с использованием введенных в предыдущей главе понятий.

2.1. Классическая постановка задачи о возбуждении колебаний в изначально покоящемся стержне при помощи граничных условий

Рассмотрим, как и прежде, стержень, состоящий из n последовательно соединенных участков, причем i -тый участок расположен вдоль отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Точки x_i — это точки стыка участков $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и концы стержня $(x_0$ и $x_n)$. Стержень имеет на i -м участке постоянными модуль Юнга k_i и линейную плотность ρ_i ; воспользуемся обозначениями для скорости распространения сигнала по i -тому участку (скорости звука) $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ и времени прохождения сигнала по i -тому участку $t_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}$.

Будем считать, что на обоих концах стержня наложены классические линейные неоднородные условия, т.е. одно из условий (L_I)–(L_{III}) на левом конце и одно из условий (R_I)–(R_{III}) на правом.

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точки x из начального положения в момент времени t . Продольные колебания в изначально покоящемся стержне описываются следующим разрывным уравнением

$$u_{tt} = a_i^2 u_{xx} \quad \text{в прямоугольнике } Q_i = (x_{i-1}, x_i) \times (0, T), \quad i \in \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

дополненным начальными условиями

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad u_t(x, 0) \equiv 0, \quad x \in [x_0, x_n], \quad (2.2)$$

а также следующими условиями сопряжения в точках стыка $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (2.3)$$

$$m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t). \quad (2.4)$$

Как и прежде, множество точек стыка с ненулевой массой обозначим через X , соответственно Y — множество точек стыка без массы.

Замечание 2.1. В предыдущей главе рассматривалась задача с ненулевой правой частью в уравнении (1.1) и однородными начальными и граничными условиями, в настоящей главе нас интересует решение задачи с неоднородными граничными условиями и нулевой правой частью.

2.2. Формулировка смешанной задачи

Воспользуемся классом $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$, введенным впервые В.А. Ильиным в работе [31].

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{D} = (a < x < b) \times (t_1 < t < t_2)$ — прямоугольник на плоскости (x, t) . Класс $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$ состоит из непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций, обобщенные производные которых $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ принадлежат не только классу $L_2(\mathcal{D})$, но и классу $L_2[a \leq x \leq b]$ при всех $t \in [t_1, t_2]$ и классу $L_2[t_1 \leq t \leq t_2]$ при всех $x \in [a, b]$.

Определение 2.2. Введем класс $\overline{W}_2^1$, от функций которого потребуем принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а также принадлежность классу $W_2^2(0 \leq t \leq T)$ при $x \in X$, т.е. в нагруженных точках стыка.

Определение 2.3. Обобщенным решением смешанной задачи (2.1)–(2.4) с одним из граничных условий (L_I)–(L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I)–(R_{III}) на правом назовем функцию $u(x, t)$ из класса $\overline{W}_2^1$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) \equiv 0$, условию $u_t(x_i, 0) = 0$

при $x_i \in X$, т.е. в нагруженных точках стыка, и следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \\
& + \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt + \\
& + \begin{cases} \int_0^T [-k_1 \mu(t) \Phi_x(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_I\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{III}\text{)} \end{cases} + \\
& + \begin{cases} \int_0^T [k_n \nu(t) \Phi_x(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_I\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{III}\text{)} \end{cases} = 0 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

для любой «пробной» функции $\Phi(x, t)$, непрерывной в замыкании $\overline{Q}$ прямоугольника $Q = (x_0, x_n) \times (0, T)$, принадлежащей классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i , удовлетворяющей следующим ограничениям в финальный момент времени

$$\Phi(x, T) \equiv 0, \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0 \quad x \in [x_0, x_n] \quad (2.6)$$

и на концах стержня при $t \in [0, T]$ в соответствии с наложенными граничными условиями:

$$\begin{aligned}
& \Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_I\text{)} \\
& \Phi_x(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\
& \Phi_x(x_0, t) - h_1 \Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (L}_{III}\text{)} \\
& \Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_I\text{)} \\
& \Phi_x(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\
& \Phi_x(x_n, t) + h_2 \Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии (R}_{III}\text{)},
\end{aligned} \quad (2.7)$$

а также условию согласования в точках безмассового стыка:

$$0 = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t), \quad x_i \in Y. \quad (2.8)$$

В зависимости от типа граничного условия на левом конце наложим требования на $\mu(t)$:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\mu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\mu(0) = 0$.

- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

В полной аналогии наложим требования на $\nu(t)$ в зависимости от типа граничного условия на правом конце:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\nu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\nu(0) = 0$.
- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

Замечание 2.2. Увеличение гладкости в точках стыка с массой можно объяснить следующим образом: в выражение для энергии струны входит слагаемое $\frac{1}{2}m_i u_t^2(x_i, t)$, которое не определено, если не вводить дополнительно указанное требование гладкости.

2.3. Единственность решения

Утверждение 2.1. Для любой непрерывно дифференцируемой в Q функции $f(x, t)$, носитель которой принадлежит объединению прямоугольников $\bigcup_{i=1}^n Q_i$, существует непрерывная в $\overline{Q}$ функция $\Phi(x, t)$, в каждом прямоугольнике Q_i принадлежащая классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ и удовлетворяющая в нем уравнению

$$\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad \text{в прямоугольнике } Q_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

с однородными условиями в конечный момент времени T (2.6), условию сопряжения (2.8) в точках стыка без массы, выбранной паре однородных граничных условий (2.7), а также следующему условию сопряжения в точках стыка с массой

$$m_i \Phi_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t) \quad x_i \in X. \quad (2.10)$$

Доказательство. Заметим, что наложенные на $\Phi(x, t)$ условия в совокупности являются определением решения смешанной финально-краевой задачи с однородными граничными и финальными условиями, для которой было доказано существование решения (теорема (1.3)).

□

Теорема 2.1. Смешанная задача (2.1)–(2.4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I) – (R_{III}) на правом имеет единственное решение из класса $\overline{W}_2^1$.

Доказательство. В силу линейности задачи, достаточно доказать единственность решения только однородной задачи, т.е. с однородными граничными условиями.

В силу предыдущего утверждения для любой непрерывно дифференцируемой в Q функции $f(x, t)$, носитель которой принадлежит объединению прямоугольников $\bigcup_{i=1}^n Q_i$, существует функция $\Phi(x, t)$, удовлетворяющая всем условиям, налагаемым на пробную функцию, более того, удовлетворяющее уравнению (2.9), а также в точках стыка с массой удовлетворяющее условию (2.10).

Интегральное тождество с учетом того, что мы рассматриваем задачу с однородными граничными условиями, принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \\ & + \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt = 0. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом проведем дважды интегрирование по частям, учтем условия $\Phi(x_i, T) = \Phi_t(x_i, T) = u(x_i, 0) = u_t(x_i, 0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt = \\ & = \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [u(x_i, t) (m_i \Phi_{tt}(x_i, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) + k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt = 0, \end{aligned}$$

т.е. всё слагаемое равно нулю в силу выполненного равенства (2.10), а тождество с учетом (2.9) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) f(x, t) dx dt = 0.$$

Множество непрерывно дифференцируемых функций, носитель которых лежит в $\bigcup_{i=1}^n Q_i$, при сужении на Q_i является плотным [67, стр. 316] в пространстве $L_2(Q_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а значит функция $u(x, t)$, является нулевым элементом пространства $L_2(Q_i)$. Поскольку решение по условию принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q_i})$ в каждом прямоугольнике Q_i , то там оно также является нулевым элементом.

Таким образом, мы получили, что однородная задача имеет только тривиальное решение, и тем самым единственность решения исходной задачи доказана. $\square$

Замечание 2.3. Определение обобщенного решения дано в соответствии с работой [74], однако нетрудно видеть, что для доказательства единственности нам не потребовались требования на частные производные u_x и u_t . Можно было пойти дальше и, наложив в определении

обобщенного решения требование (2.10) в точках стыка с массой на пробную функцию, избавиться от второго слагаемого в тождестве (2.5). Проведя те же рассуждения, можно доказать единственность с меньшими требованиями на гладкость, ограничившись, например, требованием непрерывности $u(x, t)$ в прямоугольнике $\overline{Q}$.

Замечание 2.4. Известны также другие способы доказательства единственности: метод, предложенный О. А. Ладыженской для доказательства единственности решения неоднородного уравнения колебания в классе $W_2^1(\overline{Q})$ [58] и метод, предложенный В. А. Ильиным, основанный на поиске полной системы собственных функций краевой задачи для одномерного уравнения (см., например, [35]).

2.4. Явный вид решения смешанной задачи

Воспользуемся блочно-диагональными матрицами A и B размера $n \times n$, введенными в предыдущей главе. Сформулируем теоремы, в которых представлен явный вид решения.

Теорема 2.2. *Единственное обобщенное из класса $\overline{W}_2^1$ решение задачи (2.1)–(2.4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I) – (R_{III}) на правом при **четном** числе участков n имеет следующий вид в прямоугольнике $\overline{Q}_i$:*

$$u(x, t) = \begin{cases} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{нечетных} \\ \tilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{четных,} \end{cases} \quad (2.11)$$

где функции $U_1 \dots U_n, \tilde{U}_1 \dots \tilde{U}_n$, определяются из соотношений

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Здесь матрицы A и B размера $n \times n$ определены формулами (1.10), а через $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$ обозначены волны, порожденные граничными условиями соответственно на левом и правом

концах. В зависимости от типа граничного условия они определяются следующим образом на сегменте $t \in [0, T]$:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при условии (L_I)} \\ -a_1 \int_0^t \mu(\tau) d\tau & \text{при условии (L_{II})} \\ -a_1 \int_0^t e^{-a_1 h_1(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau & \text{при условии (L_{III})} \end{cases}$$

$$\underline{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{при условии (R_I)} \\ -a_n \int_0^t \nu(\tau) d\tau & \text{при условии (R_{II})} \\ -a_n \int_0^t e^{-a_n h_2(t-\tau)} \nu(\tau) d\tau & \text{при условии (R_{III})} \end{cases}.$$

Вне зависимости от типов граничных условий продолжим функции $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ нулем при $t < 0$ и произвольным непрерывным образом на полуось $t > T$, чтобы полученная функция лежала в классе V .

Теорема 2.3. Для задачи (2.1)–(2.4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I) – (R_{III}) на правом при **нечетном** числе участков n решение из класса $\overline{W}_2^1$ определяется по формуле (2.11), где функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ определены соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

с матрицами A и B размера $n \times n$, имеющими вид (1.11) и функциями $\underline{\mu}(t)$, $\underline{\nu}(t)$, определенными таким же образом, как при четном n .

Сформулированные теоремы будем доказывать одновременно. Предварительно докажем ряд вспомогательных лемм, справедливых как при четных n , так и при нечетных.

Введем базис $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ в пространстве векторов $\mathbb{R}^{2n}$ (напомним, n – число участков):

$$(e_i)_j = \delta_j^i.$$

Среди векторов e_i особенно выделим $p = e_1$ и вектор

$$q = \begin{cases} e_n & \text{при четном } n \\ e_{2n} & \text{при нечетном } n \end{cases},$$

определение которого зависит от четности числа участков n . Вновь нам потребуется блочная матрица C размера $2n \times 2n$,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

составленная из уже введенных матриц A и B .

Лемма 2.1. *Равенства (2.12)–(2.13), определяющие функции $U_i, \tilde{U}_i$ при четном числе участков и равенства (2.14)–(2.15), определяющие при нечетном числе участков, в введенных обозначениях можно записать при помощи одного ряда.*

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}], \quad (2.16)$$

здесь $p\underline{\mu}$ и $q\underline{\nu}$ — это векторы из пространства V^{2n} , содержащие лишь одну ненулевую компоненту: так $p\underline{\mu}$ имеет первую компоненту равную $\underline{\mu}$ и все оставшиеся, равные нулю. Соответственно $q\underline{\nu}$ в зависимости от четности числа участков n имеет ненулевой либо n -ую, либо $2n$ -ую компоненту, при этом единственная ненулевая компонента равна $\underline{\nu}$.

