Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

На правах рукописи

Шалбузов Камил Джавид О.

РЕШЕНИЕ ДВУХ КЛАССОВ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доцент,
кандидат физико-математических наук,
Морозов Владимир Викторович

Москва – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **4**

Списки основных обозначений и сокращений **11**

ГЛАВА 1. Модификация метода Гомори решения задачи целочисленного линейного программирования **13**

1.1. Постановка задачи и циклический алгоритм Гомори 14

1.2. Модифицированный циклический алгоритм 16

1.2.1. Алгоритм пометок 20

1.2.2. Алгоритм подбора параметров 22

1.2.3. Сравнение алгоритма пометок с алгоритмом подбора параметров 30

1.3. Сравнение модифицированного циклического алгоритма с другими алгоритмами 31

ГЛАВА 2. Решение матричных игр специального вида **41**

2.1. Алгоритм решения матричных игр 42

2.2. Дискретная игра «нападение-защита» 45

2.2.1. Постановка задачи 45

2.2.2. Решение дискретной игры в смешанных стратегиях 47

2.2.3. Поиск нижнего и верхнего значений игры 55

2.2.4. Игра с бюджетными ограничениями 67

2.3. Игры комбинаторного типа 73

2.3.1. Игра фермера против природы 73

2.3.2. Соревнование двух фермерских хозяйств 75

2.3.3. Взаимодействие двух сторон на нескольких пунктах 77

ГЛАВА 3. Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта 79

3.1. Постановка задачи 79

3.2. Свойства Z-образных функций 81

3.3. Решение игры в чистых стратегиях 88

3.4. Использование смешанных стратегий 94

3.5. Доминирование при поиске максиминных и минимаксных стратегий 96

3.6. Поиск максиминных и минимаксных стратегий 99

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 103

ЛИТЕРАТУРА 105

Приложение 1. Решение вспомогательной задачи в модифицированном циклическом алгоритме при $n = 1, 2$ 115

Приложение 2. Доказательство теорем 2.3 и 2.4 117

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Среди задач исследования операций важное место занимают дискретные оптимизационные и игровые задачи. Появление дискретности связано с распределением штучных ресурсов, а также с природой изучаемых объектов, таких, как графы, сети и т.п. Данная диссертационная работа посвящена решению некоторых таких задач.

В качестве оптимизационных задач рассмотрены задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для решения задач ЦЛП в [75] Гомори сформулировал циклический алгоритм (ЦА), который, используя отсечения, за конечное число шагов находит оптимальное решение. Метод отсечений для задачи ЦЛП состоит в добавлении ограничений, не изменяющих множество допустимых целых точек, и последующем решении соответствующих непрерывных задач. Методы отсечений являются одним из классических подходов к решению ЦЛП (см. [28, 29, 42, 47, 49, 54]). В [76] Гомори определил полностью целочисленный алгоритм (ПЦА), в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной. В [86] Мартином был предложен алгоритм (АМ), в котором используется специальный метод построения отсечения. Будем называть его отсечением Мартина. При построении отсечения Мартина в данной работе предлагается поиск производящей строки, минимизирующий число преобразований в АМ. Укажем также работы Балаша [62–64], Балинского [66–68], Джерослоу [82–85], Хохлюка [50–53] и Червака [55]. В перечисленных алгоритмах возникают ситуации, когда добавленное отсечение задается гиперплоскостью, не содержащей неотрицательных допустимых решений. В данной диссертационной работе предлагается модификация ЦА (МЦА), в которой строятся отсечения более близкие к многограннику ограничений, чем в ЦА.

