Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Романенко Татьяна Евгеньевна

Исследование математических моделей нелинейных оптических систем с запаздыванием

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Разгулин Александр Витальевич,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
Официальные оппоненты:	**Амосов Андрей Авенирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет “МЭИ”»
	Россовский Леонид Ефимович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Российский университет дружбы народов»
Ведущая организация:	федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Вычислительный центр Российской академии наук имени А.А. Дородницына»

Защита состоится 4 марта 2015 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В последние десятилетия активно исследуются математические модели нелинейных оптических систем с нелокальной по пространству и времени обратной связью. Такие системы демонстрируют богатую пространственно-временную динамику, физическим вопросам объяснения которой посвящены многочисленные работы российских и зарубежных ученых. Широкое распространение таких систем для решения задач оптической обработки информации обусловлено тем, что конфигурация обратной связи содержит достаточно эффективные средства управления динамикой, позволяя для одних наборов параметров генерировать широкий спектр явлений структурообразования светового поля (например, вращающиеся волны, движущиеся фронты, спирали, центры и др.), а для других наборов параметров обеспечивать эффективное подавление фазовых искажений.

В зависимости от конкретной схемы реализации нелокальной обратной связи и учета тех или иных физических факторов соответствующая математическая модель описывается запаздывающими дифференциальными уравнениями (ЗДУ) (см. [20, 24, 25]), параболическими функционально-дифференциальными уравнениям (ФДУ) с преобразованием пространственных аргументов искомой функции (см. [22, 26]) и, в наиболее общем случае, параболическими ФДУ с запаздыванием (см. [22, 25, 27, 28]).

Оптические вращающиеся волны, изначально рассматривавшиеся как нежелательные и слабо контролируемые в эксперименте явления, вызванные неидеальной юстировкой элементов конструкции оптической системы, в настоящее время представляют большой интерес в задачах генерации динамических структур с заданными пространственно-временными характеристиками. Теоретические основы моделирования таких волн для случая оптических систем, описываемых параболическими ФДУ с преобразованием пространственных аргументов искомой функции без запаздывания, достаточно полно разработаны в работах [10, 13, 14, 16–18, 23, 32] и др.

Случай с учетом запаздывания, как отмечено в [23], значительно более труден для исследования, при этом вопрос существования вращающихся волн в ограниченной области еще недостаточно изучен [31]. Кроме того, выбор краевых условий должен коррелировать с механизмом нелокальных пространственных связей, поскольку в отсутствии таких связей устойчивые вращающиеся волны не возникают. Поэтому разработка общего подхода к построению устойчивых вращающихся волн, описываемых нелокальными по пространству параболическими ФДУ с запаздыванием представляет собой актуальную проблему для математического моделирования нелинейных оптических систем с обратной связью.

Важно отметить, что управляемые оптические системы с нелокальной обратной связью являются одним из перспективных классов оптических систем, нацеленных на адаптивное подавление фазовых искажений. Активные исследования в данной области ведутся со второй половины 80-х годов ([11, 12, 15, 19, 33, 34]) и, как правило, основаны на моделях ФДУ без учета запаздывания. Однако в последнее десятилетие в связи с развитием технологии производства фазовых модуляторов и новыми возможностями построения оптической обратной связи с управляемой задержкой светового сигнала возникла необходимость математического моделирования эффекта подавления искажений на основе ФДУ с запаздыванием, и, в частности, построения новых упрощенных моделей и проведения вычислительного эксперимента.

Таким образом, исследование моделей нелинейных оптических систем, которые в зависимости от соотношения запаздывания и пространственного преобразования могут использоваться как для генерации вращающихся волн, так и для подавления фазовых искажений, является актуальной проблемой, важной как с точки зрения приложений для современной нелинейной оптики, так и для развития теории дифференциальных уравнений.

Цели диссертационной работы:

- разработка единообразного подхода к математическому моделированию и приближенному описанию вращающихся волн в моделях нелинейных оптических систем с запаздыванием и пространственным поворотом в случаях тонкой кольцевой и круговой апертур, разработка программного комплекса для их численного моделирования;

- проведение аналитического и численного исследования устойчивости вращающихся волн в кольце и круге на основе нормальной формы бифуркации Андронова-Хопфа;

- разработка двухмодового приближения для исследования подавления гармонических искажений в модели нелинейной оптической системе в приближении тонкого кольцевого слоя.