Доказательство. Рассмотрим действие степеней оператора $C\tilde{P}$ на вектор $x \in V^{2n}$, через x^1 и x^2 обозначим соответственно вектора из первых и последних n компонент x :

$$\begin{aligned} (C\tilde{P})^0 x = x &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} & (C\tilde{P})^1 x &= C \begin{bmatrix} Px^1 \\ Px^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BPx^2 \\ APx^1 \end{bmatrix} \\ (C\tilde{P})^2 x &= \begin{bmatrix} BPAPx^1 \\ APBPx^2 \end{bmatrix} \dots, \end{aligned}$$

для произвольной степени $m \geq 0$ справедливо

$$(C\tilde{P})^{2m} x = \begin{bmatrix} (BPAP)^m x^1 \\ (APBP)^m x^2 \end{bmatrix}, \quad (C\tilde{P})^{2m+1} x = \begin{bmatrix} BP(APBP)^m x^2 \\ AP(BPAP)^m x^1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ряд принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m x &= \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^{2m} x + \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^{2m+1} x = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} (BPAP)^m x^1 \\ (APBP)^m x^2 \end{bmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} BP(APBP)^m x^2 \\ AP(BPAP)^m x^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подставив $x = p\underline{\mu} + q\underline{\nu}$, получаем, что равенство (2.16) переходит в (2.12)–(2.13) при четном n и в равенства (2.14)–(2.15) при нечетном. $\square$

Лемма 2.2. *Функции $\underline{\mu}$, $\underline{\nu}$ принадлежат классу V и классу $W_2^1(-\infty, T]$.*

Доказательство. Из определения функций $\underline{\mu}$, $\underline{\nu}$ следует их принадлежность классу $W_2^1[0, T]$ и равенство $\underline{\mu}(0) = \underline{\nu}(0) = 0$. Поскольку обе функции были доопределены нулем при $t < 0$, то они принадлежат классу $W_2^1(-\infty, T]$. Также они принадлежат классу V , поскольку мы их доопределили произвольным образом при $t > T$ с сохранением непрерывности. $\square$

Лемма 2.3. *Предположим, что $x \in V^{2n}$ — вектор, все элементы которого лежат в классе V ($V \cap W_2^1(-\infty, T]$), тогда все компоненты вектора Cx также принадлежат классу V ($V \cap W_2^1(-\infty, T]$).*

Доказательство. Согласно утверждению 1.5 операция свертки с экспонентой не выводит функцию из классов, как и операция взятия линейной комбинации. Поэтому все операторы E_β , $\hat{T}_{ij}$, $\hat{R}_{ij}$, $\hat{R}_{left}$, $\hat{R}_{right}$ не выводят функцию из классов V и $V \cap W_2^1(-\infty, T]$. Поскольку матрица C может содержать только числа и указанные операторы, то компоненты вектора Cx также будут принадлежать классу V ($V \cap W_2^1(-\infty, T]$). $\square$

Лемма 2.4. *Ряды, участвующие в формулах (2.12)–(2.13) и (2.14)–(2.15) сходятся в пространстве V^n , а задаваемые этими формулами функции U_i , $\tilde{U}_i$ принадлежат классу $V \cap W_2^1(-\infty, T]$ и равны нулю при $t < 0$.*

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано для матрицы C , доказывается, что умножение на матрицы A и B не увеличивает расстояние

$$\rho_n(Ax, Ay) \leq \rho_n(x, y) \quad \rho_n(Bx, By) \leq \rho_n(x, y) \quad \forall x, y \in V^n$$

и векторы, все компоненты которых лежат в классе $V \cap W_2^1(-\infty, T]$, переводит в векторы с компонентами из того же класса.

Поскольку оператор сдвига является сжимающим ($t_{min} = \min_{i \in \overline{1, n}} t_i > 0$)

$$\rho_n(Px, Py) \leq e^{-t_{min}} \rho_n(x, y) \quad \forall x, y \in V^n,$$

то операторы, возводимые в степень, также являются сжимающими

$$\rho_n(BPAP x, BPAP y) \leq e^{-2t_{min}} \rho_n(x, y)$$

$$\rho_n(APBP x, APBP y) \leq e^{-2t_{min}} \rho_n(x, y),$$

а значит, общий член каждого ряда стремится к нулю, и каждый ряд сходится по критерию сходимости в V^n (утверждение 1.3). При этом на промежутке $(-\infty, T]$ ряд задаётся конечным числом слагаемых, причем компоненты каждого слагаемого лежат в классе $V \cap W_2^1(-\infty, T]$.

Поскольку $\underline{\mu}(t) = \underline{\nu}(t) = 0$ при $t \leq 0$, то $\rho(\underline{\mu}, 0) \leq 1$, $\rho(\underline{\nu}, 0) \leq 1$. Рассмотрим ряд (2.16): поскольку операция умножения на матрицу $C\tilde{P}$ является сжимающей, то для каждого слагаемого ряда справедливо

$$\rho_{2n} \left((C\tilde{P})^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}], 0 \right) \leq e^{-m t_{min}} \leq 1.$$

А для суммы ряда верно неравенство

$$\begin{aligned} \rho_{2n} \left([U_1, U_2, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n]^T, 0 \right) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \rho_{2n} \left(\sum_{m=0}^M (C\tilde{P})^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}], 0 \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \max_{m \in \{0, M\}} \rho_{2n} \left((C\tilde{P})^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}], 0 \right) \leq 1, \end{aligned}$$

согласно свойству 4 метрики ρ_{2n} , это означает, что все функции $U_i, \tilde{U}_i$ обращаются в ноль при $t \leq 0$. $\square$

Рассмотрим формулы (2.12)–(2.13), задающие функции $U_i, \tilde{U}_i$ при четном числе участков n , из них следует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} &= \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} + BPAP \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} + BP \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} &= \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

соответственно при нечетном n из (2.14)–(2.15) следует

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + BP \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix} + AP \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Покомпонентно расписав эти равенства, получим

$$U_1 = \underline{\mu} + \hat{R}_{left} P_{t_1} \tilde{U}_1.$$

В точках стыка при нечетном i ($i \in \overline{1, n-1}$):

$$\tilde{U}_i = \hat{R}_{i,i+1} P_{t_i} U_i + \hat{T}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1} \quad (2.17)$$

$$\tilde{U}_{i+1} = \hat{R}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1} + \hat{T}_{i,i+1} P_{t_i} U_i. \quad (2.18)$$

Соответственно, при четном i ($i \in \overline{1, n-1}$):

$$U_i = \hat{R}_{i,i+1} P_{t_i} \tilde{U}_i + \hat{T}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} \tilde{U}_{i+1}$$

$$U_{i+1} = \hat{R}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} \tilde{U}_{i+1} + \hat{T}_{i,i+1} P_{t_i} \tilde{U}_i.$$

В зависимости от четности числа участков n выполнено условие на правом конце

$$U_n = \underline{\nu} + \hat{R}_{right} P_{t_n} \tilde{U}_n \quad \text{при четных } n$$

$$\tilde{U}_n = \underline{\nu} + \hat{R}_{right} P_{t_n} U_n \quad \text{при нечетных } n.$$

Лемма 2.5. *Решение $u(x, t)$ непрерывно в прямоугольнике $\overline{Q}$.*

Доказательство. Непрерывность в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_i$ следует из непрерывности функций U_i и $\tilde{U}_i$, непрерывность же во всем прямоугольнике $\overline{Q}$ следует из равенства

граничных значений u при стремлении к точкам стыка справа и слева. Достаточно убедиться, что

$$U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) = U_{i+1}(t - t_{i+1}) + \tilde{U}_{i+1}(t) \quad \text{при } i — \text{нечетных из } \overline{1, n-1}$$

$$U_i(t) + \tilde{U}_i(t - t_i) = U_{i+1}(t) + \tilde{U}_{i+1}(t - t_{i+1}) \quad \text{при } i — \text{четных из } \overline{1, n-1}.$$

Проведем проверку при нечетном i (напомним, I — тождественный оператор):

$$\begin{aligned} P_{t_i} U_i + \tilde{U}_i - (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + \tilde{U}_{i+1}) &= \\ &= P_{t_i} U_i + \hat{R}_{i,i+1} P_{t_i} U_i + \hat{T}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1} - (P_{t_{i+1}} U_{i+1} + \hat{T}_{i,i+1} P_{t_i} U_i + \hat{R}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1}) = \\ &= [I + \hat{R}_{i,i+1} - \hat{T}_{i,i+1}] P_{t_i} U_i + [\hat{T}_{i+1,i} - I - \hat{R}_{i+1,i}] P_{t_{i+1}} U_{i+1} = 0, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенствами (2.17)–(2.18). Последнее равенство справедливо, поскольку из определения оператора отражения следует, что операторы, стоящие в квадратных скобках, являются нулевыми. $\square$

Лемма 2.6. *В точках стыка $x_i \in X$ с ненулевой массой функция $u(x_i, t)$ лежит в классе $W_2^2[0, T]$.*

Доказательство. Значение функции в стыке

$$u(x_i, t) = \begin{cases} U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) & \text{при нечетном } i \\ \tilde{U}_i(t - t_i) + U_i(t) & \text{при четном } i. \end{cases}$$

Рассмотрим случай нечетного i , случай четного доказывается по аналогии. Необходимо доказать принадлежность классу $W_2^2[0, T]$ следующей функции

$$P_{t_i} U_i + \tilde{U}_i = P_{t_i} U_i + \hat{R}_{i,i+1} P_{t_i} U_i + \hat{T}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1} = \hat{T}_{i,i+1} P_{t_i} U_i + \hat{T}_{i+1,i} P_{t_{i+1}} U_{i+1}.$$

При этом функции $P_{t_i} U_i$ и $P_{t_{i+1}} U_{i+1}$ принадлежат классу $V \cap W_2^1(-\infty, T]$ (лемма (2.4)). Поскольку масса на стыке ненулевая, то операторы преломления, действующие как свертка

$$\hat{T}_{ij} f = \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m},$$

согласно утверждению 1.5 увеличивают гладкость и переводят эти функции в класс $W_2^2(-\infty, T]$, из чего сразу вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.7. *Решение $u(x, t)$ принадлежит классу $\overline{W}_2^1$.*

Доказательство. Принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ следует из принадлежности профилей бегущих волн $U_i, \tilde{U}_i$ классу $W_2^1(-\infty, T]$ (лемма 2.4), принадлежность следа функции $u(x_i, t)$ в точках стыка $x_i \in X$ с ненулевой массой классу $W_2^2[0, T]$ также была доказана (лемма 2.6). $\square$

Лемма 2.8. *В начальный момент времени $u(x, 0) = 0$ при $x \in [x_0, x_n]$, помимо этого выполнено равенство $u_t(x_i, 0) = 0$ для производных в точках стыка $x_i \in X$ с массой.*

Доказательство. Рассмотрим стык x_i с присоединенной массой m_i . Было показано, что значение функции в точке стыка

$$u(x_i, t) = \begin{cases} U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) & \text{при нечетном } i \\ \tilde{U}_i(t - t_i) + U_i(t) & \text{при четном } i. \end{cases}$$

Снова рассмотрим случай нечетного i . Было показано, что выражение $U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t)$ принадлежит классу $W_2^2(-\infty, T]$, а значит лежит в классе $C^1(-\infty, T]$. Учитывая, что согласно лемме 2.4 выражение обращается в нуль при $t \leq 0$, то его производная в момент $t = 0$ также нулевая. Заключаем, что производная $u_t(x_i, 0)$ равна нулю.

В момент времени $t = 0$ в решение (2.11) функции $U_i, \tilde{U}_i$ входят с неположительными аргументами, и значит решение нулевое в начальный момент времени. $\square$

Введем вспомогательную функцию $U(x, t)$:

$$U(x, t) = \begin{cases} -U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i - \text{нечетных} \\ -\tilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i - \text{четных} \end{cases}$$

Лемма 2.9. *Функция $U(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике $\overline{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. В начальный момент времени функция обращается в ноль $U(x, 0) = 0$, кроме того в каждом прямоугольнике Q_i выполнены следующие соотношения на производные функций $u(x, t)$ и $U(x, t)$*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a_i U_x(x, t) \\ u_x(x, t) &= \frac{1}{a_i} U_t(x, t), \end{aligned} \tag{2.19}$$

функция $U(x, t)$ не является непрерывной во всем прямоугольнике Q и удовлетворяет в ненагруженных точках стыка x_i условию скачка

$$0 = z_{i+1}U(x_i + 0, t) - z_i U(x_i - 0, t), \tag{2.20}$$

а в нагруженных точках стыка выполнено условие с участием производной $u(x_i, t)$

$$m_i u_t(x_i, t) = z_{i+1}U(x_i + 0, t) - z_i U(x_i - 0, t). \tag{2.21}$$

Доказательство. Принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ и равенство нулю в начальный момент времени доказываются аналогично проделанным нами рассуждениями для функции $u(x, t)$. Соотношения на производные легко устанавливаются из определений функций $u(x, t)$ и $U(x, t)$.