В качестве дискретных игровых задач рассмотрены матричные игры специального вида. Алгоритмам решения матричных игр посвящена обширная литература (см. [3, 11, 12, 39, 43, 56, 61]). Отметим метод двойного описания [35] и метод фон Неймана, основанный на решении системы дифференциальных уравнений [27, 93]. Однако чаще используется прием сведения решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования (см., например, [10]). В настоящей работе предлагается алгоритм, основанный на решении подыгр. Алгоритм применяется к дискретному варианту игры «нападение-защита» и к играм комбинаторного типа. В первой игре нападение распределяет средства для прорыва через пункты, обороняемые защитой. Непрерывные игры распределения бесконечно-делимых ресурсов изучались многими авторами (см., например, [18, 19, 21, 70, 72, 92]). Особо отметим следующие основополагающие работы. Блэккет в [71] дал общее определение игры и исследовал игровую модель выбора маршрута поставки ресурса. В диссертации построены явные формулы решений в смешанных стратегиях для моделей Гросса [27, 78, 79], Гермейера [11, 16] и их обобщения [36, 37]. Однако дискретная матричная игра распределения штучных ресурсов в общем случае имеет матрицу больших размеров. Способ построения приближенного решения дискретной игры указан в [69]. Предложенный в диссертации алгоритм позволяет обобщение на игры с бюджетными ограничениями.

Также в работе рассматривается антагонистическая игра нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. В последнее время интерес к играм распределения ресурсов возрос в связи с задачами охраны объектов (см., например, [5, 6, 13, 17, 18, 21, 89]). В рассматриваемой модели обе стороны могут использовать одновременно несколько средств. Вероятность преодоления некоторым средством нападения некоторого средства защиты задается Z-образной функцией, часто используемой в моделях исследования операций [5, 6, 17].

Цели работы. Для задач ЦЛП основной целью исследования является модификация циклического алгоритма Гомори таким образом, чтобы отсечения на каждом шаге алгоритма строились приближенно к многограннику ограничений задачи, и численное сравнение с известными алгоритмами решения задач ЦЛП. Для игровых задач основной целью является решение матричных игр больших размеров специального вида, а также реализация вычислительного алгоритма для сравнения предложенного метода с существующими методами решения матричных игр.

Предмет и объект исследования. Объектом исследования являются задачи ЦЛП, антагонистические и матричные игры, а также методы их решения.

Методика исследований. Методологическую основу исследования составляют

- методы дискретной оптимизации;
- математические методы теории игр;
- элементы теории чисел.

Научная новизна заключается в том, что

- на основе циклического алгоритма Гомори предложен модифицированный циклический алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования, в котором строятся отсечения, расположенные ближе к многограннику ограничении, чем в циклическом алгоритме Гомори;
- предложен метод решения матричных игр больших размеров специального вида, в которых существует быстрый алгоритм нахождения наилучшей чистой стратегии для каждого игрока в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера;

- сформулированы условия существования решения антагонистической игры нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта, в чистых и смешанных стратегиях.

Достоверность результатов и выводов диссертации базируется на применении математических методов теории игр, методов оптимизации, математического аппарата исследования операции. Теоретические положения диссертации сформулированы в виде утверждений и строго доказаны.

Практическая ценность состоит в том, что разработанные в диссертации методы и полученные результаты могут быть полезны при решении задач целочисленного линейного программирования, а также при решении матричных игр больших размеров.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В данной работе рассмотрены задачи математического программирования большой размерности. Это соответствует паспорту специальности 01.01.09.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Для задачи целочисленного линейного программирования разработана модификация метода Гомори, имеющая при небольшом числе переменных более высокую скорость сходимости, чем ряд известных алгоритмов отсечений.

- Получено решение дискретной игры «нападение-защита» в чистых и смешанных стратегиях.

- Предложен алгоритм решения специального класса матричных игр большой размерности, использованный для построения решения ряда игровых моделей.

- На основе свойств Z-образных функций разработан метод поиска максиминных стратегий в игре, моделирующей охрану объекта.

Апробация результатов исследования. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на VI и VII Московской международной конференциях по исследованию операций ORM2010 и ORM2013, на ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения 2013» и «Ломоносовские чтения 2014», а также на ежегодной научной конференции «Тихоновские чтения» (Москва, 2013).

Публикации. По теме диссертации имеется восемь публикаций. Основные результаты работы опубликованы в четырех статьях из списка ВАК РФ [32–34, 57]. В работах [32–34] Шалбузову К.Д. принадлежат формулировки и доказательства результатов, Морозову В.В. принадлежит постановка задачи и проверка результатов. В работе [57] Морозовым В.В. была предложена модификация метода Гомори при $n = 2$, Шалбузов К.Д. разработал эту модификацию для произвольного числа переменных n.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, насчитывающего 93 наименований, и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 125 страниц.