Научная новизна. Разработан новый подход к математическому моделированию и приближенному описанию вращающихся волн в моделях нелинейных оптических систем с запаздыванием и поворотом пространственного аргумента. Для рассмотренных моделей построены нормальные формы бифуркации Андронова-Хопфа и соответствующая программная среда, позволяющие аналитически и численно исследовать устойчивость вращающихся волн. На основе аналитического исследования в рамках разработанного двухмодового приближения получены условия подавления гармонических искажений и численно исследованы границы их применимости для исходной модели.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенный подход к описанию вращающихся волн может быть применен как при дальнейшем теоретическом и численном исследовании нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью, так и для исследования различных моделей динамических систем на окружности или круге с учетом запаздывания, возникающих в химии, биологии и других науках. Разработанное двухмодовое приближение дает конструктивный инструмент для аналитического подбора параметров пространственного поворота и запаздывания в контуре обратной связи для моделирования эффекта подавления гармонических искажений.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Разработан новый подход к математическому моделированию вращающихся волн в нелинейных оптических системах с запаздыванием и пространственным поворотом, основанный на редукции к краевой задаче для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом в движущейся системе координат. Доказано существование бифуркационных вращающихся волн в кольце и круге, получено разложение волн по малому параметру, разработан программный комплекс для их численного моделирования и визуализации.

2. Построены нормальная форма бифуркации Андронова-Хопфа для рассматриваемых параболических функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием и соответствующая программная среда, позволяющие аналитически и численно исследовать устойчивость вращающихся волн в кольце и круге.

3. На основе разработанного двухмодового приближения проведены аналитическое исследование и вычислительный эксперимент по математическому моделированию эффекта подавления стационарных и динамических гармонических искажений для случая тонкого кольцевого слоя.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах.

- Научная конференция “Тихоновские чтения” (Москва, 25–29 октября 2010).
- Международная конференция “Differential Equations and Related Topics”, посвященная И. Г. Петровскому (Moscow, May 30 – June 4, 2011).
- VI международная конферецция “The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (Moscow, Russia, August 14–21, 2011).
- Научная конференция “Ломоносовские чтения” (Москва, 15–24 апреля 2013).
- Научная конференция “Тихоновские чтения” (Москва, 28 октября – 1 ноября 2013).
- VII международная конференция “The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations”(Moscow, Russia, August 22–29, 2014)
- Научно-исследовательский семинар “Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики” под руководством академика РАН, д.ф.-м.н., профессора Е. И. Моисеева на кафедре функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А. Л. Скубачевско-

го на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук Российского Университета Дружбы Народов.

- Научно-исследовательский семинар по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию под руководством профессора Ю. А. Дубинского и профессора А. А. Амосова на кафедра математического моделирования национального исследовательского университета "МЭИ".

Публикации. Материалы диссертационной работы опубликованы в 9 печатных работах, из которых 3 статьи в журналах из списка ВАК: [1–3] и 6 тезисов докладов конференций [4–9].

Личный вклад соискателя. Все исследования и результаты, изложенные в диссертационной работе, проведены и получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Основное содержание диссертационной работы и её результаты полностью отражены в 9 научных публикациях автора. В 6 материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации 136 страниц, включая 52 рисунка. Библиография включает 110 наименований на 13 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе диссертации предлагается подход к исследованию вращающихся волн в кольцевой апертуре в контуре обратной связи нелинейной оптической системы с запаздыванием, основанный на переходе в движущуюся систему координат и сведении исходной задачи к стационарной периодической краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом.

В **§1.1** рассматривается модель нелинейной оптической системы с запаздыванием, описывающая процесс изменения фазовой модуляции $u = u(x,t)$ световой волны при ее прохождении через тонкий слой нелинейной среды в пределах кольцевой апертуры радиуса r_0, задаваемая периодической краевой задачей для функционально-дифференциального уравнения диффузии относительно функции $u = u(x,t)$, $(x,t) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) + K(1 + \gamma \cos R_\theta\, u(x,t-T)), \\ &u(0,t) = u(2\pi,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $R_\theta f(x) = f\big((x+\theta) \mod 2\pi\big)$, $\quad f \in H = L_2(0,2\pi)$, $D = d \cdot r_0^{-2}$, d — коэффициент диффузии, $0 < \gamma < 1$ — видность интерференционной картины, $K > 0$ — коэффициент, пропорциональный интенсивности входной волны, θ — угол поворота, T — величина запаздывания.