Докажем выполнение условий разрыва в точке стыка x_i , как обычно, при нечетном i . Рассмотрим выражение в правой части

$$\begin{aligned} z_{i+1}U(x_i + 0, t) - z_iU(x_i - 0, t) &= \\ &= z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1}(t) + U_{i+1}(t - t_{i+1}) \right) - z_i \left(-U_i(t - t_i) + \tilde{U}_i(t) \right). \end{aligned}$$

Перепишем выражение с использованием оператора запаздывания, воспользуемся известными выражениями для $\tilde{U}_i, \tilde{U}_{i+1}$.

$$\begin{aligned} z_{i+1} \left(-\tilde{U}_{i+1} + P_{t_{i+1}}U_{i+1} \right) - z_i \left(-P_{t_i}U_i + \tilde{U}_i \right) &= \\ &= z_{i+1} \left(-\hat{R}_{i+1,i}P_{t_{i+1}}U_{i+1} - \hat{T}_{i,i+1}P_{t_i}U_i + P_{t_{i+1}}U_{i+1} \right) - \\ &\quad - z_i \left(-P_{t_i}U_i + \hat{R}_{i,i+1}P_{t_i}U_i + \hat{T}_{i+1,i}P_{t_{i+1}}U_{i+1} \right) = \\ &= \left[z_{i+1} \left(I - \hat{R}_{i+1,i} \right) - z_i \hat{T}_{i+1,i} \right] P_{t_{i+1}}U_{i+1} + \left[z_i \left(I - \hat{R}_{i,i+1} \right) - z_{i+1} \hat{T}_{i,i+1} \right] P_{t_i}U_i. \end{aligned}$$

Покажем, что выражение равно нулю в случае безмассового стыка, а значит, условие скачка выполнено

$$\begin{aligned} &\left[z_{i+1} \left(I - \hat{R}_{i+1,i} \right) - z_i \hat{T}_{i+1,i} \right] P_{t_{i+1}}U_{i+1} + \left[z_i \left(I - \hat{R}_{i,i+1} \right) - z_{i+1} \hat{T}_{i,i+1} \right] P_{t_i}U_i = \\ &= \left[z_{i+1} \left(\frac{2z_i}{z_i + z_{i+1}} \right) - z_i \left(\frac{2z_{i+1}}{z_i + z_{i+1}} \right) \right] P_{t_{i+1}}U_{i+1} + \left[z_i \left(\frac{2z_{i+1}}{z_i + z_{i+1}} \right) - z_{i+1} \left(\frac{2z_i}{z_i + z_{i+1}} \right) \right] P_{t_i}U_i = 0. \end{aligned}$$

В случае стыка с ненулевой массой $m_i > 0$ рассмотрим выражение $m_i u_t(x_i, t)$ в левой части, воспользуемся выражением (1.29) для производной $\hat{T}_{ij}f$

$$\begin{aligned} m_i \left(\hat{T}_{i,i+1}P_{t_i}U_i + \hat{T}_{i+1,i}P_{t_{i+1}}U_{i+1} \right)' &= \\ &= 2z_iP_{t_i}U_i - (z_i + z_{i+1})\hat{T}_{i,i+1}P_{t_i}U_i + 2z_{i+1}P_{t_{i+1}}U_{i+1} - (z_i + z_{i+1})\hat{T}_{i+1,i}P_{t_{i+1}}U_{i+1} = \\ &= \left[2z_iI - (z_i + z_{i+1})\hat{T}_{i,i+1} \right] P_{t_i}U_i + \left[2z_{i+1}I - (z_i + z_{i+1})\hat{T}_{i+1,i} \right] P_{t_{i+1}}U_{i+1} = \\ &= \left[z_i \left(I - \hat{R}_{i,i+1} \right) - z_{i+1} \hat{T}_{i+1,i} \right] P_{t_i}U_i + \left[z_{i+1} \left(I - \hat{R}_{i+1,i} \right) - z_i \hat{T}_{i,i+1} \right] P_{t_{i+1}}U_{i+1} \end{aligned}$$

и убедимся, что оно совпадает с полученным выражением для правой части условия (2.21). □

Лемма 2.10. *Выполнены следующие равенства*

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T k_1 \left[u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U_t(x_0, t) \Phi(x_0, t) \right] dt = \\
& = \begin{cases} \int_0^T [-k_1 \mu(t) \Phi_x(x_0, t)] dt & \text{при условии (L_I)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L_{II})} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L_{III})} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T k_n \left[u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - \frac{1}{a_n} U_t(x_n, t) \Phi(x_n, t) \right] dt = \\
& = \begin{cases} \int_0^T [k_n \nu(t) \Phi_x(x_n, t)] dt & \text{при условии (R_I)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R_{II})} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R_{III})}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое равенство, рассмотрев возможные типы граничного условия на левом конце:

- Граничное условие первого рода,

$$u(x_0, t) = U_1(t) + \tilde{U}_1(t - t_1) = \underline{\mu}(t) = \mu(t)$$

Второе равенство выполнено, поскольку

$$U_1 = \hat{R}_{left} P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} = -P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu}$$

Приняв во внимание условие $\Phi(x_0, t) = 0$, накладываемое на пробную функцию, получаем справедливость равенства.

- Граничное условие второго рода

$$U_t(x_0, t) = -U'_1(t) + \tilde{U}'_1(t - t_1) = -\underline{\mu}'(t) = a_1 \mu(t),$$

где использована следующая выкладка во втором равенстве

$$U_1 = \hat{R}_{left} P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} = P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu},$$

также учтем условие $\Phi_x(x_0, t) = 0$, накладываемое на пробную функцию при граничном условии (L_{II}) и получим равенство.

- Граничное условие третьего рода

$$\frac{1}{a_1} U_t(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \frac{1}{a_1} \left[-U'_1(t) + \tilde{U}'_1(t - t_1) \right] - h_1 \left[U_1(t) + \tilde{U}_1(t - t_1) \right] = \mu(t),$$

где использована следующая выкладка

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \left[-U'_1 + P_{t_1} \tilde{U}'_1 \right] - h_1 \left[U_1 + P_{t_1} \tilde{U}_1 \right] &= \\ &= \frac{1}{a_1} \left[- \left(E_{a_1 h_1} P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} \right)' + P_{t_1} \tilde{U}'_1 \right] - h_1 \left[U_1 + P_{t_1} \tilde{U}_1 \right] = \\ &= \frac{1}{a_1} \left[a_1 h_1 P_{t_1} \tilde{U}_1 + a_1 h_1 \left(E_{a_1 h_1} P_{t_1} \tilde{U}_1 \right) - \underline{\mu}' \right] - h_1 \left[\left(E_{a_1 h_1} P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} \right) + P_{t_1} \tilde{U}_1 \right] = \\ &= -\frac{1}{a_1} \left[\underline{\mu}' + a_1 h_1 \underline{\mu} \right] = \mu. \end{aligned}$$

Воспользуемся полученным равенством и условием $\Phi_x(x_0, t) - h_1 \Phi(x_0, t) = 0$, наложенным на пробную функцию, для преобразования левой части равенства

$$\begin{aligned} - \int_0^T k_1 \left[u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U_t(x_0, t) \Phi(x_0, t) \right] dt &= \\ &= - \int_0^T k_1 \Phi(x_0, t) \left[h_1 u(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U_t(x_0, t) \right] dt = \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt. \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки могут быть проделаны на правом конце. □

Лемма 2.11. *Функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству для любой «пробной» функции.*

Доказательство. Схема рассуждений во многом совпадает с работой [35] В. А. Ильина. Обозначим через S сумму двойных интегралов, стоящую в левой части интегрального тождества и запишем интегралы как повторные

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) \left[\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t) \right] dx dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_0^T u(x, t) \Phi_{tt} dt \right] dx - \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, t) \Phi_{xx} dx \right] dt. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям интегралов в квадратных скобках, получим

$$\begin{aligned}
S = & \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u(x, T) \Phi_t(x, T) - u(x, 0) \Phi_t(x, 0)] dx - \\
& - \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_0^T u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dt \right] dx - \\
& - \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T [u(x_i - 0, t) \Phi_x(x_i - 0, t) - u(x_{i-1} + 0, t) \Phi_x(x_{i-1} + 0, t)] dt + \\
& + \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_x(x, t) \Phi_x(x, t) dx \right] dt.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $u(x, 0) \equiv 0$, $\Phi_t(x, T) \equiv 0$, и принимая во внимание соотношение $u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t)$, верное при $t \in [0, T]$ и $i \in \overline{1, n-1}$, можем переписать выражение для S :

$$\begin{aligned}
S = & - \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_0^T u_t(x, t) \Phi_t dt \right] dx + \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_x(x, t) \Phi_x dx \right] dt - \\
& - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt.
\end{aligned}$$

Примем также во внимание соотношение $0 = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t)$, верное в точках безмассового стыка

$$\begin{aligned}
S = & - \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_0^T u_t(x, t) \Phi_t dt \right] dx + \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_x(x, t) \Phi_x dx \right] dt - \\
& - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\
& - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt.
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями (2.19), связывающими производные функций $u(x, t)$ и

$U(x, t)$ для записи S :

$$\begin{aligned}
S = & - \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_0^T a_i U_x(x, t) \Phi_t dt \right] dx + \sum_{i=1}^n k_i \int_0^T \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{a_i} U_t(x, t) \Phi_x dx \right] dt - \\
& - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\
& - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt.
\end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования в повторных интегралах и проинтегрировав внутренние интегралы по частям, получим

$$\begin{aligned}
S = & - \sum_{i=1}^n z_i \int_0^T [U(x_i - 0, t) \Phi_t(x_i - 0, t) - U(x_{i-1} + 0, t) \Phi_t(x_{i-1} + 0, t)] dt + \\
& + \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^T U(x, t) \Phi_{tx} dt dx + \\
& + \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [U(x, T) \Phi_x(x, T) - U(x, 0) \Phi_x(x, 0)] dx - \\
& - \sum_{i=1}^n z_i \int_0^T \int_{x_{i-1}}^{x_i} U(x, t) \Phi_{xt} dx dt - \\
& - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\
& - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt.
\end{aligned}$$

Двойные интегралы сокращаются, примем во внимание, что $U(x, 0) \equiv 0$, $\Phi_x(x, T) \equiv 0$, также учтем соотношение $\Phi_t(x_i - 0, t) = \Phi_t(x_i + 0, t)$, получим

$$\begin{aligned}
S = & \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \Phi_t(x_i, t) [z_{i+1} U(x_i + 0, t) - z_i U(x_i - 0, t)] dt - \\
& - \int_0^T [z_n U(x_n, t) \Phi_t(x_n, t) - z_1 U(x_0, t) \Phi_t(x_0, t)] dt - \\
& - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\
& - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt.
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями (2.20) и (2.21), задающими фигурирующую в первом слагаемом разницу $z_{i+1}U(x_i + 0, t) - z_i U(x_i - 0, t)$ соответственно в безмассовых точках стыка и в точках стыка с массой.

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi_t(x_i, t) u_t(x_i, t)] dt - \\ & - \int_0^T [z_n U(x_n, t) \Phi_t(x_n, t) - z_1 U(x_0, t) \Phi_t(x_0, t)] dt - \\ & - \int_0^T [k_n u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t)] dt - \\ & - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T u(x_i, t) [k_i \Phi_x(x_i - 0, t) - k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t)] dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим одно из слагаемых, проинтегрируем его по частям, приняв во внимание, что $U(x, 0) = \Phi(x, T) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T [z_n U(x_n, t) \Phi_t(x_n, t) - z_1 U(x_0, t) \Phi_t(x_0, t)] dt = \\ = \int_0^T [-z_n U_t(x_n, t) \Phi(x_n, t) + z_1 U_t(x_0, t) \Phi(x_0, t)] dt. \end{aligned}$$

Получим таким образом, проведя ещё одно интегрирование по частям в первом слагаемом и приняв во внимание, что $\Phi(x_i, T) = u_t(x_i, 0) = 0$

$$\begin{aligned} S = & - \sum_{i: x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt + \\ & + \int_0^T k_1 \left[u(x_0, t) \Phi_x(x_0, t) - \frac{1}{a_1} U_t(x_0, t) \Phi(x_0, t) \right] dt - \\ & - \int_0^T k_n \left[u(x_n, t) \Phi_x(x_n, t) - \frac{1}{a_n} U_t(x_n, t) \Phi(x_n, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражениями для последних двух слагаемых, полученными в лемме 2.10, приходим к интегральному тождеству. $\square$

Доказательство. (теорем 2.2, 2.3) Принадлежность функции $u(x, t)$ классу $\overline{W}_2^1$ и выполнение интегрального тождества были доказаны (леммы 2.7 и 2.11), выполнение условия $u(x, 0) \equiv 0$, и равенства $u_t(x_i, 0) = 0$ в точках стыка с массой следует из леммы 2.8, т.е. функция $u(x, t)$ удовлетворяет всем условиям из определения обобщенного решения. $\square$

Глава 3

Метод построения явного вида решения

В настоящей главе проводится пояснение того, как было получено решение смешанной задачи, на различных примерах. Для простоты рассматриваются классические решения соответствующих смешанных задач. В настоящей главе без дальнейшего упоминания будем считать, что граничные условия принадлежат соответствующим классам и согласованы с однородными начальными данными. Рассмотрим в качестве примера смешанную задачу для однородного стержня (т.е. $n = 1$) с парой граничных условий первого и второго рода и нулевыми начальными данными:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) \\ u(x_0, t) &= \mu(t), \quad -u_x(x_1, t) = \nu(t) \\ u(x, 0) &\equiv 0, \quad u_t(x, 0) \equiv 0 \quad x \in [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Для простоты можем считать, что задача решается на бесконечном промежутке времени $t \geq 0$, в противном случае продолжим задачу, доопределив граничные условия при $t > T$ с сохранением класса функций. Решение однородного волнового уравнения может быть представлено в виде бегущих волн, аргументы которых выберем специфичным образом (в соответствии с (1.14)) и избавимся от лишних в данном случае индексов

$$u(x, t) = U\left(t - \frac{x - x_0}{a}\right) + \tilde{U}\left(t + \frac{x - x_1}{a}\right). \quad (3.1)$$

Выбор непрерывных функций $U(t)$, $\tilde{U}(t)$ однозначен с точностью до добавления константы, однако благодаря однородным начальным данным можно и этот выбор зафиксировать. Из однородных начальных данных имеем

$$\begin{aligned} -U'\left(-\frac{x - x_0}{a}\right) + \tilde{U}'\left(\frac{x - x_1}{a}\right) &= au_x(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ U'\left(-\frac{x - x_0}{a}\right) + \tilde{U}'\left(\frac{x - x_1}{a}\right) &= u_t(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1], \end{aligned}$$

принимая также во внимание

$$U\left(-\frac{x - x_0}{a}\right) + \tilde{U}\left(\frac{x - x_1}{a}\right) = u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_1],$$

мы можем заключить, что

$$U(t) = c \quad \tilde{U}(t) = -c, \quad t \in [-t_1, 0],$$

где c — некоторая константа, $t_1 = (x_1 - x_0)/a$ — время прохождения волны по стержню. Положив $c = 0$, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между решениями волнового уравнения $u(x, t)$ с однородными начальными данными и парой функций $U, \tilde{U}$, удовлетворяющих условию

$$U(t) = 0 \quad \tilde{U}(t) = 0, \quad t \in [-t_1, 0].$$

Для простоты продолжим функции U и $\tilde{U}$ нулем при $t < -t_1$.