В первой главе предлагается модификация циклического алгоритма Гомори (МЦА) решения задачи ЦЛП. В МЦА строятся отсечения более близкие к многограннику ограничений. При поиске модифицированного отсечения возникает вспомогательная задача ЦЛП с одним ограничением. В разделе 1.2.1 эта задача решается алгоритмом пометок. В разделе 1.2.2 предлагается другой метод (алгоритм подбора параметров) решения вспомогательной задачи, основанный на формуле общего решения линейного диофантова уравнения. В разделе 1.3 рассмотрены полностью целочисленный алгоритм Гомори (ПЦА), в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной, и алгоритм Мартина (АМ), в котором отсечение строится специальным способом (отсечение Мартина). В данной работе при построении отсечения Мартина предлагается поиск производящей строки, минимизиру-

ющий число преобразований в АМ. В конце главы приведены результаты численного сравнения МЦА с ЦА, ПЦА и АМ.

Во второй главе предлагается метод решения матричных игр больших размеров специального вида. Чтобы выделить специальный класс матриц в разделе 2.1 рассмотрены вспомогательные задачи игроков, в которых каждый игрок находит наилучшую чистую стратегию в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера. В этом же разделе предложен алгоритм решения матричной игры, основанный на решении последовательности подыгр (АРП), соответствующих некоторым подматрицам исходной матрицы игры.

В разделе 2.2 исследуется модель Дрешера дискретной игры «нападение-защита». В разделе 2.2.2 сформулировано условие совпадения значения дискретной и непрерывной игр. В этом же разделе указана вспомогательная задача (ВЗ) для второго игрока, которая сводится к нахождению точки минимума выпуклой сепарабельной функции с использованием критерия Гросса.

В разделе 2.2.3 рассматриваются задачи построения нижнего и верхнего значений игры в модели Дрешера. Для поиска максиминной чистой стратегии используется алгоритм глобального поиска. Минимаксная чистая стратегия ищется с использованием дискретного аналога принципа уравнивания. В разделе 2.2.4 АРП применяется для поиска решения игры с бюджетными ограничениями. В частных случаях получены явные формулы для значения игры и оптимальных стратегий. В разделе 2.3 АРП применяется к следующим матричным играм комбинаторного типа, в которых стратегиями игроков являются всевозможные перестановки последовательности $1, ..., n$: игра фермера против природы [22, 25], соревнование двух фермерских хозяйств [26], взаимодействие двух сторон на нескольких пунктах. ВЗ для каждого игрока во второй модели сводятся к упорядочиванию чисел, а в первой и третьей моделях — к решению задачи о назначениях.

Третья глава посвящена дискретной антагонистической игре нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. Каждая из сторон может

использовать штучные средства защиты и нападения. Считается, что стратегия нападения преодолело стратегию защиты, если для каждого средства защиты существует средство нападения, которое это средство защиты преодолеет. Вероятность этого события берется в качестве функции выигрыша нападения. В отличие от модели Дрешера главы 2 функция выигрыша в соответствующей непрерывной игре в общем случае не является ни выпуклой, ни вогнутой. В разделах 3.3 и 3.4 формулируются условия существования решений игры в чистых и смешанных стратегиях. В разделах 3.5 и 3.6 обсуждаются условия доминирования и указываются методы поиска максиминных и минимаксных стратегий.

В **приложении 1** указан алгоритм нахождения оптимального решения вспомогательной задачи в модифицированном циклическом алгоритме при $n = 1, 2$ в явном виде.

В **приложении 2** доказаны теоремы 2.3 и 2.4.

Алгоритмы, предложенные в главах 1 и 2, были программно реализованы соответственно в системах MATLAB и MAPLE, а эксперименты осуществлялись на компьютере с процессором Intel Core i3 540 с тактовой частотой 3.07 ГГц и объемом оперативной памяти 4 ГБ. Во всех главах для сравнения алгоритмов генерировалась 1000 задач. В главе 1 элементы матрицы $a_{ij},\ i = 0, 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$ ($a_{i0},\ i = 1, ..., m$) выбирались как случайные целые числа, равномерно распределенные на отрезке $[0, 100]$ ($[100, 200]$). В главе 2 параметры выбирались как случайные целые числа, равномерно распределенные на отрезке $[1, 100]$.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту Владимиру Викторовичу Морозову за постоянное внимание к работе, ценные замечания, поддержку и неоценимую помощь в подготовке диссертации.