Простейшими решениями являются стационарные пространственно-однородные решения, задаваемые трансцендентным уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{2}$$

Пусть некоторая пара $(\hat{W}, \hat{K})$ удовлетворяет этому уравнению и выполнено

Условие 1. *Справедливо неравенство*

$$1 + \hat{K}\gamma \sin \hat{W} \neq 0.$$

Тогда в достаточно малой окрестности нуля определена аналитическая по μ ветвь $(K(\mu), W(\mu))$ решений уравнения (2) вида $K(\mu) = \hat{K} + \mu$, $W(\mu) =$

$\hat{W} + \hat{W}_1\mu + \ldots$ В дальнейшем коэффициент $K = K(\mu) = \hat{K} + \mu$ является управляющим параметром, остальные параметры задачи фиксированы.

Для поиска решений задачи (1) в виде бегущих со скоростью Ω волн, ответвляющихся от пространственно-однородного стационара $W(\mu)$, используется переход во вращающуюся систему координат. Для этого решение ищется в виде $u(x,t) = W(\mu) + R_{-\Omega t}v(x)$, где $v(x)$ — новая искомая функция скалярного аргумента $x \in [0, 2\pi]$, описывающая пространственный профиль волны и удовлетворяющая соответствующей периодической краевой задаче с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned}
&D\frac{d^2v}{dx^2} - v + \Omega\frac{dv}{dx} + K(\mu)\gamma\Big[\cos\{W(\mu) + R_{\theta+\Omega T}v\} - \cos W(\mu)\Big] = 0,\\
&v(0) = v(2\pi), \quad \frac{dv}{dx}(0) = \frac{dv}{dx}(2\pi).
\end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, исследование периодических решений в виде бегущих волн для исходной задачи сводится к нахождению тройки функций (v, Ω, μ), удовлетворяющей задаче с отклоняющимся аргументом (3).

В **§1.2** исследуются свойства линеаризованного оператора $B_\Omega \colon H^2_{2\pi} \to H$ задачи (3)

$$B_\Omega v \equiv D\frac{d^2v}{dx^2} - v + \Omega\frac{dv}{dx} + m_{10}R_{\theta+\Omega T}\, v,\; m_{10} = -\hat{K}\gamma\sin\hat{W},$$

и сопряженного к нему B^*_Ω. Здесь H^2 — Соболевское пространство комплекснозначных функций вещественной переменной со скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой $\langle u, v\rangle_{H^2} = \int_0^{2\pi}\Big(u(x)\overline{v(x)} + u''(x)\overline{v''(x)}\Big)\,dx$, $\|u\|_{H^2} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{H^2}}$, $H^2_{2\pi} = \{v \in H^2 : v(0) = v(2\pi), v'(0) = v'(2\pi)\}$ — замкнутое подпространство в H^2, состоящее из 2π-периодических функций.

Показывается, что операторы B_Ω и B^*_Ω имеют полную ортогональную в H систему собственных функций $\exp\{inx\}$, а соответствующие собственные значения имеют вид:

$$\lambda_n(B_\Omega) = -Dn^2 - 1 + i\Omega n - \hat{K}\gamma\sin\hat{W}\exp\{in(\theta + \Omega T)\},\; \lambda_n(B^*_\Omega) = \overline{\lambda_n(B_\Omega)}.$$

Формулируется

Условие 2 (бифуркационности). *При $\Omega = \Omega_*$ система уравнений*

$$\hat{K}\gamma \sin \hat{W} \cos(n\theta + \Omega n T) = -Dn^2 - 1,$$
$$\hat{K}\gamma \sin \hat{W} \sin(n\theta + \Omega n T) = \Omega n$$

имеет ровно два решения $n = \pm n_*$, $n_* \in \mathbb{N}$.

При выполнении этого условия при $\Omega = \Omega_*$ находится явный вид ядер $N(B_{\Omega_*})$ и $N(B^*_{\Omega_*})$ и устанавливается равенство $R(B_{\Omega_*}) = N(B^*_{\Omega_*})^\perp$.

В **§1.3** формулируется

Условие 3 (невырожденности). *Справедливо неравенство*

$$4m_{11}n_*^2\Big[m_{10}T + \cos\{n_*(\theta + \Omega_* T)\}\Big] \neq 0,$$

где $m_{11} = -\dfrac{\gamma}{2}\left(\hat{W}_1\hat{K}\cos\hat{W} + \sin\hat{W}\right)$.
и доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–3. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ определена дважды непрерывно дифференцируемая по ε нетривиальная тройка функций*

$$(v, \Omega, \mu) = (v(x;\varepsilon), \Omega_* + \omega(\varepsilon), \mu(\varepsilon)) \in H^2_{2\pi} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

— решение краевой задачи (3), причем $v(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, $\mu(0) = 0$.

