

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

На правах рукописи

Шалбузов Камил Джавид О.

**РЕШЕНИЕ ДВУХ КЛАССОВ ДИСКРЕТНЫХ
ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ**

01.01.09 — Дискретная математика и математическая
кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Научный руководитель: **Морозов Владимир Викторович**,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Косоруков Олег Анатольевич**,
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Всероссийского научно-исследовательского института по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций (Федеральный центр науки и высоких технологий) МЧС России

Сигал Израиль Хаимович,
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской академии наук»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита диссертации состоится 29 мая 2015 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. (495)939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «____» _____ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., доцент

Шестаков О.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Среди задач исследования операций важное место занимают дискретные оптимизационные и игровые задачи. Появление дискретности связано с распределением штучных ресурсов, а также с природой изучаемых объектов, таких, как графы, сети и т.п. Данная диссертационная работа посвящена решению некоторых таких задач.

В качестве оптимизационных задач рассмотрены задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для решения задач ЦЛП Гомори сформулировал циклический алгоритм (ЦА)¹, который, используя отсечения, за конечное число шагов находит оптимальное решение. Позже им же был предложен полностью целочисленный алгоритм (ПЦА)², в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной. Метод отсечений для задачи ЦЛП состоит в добавлении ограничений, не изменяющих множество допустимых целых точек, и последующем решении соответствующих непрерывных задач. Методы отсечения являются одним из классических подходов к решению ЦЛП³. Мартином был предложен алгоритм (АМ)⁴, в котором используется специальный метод построения отсечения. Будем называть его отсечением Мартина. При построении отсечения Мартина в данной работе предлагается поиск производящей строки, минимизирующий число преобразований в АМ. В перечисленных алгоритмах возникают ситуации, когда добавленное отсечение задается гиперплоскостью, не содержащей неотрица-

¹Gomory R.E. An algorithm for integer solutions to linear programs // Princeton – IBM Mathematics Research Project, Technical Report № 1. November 17, 1958.

²Gomory R.E. An all-integer programming algorithm // IBM Research Center. 1960 January. Research Report RC-189.

³Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

⁴Martin G.T. An accelerated Euclidean algorithm for integer linear programming // Recent Advances in Mathematical Programming. Robert L. Graves and Philip Wolfe, Editors. N.Y.: McGraw-Hill, 1963. P. 311–317.

тельных допустимых решений. В данной диссертационной работе предлагается модификация ЦА (МЦА), в которой строятся отсечения более близкие к многограннику ограничений, чем в ЦА.

В качестве дискретных игровых задач рассмотрены матричные игры специального вида. Алгоритмам решения матричных игр посвящена обширная литература. Отметим метод двойного описания и метод фон Неймана, основанный на решении системы дифференциальных уравнений. В настоящей работе предлагается алгоритм, основанный на решении подыгр (АРП). АРП применяется к дискретному варианту игры «нападение-защита» и к играм комбинаторного типа. В первой игре нападение распределяет средства для прорыва через пункты, обороняемые защитой. Непрерывные игры распределения бесконечно-делимых ресурсов изучались многими авторами⁵. Особо отметим следующие основополагающие работы. Блэккет⁶ дал общее определение игры и исследовал игровую модель выбора маршрута поставки ресурса. В диссертации построены явные формулы решений в смешанных стратегиях для моделей Гросса⁷, Гермейера⁸ и их обобщения⁹. Однако дискретная матричная игра распределения штучных ресурсов в общем случае имеет матрицу больших размеров. Способ построения приближенного решения дискретной игры указаны Билом и Хеселденом¹⁰. Предложенный в диссертации алгоритм позволяет обобщение на игры с бюджетными ограничениями.

Также в работе рассматривается антагонистическая игра нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. В последнее время интерес к подобного рода играм возрос в связи с задачами охраны объектов. В рас-

⁵Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Советское радио, 1964.

⁶Blackett D.W. Some Blotto games // Naval Research Logistic Quarterly. 1954. V. 1. № 1. P. 55–60.

⁷Gross O., Wagner R. A continuous colonel Blotto game // U.S. air force Project RAND, research memorandum — 408. 1950.

⁸Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

⁹Огарышев В.Ф. Обобщение задачи Гросса // В сб. «Кибернетику на службу коммунизму». 1971. № 6. С. 264–283.

¹⁰Beale E.M.L., Heselden G.P.M. An approximate method of solving Blotto games // Naval Research Logistic Quarterly. 1962. V. 9. № 2. P. 65–79.

сматриваемой модели обе стороны могут использовать одновременно несколько типов средств. Вероятность преодоления некоторым средством нападения какого-либо средства защиты задается Z -образной функцией, часто используемой в моделях исследования операций.