Список основных обозначений

- $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0, \forall i\}$. Положим $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^1_+$;
- $\mathbb{Z}\,(\mathbb{Z}_+)$ – множество целых (неотрицательных целых) чисел;
- $a^+ = \max(a, 0)$ для любого действительного числа a;
- $\lfloor a \rfloor$ и $\{a\}$ – целая и дробная части действительного числа a;
- $\lceil a \rceil$ – наименьшее целое $b \geqslant a$;
- $a \equiv b (\mathrm{mod}\ k)$ – a сравнимо с b по модулю k, т.е. a и b дают одинаковые остатки при делении на k. Если $k = 1$, то пишем $a \equiv b$;
- НОД$(a_1, ..., a_n)$ – наибольший общий делитель целых чисел $a_1, ..., a_n$;
- $e^i \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор вдоль оси x_i;
- $e^J = \sum\limits_{i \in J} e^i$, где $J \subseteq \{1, ..., n\}$;
- x^{T} – вектор-столбец, полученный транспонированием вектора x;
- $\mathrm{conv}\, X$ – выпуклая оболочка множества $X \subset \mathbb{R}^n$;
- C_n^k – число сочетаний из n элементов по k;
- Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x \succ y$, если x лексикографически больше y, т.е. первая отличная от нуля компонента разности $x - y$ положительна;
- $\sum\limits_{i=l}^{k} a_i = 0$, если $l > k$, где a_i – произвольные действительные числа;
- $|X|$ – число элементов конечного множества X;
- $\blacksquare$ – знак окончания доказательства.

Список сокращений

- АМ – алгоритм Мартина;
- АРП – алгоритм, основанный на решении последовательности подыгр;
- ВЗ – вспомогательная задача в АРП;
- ЗЛП – задача линейного программирования;
- ЗР – задача о рюкзаке;
- МБР – метод Брауна-Робинсон;
- МВН – метод возможных направлений;
- МЦА – модифицированный циклический алгоритм;
- ПЦА – полностью целочисленный алгоритм;
- ЦА – циклический алгоритм;
- ЦЛП – целочисленное линейное программирование.

ГЛАВА 1

Модификация метода Гомори решения задачи целочисленного линейного программирования

Для решения задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) Гомори сформулировал циклический алгоритм (ЦА), который за конечное число шагов находит оптимальное решение задачи ЦЛП. В данной главе предлагается модификация циклического алгоритма Гомори (МЦА), в которой строятся отсечения более близкие к многограннику ограничений, чем в ЦА. На рис. 1.1 ломаная $OABCD$ задает допустимую область задачи ЦЛП, пунктирная линия GG' соответствует отсечению Гомори, а параллельная ей сплошная линия RR' – модифицированному отсечению.

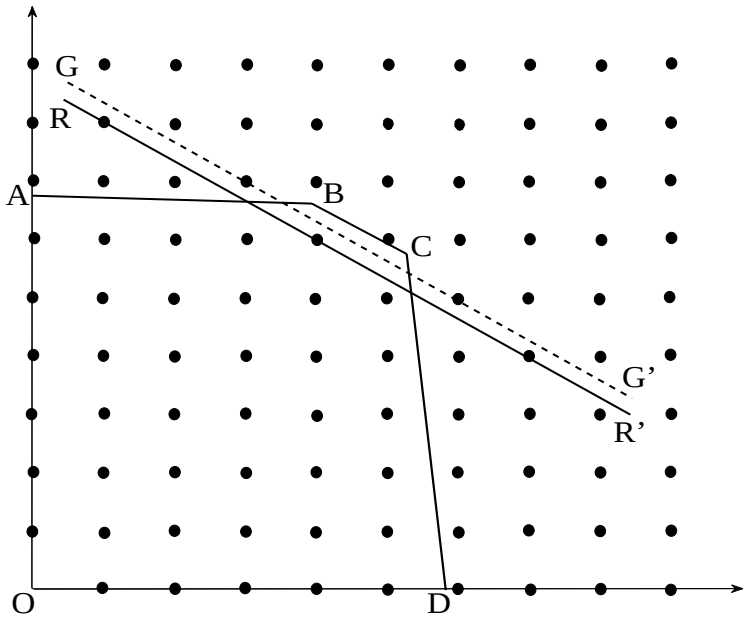


Рисунок 1.1. Взаимное расположение отсечений

При поиске такого модифицированного отсечения возникает вспомогательная задача ЦЛП с одним ограничением. В разделе 1.2.1 эта задача