Доказательство основывается на проекции рассматриваемого уравнения на образ $R(B_{\Omega_*})$ и его ортогональное дополнение $N(B^*_{\Omega_*})$, переходе к эквивалентному исходной краевой задаче (3) нелинейному операторному уравнению, непрерывной обратимости оператора $B_{\Omega_*}\colon \mathcal{P}H^2_{2\pi} \to R(B_{\Omega_*})$ (здесь $\mathcal{P}$ — проектор на $R(B_{\Omega_*})$) и применении теоремы о неявном операторе.

В **§1.4** на основе непрерывной обратимости оператора B_{Ω_*} и дважды непрерывной дифференцируемости рассматриваемых функций в явном виде

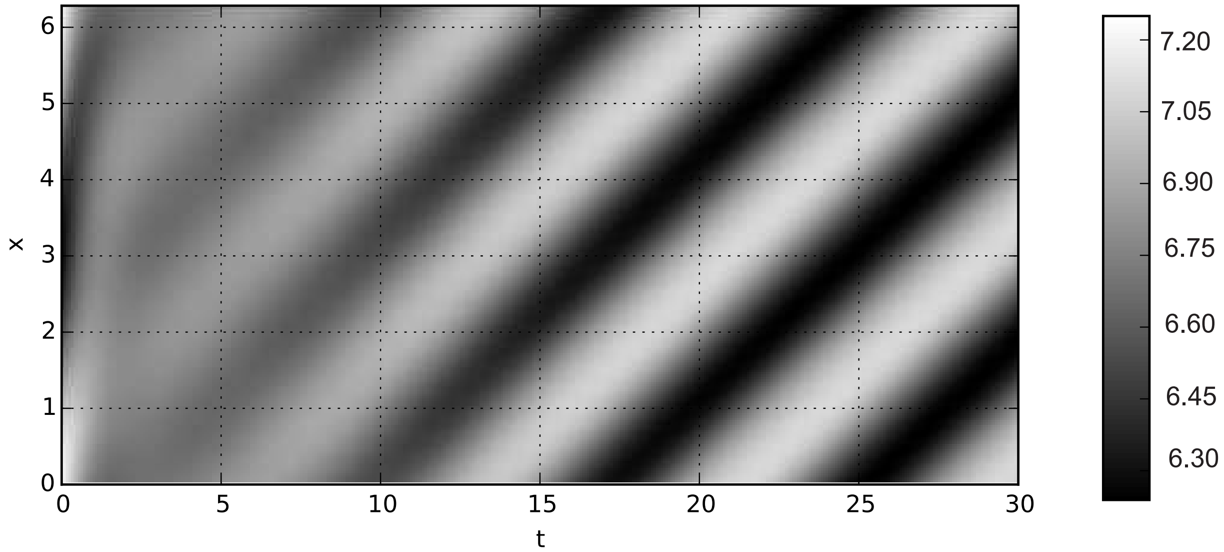

Рис. 1: Решение задачи (1) для параметров $\tilde{W} = 6.75$, $\tilde{K} = 3.94$, $\gamma = 0.8$, $D = 0.05$, $\mu = 0.1$, $T = 0.1$, $n_* = 2$, $\theta = 1.25$.

через параметры задачи вычисляются их первые коэффициенты разложения по малому параметру.

В **§1.5** представлены сведения о программной реализации численных методов решения рассматриваемой задачи и приведены результаты вычислительных экспериментов. На рисунке 1 приведен вид решения $u(x,t)$ задачи (1) при указанных значениях параметров. Решение, стартовавшее с начального состояния, представленного волной с одним лепестком, со временем выходит на предсказанный Теоремой 1 режим с $n_* = 2$ лепестками, а направление движения согласуется с предсказанным знаком Ω.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 4–6].

Во второй главе диссертации предложенный в первой главе подход применяется к исследованию вращающихся волн для случая круговой апертуры и позволяет свести исходную задачу к стационарной краевой задаче Неймана для уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом.

В **§2.1** рассматривается краевая задача Неймана для функционально-дифференциального уравнения диффузии:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(r,\varphi,t) = D\Delta u(r,\varphi,t) - u(r,\varphi,t) + K(1+\gamma\cos R_\theta\, u(r,\varphi,t-T)),\\
\frac{\partial u}{\partial r}(r_0,\varphi,t) = 0, (r,\varphi,t)\in[0,r_0]\times[0,2\pi]\times\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $D > 0$ — коэффициент диффузии, φ — полярный угол, Δ — оператор Лапласа, $R_\theta f(r,\varphi) = f\big(r,(\varphi+\theta) \mod 2\pi\big)$, $f \in H = L_2^r((0,r_0)\times(0,2\pi))$ с весовой функцией r.