Цели работы. Для задач ЦЛП основной целью исследования является модификация циклического алгоритма Гомори таким образом, чтобы отсечения на каждом шаге алгоритма строились приближенно к многограннику ограничений задачи, и его численное сравнение с известными алгоритмами решения задач ЦЛП. Для игровых задач основной целью является разработка алгоритма решения матричных игр больших размеров специального вида, а также сравнение предложенного метода с существующими методами решения матричных игр. Описание моделей, к которым применяется данный алгоритм, и случаи, когда рассматриваемые игры имеют явное аналитическое решение.

Предмет и объект исследования. Объектом исследования в диссертационной работе являются задачи ЦЛП, антагонистические игры и игровые модели, сводящиеся к матричным играм, а также методы их решения.

Методика исследований. Методологическую основу исследования составляют: методы дискретной оптимизации, математические методы теории игр и элементы теории чисел.

Научная новизна заключается в том, что: на основе циклического алгоритма Гомори предложен модифицированный циклический алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования, в котором строятся отсечения, расположенные ближе к многограннику ограничения, чем в циклическом алгоритме Гомори; предложен метод решения матричных игр больших размеров специального вида, в которых существует быстрый алгоритм нахождения наилучшей чистой стратегии для каждого игрока в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера; сформулированы условия

существования решения антагонистической игры нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта, в чистых и смешанных стратегиях.

Достоверность результатов и выводов диссертации базируется на применении математических методов теории игр, методов оптимизации, математического аппарата исследования операции. Теоретические положения диссертации сформулированы в виде утверждений и строго доказаны.

Практическая ценность состоит в том, что разработанные в диссертации методы и полученные результаты могут быть полезны при решении задач целочисленного линейного программирования, а также при решении матричных игр больших размеров. В работе также исследованы свойства Z -образных функций, часто используемых в моделях исследования операции.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В данной работе рассмотрены задачи математического программирования большой размерности. Это соответствует паспорту специальности 01.01.09.

Апробация результатов исследования. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на VI и VII Московской международной конференциях по исследованию операций ORM2010 и ORM2013, на ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения 2013» и «Ломоносовские чтения 2014», а также на ежегодной научной конференции «Тихоновские чтения» (Москва, 2013).

Публикации. По теме диссертации имеется восемь публикаций. Основные результаты работы опубликованы в четырех статьях из списка ВАК РФ [2–5]. В работах [2–4] Шалбузову К.Д. принадлежат формулировки и доказательства результатов, Морозову В.В. принадлежит постановка задачи и проверка результатов. В работе [5] Морозовым В.В. была предложена модификация метода Гомори при $n = 2$, Шалбузов К.Д. разработал эту модификацию для произвольного числа переменных n .

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, насчитывающего 93 наименований, и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 125 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследования, описана методика исследования, изложено содержание диссертационной работы, отражена научная новизна работы, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, а также приведена информация об апробации результатов.

В **первой главе** предлагается модификация циклического алгоритма Гомори (МЦА). При поиске модифицированного отсечения возникает вспомогательная задача ЦЛП с одним ограничением. Эта задача решается двумя алгоритмами: алгоритмом пометок и алгоритмом подбора параметров. Также рассмотрены другие методы решения задачи ЦЛП, а именно: полностью целочисленный алгоритм Гомори (ПЦА) и алгоритм Мартина (АМ). В конце главы приведены результаты численного сравнения МЦА с ЦА, ПЦА и АМ.

В **разделе 1.1** рассматривается задача ЦЛП

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j \rightarrow \max$$

$$x_{n+i} = a_{i0} - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n + m,$$

и соответствующая «непрерывная» задача (обозначим её (1)), в которой отброшено условие целочисленности переменных. Множество допустимых решений $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ задачи (1) обозначим через X_0 . Решая задачу (1) симплекс-методом и используя заключительную столбцовую таблицу, выразим все переменные через небазисные переменные x_{N_j} , $j = 1, \dots, n$, $x_i = a'_{i0} + \sum_{j=1}^n a'_{ij}(-x_{N_j})$, $i = 0, 1, \dots, n + m$. Выберем в таблице производящую строку с номером k , где a'_{k0} — первый нецелый элемент нулевого столбца, и