решается алгоритмом пометок, который применяется при поиске пути в ориентированном графе, соединяющем две заданные вершины [38]. В разделе 1.2.2 предлагается другой метод решения вспомогательной задачи, основанный на формуле общего решения линейного диофантова уравнения [42]. В разделе 1.3 рассмотрены другие известные методы решения задачи ЦЛП, а именно: полностью целочисленный алгоритм Гомори (ПЦА) [76], в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной, и алгоритм Мартина (АМ) [86], в котором отсечение строится специальным способом (отсечение Мартина). В данной работе при построении отсечения Мартина предлагается поиск производящей строки, минимизирующий число преобразований в АМ. В конце главы приведены результаты численного сравнения МЦА с ЦА, ПЦА и АМ.

1.1. Постановка задачи и циклический алгоритм Гомори

Рассмотрим задачу ЦЛП (см. [54, гл. 13])

$$\begin{gathered} x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max \\ x_{n+i} = a_{i0} - a_{i1} x_1 - \ldots - a_{in} x_n,\ i = 1, \ldots, m, \\ x_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \ldots, n+m, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где a_{ij} – целые числа. Множество допустимых решений $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ задачи (1.1) обозначим через X_0. Запишем соответствующую «непрерывную» задачу (отбросим целочисленность переменных $x_j,\ j = 1, \ldots, n+m$)

$$\begin{gathered} x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max \\ x_{n+i} = a_{i0} - a_{i1} x_1 - \ldots - a_{in} x_n,\ \ i = 1, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n+m. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Предположим, что множество X допустимых решений непрерывной задачи (1.2) не пусто и ограничено, а целевая функция x_0 на X ограничена сверху. Обозначим $a_0 = (a_{01},..., a_{0n})$, $A_1 = (a_{10}, ..., a_{m0})$, $\theta = (0, ..., 0)$, $A_2 = (a_{ij})_{m\times n}$, I_n – единичная $n \times n$-матрица. В качестве симплекс-таблицы задачи (1.1) будем рассматривать расширенную столбцовую таблицу [54, гл. 13]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ \theta^{\mathrm{T}} & -I_n \\ A_1^{\mathrm{T}} & A_2 \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(n+1)},$$

соответствующую системе уравнений задачи (1.1). Строки матрицы $(\theta \ \ -I_n)$ соответствуют тривиальным уравнениям $x_j = -(-x_j),\ j = 1, ..., n$, и начальным небазисным переменным. Столбцы матрицы A с 1-го по n-й соответствуют небазисным переменным. В столбцовой таблице элементарные преобразования (операции замещения) осуществляются над столбцами, что соответствует эквивалентному преобразованию задачи, двойственной к (1.2). Симплекс-таблица A называется прямо (двойственно) допустимой, если столбец $A^0 = (\theta\, A_1)^{\mathrm{T}}$ (строка a_0) содержит неотрицательные компоненты. Если симплекс-таблица A одновременно прямо и двойственно допустима, то ее нулевой столбец содержит компоненты оптимального решения задачи (1.2).

Покажем, как строятся отсечения в ЦА [28, гл. 5]. После решения задачи (1.2) симплекс-методом, используя заключительную таблицу, выразим все переменные через небазисные переменные $x_{N_j},\ j = 1, ..., n$,

$$x_i = a'_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(-x_{N_j}),\ i = 0, 1, ..., n + m.$$