Аналогично случаю кольца уравнение (4) приводится к локальному виду в окрестности стационарного решения $W(\mu)$ и осуществляется переход во вращающуюся систему координат, позволяющий перейти к исследованию соответствующей стационарной задачи и искать решение (4) в виде $u(r,\varphi,t) = W(\mu) + R_{-\Omega t}\, v(r,\varphi)$, где $v(r,\varphi)$ — новая искомая функция двух переменных $(r,\varphi) \in [0,r_0]\times[0,2\pi]$. Отметим, что в отличие от главы 1, где переход в движущуюся систему координат приводил к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, в модели в круге подобный переход приводит к краевой задаче для уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом:

$$
D\Delta v - v + \Omega\frac{\partial v}{\partial\varphi} + K(\mu)\gamma\Big[\cos\{W(\mu)+R_{\theta+\Omega T}v\} - \cos W(\mu)\Big] = 0, \tag{5}
$$

$$
v(r,0) = v(r,2\pi), \quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}(r,0) = \frac{\partial v}{\partial\varphi}(r,2\pi), |v(0,0)| < \infty, \quad \frac{\partial v}{\partial r}(r_0,\varphi) = 0. \tag{6}
$$

В дальнейшем речь идет о нахождении тройки функций (v,Ω,μ), являющейся решением задачи с отклоняющимся аргументом (5)–(6).

В **§2.2**, согласно предложенному подходу, исследуется оператор линеаризованной задачи $B_\Omega\colon H_N^2 \to H$:

$$
B_\Omega v \equiv D\Delta v - v + \Omega\frac{\partial v}{\partial\varphi} + m_{10}R_{\theta+\Omega T}\, v, \tag{7}
$$

и сопряженный к нему B_Ω^*, где H^2 — Соболевское пространство комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой $\langle u,v\rangle_{H^2} = \langle u,\overline{v}\rangle_H + \langle \Delta u,\overline{\Delta v}\rangle_H$, $\|u\|_{H^2} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H^2}}$, H_N^2 — замкнутое подпространство функций из H^2, удовлетворяющих граничным условиям задачи (4).

Устанавливается, что операторы B_Ω и B_Ω^* имеют полную ортонормированную в H систему собственных функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi d_n^p}} J_n\left(\mu_n^p \frac{r}{r_0}\right)\exp\{in\varphi\},\ n\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N}.$$

Здесь J_n — функция Бесселя первого рода, μ_n^p — p-ый ноль производной n-ой функции Бесселя, $d_n^p = \int\limits_0^{r_0} J_n^2\left(\mu_n^p\frac{r}{r_0}\right) r dr$. Соответствующие собственные значения имеют вид

$$\lambda_n(B_\Omega) = D\left(\frac{\mu_n^p}{r_0}\right)^2 - 1 + i\Omega n - \hat{K}\gamma\sin\hat{W}\exp\{in(\theta+\Omega T)\}, \lambda_n(B_\Omega^*) = \overline{\lambda_n(B_\Omega)}.$$

Важную роль при построении бифуркационных решений играет следующее условие.

Условие 4 (бифуркационности). *При $\Omega = \Omega_*$ система уравнений*

$$\hat{K}\gamma\sin\hat{W}\cos(n\theta+\Omega nT) = -D\left(\frac{\mu_n^p}{r_0}\right)^2 - 1,$$
$$\hat{K}\gamma\sin\hat{W}\sin(n\theta+\Omega nT) = \Omega n$$

имеет ровно два решения $n = \pm n_*$, $p = p_*$, где $p_*, n_* \in \mathbb{N}$.

При выполнении условия бифуркационности при $\Omega = \Omega_*$ устанавливается соотношение $R(B_{\Omega_*}) = N(B_{\Omega_*}^*)^\perp$ и явный вид ядер $N(B_\Omega)$ и $N(B_\Omega^*)$.

В **§2.3** доказывается следующая теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1, 3, 4. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ определена дважды непрерывно дифференцируемая по ε нетривиальная тройка функций*

$$(v,\Omega,\mu) = (v(r,\varphi;\varepsilon), \Omega_* + \omega(\varepsilon), \mu(\varepsilon)) \in H_N^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

являющаяся решением краевой задачи (5), причем $v(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, $\mu(0) = 0$.

Доказательство проводится аналогично случаю тонкого кольцевого слоя и опирается на свойства линеаризованного оператора B_{Ω_*}.