построим соответствующее отсечение Гомори

$$\sum_{j=1}^n \{a'_{kj}\} x_{N_j} \geq \{a'_{k0}\}. \quad (2)$$

В **разделе 1.2** предлагается МЦА в отличие от циклического алгоритма Гомори (ЦА) вместо отсечения (2) добавляется модифицированное отсечение. Покажем, как оно строится. Рассмотрим вспомогательную оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{a'_{kj}\} x_{N_j} &\rightarrow \min_{(x_{N_1}, \dots, x_{N_n})} \\ \sum_{j=1}^n \{a'_{kj}\} x_{N_j} &\equiv \{a'_{k0}\}, \quad x_{N_j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Минимальное значение целевой функции в задаче (3) равно $\{a'_{k0}\} + \mu^*$, где μ^* — некоторое целое число. Так как для любого решения $\bar{x} \in X_0$, выполнено сравнение в (3), то верно неравенство

$$\sum_{j=1}^n \{a'_{kj}\} x_{N_j} \geq \{a'_{k0}\} + \mu^*, \quad (4)$$

которое будем называть модифицированным отсечением. Отсечение Гомори (2) в ЦА соответствует неравенству (4) при $\mu^* = 0$. Задачу (3) в новых переменных $y_j = x_{N_j}$, $j = 1, \dots, n$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \min_{(y_1, \dots, y_n, \mu)} \\ \sum_{j=1}^n a_j y_j &= c + r\mu, \quad y_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (5)$$

где a_j, c, r — положительные целые числа, а $r > \max(c, a_1, \dots, a_n)$.

В **разделе 1.2.1** задача (5) решается алгоритмом пометок. Аналогичный алгоритм применяется при поиске кратчайшего пути в ориентированном графе, соединяющего две заданные вершины. Алгоритм совершает порядка $O(n(c + r\mu^*))$ операций сложения и сравнения чисел.

Теорема 1. *Оптимальное решение $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*, \mu^*)$ задачи (5) удовлетворяет неравенствам*

$$y_j^* \leq r - 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mu^* \leq \mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{1}{r} \left((r - 1) \sum_{j=1}^n a_j - c \right) \right\rfloor.$$

Показано, что алгоритм пометок решения задачи (5) является псевдополиномиальным.

В **разделе 1.2.2** предлагается другой метод решения вспомогательной задачи (5), названный алгоритмом подбора параметров и основанный на формуле общего решения линейного диофантова уравнения.

Пусть $d_l = \text{НОД}(a_1, \dots, a_l)$, $l = 1, \dots, n$. Построим $y^{(l)} = (y_1^{(l)}, \dots, y_l^{(l)})$ – частные решения уравнений $\sum_{j=1}^l a_j y_j = d_l$, $l = 1, \dots, n$. Общее решение диофантова уравнения

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j = d_n t_n, \tag{6}$$

будем задавать формулами Бонда

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{l=2}^n \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_1^{(l)} t_l + \frac{a_2}{d_2} t_1, \\ y_j &= \sum_{l=j}^n \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_j^{(l)} t_l - \frac{d_{j-1}}{d_j} t_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{7}$$

где $t_1, \dots, t_n$ – произвольные целые числа, а $d_{n+1} = a_{n+1} = 1$ по определению.

При $j = 1, \dots, n - 1$ определим функции

$$p_j(t_{j+1}, \dots, t_n) = \frac{d_{j+1}}{d_j} \sum_{l=j+1}^n \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_{j+1}^{(l)} t_l, \quad q_j(t_{j+1}, \dots, t_n) = -\frac{d_{j+1}}{a_{j+1} d_j} \sum_{l=j+1}^n \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{jl} t_l,$$

где $\rho_{jl} = \sum_{k=1}^j a_k y_k^{(l)}$, $l = j, \dots, n$. Введем отрезки целых чисел

$$R_j(t_{j+1}, \dots, t_n) = \{ \lceil q_j(t_{j+1}, \dots, t_n) \rceil, \dots, \lfloor p_j(t_{j+1}, \dots, t_n) \rfloor \}, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Теорема 2. *Для того чтобы целые числа $t_1, \dots, t_n$ задавали по формулам (7) неотрицательное решение уравнения (6), необходимо и достаточно, чтобы $t_j \in R_j(t_{j+1}, \dots, t_n)$, $j = 1, \dots, n - 1$, $t_n \geq 0$.*

Теорема 3. Алгоритм подбора параметров сходится за конечное число шагов. При этом справедлива оценка $\mu^* \leq \mu_2 + d_n - 1$, где

$$\mu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{d_n}{r} \max_{j=1, \dots, n-1} \frac{d_j a_{j+1}}{d_{j+1}^2} \right\rceil.$$

Явная формула для μ^* при $n = 1$ и алгоритм нахождения μ^* при $n = 2$ в задаче (5) указаны в **приложении 1**.

В **разделе 1.2.3** алгоритм пометок сравнивается с алгоритмом подбора параметров. Несмотря на то, что временная сложность АПП является экспоненциальной, экспериментально показано, что при небольшом числе переменных АПП работает быстрее, чем АП.

В **разделе 1.3** рассмотрены другие известные методы решения задачи ЦЛП, а именно: полностью целочисленный алгоритм Гомори (ПЦА), в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной, и алгоритм Мартина (АМ), в котором отсечение строится специальным способом (отсечение Мартина). В данной работе при построении отсечения Мартина предлагается поиск производящей строки, минимизирующий число преобразований в АМ. В конце раздела приведены результаты численного сравнения МЦА с ЦА, ПЦА и АМ.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [5, 6].