Распишем граничные условия в терминах бегущих волн

$$\begin{aligned} \mu(t) &= u(x_0, t) = \tilde{U}(t - t_1) + U(t) & t \geq 0 \\ -\nu(t) &= u_x(x_1, t) = \frac{1}{a}\tilde{U}'(t) - \frac{1}{a}U'(t - t_1) & t \geq 0 \end{aligned}$$

Учитывая, что $U(t) = \tilde{U}(t) = 0$ при $t \leq 0$, проинтегрировав второе уравнение, получим равенства на всей прямой

$$\begin{aligned} U(t) &= -\tilde{U}(t - t_1) + \underline{\mu}(t) \\ \tilde{U}(t) &= U(t - t_1) + \underline{\nu}(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где введены обозначения для функций в правой части:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mu(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad \underline{\nu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -a \int_0^t \nu(\tau) d\tau & t \geq 0 \end{cases}.$$

Обратим внимание, что система (3.2) верна также при $t \leq 0$. С использованием оператора сдвига, можно записать систему следующим образом

$$\begin{aligned} U &= -P_{t_1} \tilde{U} + \underline{\mu} \\ \tilde{U} &= P_{t_1} U + \underline{\nu}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Примечательно, что выражения $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ представляют собой профили волн, порождаемых граничными условиями. Рассмотрим, например, волновое уравнение на полуоси $(-\infty, x_1]$ и избавимся от левого граничного условия, оставив только правое:

$$-u_x(x_1, t) = \nu(t),$$

полубесконечный стержень будем снова считать изначально покоящимся. Тогда возбужденные единственным граничным условием колебания будут иметь вид

$$u(x, t) = \underline{\nu}\left(t + \frac{x - x_1}{a}\right),$$

и подобная ситуация является общей: в правой части системы (3.3) (или аналогичной ей) будут находиться функции, описывающие волны, порожденные отдельными граничными условиями.

Введя матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и воспользовавшись оператором $\tilde{P}$, действующим в пространстве V^2 , можем записать:

$$C\tilde{P} \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} P_{t_1} U \\ P_{t_1} \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{t_1} \tilde{U} \\ P_{t_1} U \end{bmatrix},$$

упростим систему (3.3) (I — тождественный оператор):

$$(I - C\tilde{P}) \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Покажем, что решение этой системы представляется рядом Неймана¹

$$\begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^n \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Пространство V^2 является полным, а действующий в нем оператор $C\tilde{P}$ сжимающим (что было доказано в общем случае, см. лемму (1.5)), проверим это для рассматриваемого частного случая

$$\begin{aligned} \rho_2(C\tilde{P}x, 0) &= \max \left[\rho \left((C\tilde{P}x)_1, 0 \right), \rho \left((C\tilde{P}x)_2, 0 \right) \right] = \\ &= \max [\rho(-P_{t_1}x_2, 0), \rho(P_{t_1}x_1, 0)] = e^{-t_1} \max [\rho(x_2, 0), \rho(x_1, 0)] = e^{-t_1} \rho_2(x, 0). \end{aligned}$$

Отсюда²

$$\rho_2 \left(C\tilde{P}x + \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, C\tilde{P}y + \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} \right) = \rho_2(C\tilde{P}(x - y), 0) = e^{-t_1} \rho_2(x - y, 0) = e^{-t_1} \rho_2(x, y).$$

Введя обозначения для вектора из искомых функций и отображения в правой части

$$y = \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} \in V^2 \quad D(y) = C\tilde{P}y + \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix},$$

¹ Это бы следовало непосредственно, если бы пространство было полным нормированным, и оператор CP был сжимающим в этой норме, однако пространство V^2 лишь полное метрическое.

² Заметим, что отображение $x \rightarrow CPx$ является сжимающим тогда и только тогда, когда отображение $x \rightarrow CPx + v$, где v — некоторый заданный вектор, также является сжимающим: $\rho_{2n}(CPx, CPy) = \rho_{2n}(CPx + v, CPy + v)$, поэтому исследовать достаточно только первый.

перепишем уравнение (3.4) в следующей форме

$$y = C\tilde{P}y + \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} = D(y),$$

где стоящий в правой части оператор $D(y)$ является сжимающим.

Из принципа сжимающих отображений [53, стр. 75] следует, что уравнение (3.4) имеет, и притом единственное, решение и итерационная последовательность с произвольным $y^0 \in V^2$

$$y^k = C\tilde{P}y^{k-1} + \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

сходится к этому решению. Рассмотрим элементы итерационной последовательности с нулевым начальным приближением $y^0 = 0$:

$$y^1 = \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, \quad y^2 = \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} + C\tilde{P} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, \quad y^3 = \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} + C\tilde{P} \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} + (C\tilde{P})^2 \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, \dots$$

$$y^k = \sum_{m=0}^{k-1} (C\tilde{P})^m \begin{bmatrix} \mu \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность y^k состоит из частичных сумм ряда Неймана (3.5) и сходится к решению (3.3), соответственно и ряд Неймана сходится к единственному решению (3.3).

Замечание 3.1. Решение в виде ряда Неймана (3.5) допускает следующую простую трактовку: каждое слагаемое в нем включает в себя волны, полученные после m отражений. То есть слагаемое $m = 0$ содержит волны, порожденные граничными условиями, слагаемое $m = 1$ содержит волны, порожденные после первого отражения, $m = 2$ — после двух отражений, и т.д. В общем случае слагаемое, входящее в ряд (2.16), содержит волны, полученные после m преломлений или отражений (от границы или стыка).

В качестве второго примера рассмотрим систему с двумя граничными условиями третьего рода (при $h_1, h_2 > 0$)

$$u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \mu(t) \quad u_x(x_1, t) + h_2 u(x_1, t) = -\nu(t).$$

Решение снова представляется в виде бегущих волн (3.1) (которые снова продолжим нулем при $t < -t_1$, больше не будем на этом заострять внимание). Накладываемые граничными условиями ограничения на функции $U(t)$ и $\tilde{U}(t)$ выглядят следующим образом:

$$u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \frac{1}{a} \left(-U'(t) + \tilde{U}'(t - t_1) \right) - h_1 \left(U(t) + \tilde{U}(t - t_1) \right) = \mu(t)$$

$$u_x(x_1, t) + h_2 u(x_1, t) = \frac{1}{a} \left(-U'(t - t_1) + \tilde{U}'(t) \right) + h_2 \left(U(t - t_1) + \tilde{U}(t) \right) = -\nu(t).$$

Проинтегрировав получившиеся дифференциальные уравнения первого порядка, получим:

$$U(t) = \tilde{U}(t - t_1) + \int_0^t \left(-2h_1 a \tilde{U}(t - t_1 - \tau) - a\mu(t - \tau) \right) e^{-h_1 a \tau} d\tau$$

$$\tilde{U}(t) = U(t - t_1) + \int_0^t \left(-2h_2 a U(t - t_1 - \tau) - a\nu(t - \tau) \right) e^{-h_2 a \tau} d\tau.$$

Продолжим функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ нулем при $t < 0$, тогда эти выражения можно значительно упростить, используя операцию свертки:

$$U = P_{t_1} \left(\tilde{U} - 2h_1 a \tilde{U} * \theta(t) e^{-h_1 a t} \right) - a\mu * \theta(t) e^{-h_1 a t}$$

$$\tilde{U} = P_{t_1} \left(U - 2h_2 a U * \theta(t) e^{-h_2 a t} \right) - a\nu * \theta(t) e^{-h_2 a t}.$$

Снова обозначим фигурирующие в правых частях известные функции через $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$:

$$\underline{\mu} = -a\mu * \theta(t) e^{-h_1 a t} \quad \underline{\nu} = -a\nu * \theta(t) e^{-h_2 a t}.$$

Воспользуемся введенным оператором E_β , тогда равенства можно записать следующим образом:

$$U = P_{t_1} E_{h_1 a} \tilde{U} + \underline{\mu} = E_{h_1 a} P_{t_1} \tilde{U} + \underline{\mu}$$

$$\tilde{U} = P_{t_1} E_{h_2 a} U + \underline{\nu} = E_{h_2 a} P_{t_1} U + \underline{\nu}.$$

Снова можно ввести матрицу C , в данном случае содержащую операторы

$$C = \begin{bmatrix} 0 & E_{h_1 a} \\ E_{h_2 a} & 0 \end{bmatrix}$$

и, убедившись, что оператор $C\tilde{P}$ сжимающий, записать с его помощью решение:

$$C\tilde{P} \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{h_1 a} P_{t_1} \tilde{U} \\ E_{h_2 a} P_{t_1} U \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим на сей раз составной стержень, состоящий из трех участков, на который с двух сторон наложим граничные условия Дирихле

$$u(x_0, t) = \mu(t) \quad u(x_3, t) = \nu(t).$$

Будем считать что на стыке $x = x_1$ между первым и вторым участком стержня присутствует точечная масса $m_1 > 0$,

$$\begin{aligned} u(x_1 - 0, t) &= u(x_1 + 0, t) \\ m_1 u_{tt}(x_1, t) &= k_2 u_x(x_1 + 0, t) - k_1 u_x(x_1 - 0, t), \end{aligned}$$

а на стыке $x = x_2$ масса отсутствует

$$\begin{aligned} u(x_2 - 0, t) &= u(x_2 + 0, t) \\ 0 &= k_3 u_x(x_2 + 0, t) - k_2 u_x(x_2 - 0, t). \end{aligned}$$

Решение представимо в виде бегущих волн $U_i, \tilde{U}_i$ (которые продолжим нулем при $t < -t_i$)

$$u(x, t) = \begin{cases} U_1(t - \frac{x-x_0}{a_1}) + \tilde{U}_1(t + \frac{x-x_1}{a_1}) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \tilde{U}_2(t - \frac{x-x_1}{a_2}) + U_2(t + \frac{x-x_2}{a_2}) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ U_3(t - \frac{x-x_2}{a_3}) + \tilde{U}_3(t + \frac{x-x_3}{a_3}) & x_2 \leq x \leq x_3. \end{cases}$$

Граничные условия накладывают следующие ограничения на функции $U_i, \tilde{U}_i$

$$U_1(t) + \tilde{U}_1(t - t_1) = \mu(t)$$

$$\tilde{U}_3(t) + U_3(t - t_3) = \nu(t).$$

Введя обозначения для волн, порожденных граничными условиями

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mu(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad \underline{\nu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \nu(t) & t \geq 0 \end{cases},$$

запишем уравнения в следующем виде

$$\begin{aligned} U_1 &= -P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} \\ \tilde{U}_3 &= -P_{t_3} U_3 + \underline{\nu}. \end{aligned}$$

Выпишем в терминах $U_i, \tilde{U}_i$ условия сопряжения на стыке x_1 :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(t) + U_1(t - t_1) &= \tilde{U}_2(t) + U_2(t - t_2) \\ m_1 \left(\tilde{U}_1''(t) + U_1''(t - t_1) \right) &= \frac{k_2}{a_2} \left(U_2'(t - t_2) - \tilde{U}_2'(t) \right) - \frac{k_1}{a_1} \left(\tilde{U}_1'(t) - U_1'(t - t_1) \right) \end{aligned}$$

Заметим, что имеющиеся в решении волны $\tilde{U}_1(t + \frac{x-x_1}{a_1})$ и $\tilde{U}_2(t - \frac{x-x_1}{a_2})$ двигаются от стыка x_1 , а волны $U_1(t - \frac{x-x_0}{a_1})$ и $U_2(t + \frac{x-x_2}{a_2})$ набегают на стык. Выразим профили $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_2$ убегających волн через профили U_1, U_2 набегающих.