В **§2.4** на основе непрерывной обратимости оператора B_{Ω_*} и дважды непрерывной дифференцируемости рассматриваемых функций аналогично случаю кольца вычисляются первые коэффициенты их разложения по малому параметру. В отличие от задачи в кольце для нахождения коэффициентов необходимо решить соответствующие краевые задачи для ОДУ.

В **§2.5** представлены сведения о программной реализации численных методов решения рассматриваемой задачи и приведены результаты вычислительных экспериментов и их визуализация.

Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 6].

Третья глава диссертации посвящена построению нормальной формы для функционально-дифференциального уравнения в тонком кольце и в круге. При этом использовалась методика построения нормальной формы для бифуркации Андронова-Хопфа, описанная в [29].

В **§3.1** излагается общий подход к исследованию качественного поведения решений параболических функционально-дифференциальных уравнений на основе метода нормальных форм [29], который позволяет получить описание бифуркационного решения без предварительного построения соответствующего центрального многообразия. Особенность такого построения состоит в том, что получающаяся нормальная форма для исходного уравнения совпадает до членов третьего порядка с нормальной формой бифуркации Андронова-Хопфа для редуцированного ОДУ на соответствующем центральном многообразии, что позволяет судить об устойчивости бифуркационных периодических решений. Для случая бифуркации Андронова-Хопфа при построении нормальной формы рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения достаточно учесть слагаемые лишь второго и третьего порядка и нормальная форма в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (K_1\mu + K_2\rho^2)\rho + O(\mu^2\rho + |(\rho,\mu)|^4), \\ \dot{\xi} &= -\nu_* + O(|(\rho,\mu)|). \end{aligned} \tag{8}$$

При выполнении неравенства $K_1 > 0,\ K_2 < 0$ рождающиеся в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа вращающиеся волны порождают асимптотически устойчивый бифуркационный цикл [29].

Отметим, что описанный выше подход ранее применялся лишь к модельным задачам с квадратичной и кубической нелинейностью [29, 30]. Рассмотрение других нелинейностей является нетривиальной содержательной задачей. Отметим, что нелокальные преобразования при построении нормальной формы также ранее не учитывались.

В **§3.2** рассматриваемый метод используется при построении нормальной формы бифуркации Андронова-Хопфа для случая задачи в кольце с учетом специфики пространственного поворота, запаздывания и вида нелинейности. Реализация метода состоит в получении ряда соотношений, описываемых в терминах соответствующих степенных операторов. Для модели тонкого кольца эти условия и коэффициенты K_1 и K_2 удается выразить в явном виде через параметры исходной задачи.

В **§3.3** метод нормальных форм применяется к пространственно-двумерной задаче с запаздыванием и поворотом углового аргумента в круге. Для случая круга коэффициент K_1 находится в явном виде через параметры задачи, а нахождение коэффициента K_2 является нетривиальной задачей и требует решения ряд краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 6, 7].

В четвертой главе диссертации проводится аналитическое и численное исследование эффекта компенсации искажений в модели оптической системы для случая тонкого кольцевого слоя, основанное на исследовании свойств двухмодового приближения.

В **§4.1** приведена общая постановка задачи исследования эффекта подавления искажений. Динамика фазовой модуляции $u = u(x,t)$, $x \in [0, 2\pi]$, $t \geq -T$ в нелинейной оптической системе в приближении тонкого кольцевого слоя моделируется начальной-краевой задачей

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + K\left(1 + \gamma\cos\big\{u(x+\theta, t-T) + \phi(x)\big\}\right), \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t), \quad t \geq -T \tag{10}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad -T \leq t \leq 0, \quad x \in [0, 2\pi], \tag{11}$$

где коэффициенты уравнения имеют тот же самый смысл, что и в (1), $\phi(x)$ — фазовое искажение входного поля, $u_0(x,\tau)$ — некоторое начальное распределение фазы.

Эффект подавления (компенсации) искажений имеет место, если суммарная выходная фаза $u(x,t) + \phi(x)$ становится пространственно однородной, или, по крайней мере, ее пространственно неоднородная составляющая уменьшается по сравнению с искажением $\phi(x)$. Для оценки качества подавления искажений при проверке границ применимости двухмодового приближения используется функционал среднеквадратичного отклонения суммарной выходной волны от ее усреднения:

$$RMS(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(u(x,t) + \phi(x) - s(u+\phi)\right)^2 dx},$$

где $s(v) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} v(x,t)dx$ обозначает усреднение функции $v(x,t)$ по апертуре.