Во **второй главе** предлагается метод решения матричных игр (АРП) больших размеров специального вида, исследуется модель Дрешера дискретной игры «нападение-защита». В модели Дрешера сформулировано условие совпадения значения дискретной и непрерывной игр, предложен алгоритм нахождения нижнего и верхнего значений игры. АРП применяется для поиска решения игры с бюджетными ограничениями. В последних трех разделах главы АРП применяется к матричным играм комбинаторного типа. АРП в каждой модели численно сравнивается с методом Брауна-Робинсон.

Чтобы выделить специальный класс матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ в **разделе 2.1** рассмотрены вспомогательные задачи (ВЗ) игроков, в которых каждый игрок

находит наилучшую чистую стратегию в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера. Введем обозначения $A(p, j) = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}$, $A(i, q) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$. Рассмотрим ВЗ для каждого игрока. Первый игрок для любой смешанной стратегии $q = (q_1, \dots, q_n)$ второго игрока находит чистую стратегию из множества $I(q) = \{i \mid \bar{v}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{k=1, \dots, m} A(k, q) = A(i, q)\}$. Второй игрок для любой смешанной стратегии $p = (p_1, \dots, p_m)$ первого игрока находит чистую стратегию из множества $J(p) = \{j \mid \underline{v}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{k=1, \dots, n} A(p, k) = A(p, j)\}$.

Предлагаемый алгоритм, основанный на решении последовательности подыгр (АРП), состоит в следующем. Пусть к k -му шагу сформированы подмножества I^k и J^k чистых стратегий игроков (на первом шаге их можно выбрать произвольно, но разумных размеров).

Шаг 1. Решается подыгра с матрицей $A^k = (a_{ij})_{i \in I^k, j \in J^k}$;

Шаг 2. Для оптимальной стратегии p^k первого игрока выбирается любая чистая стратегия $j_k \in J(p^k)$;

Шаг 3. Решается подыгра с матрицей $B^k = (a_{ij})_{i \in I^k, j \in J^{k+1}}$, где $J^{k+1} = J^k \cup \{j_k\}$;

Шаг 4. Пусть в этой подыгре q^k — оптимальная смешанная стратегия второго игрока. В общем случае последовательности оценок $\underline{v}(p^k)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\bar{v}(q^k)$, $k = 1, 2, \dots$, не являются монотонными. Определим наилучшие верхнюю и нижнюю оценки $\bar{v}^k = \min_{t=1, \dots, k} \bar{v}(q^t) = \bar{v}(q^{t_1})$, $\underline{v}^k = \max_{t=1, \dots, k} \underline{v}(p^t) = \underline{v}(p^{t_2})$;

Шаг 5. Проверяется неравенство $\bar{v}^k - \underline{v}^k \leq \varepsilon$. Если оно выполнено, то величина $(\bar{v}^k + \underline{v}^k)/2$ является ε -приближением для значения игры v , а p^{t_2} и q^{t_1} — соответствующими ε -оптимальными стратегиями;

Шаг 6. Если $\bar{v}^k - \underline{v}^k > \varepsilon$, то выбирается любая чистая стратегия $i_k \in I(q^k)$, формируется подматрица $A^{k+1} = (a_{ij})_{i \in I^{k+1}, j \in J^{k+1}}$, где $I^{k+1} = I^k \cup \{i_k\}$, и осуществляется переход к $(k+1)$ -му шагу.

Алгоритм сходится за конечное число шагов, поскольку на каждом шаге множества I^k и J^k увеличиваются, а величины $\bar{v}^k$ и $\underline{v}^k$ соответственно не возрастают и не убывают.

В **разделе 2.2** исследуется модель Дрешера дискретной игры «нападение-защита».

В **разделе 2.2.1** определяется игра. Пусть A и B — положительные целые числа, задающие количества средств нападения и защиты, распределяемые по n пунктам в соответствии со стратегиями $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$. Определим сначала непрерывную антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$, в которой множества стратегий X и Y нападения и защиты (первого и второго игроков) имеют вид

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A \right\} \text{ и } Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n y_i = B \right\},$$

а функция выигрыша нападения $F(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i)$ задает суммарный эффект ее взаимодействия с защитой на всех пунктах. Предположим, что каждая функция f_i : неотрицательна и непрерывна на $[0, A] \times [0, B]$, не убывает и выпукла по x_i , обращается в нуль при $x_i = 0$, не возрастает и выпукла по y_i . Например, функции $f_i(x_i, y_i) = \lambda_i(x_i - \mu_i y_i)^+$, где $a^+ = \max(a, 0)$ для действительного числа a , перечисленным требованиям удовлетворяют. В этом случае будем говорить о модели Дрешера, предложившего следующую интерпретацию функций f_i . Коэффициент $\mu_i > 0$ определяет количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств защиты на i -м пункте, а множитель $\lambda_i > 0$ задает величину ущерба, наносимого единицей средств нападения, прорвавшегося на этом пункте. При $\mu_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, получаем модель Гросса, а при $\lambda_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, — модель Гермейера. Далее без потери общности будем предполагать, что в модели Дрешера $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, а в модели Гермейера $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$.