Поскольку $U_1(t) = \tilde{U}_1(t) = 0$ при $t \leq 0$, то, проинтегрировав второе уравнение и приняв во внимание, что $z_i = k_i/a_i$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(t) + U_1(t - t_1) &= \tilde{U}_2(t) + U_2(t - t_2) \\ m_1 \left(\tilde{U}_1'(t) + U_1'(t - t_1) \right) &= z_2 \left(U_2(t - t_2) - \tilde{U}_2(t) \right) - z_1 \left(\tilde{U}_1(t) - U_1(t - t_1) \right).\end{aligned}$$

Исключим из системы $\tilde{U}_2$:

$$\begin{aligned}m_1 \left(\tilde{U}_1'(t) + U_1'(t - t_1) \right) &= z_2 \left(2U_2(t - t_2) - \tilde{U}_1(t) - U_1(t - t_1) \right) - z_1 \left(\tilde{U}_1(t) - U_1(t - t_1) \right) \\ m_1 \tilde{U}_1'(t) + (z_1 + z_2) \tilde{U}_1(t) &= (z_1 - z_2) U_1(t - t_1) + 2z_2 U_2(t - t_2) - m_1 U_1'(t - t_1).\end{aligned}$$

Решив дифференциальное уравнение относительно $\tilde{U}_1$ (удобно при этом считать, что функции U_1, U_2 известны), получим

$$\tilde{U}_1(t) = \frac{2z_1}{m_1} P_{t_1} U_1 * \theta(t) \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{m_1} t\right) - P_{t_1} U_1 + \frac{2z_2}{m_1} P_{t_2} U_2 * \theta(t) \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{m_1} t\right).$$

Для записи решения воспользуемся введенными операторами отражения и преломления

$$\tilde{U}_1 = \hat{R}_{12} P_{t_1} U_1 + \hat{T}_{21} P_{t_2} U_2.$$

Аналогично, исключив из системы $\tilde{U}_1$

$$m_1 \left(\tilde{U}_2'(t) + U_2'(t - t_2) \right) = z_2 \left(U_2(t - t_2) - \tilde{U}_2(t) \right) - z_1 \left(\tilde{U}_2(t) + U_2(t - t_2) - 2U_1(t - t_1) \right)$$

и разрешив уравнение относительно $\tilde{U}_2$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(t) &= \frac{2z_2}{m_1} P_{t_2} U_2(t) * \theta(t) \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{m_1} t\right) - P_{t_2} U_2 + \frac{2z_1}{m_1} P_{t_1} U_1 * \theta(t) \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{m_1} t\right) \\ \tilde{U}_2 &= \hat{T}_{12} P_{t_1} U_1 + \hat{R}_{21} P_{t_2} U_2.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим безмассовый стык x_2 , условия сопряжения в котором принимают вид

$$\begin{aligned}U_2(t) + \tilde{U}_2(t - t_2) &= U_3(t) + \tilde{U}_3(t - t_3) \\ 0 &= z_3 \left(\tilde{U}_3'(t - t_3) - U_3'(t) \right) - z_2 \left(U_2'(t) - \tilde{U}_2'(t - t_2) \right).\end{aligned}$$

На сей раз набегающими на стык являются волны $\tilde{U}_2$ и $\tilde{U}_3$, а U_2 и U_3 — расходящиеся от него волны. Проинтегрировав второе уравнение, получим

$$\begin{aligned}U_2(t) + \tilde{U}_2(t - t_2) &= U_3(t) + \tilde{U}_3(t - t_3) \\ 0 &= z_3 \left(\tilde{U}_3(t - t_3) - U_3(t) \right) - z_2 \left(U_2(t) - \tilde{U}_2(t - t_2) \right)\end{aligned}$$

Исключив U_3 из системы, можем выразить U_2 через профили $\tilde{U}_2, \tilde{U}_3$:

$$U_2 = \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3} P_{t_2} \tilde{U}_2 + \frac{2z_3}{z_2 + z_3} P_{t_3} \tilde{U}_3 = \hat{R}_{23} P_{t_2} \tilde{U}_2 + \hat{T}_{32} P_{t_3} \tilde{U}_3.$$

Аналогично получим

$$U_3 = \frac{z_3 - z_2}{z_2 + z_3} P_{t_3} \tilde{U}_3 + \frac{2z_2}{z_2 + z_3} P_{t_2} \tilde{U}_2 = \hat{R}_{32} P_{t_3} \tilde{U}_3 + \hat{T}_{23} P_{t_2} \tilde{U}_2.$$

В итоге мы пришли к следующей системе:

$$\begin{aligned} U_1 &= -P_{t_1} \tilde{U}_1 + \underline{\mu} \\ U_2 &= \hat{R}_{23} P_{t_2} \tilde{U}_2 + \hat{T}_{32} P_{t_3} \tilde{U}_3 \\ U_3 &= \hat{T}_{23} P_{t_2} \tilde{U}_2 + \hat{R}_{32} P_{t_3} \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_1 &= \hat{R}_{12} P_{t_1} U_1 + \hat{T}_{21} P_{t_2} U_2 \\ \tilde{U}_2 &= \hat{T}_{12} P_{t_1} U_1 + \hat{R}_{21} P_{t_2} U_2 \\ \tilde{U}_3 &= -P_{t_3} U_3 + \underline{\nu}, \end{aligned}$$

которую логично записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{R}_{23} & \hat{T}_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{T}_{23} & \hat{R}_{32} \\ \hat{R}_{12} & \hat{T}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{T}_{12} & \hat{R}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{t_1} U_1 \\ P_{t_2} U_2 \\ P_{t_3} U_3 \\ P_{t_1} \tilde{U}_1 \\ P_{t_2} \tilde{U}_2 \\ P_{t_3} \tilde{U}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}.$$

Обозначив матрицу системы через C , можем переписать в следующей форме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} = C \tilde{P} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Убедившись, что отображение $f(y) = C \tilde{P} y$ сжимающее, можем записать решение в виде ряда Неймана (обратим внимание, что полученный ряд совпадает с (2.16) с учетом вида векторов

p и q)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, метод получения решения смешанной задачи состоит в следующем:

1. Представить решение через бегущие волны.
2. Разрешить уравнения, накладываемые граничными условиями относительно волн, бегущих от границы.
На левом конце это даст выражение U_1 через $\tilde{U}_1$ и граничное условие μ .
На правом конце при нечетном числе участков n это даст выражение для $\tilde{U}_n$ через U_n и ν , а при четном — для U_n через $\tilde{U}_n$ и ν .
3. В точках стыка $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ выразить волны, бегущие от стыка через бегущие к нему.
В точках стыка x_i при нечетном i это даст выражение функций $\tilde{U}_i, \tilde{U}_{i+1}$ через функции U_i, U_{i+1} , а при четном i — выражение для U_i, U_{i+1} через функции $\tilde{U}_i, \tilde{U}_{i+1}$.
4. Записать полученную систему равенств в векторном виде. Если отображение в правой части сжимающее в метрике пространства V^{2n} , то решение может быть получено как предел итерационной последовательности. Если полученное уравнение имеет вид $x = Ax + b$ со сжимающим линейным оператором A , то решение представимо в виде ряда Неймана.

В статье [75] продемонстрирована применимость подобного подхода с небольшими модификациями к широкому классу граничных условий.

Замечание 3.2. При моделировании колебаний значительно эффективнее численно решать систему уравнений на одномерные функции $U_i, \tilde{U}_i$ (подобную системе (3.6)), чем решать двумерное волновое уравнение. Подобный подход использовался при моделировании линеаризованного гемодинамического уравнения на графе [15], решение которого также представимо в виде пары бегущих волн.

Глава 4

Оптимальное управление колебаниями составного стержня

В настоящей главе найдем оптимальные граничные управления колебаниями составного стержня для частных случаев. Полученные результаты опираются на явный вид решения смешанной задачи, полученный в главе 2.

В дальнейшем существенно сузим класс рассматриваемых систем. Рассмотрим, как и прежде, составной стержень, но откажемся от точечных нагрузок в точках стыка. Будем считать, что на концах стержня наложены граничные условия первого рода. Наложим ещё одно условие: время прохождения сигнала по каждому из участков должно быть одинаковым, обозначим его через s :

$$s = \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание 4.1. Условие равенства времени прохождения не настолько ограничительное, как может показаться, поскольку случай рациональных отношений времен прохождения может быть сведен к рассматриваемому. А именно, предположим, что t_i — взаимно рациональные числа для $i = 1, 2, \dots, n$. В таком случае существует величина s , являющаяся делителем каждого из них.

$$t_i = k_i s, \quad k_i \in \mathbb{N} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Мысленно разделив i -тый участок на k_i равных по длине частей ($i = 1, 2, \dots, n$), мы получим стержень, с одинаковым временем прохождения сигнала по каждому из участков, сведя таким образом задачу к изучаемому случаю.

4.1. Постановка задач о возбуждении колебаний при помощи граничного управления

В дальнейшем будем рассматривать следующие две задачи граничного управления:

Задача граничного управления I. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые переводят изначально покоящийся стержень в конечное состояние

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad x \in [x_0, x_n] \quad (4.1)$$

за промежуток времени T .

Задача граничного управления II. Будем полагать правый конец зафиксированным, т.е. функция $\nu(t)$, имеющая смысл смещения правого конца стержня, полагается нулевой: $\nu(t) \equiv 0$. Требуется найти управление $\mu(t)$, переводящее стержень из состояния покоя в конечное состояние (4.1), подчиненное условию согласования $\varphi(x_n) = 0$.

В обоих случаях предполагаем, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, описывающие соответственно профиль струны и профиль её скорости в конечный момент времени, лежат в следующих классах

$$\varphi(x) \in W_2^1[x_0, x_n] \quad \psi(x) \in L_2[x_0, x_n].$$

Также в обеих задачах ищутся такие функции граничного управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые допустимы с точки зрения соответствующей смешанной задачи, в рассматриваемом случае граничных управлений первого рода это означает, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ лежат в классе $W_2^1[0, T]$ и согласованы с начальными данными: $\mu(0) = \nu(0) = 0$.

При достаточно большом времени управления T решение задач управления неединственно, поэтому актуальным становится вопрос об отыскании оптимальных. Следуя работам В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, будем понимать под оптимальными решениями те, которые минимизируют следующий функционал, называемый интегралом граничной энергии:

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt + \int_0^T (\nu'(t))^2 dt. \quad (4.2)$$

Поскольку в задаче граничного управления II управление на правом конце положено нулевым $\nu(t) \equiv 0$, то интеграл граничной энергии будет равен

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt. \quad (4.3)$$

4.2. Решение задачи о возбуждении колебаний в частном случае

Перепишем решение, полученное в главе 2 с учетом ограничений, наложенных при формулировке задач управления.

Утверждение 4.1. Предположим, что все времена прохождения сигнала по отдельным участкам равны между собой и обозначим время прохождения по одному участку через s

$$t_i = s \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда оператор запаздывания $\tilde{P}$ коммутирует с умножением на матрицу C :

$$\tilde{P}Cx = C\tilde{P}x \quad \forall x \in V^{2n}.$$

Доказательство. Проверяется непосредственно. Пусть $x \in V^{2n}$, оператор запаздывания $\tilde{P}$ действует на каждую компоненту оператором $P_{t_i} = P_s$

$$(\tilde{P}Cx)_i = P_s(Cx)_i = P_s \sum_{j=1}^{2n} c_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{2n} P_s c_{ij}x_j.$$

Воспользуемся возможностью переставлять P_s и c_{ij} (это возможно независимо от того, является ли c_{ij} числом или одним из операторов R_{left} , R_{right} , $\hat{R}_{ij}$, $\hat{T}_{ij}$, поскольку последние по утверждению (1.7) коммутируют с оператором запаздывания).

$$(\tilde{P}Cx)_i = \sum_{j=1}^{2n} P_s c_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij}P_s x_j = (C\tilde{P}x)_i,$$

что и требовалось. □

Если времена t_i равны, то выражение (2.16), определяющее функции U_i , $\tilde{U}_i$, можно переписать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (C\tilde{P})^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}] = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m \tilde{P}^m [p\underline{\mu} + q\underline{\nu}] =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} C^m [p(P_s^m \underline{\mu}) + q(P_s^m \underline{\nu})] = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m [p(P_{ms} \underline{\mu}) + q(P_{ms} \underline{\nu})].$$

Если помимо равенства времен потребовать, чтобы использовались только граничные управления первого рода, а в точках стыка отсутствовали массы

$$m_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

то операторы $\hat{R}_{ij}$, $\hat{T}_{ij}$, $\hat{R}_{left}$ и $\hat{R}_{right}$ действуют умножением на число и, соответственно, могут быть заменены на число: операторы $\hat{R}_{left}$ и $\hat{R}_{right}$ будут заменены на -1 , а операторы отражения $\hat{R}_{ij}$ и преломления $\hat{T}_{ij}$ будут заменены соответственно на коэффициенты отражения $R_{ij} = \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}$ и преломления $T_{ij} = \frac{2z_i}{z_i + z_j}$. Тогда в матрице C будут стоять только числа. С учетом этого формула (2.16), определяющая функции U_i , $\tilde{U}_i$, может быть записана как (здесь

C — числовая матрица)