В **§§4.2–4.3** приведено исследование стационарных искажений на основе двухмодового приближения. Рассматриваются гармонические искажения, задаваемые суммой двух бегущих волн с амплитудами a и b, пространственной частотой $n \in \mathbb{N}$ и временной частотой Ω: $\phi(x,t) = \phi_1(x,t) + \phi_2(x,t) = a\cos(\Omega t + nx) + b\sin(\Omega t + nx), a \neq 0,\ b \neq 0$. Решение задачи (9)–(11) ищется в виде суммы пространственно однородного фазового набега $\hat{u}(t)$ и слагаемых $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$, отвечающих исходным фазовым искажениям с соответствующими амплитудными множителями $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$u = \hat{u}(t) + \alpha(t)\phi_1(x,t) + \beta(t)\phi_2(x,t).$$

Предложенный вид решения позволяет, с помощью допущения достаточной малости искажений, перейти к анализу системы запаздывающих дифференциальных уравнений относительной амплитудных составляющих сигнала:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\nu}{dt} + \nu = K[1 + \gamma\cos\nu(t-T)J_0(A)J_0(B)],\\
&\frac{d\alpha}{dt}(t) = -(Dn^2+1)\alpha(t) - \frac{b}{a}\Omega\beta(t) -\\
&\qquad - \frac{2K}{a}\gamma\sin(\hat{u}(t-T))\big[J_1(A)J_0(B)\cos(\Omega t) - J_0(A)J_1(B)\sin(\Omega t)\big],\\
&\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{a}{b}\Omega\alpha(t) - (Dn^2+1)\beta(t) -\\
&\qquad - \frac{2K}{b}\gamma\sin(\hat{u}(t-T))\big[J_1(A)J_0(B)\sin(\Omega t) + J_0(A)J_1(B)\cos(\Omega t)\big]
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
&A = \alpha(t-T)\phi_1(\theta,t-T) + a\cos(\Omega t) + \beta(t-T)\phi_2(\theta,t-T) + b\sin(\Omega t),\\
&B = -\frac{a}{b}(\alpha(t-T)\phi_2(\theta,t-T) - \sin(\Omega t)) + \frac{b}{a}(\beta(t-T)\phi_1(\theta,t-T) + \cos(\Omega t)).
\end{aligned}$$

В терминах полученной системы (12) эффект компенсации искажений переформулируется в виде ограничения для соответствующего положения равновесия и требования его асимптотической устойчивости. Анализ устойчивости проводится с помощью исследования расположения спектра линеаризованной задачи и позволяет получить условия устойчивости двухмодовой системы в виде ограничений на коэффициенты исходной задачи и величины запаздывания и поворота.

Для выяснения границ применимости двухмодовой модели проводится сравнение полученных результатов с прямым численным моделированием задачи в полной постановке и исследуется влияние запаздывания и поворота пространственных аргументов на качество подавления стационарных гармонических искажений и гармонических искажений, задаваемых бегущими волнами.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [3, 8, 9].

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В приложении А приведено описание общей схемы работы разработанного программного комплекса и функциональности составляющих его программных модулей, нацеленных на численное моделирование задач для моделей в тонком кольцевом слое и круге и визуализацию полученных данных.

Основные результаты

1. Разработан новый подход к математическому моделированию вращающихся волн в нелинейных оптических системах с запаздыванием и пространственным поворотом, основанный на редукции к краевой задаче для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом в движущейся системе координат. Доказано существование бифуркационных вращающихся волн в кольце и круге, получено разложение волн по малому параметру, разработан программный комплекс для их численного моделирования и визуализации.

2. Построены нормальная форма бифуркации Андронова-Хопфа для рас-

сматриваемых параболических функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием и соответствующая программная среда, позволяющие аналитически и численно исследовать устойчивость вращающихся волн в кольце и круге.

3. На основе разработанного двухмодового приближения проведены аналитическое исследование и вычислительный эксперимент по математическому моделированию эффекта подавления стационарных и динамических гармонических искажений для случая тонкого кольцевого слоя.

Список публикаций

1. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 11. С. 42–60.

2. Романенко Т. Е. Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием // Дифференц. ур. 2014. Т. 50, № 2. С. 260–263.

3. Романенко Т. Е., Разгулин А. В. О моделировании подавления искажений в нелинейной оптической системе с запаздыванием в контуре обратной связи // Мат. моделирование. 2014. Т. 26, № 11. С. 123–136.

4. Романенко Т. Е., Разгулин А. В. Одномерные ротационные волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом аргумента и запаздыванием // Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 25 - 29 октября 2010. Тезисы докладов. С. 77–78.