Дискретная игра $\Gamma' = \langle X', Y', F(x, y) \rangle$ получается из игры Γ при дополнительном предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами. Множества X' и Y' могут содержать большое число стратегий.

Поэтому в общем случае стандартный прием сведения решения матричной игры к ЗЛП неприменим.

В **разделе 2.2.2** сформулировано условие совпадения значения дискретной и непрерывной игр, указана ВЗ для второго игрока, которая сводится к нахождению точки минимума выпуклой сепарабельной функции с использованием критерия Гросса. Обозначим через v, v' значения игр Γ и Γ' . Для каждого $i = 1, \dots, n$ определим стратегию нападения $x^{(i)}$, для которой $x_i^{(i)} = A, x_k^{(i)} = 0, k \neq i$. Поскольку функция $F(x, y)$ выпукла по x , при решении игры Γ' в смешанных стратегиях первый игрок может использовать только вероятностные распределения $p = (p_1, \dots, p_n)$ на множестве $\{x^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$. Множество всех смешанных стратегий такого вида обозначим через P . Отсюда вытекает, что значение игры Γ' можно записать как $v' = \max_{p \in P} \min_{y \in Y'} F(p, y)$, где $F(p, y) = \sum_{i=1}^n p_i F(x^{(i)}, y)$. Поскольку в игре Γ функция выигрыша $F(x, y)$ выпукла по y , ее значение равно $v = \min_{y \in Y} \max_{i=1, \dots, n} F(x^{(i)}, y) = \max_{i=1, \dots, n} F(x^{(i)}, y^0)$, а минимаксная стратегия y^0 второго игрока оптимальна. Стратегию y^0 можно найти с помощью принципа уравнивания Гермейера.

В сделанных предположениях относительно функций $f_i(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, решение игры Γ' в смешанных стратегиях может быть найдено с использованием АРП. Далее в этом разделе указаны частные случаи, не требующие применения АРП. Определим множества

$$Y_1 = \{y \in Y \mid y_i \leq \lfloor A/\mu_i \rfloor, i = 1, \dots, n\}, Y'_1 = \{y \in Y_1 \mid y_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, n\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y \mid y_i \leq \lceil A/\mu_i \rceil, i = 1, \dots, n\}, Y'_2 = \{y \in Y_2 \mid y_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через $Y_1^{\text{ext}}, Y_2^{\text{ext}}$ множества крайних точек множеств Y_1, Y_2 . Нетрудно показать, что $Y_i^{\text{ext}} \subseteq Y'_i, i = 1, 2$. Заметим, что в модели Дрешера в сделанных предположениях относительно функций $f_i(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, всегда выполнено неравенство $v' \geq v$. Укажем условие, при котором $v' = v$.

Представим вектор y^0 как выпуклую комбинацию векторов $y^{(j)} \in Y_1^{\text{ext}}$ с коэффициентами $q_j^0 \geq 0$, $j = 1, \dots, s$, $q_1^0 + \dots + q_s^0 = 1$.

Теорема 4. Пусть в непрерывной игре Γ модели Дрешера p^0 — оптимальная смешанная стратегия первого игрока¹¹, а минимаксная стратегия второго игрока $y^0 \in Y_1$. Тогда (p^0, q^0, v) — решение дискретной игры Γ' , где оптимальная смешанная стратегия второго игрока q^0 состоит в выборе чистой стратегии $y^{(j)}$ с вероятностью q_j^0 , $j = 1, \dots, s$.

Следствие 1. Пусть в модели Гермейера $\mu_i = \mu$, $i = 1, \dots, n$, а $B \leq n \lfloor A/\mu \rfloor$ и n не делит B . Тогда справедливо утверждение теоремы 4.

В разделе 2.2.3 в модели Дрешера указаны алгоритмы поиска нижнего и верхнего значений $\underline{v}' = \max_{x \in X'} \min_{y \in Y'} F(x, y)$ и $\bar{v}' = \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} F(x, y)$ игры Γ' . В отличие от функции $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$, которая является выпуклой, функция $W'(x) = \min_{y \in Y'} F(x, y)$ в общем случае многоэкстремальна на множестве X . Для поиска максиминной чистой стратегии в игре Γ' используется алгоритм глобального поиска, основанный на покрытии симплексов правильными симплексами меньших размеров.