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_n(t) \\ \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \dots \\ \tilde{U}_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m [\underline{\mu}(t - ms)p + \underline{\nu}(t - ms)q] = \sum_{m=0}^{\lceil t/s \rceil - 1} C^m [\mu(t - ms)p + \nu(t - ms)q]. \quad (4.4)$$

В последнем равенстве мы использовали тот факт, что при граничных условиях первого рода на обоих концах функции $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$ совпадают с функциями μ и ν на сегменте $[0, T]$ и равны нулю при $t \leq 0$, поэтому слагаемые с номерами $m \geq \lceil t/s \rceil$ мы можем отбросить:

$$t - ms \leq t - \left\lceil \frac{t}{s} \right\rceil s \leq t - \frac{t}{s}s \leq 0.$$

4.3. Приведение задач граничного управления к эквивалентному виду

Теперь нашей задачей является выразить требование (4.1) в терминах функций $U_i, \tilde{U}_i$ (равенство справедливо при $x \in [x_{i-1}, x_i]$).

$$\varphi(x) = u(x, T) = \begin{cases} U_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при нечетных } i \\ \tilde{U}_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при четных } i. \end{cases} \quad (4.5)$$

Продифференцируем это равенство ($x \in [x_{i-1}, x_i]$)

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{a_i} U'_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \frac{1}{a_i} \tilde{U}'_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при нечетных } i \\ -\frac{1}{a_i} \tilde{U}'_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \frac{1}{a_i} U'_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при четных } i \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\psi(x) = u_t(x, T) = \begin{cases} U'_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}'_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при нечетных } i \\ \tilde{U}'_i(T - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U'_i(T + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при четных } i. \end{cases} \quad (4.7)$$

Отдельно рассмотрев четные и нечетные i , можно выразить U'_i и $\tilde{U}'_i$. Сделав замену переменной, придем к следующей эквивалентной форме записи системы (4.6)–(4.7):

$$U'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\tilde{U}'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases}, \quad (4.9)$$

где оба равенства должны быть выполнены¹ при $\tau \in [0, s]$. Только что было доказано следующее утверждение:

Утверждение 4.2. В представлении (2.11) для функции $u(x, t)$, удовлетворяющей финальным условиям (4.1), функции $U_i, \tilde{U}_i$ должны удовлетворять равенствам (4.8)–(4.9).

Обратим внимание, что полученные условия (4.8)–(4.9), вообще говоря, не равносильны условиям (4.1), а только следуют из них. Неравносильный переход был сделан при дифференцировании (4.5).

Утверждение 4.3. Если функции $U_i, \tilde{U}_i$ удовлетворяют равенствам (4.8)–(4.9), то функция $u(x, t)$, выражаемая через них при помощи формулы (2.11), удовлетворяет финальным условиям

$$u(x, T) = \varphi(x) + c, \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad x \in [x_0, x_n], \quad (4.10)$$

то есть в конечный момент времени стержень будет находиться в необходимом состоянии с точностью до некоторого глобального сдвига c .

Доказательство. Из представления (2.11) следует, что выражения в правых частях (4.6)–(4.7) соответственно равны $u_x(x, T)$ и $u_t(x, T)$. Поскольку система (4.8)–(4.9) эквивалентна системе (4.6)–(4.7), то заключаем что $\psi(x) = u_t(x, T)$, $\varphi'(x) = u_x(x, T)$. Интегрируя второе равенство, получаем $u(x, T) = \varphi(x) + c$. $\square$

Утверждение 4.4. В задаче граничного управления II решение $u(x, t)$ удовлетворяет финальным условиям (4.1) тогда и только тогда, когда выполнено (4.8)–(4.9).

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 4.2, обоснуем достаточность: из предыдущего утверждения следует, что выполнено

$$u(x, T) = \varphi(x) + c, \quad u_t(x, T) = \psi(x), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Из доказательства леммы 2.10 следует, что граничные условия $u(x_0, t) = \mu(t)$, $u(x_n, t) = \nu(t)$ выполнены. Поскольку правый конец закреплен, то $u(x_n, T) = \nu(T) = 0$. В то же время

¹ Обратим внимание, что функции, стоящие справа и слева в равенствах (4.6)–(4.9), принадлежат классу L_2 , поэтому понимается выполнение указанных равенств почти всюду. В дальнейшем, не оговаривая отдельно, будем считать, что равенства между элементами класса L_2 подразумеваются как равенства почти всюду.

при рассмотрении задачи граничного управления II ставится требование $\varphi(x_n) = 0$, а значит сдвиг $c = 0$ и финальные условия (4.1) выполнены. $\square$

Для задачи управления I сдвиг в конечный момент времени не зафиксирован, поэтому требуется наложить некоторое дополнительное условие, которое будем называть условием согласования.

Предположим, что выполнены условия со сдвигом (4.10) и рассмотрим следующее выражение

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) + 2c = u(x_0, T) + u(x_n, T) = \mu(T) + \nu(T).$$

Последнее равенство следует из выполнения граничных условий. Таким образом, в предположении (4.10) получили следующее равенство

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) + 2c = \mu(T) + \nu(T). \quad (4.11)$$

Предположив, что справедливы финальные условия без сдвига (4.1), получаем условие согласования

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) = \mu(T) + \nu(T) \quad (4.12)$$

Утверждение 4.5. В задаче граничного управления I решение удовлетворяет условиям (4.1) тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия (4.8)–(4.9) и условие согласования (4.12).

Доказательство. Докажем необходимость. Если решение удовлетворяет финальным условиям (4.1), то из утверждения 4.2 следует выполнение (4.8)–(4.9), из предыдущих выкладок также следует, что условие согласования (4.12) выполнено.

Обоснуем достаточность. Предположим, что выполнены условия (4.8)–(4.9) и условие согласования (4.12), тогда по утверждению 4.3 справедливы финальные условия (4.10) со сдвигом c , из которых следует выполнение равенства (4.11). Поскольку по предположению также выполнено условие согласования без сдвига (4.12), заключаем, что сдвиг нулевой $c = 0$, а значит выполнены условия (4.1). $\square$

Функции в правых частях (4.8)–(4.9) могут быть непосредственно вычислены из финальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, для краткости обозначим их через $\alpha_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$), тогда уравнения (4.8)–(4.9) примут вид

$$U'_i(T - \tau) = \alpha_i(\tau) \quad \tilde{U}'_i(T - \tau) = \alpha_{n+i}(\tau) \quad \tau \in [0, s], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что функции $U_i, \tilde{U}_i$ при принятых в настоящей главе ограничениях определяются через функции μ и ν при помощи формулы (4.4). Таким образом, требование (4.8)–(4.9) может быть сведено к следующему требованию на функции μ и ν при $\tau \in [0, s]$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(\tau) \\ \alpha_2(\tau) \\ \dots \\ \alpha_n(\tau) \\ \alpha_{n+1}(\tau) \\ \alpha_{n+2}(\tau) \\ \vdots \\ \alpha_{2n}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1(T - \tau) \\ U'_2(T - \tau) \\ \dots \\ U'_n(T - \tau) \\ \tilde{U}'_1(T - \tau) \\ \tilde{U}'_2(T - \tau) \\ \dots \\ \tilde{U}'_n(T - \tau) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\lceil (T-\tau)/s \rceil - 1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p + \nu'(T - \tau - ms)q]$$

Будем рассматривать такие промежутки времени T , которые кратны времени прохождения сигнала по одному участку: $T = ks$, $k \in \mathbb{N}$, поскольку в этом случае выкладки значительно короче. Введем обозначение $\bar{\alpha}(\tau)$ для вектора в левой части, составленного из значений функций $\alpha_i(\tau)$, условия (4.8)–(4.9) с учетом равенства $T = ks$ принимают вид

$$\bar{\alpha}(\tau) = \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p + \nu'(T - \tau - ms)q] \quad \tau \in [0, s]. \quad (4.13)$$

В дальнейшем будет удобно перейти к следующей эквивалентной форме представления функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ в виде системы функций из класса L_2 , каждая из которых задает их производную на некотором промежутке. Временной интервал разбивается на промежутки $[T - (m+1)s, T - ms]$, $m = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} \mu'(T - t - ms) &= \mu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s] \\ \nu'(T - t - ms) &= \nu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s]. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ равны нулю в начальный момент времени $t = 0$ и принадлежат классу $W_2^1[0, T]$, то введенные системы функций задают их взаимно однозначно. Теперь зададимся целью переформулировать задачу оптимизации в терминах функций μ_m , ν_m . Преобразуем условие (4.13):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\tau) &= \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p + \nu'(T - \tau - ms)q] = \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu_m(\tau)p + \nu_m(\tau)q] = \\ &= E_k [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T, \quad \tau \in [0, s], \end{aligned}$$

где матрица E_k размера $2n \times 2k$ имеет следующий вид в записи по столбцам:

$$E_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p, q, Cq, \dots, C^{k-1}q].$$

Для вектора в правой части также введем отдельное обозначение

$$\overline{\mu\nu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T. \quad (4.14)$$

И перепишем (4.13) в новую лаконичную форму:

$$\overline{\alpha}(\tau) = E_k \overline{\mu\nu}(\tau). \quad (4.15)$$

Напомним, что (4.13) равносильно условиям (4.8)–(4.9), т.е. перед нами ещё одна форма записи условий (4.8)–(4.9).

В задаче граничного управления II граничное управление на правом конце ν подразумевается нулевым, поэтому условие (4.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\tau) &= \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\underline{\mu}'(T - \tau - ms)p] = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu_m(\tau)p] = F_k [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T, \quad \tau \in [0, s] \end{aligned}$$

с матрицей $F_k \in \mathbb{R}^{2n \times k}$ следующего вида

$$F_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p].$$

Введя отдельное обозначение

$$\overline{\mu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T,$$

можем записать это же условие (равносильное (4.8)–(4.9))

$$\overline{\alpha}(\tau) = F_k \overline{\mu}(\tau). \quad (4.16)$$

Запишем также в новых терминах условие согласования (4.12):

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) + \varphi(x_n) &= \mu(T) + \nu(T) = \int_0^T [\mu'(t) + \nu'(t)] dt = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \int_0^s (\mu'(T - ms - \tau) + \nu'(T - ms - \tau)) d\tau = \int_0^s (\overline{\mu\nu}(\tau), e) d\tau, \end{aligned}$$

где введен вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ длины $2k$ и используется скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ для $x, y \in \mathbb{R}^m$. Таким образом, имеем следующее условие согласования

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) = \int_0^s (\overline{\mu\nu}(\tau), e) d\tau. \quad (4.17)$$

Выразим, наконец, интеграл граничной энергии (4.2) для задачи управления I через введенные функции

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt + \int_0^T (\nu'(t))^2 dt = \sum_{m=0}^{k-1} \int_0^s [(\mu'(T - \tau - ms))^2 + (\nu'(T - \tau - ms))^2] dt = \\ = \int_0^s (\overline{\mu\nu(\tau)}, \overline{\mu\nu(\tau)}) d\tau. \quad (4.18)$$

Для задачи граничного управления II

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt = \sum_{m=0}^{k-1} \int_0^s (\mu'(T - \tau - ms))^2 dt = \int_0^s (\bar{\mu}(\tau), \bar{\mu}(\tau)) d\tau. \quad (4.19)$$

Замечание 4.2. Обратим внимание, что полученные равенства (4.15), (4.16) позволяют сразу заключить, что при $k < n$ ($k < 2n$) отсутствует свойство полной управляемости (т.е. разрешимости при любых финальных условиях) для задачи I (задачи II). Поскольку ранг матрицы E_k (матрицы F_k) не превышает числа столбцов, то он меньше $2n$. Исходя из этого заключаем, что есть такие функции $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$, (и соответствующие им финальные данные), при которых равенство (4.15) (равенство (4.16)) становится неразрешимым.

4.4. Вспомогательные утверждения о матрицах

Займемся исследованием матрицы C , фигурирующей в решении, а также только что введенных матриц E_k и F_k . Несмотря на то, что элементы этих матриц вещественные, будет полезно рассматривать их как матрицы над полем комплексных чисел. Введем в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ (n — число участков в стержне) скалярное произведение

$$(x, y)_{zz} = \sum_{i=1}^n z_i (x_i \bar{y}_i + x_{n+i} \bar{y}_{n+i}) \quad x, y \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Напомним, что z_i — это импеданс i -того участка.

Утверждение 4.6. Матрица C унитарна относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{zz}$, не имеет кратных собственных значений, и вектора p и q раскладываются по её собственным векторам с ненулевыми коэффициентами.