5. Романенко Т. Е. Исследование периодических решений функционально-дифференциального уравнения диффузии с поворотом аргумента и запаздыванием // International conference «Differential equations and Related Topics» dedicated to Ivan G. Petrovskii, Москва, , 30 мая — 4 июня 2011. Тезисы докладов. С. 322–323.

6. Razgulin A. V., Romanenko T. E. An approach to the description of rotating waves in parabolic functional-differential equations with rotation of spatial arguments and time delay // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, August 14–21, 2011. Тезисы докладов. С. 56–57.

7. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Нормальные формы бифуркации Андронова-Хопфа в одной модели оптической системы с запаздыванием // Научная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, 15-24 апреля 2013. Тезисы докладов. С. 31–32.

8. Романенко Т. Е. О компенсации искажений в нелинейной оптической системе с запаздыванием // Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 28 октября - 1 ноября 2013. Тезисы докладов. С. 49–50.

9. Razgulin A. V., Romanenko T. E., Pavlov S. D. On suppression of distortions in nonlocal models of adaptive optics. // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, August 22–29, 2014. Тезисы докладов. С. 97–98.

Цитированная литература

10. *Белан Е.П., Лыкова О.Б.* Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. ур. 2004.

Т. 40. № 10. С. 1348–1357.

11. *Воронцов М.А., Киракосян М.Э., Ларичев А.В.* Коррекция фазовых искажений в нелинейном интерферометре с оптической обратной связью // Квантовая электроника. 1991. Т. 18. С. 117–120

12. *Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И.* Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988.

13. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 3. С. 467–473.

14. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Оптическая буферность и механизмы её возникновения// Теоретическая и матем. физ. 2004. Т. 140. № 1. С. 14–28.

15. *И. П. Николаев, А. В. Ларичев, В. И. Шмальгаузен* Управляемые оптические структуры в нелинейное системе с подавлением низких пространственных частот в контуре обратной связи // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. № 7. С. 617–622

16. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.

17. *Разгулин А.В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Мат. моделирование. 1993. Т. 5. № 4. С. 105–119.

18. *Скубачевский А.Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. ур. 1998. Т. 34. № 10. С. 1394–1401.

19. *Barnes T., Eiju T., and Matsuda K.* High resolution adaptive optics using an interference phase loop // Optics Communications. 1996. Vol. 132. P. 494–502.

20. Gibbs H. Optical bistability: controlling light with light. Orlando: Academic Press, 1985.

21. Otsuka K., Ikeda K. Cooperative dynamics and functions in a collective nonlinear optical element system // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. № 10. P. 5209–5228.

22. Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu., Larichev A. V., Zheleznykh N. I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // J. Optical Soc. Amer. Ser. B. 1992. V. 9. № 1. P. 78–90.

23. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D. 1999. V. 125. P. 123–141.

24. Ikeda K., Daido H., and Okimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett.. 1980. V. 45. P. 709–712.

25. Iroshnikov N. G., Vorontsov M. A., Transverse rotating waves in the nonlinear optical system with spatial and temporal delay // In "Frontiers in nonlinear optics: in memoriam of Serge Akhmanov"(Ed. by H. Walter, N. Koroteev). London: M. Scully. – IOP. 1992. P. 261–278.

26. Vorontsov M. A., Razgulin A. V. Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions // Photonics and Optoelectronics. Allerton Press, N.Y., USA. 1993. V. 1. №. 2. P. 103–111.

27. Chesnokov S. S., Rybak A. A. Spatiotemporal Chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. V. 10. №. 5. P. 1061–1068.

28. Razgulin A. V. Finite-dimensional dynamics of distributed optical system with delayed feedback // Comput. Math. Appl. 2000. V. 40. №. 12. P. 1405–1418.

29. *Faria T.* Normal forms for semilinear functional differential equations in Banach spaces and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2001. V. 7. № 1. P. 155–176.

30. *Faria T., Huang W.* Stability of Periodic Solutions Arising from Hopf Bifurcation for a Reaction-Diffusion Equation with Time Delay // Fields Institute Communications. 2002. V. 31. P. 125–141.

31. *Gourley S.A., So J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // J. Math. Sci. N.Y:Springer, 2004. V. 124. № 4. P. 5119–5153.

32. *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Analysis: TMA. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.

33. *Vorontsov M.A., Katulin V.A., and Naumov A.F.* Wavefront control by an optical-feedback interferometer // Optics Communications. 1989. Vol. 71. № 1-2. P. 35–38.

34. *Vorontsov M.A. and Shishakov K.V.* Phase-distortion suppression in nonlinear cavities with gain // J. of the Optical Society of America. 1992. Vol. 9. P. 71–77