Лемма 1. Для любого $x', x'' \in X$ верно неравенство

$$W'(x') - W'(x'') \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i - x''_i)^+. \quad (8)$$

Правильный симплекс $S(\Delta, z)$ в X с вершинами $x^j = z + \Delta e^j$, $j = 1, \dots, n$, где e^j — единичный вектор вдоль оси x_j , зададим целым числом $\Delta \in (0, A]$ и вектором $z = (z_1, \dots, z_n)$, удовлетворяющим следующим условиям: $z_1 + \dots + z_n = A - \Delta$, $z_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, n$. Из неравенства (8) следует, что функция $g(x) = \min_{j=1, \dots, n} (W'(x^j) + \sum_{i \neq j} \lambda_i (x_i - x_i^j))$ является мажорантой функции W' на симплексе $S(\Delta, z)$, причем в вершинах симплекса значения функций W' и g

¹¹Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журн. выч. матем. и матем. физ. 1973. Сер. 13. № 1. С. 59–70.

совпадают. Положим $\chi(\Delta) = \max(\lfloor \Delta/n \rfloor, 1)$. Определим симплексы

$$S_i = S(\Delta - \chi(\Delta), z + \chi(\Delta)e^i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Назовем $\tilde{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ стандартным покрытием симплекса $S(\Delta, z)$.

Рассмотрим алгоритм глобальной оптимизации поиска величины $\underline{v}'$. Пусть N — наибольшее текущее значение функции W' , найденное по некоторому набору точек из X' . В начале алгоритма положим $N = \max(W'(x^{(1)}), \dots, W'(x^{(n)}))$. Будем просматривать симплексы стандартного покрытия множества X , вычисляя в их вершинах значения функции W' , изменяя N и отбрасывая те симплексы, для которых максимум мажоранты меньше $N + \varepsilon$, где константа $\varepsilon > 0$ задает точность поиска величины $\underline{v}'$. Среди оставшихся симплексов возьмем симплекс с максимальным значением мажоранты и произведем для него стандартное покрытие и т.д. Вычисления продолжаются до тех пор, пока все симплексы не будут отброшены.

Теорема 5. *Если в модели Дрешера при стандартном покрытии $\tilde{S}$ симплекса $S(\Delta, z)$ при некоторых i и j ($i < j$) выполнены равенства $z_i = z_j$, $\lambda_i = \lambda_j$, $\mu_i = \mu_j$, то в алгоритме глобального поиска симплекс S_j можно отбросить.*

Обозначим $\omega = \max_{y \in Y} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i (y_i - y'_i)^+$. В качестве мажоранты для симплекса $S(\Delta, z)$ с вершинами x^j , $j = 1, \dots, n$, вместо $g(x)$ можно использовать $\min(g(x), \max_{j=1, \dots, n} W(x^j) + \omega)$.

Теорема 6. *Пусть $\lambda_1 \mu_1 = \dots = \lambda_n \mu_n$. Тогда $\omega = \lambda_1 \mu_1 \lfloor n^2/4 \rfloor / n$.*

Теорема 7. *При $n = 3$*

$$\omega = \max \left(\frac{1}{1/(\lambda_1 \mu_1) + 1/(\lambda_2 \mu_2)}, \frac{2}{1/(\lambda_1 \mu_1) + 1/(\lambda_2 \mu_2) + 1/(\lambda_3 \mu_3)} \right).$$

Теоремы 6 и 7 доказаны в **приложении 2**. Обозначим через $\Gamma'_n(\mu)$ игру Γ' в модели Гермейера, в которой $\mu_i = \mu$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 8. Пусть в игре Γ' модели Гермейера наименьший коэффициент μ_n целый. Если в соответствующей игре $\Gamma'_n(\mu_n)$ выполнено $\underline{v}'(\mu_n) = (A - \mu_n B)^+$, то $\underline{v}' = v'(\mu_n)$, а $x^{(n)} = (0, \dots, 0, A)$ — максиминная стратегия нападения.

Рассмотрим поиск минимаксной стратегии в игре Γ' модели Дрешера. Так как для верхнего значения игры выполнено

$$\bar{v}' = \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} F(x, y) = \max_{x \in X'} F(x, y^*) = \max_{i=1, \dots, n} F(x^{(i)}, y^*) = \max_{i=1, \dots, n} f_i(A, y_i^*),$$

при поиске минимаксной стратегии y^* можно воспользоваться дискретным аналогом принципа уравнивания.

В разделе 2.2.4 АРП применяется для поиска решения игры Γ с бюджетными ограничениями, в которой

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A \right\}, \quad Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n b_i y_i \leq B \right\},$$

где A и B — капиталы первого и второго игроков, используемые для приобретения средств нападения и защиты на i -м пункте по ценам a_i и b_i . Здесь $A, B, a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$. Как и выше, игра Γ' получается из игры Γ в предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами. Чтобы применить АРП поиска решения в смешанных стратегиях игры Γ' , необходимо существенно сократить множество стратегий X' первого игрока. Из монотонности и выпуклости функций f_i по переменным x_i следует, что первый игрок может ограничиться стратегиями из множества X^{ext} крайних точек выпуклой оболочки множества всех недоминируемых (при покомпонентном сравнении) стратегий из X' . В этом разделе предложен алгоритм построения множества X^{ext} .