Доказательство. Введем вспомогательное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$:

$$(x, y)_z = \sum_{i=1}^n z_i x_i \bar{y}_i$$

$$\begin{aligned}
(Cx, Cx)_{zz} &= \sum_{i=1}^n z_i \left[(Cx)_i \overline{(Cx)_i} + (Cx)_{n+i} \overline{(Cx)_{n+i}} \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n z_i (|(Cx)_i|^2 + |(Cx)_{n+i}|^2) = \\
&= \sum_{i=1}^n z_i \left(\left| \sum_{j=1}^n B_{ij} x_{n+j} \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right|^2 \right) = (Ax^1, Ax^1)_z + (Bx^2, Bx^2)_z,
\end{aligned}$$

где введены обозначения для векторов x^1, x^2 длины n , состоящих соответственно из n первых и n последних компонент вектора x . Убедимся в унитарности матриц A и B относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_z$. Унитарность последних можно доказать, например, пользуясь критерием унитарности: для этого достаточно показать, что операторы не изменяют скалярное произведение между любыми парами векторов из базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом, достаточно убедиться в справедливости равенств (где A^i, B^i — столбцы соответствующих матриц под номером i)

$$(A^i, A^j)_z = (B^i, B^j)_z = z_i \delta_{ij}.$$

Из вида матриц A и B и диагональности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_z$ очевидна ортогональность всех столбцов, кроме тех пар i и j , которые могут иметь ненулевые элементы в одинаковых позициях, т.е. таких, в которых стоит блок J_{ij} . Убедимся, что они ортогональны

$$(A^i, A^j)_z = \sum_{l=1}^n z_l A_{li} \overline{A_{lj}} = z_i R_{ij} T_{ji} + z_j R_{ji} T_{ij} = z_i \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j} \frac{2z_j}{z_i + z_j} + z_j \frac{z_j - z_i}{z_i + z_j} \frac{2z_i}{z_i + z_j} = 0.$$

Осталось проверить, что

$$(A^i, A^i)_z = (B^i, B^i)_z = z_i,$$

что не составляет сложности. Воспользовавшись унитарностью A и B , имеем

$$(Cx, Cx)_{zz} = (Ax^1, Ax^1)_z + (Bx^2, Bx^2)_z = (x^1, x^1)_z + (x^2, x^2)_z = (x, x)_{zz}.$$

Поскольку матрица C унитарна, то мы можем выбрать ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$, состоящий из собственных векторов матрицы C :

$$\begin{aligned}
C f_i &= \lambda_i f_i, \quad |\lambda_i| = 1 \\
(f_i, f_j)_{zz} &= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Разложение любого вектора (в частности, p) происходит по известным формулам:

$$p = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i f_i \quad \alpha_i = (p, f_i)_{zz}.$$

Покажем, что среди коэффициентов разложения α_i нет нулевых: $(p, f_i)_{zz} \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, 2n$. Напомним, что вектор p — это базисный вектор e_1 с ненулевой первой компонентой,

$$(p, f_i)_{zz} = (e_1, f_i)_{zz} = z_1 (f_i)_1 \quad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

поэтому достаточно показать, что собственные вектора оператора C не могут иметь нулевой первую компоненту. Предположим противное, т.е. имеется ненулевой собственный вектор g :

$$Cg = \lambda g, \quad g \neq 0 \quad |\lambda| = 1$$

с нулевой первой компонентой $g_1 = 0$. Из вида матрицы C , в которой на месте оператора $\hat{R}_{left}$ находится -1 , следует, что $\lambda g_1 = -g_{n+1} = 0$. Далее докажем по индукции, что $g_i = g_{n+i} = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. покажем, что вектор g нулевой, тем самым придя к противоречию. База индукции $i = 1$ доказана. Положим, что для некоторого i доказано $g_i = g_{n+i} = 0$. При нечетных i справедливо

$$\lambda g_{n+i} = (Cg)_{n+i} = R_{i,i+1}g_i + T_{i+1,i}g_{i+1} = T_{i+1,i}g_{i+1}$$

$$\lambda g_{n+i+1} = (Cg)_{n+i+1} = T_{i,i+1}g_i + R_{i+1,i}g_{i+1} = R_{i+1,i}g_{i+1}.$$

Поскольку коэффициент преломления положителен, то из первого равенства заключаем $g_{i+1} = 0$, а из второго $g_{n+i+1} = 0$. Аналогично для четных i

$$\lambda g_i = (Cg)_i = R_{i,i+1}g_{n+i} + T_{i+1,i}g_{n+i+1} = T_{i+1,i}g_{n+i+1}$$

$$\lambda g_{i+1} = (Cg)_{i+1} = T_{i,i+1}g_{n+i} + R_{i+1,i}g_{n+i+1} = R_{i+1,i}g_{n+i+1}.$$

заключаем, что $g_{i+1} = g_{n+i+1} = 0$. Таким образом, вектор g нулевой, и мы пришли к противоречию. У матрицы C нет собственных векторов с нулевой первой компонентой и все коэффициенты в разложении p ненулевые. Аналогичные рассуждения могут быть проделаны для q .

Из последнего получаем, что у матрицы C также нет кратных собственных значений, в противном случае существовали бы два линейно независимых собственных вектора, отвечающих одному собственному значению и существовала бы их линейная комбинация (также являющаяся собственным вектором) с нулевой первой компонентой. $\square$

Замечание 4.3. Унитарность матрицы C относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{zz}$ тесно связана с сохранением энергии в стержне, если к последнему не прилагается внешнее воздействие.

Утверждение 4.7. Матрица F_k при $k \geq 2n$ имеет полный ранг, равный $2n$.

Доказательство. Рассмотрим представление матрицы F_k по столбцам:

$$F_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p].$$

Поскольку при $k \geq 2n$ подматрица F_k , состоящая из первых $2n$ столбцов совпадает с матрицей F_{2n} , то $\text{rank } F_{2n} \leq \text{rank } F_k \leq 2n$. Поэтому достаточно доказать, что матрица F_{2n} невырождена. Матрица F_{2n} является матрицей Крылова, для которых справедливо следующее легко проверяемое утверждение [6]: если матрица C является матрицей простой структуры без кратных собственных значений и вектор p раскладывается по её собственным векторам с ненулевыми коэффициентами, то матрица F_{2n} является невырожденной. $\square$

Утверждение 4.8. Матрица E_k при $k \geq n$ имеет полный ранг, равный $2n$.

Доказательство. Рассмотрим представление матрицы E_k по столбцам:

$$E_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p, q, Cq, \dots, C^{k-1}q].$$

Вновь достаточно доказать, что матрица E_n имеет полный ранг, потому что при $k \geq n$ матрица E_k имеет подматрицу, равную E_n . Докажем, что все столбцы матрицы E_n линейно независимы

$$E_n = [p, Cp, \dots, C^{n-1}p, q, Cq, \dots, C^{n-1}q].$$

Из предыдущего утверждения следует, что первые n столбцов этой матрицы линейно независимы (т.к. они являются столбцами невырожденной матрицы F_{2n}). Аналогичными рассуждениями показывается, что последние n столбцов также линейно независимы.

Докажем, что подпространства $\mathbb{R}^{2n}$, натянутые на первые n векторов и на последние n векторов, ортогональны в скалярном произведении $(\cdot, \cdot)_{zz}$, из чего будет следовать линейная независимость всех $2n$ векторов. Достаточно показать, что

$$(C^i p, C^j q)_{zz} = 0 \quad \forall i, j \in \overline{0, n-1}. \quad (4.20)$$

Докажем это равенство при $j = 0$. По индукции доказывается следующее утверждение: $\forall i \in \overline{0, n-1}$ у вектора $C^i p$ ненулевыми могут быть только компоненты под номерами $1, 2, \dots, i+1$ при четных i и под номерами $n+1, n+2, \dots, n+i+1$ при нечетных i . Из этого утверждения непосредственно следует, что $(C^i p, q)_{zz} = 0 \quad i \in \overline{0, n-1}$.

Рассмотрим матрицу, обратную к матрице C :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Это блочное представление для матрицы C^{-1} следует из равенств $A^2 = B^2 = I$, которые в свою очередь следуют из легко проверяемого равенства $J_{ij}^2 = I$ для элементарных блоков 2×2 , стоящих на диагонали матриц A и B .

Можно также доказать аналогичное утверждение с участием матрицы C^{-1} : $\forall j \in \overline{0, n-1}$ у вектора $(C^{-1})^j p$ ненулевыми могут быть только компоненты под номерами $1, 2, \dots, j+1$ при четных j и под номерами $n+1, n+2, \dots, n+j+1$ при нечетных j . Получаем

$$(p, C^j q)_{zz} = (C^{-j} p, q)_{zz} = 0 \quad \forall j \in \overline{0, n-1}.$$

Первое равенство следует из унитарности матрицы C :

$$(Cx, Cy)_{zz} = (x, y)_{zz} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Таким образом равенство (4.20) было доказано для случаев $i = 0$ и $j = 0$. Из этого следует равенство при всех i и j , поскольку (в этой формуле $m = \min(i, j)$)

$$(C^i p, C^j q)_{zz} = (C^{i-m} p, C^{j-m} q)_{zz} = 0 \quad \forall i, j \in \overline{0, n-1}.$$

Таким образом, матрица E_k имеет $2n$ линейно независимых столбцов и утверждение доказано. $\square$

Утверждение 4.9. Выражение

$$((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e) \quad (4.21)$$

обращается в ноль при $k = n$ и отлично от нуля при $k > n$. Здесь используется уже введенный вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ длины $2k$.

Доказательство. При $k = n$ матрица E_k является квадратной невырожденной и утверждение проверяется тривиально.

Докажем, что выражение обращается в ноль, если и только если² $e \perp \text{Ker } E_k$. Как известно, $e = e_1 + e_2$, где $E_k e_1 = 0$, $e_2 = E_k^T e_3$, $e_1 \perp e_2$

$$\begin{aligned} ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) &= ((E_k E_k^T)^{-1} E_k (e_1 + e_2), E_k (e_1 + e_2)) = ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e_2, E_k e_2) = \\ &= ((E_k E_k^T)^{-1} E_k E_k^T e_3, E_k E_k^T e_3) = (e_3, E_k E_k^T e_3) = (E_k^T e_3, E_k^T e_3) = (e_2, e_2) \\ ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e) &= (e_2, e_2) - (e, e) = -(e_1, e_1). \end{aligned}$$

Задача свелась к доказательству того, что $e \not\perp \text{Ker } E_k$ при $k \geq n+1$. Поскольку E_k содержит все столбцы E_{n+1} , достаточно доказать утверждение только для E_{n+1} . Предположим

² Здесь и далее ортогональность подразумевается относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$

противное: $e \perp \text{Ker } E_{n+1}$, а значит существует вектор x : $e = E_{n+1}^T x$. Распишем это равенство покомпонентно

$$\begin{array}{ll} 1 = (p, x) & 1 = (q, x) \\ 1 = (Cp, x) & 1 = (Cq, x) \\ \dots & \dots \\ 1 = (C^n p, x) & 1 = (C^n q, x). \end{array}$$

Вычтем из каждой строки предыдущую, первую оставим без изменения

$$\begin{array}{ll} 1 = (p, x) & 1 = (q, x) \\ 0 = ((C - I)p, x) & 0 = ((C - I)q, x) \\ \dots & \dots \\ 0 = ((C - I)C^{n-1}p, x) & 0 = ((C - I)C^{n-1}q, x) \end{array}$$

и преобразуем полученную систему

$$\begin{array}{ll} 1 = (p, x) & 1 = (q, x) \\ 0 = (p, (C - I)^T x) & 0 = (q, (C - I)^T x) \\ \dots & \dots \\ 0 = (C^{n-1}p, (C - I)^T x) & 0 = (C^{n-1}q, (C - I)^T x). \end{array}$$

Как было установлено, система векторов $p, Cp, \dots, C^{n-1}p, q, Cq, \dots, C^{n-1}q$ линейно независимая, а значит образует базис в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, поэтому вектор $(C - I)^T x$, ортогональный каждому вектору системы, обязательно нулевой

$$(C - I)^T x = 0.$$

Имеем следующую систему

$$C^T x = x, \quad (p, x) = 1, \quad (q, x) = 1.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица C^T имеет следующий собственный вектор f , отвечающий собственному значению $\lambda = 1$:

$$f_i = (-1)^{i+1} \quad f_{n+i} = (-1)^i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку матрица C не имеет кратных собственных значений, то матрица C^T имеет только один собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, а значит $x = \gamma f$.

Подставим

$$\gamma (p, f) = (p, x) = 1$$

$$\gamma(q, f) = (q, x) = 1.$$

В то же время легко устанавливается, что $(p, f) = 1$, $(q, f) = -1$, значит полученная система неразрешима. Пришли к противоречию, а значит $e \notin \text{Ker } E_k$ и исходное утверждение доказано. $\square$

4.5. Решение задачи о возбуждении колебаний за кратные промежутки времени

Теорема 4.1. Пусть $T = ks$, при $k \geq 2n$ среди функций μ_m , удовлетворяющих условию (4.13), оптимальными в смысле энергии граничного управления являются функции, задаваемые соотношением

$$\bar{\mu}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau).$$

В силу утверждения 4.4, они определяют оптимальное решение задачи граничного управления II.

Доказательство. Как было показано, задача состоит в минимизации функции (4.19) при дополнительных условиях (4.8)–(4.9), которые принимает эквивалентную форму (4.16).

Функция Лагранжа для оптимизационной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(\bar{\mu}(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot)) = \int_0^s \left[(\bar{\mu}(\tau), \bar{\mu}(\tau)) + (\bar{\lambda}(\tau), F_k \bar{\mu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau)) \right] d\tau.$$

Метод множителей Лагранжа дает:

$$\begin{aligned} 2\bar{\mu}(\tau) + F_k^T \bar{\lambda}(\tau) &= 0 \\ F_k \bar{\mu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$F_k F_k^T \bar{\lambda}(\tau) = -2\bar{\alpha}(\tau).$$

Так как F_k имеет ранг $2n$, то матрица $F_k F_k^T$ — обратимая, чем мы воспользуемся

$$\bar{\lambda}(\tau) = -2(F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau)$$

$$\bar{\mu}(\tau) = -\frac{1}{2} F_k^T \bar{\lambda}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $T = ks$, при $k > n$ среди функций μ_m и ν_m , удовлетворяющих равенствам (4.8)–(4.9) и условию согласования (4.12), оптимальные в смысле минимизации интеграла граничной энергии определяются соотношениями

$$\overline{\mu\nu}(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_1(E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}E_k e - e) + E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau),$$

где константа λ_1 определяется из уравнения

$$\frac{1}{2}\lambda_1 s \left[((E_k E_k^T)^{-1}E_k e, E_k e) - (e, e) \right] = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau), e) d\tau.$$

Согласно утверждению 4.5, эти функции определяют оптимальное решение задачи I.

При $k = n$ решение задачи управления I единственно, существует тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau), e) d\tau = 0$$

и определяется формулой $\overline{\mu\nu}(\tau) = E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau)$.

Доказательство. Напомним, что интеграл граничной энергии был записана нами в виде (4.19), равенства (4.8)–(4.9) принимают эквивалентную форму (4.15), а условие согласования форму (4.17).

С учетом сказанного, функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\overline{\mu\nu}(\cdot), \overline{\lambda}(\cdot), \lambda_1) = & \int_0^s [(\overline{\mu\nu}(\tau), \overline{\mu\nu}(\tau)) + (\overline{\lambda}(\tau), E_k \overline{\mu\nu}(\tau) - \overline{\alpha}(\tau))] d\tau + \\ & + \lambda_1 \left[\int_0^s (\overline{\mu\nu}(\tau), e) d\tau - \varphi(x_0) - \varphi(x_n) \right]. \end{aligned}$$

Из правила множителей Лагранжа следует:

$$\begin{aligned} 2\overline{\mu\nu}(\tau) + E_k^T \overline{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e &= 0 \\ E_k \overline{\mu\nu}(\tau) - \overline{\alpha}(\tau) &= 0 \\ \int_0^s (\overline{\mu\nu}(\tau), e) d\tau - \varphi(x_0) - \varphi(x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

из первых двух равенств получаем:

$$E_k (E_k^T \overline{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e) = -2\overline{\alpha}(\tau).$$

В силу утверждения 4.8, матрица E_k имеет ранг $2n$, а значит $E_k E_k^T$ — обратима.

$$\overline{\lambda}(\tau) = (E_k E_k^T)^{-1}(-2\overline{\alpha}(\tau) - \lambda_1 E_k e)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mu\nu}(\tau) &= -\frac{1}{2}(E_k^T \bar{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e) = -\frac{1}{2}\lambda_1 e + E_k^T (E_k E_k^T)^{-1}(\bar{\alpha}(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_1 E_k e) = \\ &= \frac{1}{2}\lambda_1 (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k e - e) + E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau).\end{aligned}$$

Оставшуюся неизвестную постоянную находим из условия (4.22):

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k e - e, e) d\tau + \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau = \varphi(x_0) + \varphi(x_n)$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1 s [(E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e] - (e, e) = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau.$$

Как мы знаем, выражение в квадратных скобках отлично от нуля при $k > n$, из чего сразу вытекает вид решения. Отдельно рассмотрим случай $k = n$, когда матрица E_k становится квадратной невырожденной. При этом вектор $\bar{\mu\nu}(\tau)$ находится из уравнения (4.15): $\bar{\mu\nu}(\tau) = E_n^{-1} \bar{\alpha}(\tau) = E_n^T (E_n E_n^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau)$, т.е. решение единственно. Удовлетворяет это решение условию (4.17) тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) = \int_0^s (\bar{\mu\nu}(\tau), e) d\tau = \int_0^s (E_n^T (E_n E_n^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau,$$

что и требовалось. □

Замечание 4.4. Нами была решена задача о возбуждении, т.е. о переводе посредством граничного управления стержня из состояния покоя в произвольное состояние

$$u(x, T) = \varphi(x) \quad u_t(x, T) = \psi(x).$$

В приложениях чаще встречается задача об успокоении колебаний, т.е. о переводе стержня из произвольного состояния

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \quad v_t(x, 0) = \psi_1(x)$$

в состояние покоя. Однако для рассматриваемого уравнения упругих колебаний эти задачи легко сводятся друг к другу при помощи отображения

$$u(x, t) = v(x, T - t).$$

Нетрудно проверить, что при этом оптимальные граничные Дирихле-управления указанных двух задач с данными

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \quad \psi(x) = -\psi_1(x)$$

соотносятся следующим образом:

$$\mu(t) = \mu_1(T - t) \quad \nu(t) = \nu_1(T - t),$$

что позволяет получить в явном виде оптимальное граничное управление для задачи успокоения.

Заключение

Сформулируем основные результаты работы:

1. Рассмотрена смешанная задача, описывающая продольные колебания составного стержня с прикрепленными массами, с однородными начальными условиями. На концы стержня наложена произвольная пара граничных условий первого, второго или третьего рода. Для указанной задачи доказана единственность обобщенного решения и найден его явный вид.
2. Представлена процедура, приводящая к предъявленному виду решения смешанной задачи.
3. Рассмотрены задачи о возбуждении посредством граничных управлений колебаний в составном стержне без масс с равным временем прохождения сигнала по каждому из участков. Граничное управление производится смещением с двух концов или смещением с левого конца при закреплённом правом. Для достаточно больших промежутков времени, кратных времени прохождения сигнала по одному участку, предъявлены управления, оптимальные в смысле минимизации интеграла граничной энергии.

Литература

1. Ammari K., Jellouli M. Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings // Applications of Mathematics, 2007, т. 52, №. 4, с. 327–343.
2. Ammari K., Jellouli M., Khenissi M. Stabilization of generic trees of strings // Journal of Dynamical and Control Systems, 2005, т. 11, №. 2, с. 177–193.
3. Bardos C., Lebeau G., Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary // SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, т. 30, №. 5, с. 1024–1065.
4. Dáger R. Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings // SIAM Journal on Control and Optimization, 2004, т. 43, №. 2, с. 590–623.
5. Dáger R., Zuazua E. Spectral boundary controllability of networks of strings // Comptes Rendus Mathematique, 2002, т. 334, №. 7, с. 545–550.
6. Fasino D. Rational Krylov matrices and QR steps on Hermitian diagonal plus semiseparable matrices // Numerical linear algebra with applications, 2005, т. 12, № 8, с. 743–754.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
8. Lions J.L. Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review, 1988, Vol. 30, № 1. pp. 1–68.
9. Marica A., Zuazua E. On the Quadratic Finite Element Approximation of 1D Waves: Propagation, Observation, Control, and Numerical Implementation // The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Condition. – Birkhäuser Boston, 2013. – с. 75–99.
10. Schmidt E. J. P. G. On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings // SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, т. 30, №. 1, с. 229–245.
11. Soboleff S. Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales // Матем. сб., 1936, 1(43):1, с. 39–72.
12. Zuazua E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM review, 2005, т. 47, №. 2, с. 197–243.

13. Zuazua E. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-D wave equation // *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, 2004, т. 24, №. 2, с. 201–237.
14. Zuazua E. Control and stabilization of waves on 1-d networks // *Modelling and Optimisation of Flows on Networks*. – Springer Berlin Heidelberg, 2013. – с. 463–493.
15. Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П. Краевая задача для ЛГД уравнений на графе. – М.: МАКС Пресс, 2002. – 88 с.
16. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной I // *Дифференциальные уравнения*, 2007, т. 43, № 1., с. 64–89.
17. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной II // *Дифференциальные уравнения*, 2007, т. 43, № 5., с. 640–649.
18. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. – 474 с.
19. Васильев Ф.П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // *Дифференциальные уравнения*, 1995, т. 31, № 11, с. 1893–1900.
20. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.
21. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // *Вестник МГУ, сер. 15, вычислительная математика и кибернетика*, 1993, № 3, с. 8–15.
22. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: Макс пресс, 2010.
23. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
24. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2009, т. 49, № 5, с. 815–825.
25. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 2011, т. 17, № 1, с. 85–92.

26. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний системы последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами со свободными границами // Труды Московского физико-технического института, 2012, т. 4, № 4, с. 62–68.
27. Знаменская Л. Н. Управление упругими колебаниями. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.
28. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук, 1960, т. 15, вып. 2 (92), с. 97–154.
29. Ильин В.А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с краевым управлением // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, № 1, с. 137–138.
30. Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, № 11, с. 1517–1534.
31. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36, № 11, с. 1513–1528.
32. Ильин В.А. Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, № 5, с. 672–680.
33. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, № 11, с. 1487–1498.
34. Ильин В.А. О продольных колебаниях стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады Академии наук, 2009, т. 429, № 6, с. 742–745.
35. Ильин В.А. Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. т. 269, с. 133–142.
36. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады Академии наук, 2011, т. 440, № 2, с. 159–163.

37. Ильин В.А. Схема оптимизации граничного управления смещением на двух концах процессом колебаний стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады Академии наук, 2011, т. 441, № 6, с. 731–733.
38. Ильин В.А. Оптимизация производимого смещением граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, № 7, с. 978–986.
39. Ильин В.А. Оптимизация производимого упругой силой граничного управления колебаниями состоящего из двух разнородных участков стержня // Доклады Академии наук, 2011, т. 440, № 6, с. 731–735.
40. Ильин В.А., Луфференко П.В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады Академии наук, 2009, т. 428, № 1, с. 12–15.
41. Ильин В.А., Луфференко П.В. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы // Доклады Академии наук, 2009, т. 429, № 4, с. 455–458.
42. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады Академии наук, 2010, т. 435, № 6, с. 732–735.
43. Ильин В.А. О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня // Труды ин-та математики и механики УрО РАН, 2011, т. 17, № 2, с. 88–96.
44. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Доклады Академии наук, 2004, т. 394, № 2, с. 154–158.
45. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закреплённом втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Доклады Академии наук, 2004, т. 399, № 6, с. 727–731.
46. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук, 2005, т. 60, вып. 6, с. 89–114.

47. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$ // Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, № 11, с. 1558–1570.
48. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, № 12, с. 1699–1711.
49. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений смещениями на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Доклады Академии наук. 2007, т. 417, № 2, с. 160–166.
50. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой промежуток времени // Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, № 12, с. 1655–1663.
51. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Граничное управление колебаниями струны, минимизирующее интеграл от степени $p \geq 1$ модуля управления или его производной // Автоматика и телемеханика, 2007, № 2, с. 113–119.
52. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация управления на двух концах струны упругими силами за любой достаточно большой промежуток времени // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, № 1, с. 89–110.
53. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. – 542 с.
54. Коровина О. В., Прядиев В. Л. Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика, 2009, т. 9, № 3, с. 37–46.
55. Кулешов А.А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с однородными нелокальными условиями // Дифференциальные уравнения, 2009, т. 45, № 6, с. 810–817.
56. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного

- стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Доклады Академии наук, 2012, т. 442, № 4, с. 451–454.
57. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады Академии наук, 2012, т. 442, № 5, с. 594–597.
58. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
59. Моисеев Е.И, Тихомиров В.В. О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // Нелинейная динамика и управление. — т. 5. — Физматлит Москва, 2007. — с. 141–148.
60. Нестеренко Ю.Р. О смешанной задаче для волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода // Доклады Академии наук, 2009, т. 426, №. 1, с. 29–31
61. Никитин А.А. Минимизация интеграла от линейной комбинации граничного управления и его первообразной, производимыми третьим краевым условием // Доклады Академии наук 2007, т. 417, № 6, с. 743–745.
62. Никитин А.А. О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, № 12, с. 1692–1700.
63. Никитин А.А., Кулешов А.А. Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, № 5, с. 681–690.
64. Никитин А.А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Дифференциальные уравнения, 2011, т. 46, № 12, с. 1773–1782.
65. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. // Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
66. Потапов М.М. О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, т. 38, № 3, с. 387–397

67. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том четвертый, часть первая. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
68. Смирнов И.Н. Формула типа Даламбера для колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, описываемых телеграфным уравнением // Доклады Академии Наук, 2010, т. 433, № 1, с. 25–29.
69. Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады Академии наук, 2010, т. 435, № 2, с. 172–177.
70. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Издательство Московского университета, 1999. – 798 с.

Публикации автора по теме диссертации.

71. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады Академии наук, 2011, том 441, № 4, с. 449–451.
72. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады Академии наук, 2012, том 444, № 5, с. 488–491.
73. Рогожников А.М. Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков // Дифференциальные уравнения, 2013, том 49, № 5, с. 633–642.
74. Рогожников А.М. Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами // Доклады Академии наук, 2013, том 450, № 4, с. 389–392.
75. Рогожников А.М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, 2013, том 10, с. 188–214.