В разделе 2.3 АРП применяется к матричным играм комбинаторного типа, где стратегиями игроков являются всевозможные перестановки последовательности $1, \dots, n$. В разделах 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.3 рассматриваются следующие игровые модели:

1. игра фермера против природы;
2. соревнование двух фермерских хозяйств;
3. взаимодействие двух сторон на нескольких пунктах.

ВЗ для каждого игрока во второй модели сводятся к упорядочиванию чисел, а в первой и третьей моделях — к решению задачи о назначениях. Во всех игровых моделях в **разделах 2.2 и 2.3** АРП численно сравнивается с методом Брауна-Робинсон.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [3, 4].

Третья глава посвящена антагонистической игре нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. Изучаются свойства Z -образных функций, указаны достаточные условия существования решения в чистых стратегиях, обсуждаются условия доминирования, с помощью метода возможных направлений оценивается нижнее значение игры.

В **разделе 3.1** определяется игра. Пусть имеется m типов средств нападения и n типов средств защиты. Введем обозначения: A и B — общее количество средств нападения и защиты; x_i, y_j — количество средств нападения и защиты соответственно i -го и j -го типа; p_{ij} — вероятность преодоления одним средством нападения i -го типа одного средства защиты j -го типа, $p_{ij} \in [0, 1]$. Стратегии нападения $x = (x_1, \dots, x_m)$ и защиты $y = (y_1, \dots, y_n)$ принадлежат множествам

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = A \right\} \text{ и } Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n y_j = B \right\}.$$

Пусть $P_{ij}(x_i, y_j)$ — вероятность преодоления i -м типом нападения в количестве x_i j -го типа защиты в количестве y_j . Положим

$$P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - (1 - p_{ij})^{x_i})^{y_j},$$

если $x_i, y_j > 0$. Будем говорить, что стратегия нападения x преодолела стратегию защиты y , если каждое средство защиты преодолевается некоторым

средством нападения. Вероятность этого события обозначим через $F(x, y)$ и примем за функцию выигрыша нападения. Таким образом, определена антагонистическая игра

$$\Gamma = \left\langle X, Y, F(x, y) = \prod_{j \in J(y)} \left(1 - \prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, y_j)) \right) \right\rangle,$$

где $I(x) = \{x_i > 0, i = 1, \dots, m\}$, $J(y) = \{y_j > 0, j = 1, \dots, n\}$.

Дискретная игра $\Gamma' = \langle X', Y', F(x, y) \rangle$ получается из игры Γ при дополнительном предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами. Функция выигрыша в игре Γ в общем случае не является ни выпуклой, ни вогнутой.

В разделе 3.2 изучаются свойства Z -образных функций.

Определение 1. Убывающую функцию $f(z)$, определенную на полупрямой $\mathbb{R}_+$, будем называть Z -образной, если $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

Определим на $\mathbb{R}_+$ семейство Z -образных функций

$$f_{\alpha\beta}(z) = 1 - (1 - \alpha^z)(1 - \beta^z) = \alpha^z + \beta^z - (\alpha\beta)^z,$$

зависящих от параметров $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Теорема 9. При $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$ уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет не более одного положительного корня. Если, к тому же, $\gamma \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$ (или $\gamma \leq \alpha$, $\delta \leq \beta$), то уравнение не имеет положительных корней.

Определим на интервале $(0, \infty)$ более общие функции

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \alpha_i^z),$$

зависящие от параметров $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$.

Теорема 10. При любых $0 < z_1 < z_2$ справедливо неравенство

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_2}(z_1) \geq f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_1}(z_2).$$

Теорема 11. Пусть $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$. Тогда при любых $z_1, z_2 > 0$ справедливо неравенство

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1) f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_2) \geq \min[f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1 + z_2), f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_1 + z_2)].$$

Следствие 2. Пусть $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Тогда для любых $z_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$\prod_{j=1}^n f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(z_j) \geq \min_{j=1, \dots, n} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(z_1 + \dots + z_n).$$

В разделе 3.3 указаны достаточные условия существования решения в чистых стратегиях игры Γ' .

Лемма 2. Пусть при некоторых i и j вероятность $p_{ij} \in (0, 1)$. При любом фиксированном $y_j > 0$ функция $\ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j))$ переменной x_i строго вогнута, если $y_j > 1$, и линейна, если $y_j = 1$.

Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим стратегию нападения $x^{(i)}$, для которой $x_i^{(i)} = A$, $x_k^{(i)} = 0$, $k \neq i$. Аналогично для каждого $j = 1, \dots, n$ определим стратегию защиты $y^{(j)}$, для которой $y_j^{(j)} = B$, $y_k^{(j)} = 0$, $k \neq j$. С использованием следствия 2 доказывается

Теорема 12. Для любой стратегии нападения $x \in X$

$$\min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{j=1, \dots, n} F(x, y^{(j)}).$$

Кроме того,

$$\max_{x \in X} F(x, y^{(j)}) = \max_{i=1, \dots, m} F(x^{(i)}, y^{(j)}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Следствие 3. Для любой стратегии нападения $x \in X'$

$$\min_{y \in Y'} F(x, y) = \min_{j=1, \dots, n} F(x, y^{(j)}), \quad \max_{x \in X'} F(x, y^{(j)}) = \max_{i=1, \dots, m} F(x^{(i)}, y^{(j)}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема 13. Если игра с матрицей $(F(x^{(i)}, y^{(j)}))_{m \times n}$ имеет решение в чистых стратегиях, то оно является решением и исходной игры Γ' .

В **разделе 3.4** строятся оптимальные смешанные стратегии игроков, рандомизирующие выбор крайних точек множеств стратегий X и Y в игре Γ . На их основе построены оценки для значения игры.

В **разделе 3.5** обсуждаются условия доминирования.

Теорема 14. Пусть l -я строка матрицы (p_{ij}) доминирует k -ю, т.е. $p_{lj} \geq p_{kj}$, $j = 1, \dots, n$, $l \neq k = 1, \dots, m$. Тогда

1. Найдется максиминная стратегия нападения, не использующая k -е средство.

2. Если стратегия $y \in Y$ удовлетворяет неравенствам $y_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, то при нахождении $\max_{x \in X} F(x, y)$ нападение k -е средство может не использовать.

Теорема 15. Пусть l -й столбец матрицы (p_{ij}) доминируется ее k -м столбцом, т.е. $p_{ik} \geq p_{il}$, $i = 1, \dots, m$, $k \neq l = 1, \dots, n$. Тогда

1. Найдется минимаксная стратегия защиты, не использующая k -е средство.

2. Для любой стратегии нападения $x \in X$ выполнено неравенство $F(x, y^{(k)}) \geq F(x, y^{(l)})$.

В **разделе 3.6** с помощью метода возможных направлений оценивается нижнее значение $\underline{v}'$ игры Γ' .

Результаты главы 3 опубликованы в работе [2].

Основные результаты работы приведены в **заключении**.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

- Для задачи целочисленного линейного программирования разработана модификация метода Гомори, имеющая при небольшом числе переменных более высокую скорость сходимости, чем ряд известных алгоритмов отсечений.

- Получено решение дискретной игры «нападение-защита» в чистых и смешанных стратегиях.
- Предложен алгоритм решения специального класса матричных игр большой размерности, использованный для построения решения ряда игровых моделей.
- На основе свойств Z -образных функций разработан метод поиска максиминных стратегий в игре, моделирующей охрану объекта.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту Владимиру Викторовичу Морозову за постоянное внимание к работе, ценные замечания, поддержку и неоценимую помощь в подготовке диссертации.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. Метод решения матричных игр специального вида // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 14-23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 30–31.
- [2] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5, В. 4. — С. 66–83.
- [3] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О решении дискретной игры распределения ресурсов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2014. — № 2. — С. 10–16.

Переиздание: Morozov V.V., Shalbuzov K.D. On a solution of the discrete resource allocation game // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2014. — V. 38, № 2. — P. 37–44.)

- [4] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О численном решении матричных игр специального вида // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 10. — С. 1557–1562.

Переиздание: Morozov V.V., Shalbuzov K.D. Numerical solution of special matrix games // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — V. 54, № 10. — P. 1499–1504.

- [5] Шалбузов К.Д., Морозов В.В. Об одной модификации метода Гомори // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. — 2012. — № 1. — С. 3–9.

Переиздание: Shalbuzov K.D., Morozov V.V. One modification of Gomory's algorithm // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2012. — V. 36, № 1. — P. 1–7.

- [6] Шалбузов К.Д. О сравнении некоторых методов отсечения для задач целочисленного линейного программирования // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова / Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. — М.: МАКС Пресс. — 2014. — № 45. — С. 123–130.

- [7] Шалбузов К.Д. Модификация метода Гомори для решения задач целочисленного программирования // VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19-23 октября 2010 г.: Труды. — М.: МАКС Пресс. — С. 260–261.

- [8] Morozov V.V., Shalbuzov K.D. Zero-sum game of resource allocation // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15-19 октября 2013 г.: Труды. — Т. 1. — М.: МАКС Пресс. — С. 193–195.