Выберем в таблице производящую строку с номером

$$k = \min\{a'_{i0} \notin \mathbb{Z},\ i = 0, ..., n + m\}$$

и построим соответствующее отсечение

$$\sum_{j=1}^{n} \{a'_{kj}\} x_{N_j} \geqslant \{a'_{k0}\}. \tag{1.3}$$

Вводя новую переменную s, определим отсечение Гомори

$$s = -\{a'_{k0}\} + \sum_{j=1}^{n} (-\{a'_{kj}\})(-x_{N_j}),\ s \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Заметим, что для любого решения $\bar{x} \in X_0$ выполнено сравнение

$$s = -\{a'_{k0}\} + \sum_{j=1}^{n} \{a'_{kj}\} x_{N_j} \equiv 0.$$

Алгоритм ЦА состоит в следующем. На каждом шаге добавляем отсечение вида (1.4). Делаем шаг по двойственному симплекс-алгоритму, используя в качестве ведущей строку, соответствующую отсечению Гомори (1.4). После вывода из базиса переменной s ведущая строка соответствует ограничению вида $s = -(-s)$ и удаляется. При этом таблица остается двойственно допустимой. Добавление отсечений повторяется до тех пор, пока не будет выполнено $a'_{i0} \geqslant 0,\ i = 0, ..., n + m$. Если a'_{i0} на некотором шаге остается отрицательным, следующий шаг двойственного метода производится без добавления отсечения (1.4).

1.2. Модифицированный циклический алгоритм

В МЦА вместо отсечения (1.4) на каждой итерации ЦА добавляется модифицированное отсечение. Покажем, как оно строится.

Рассмотрим вспомогательную оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} f_{kj} x_{N_j} \ \to \min_{(x_{N_1}, ..., x_{N_n})} \\ \sum_{j=1}^{n} f_{kj} x_{N_j} \equiv f_k,\ x_{N_j} \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, ..., n, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $f_{kj} = \{a'_{kj}\},\ f_k = \{a'_{k0}\}$ – дробные части чисел a'_{kj} и a'_{k0}. Отметим, что f_{kj} и f_k – рациональные числа.

Нетрудно видеть, что минимальное значение целевой функции в задаче (1.5) равно $f_k + \mu^*$, где μ^* – некоторое целое число. Заметим, что

$\mu^* \geqslant 0$, поскольку целевая функция принимает неотрицательные значения и $0 < f_k < 1$. Так как для любого решения $\bar{x} \in X_0$ выполнено сравнение в (1.5), то верно неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} f_{kj} x_{N_j} \geqslant f_k + \mu^*, \tag{1.6}$$

которое будем называть модифицированным отсечением. Отсечение Гомори (1.3) в ЦА соответствует неравенству (1.6) при $\mu^* = 0$. В следующем примере показано, что, несмотря на то, что модифицированное отсечение строятся более близко к многограннику ограничений, чем в ЦА, существуют примеры, когда оно не содержит ни одного допустимого решения исходной задачи ЦЛП.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу ЦЛП

$$\begin{gathered} x_0 = -13(-x_1) - 18(-x_2) \to \max \\ x_3 = 29 + 13(-x_1) + 9(-x_2), \\ x_4 = 24 + 4(-x_1) + 15(-x_2),\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Заметим, что множество допустимых решений задачи (1.7)

$$X_0 = \{(0,0,29,24),\ (0,1,20,9),\ (1,0,16,20),\ (1,1,7,5),\ (2,0,3,16)\}.$$

По прямому симплекс-алгоритму после операции замещения получим симплекс-таблицу

$$A' = \begin{pmatrix} 2125/53 & 41/53 & 39/53 \\ 73/53 & 5/53 & -3/53 \\ 196/159 & -4/159 & 13/159 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{x}^* = (73/53, 196/159, 0, 0)$ является оптимальным решением «непрерывной» задачи (1.7). На первом шаге ЦА нулевая строка таблицы является

производящей. Решив вспомогательную задачу

$$\mu \to \min$$

$$\mu = 41/53x_3 + 39/53x_4 - 5/53, \;\; \mu, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+,$$

получим, что минимум $\mu^* = 3$ достигается на решении $(x_3, x_4) = (4, 0)$. Таким образом, модифицированное отсечение выглядит следующим образом:

$$s = -164/53 - 41/53(-x_3) - 39/53(-x_4). \tag{1.8}$$

Заметим, что ни при каком векторе $x \in X_0$ не выполнено равенство $s = 0$. Следовательно, отсечение (1.8) не содержит допустимых решений задачи (1.7).

В [10] показано, что если множество решений задачи (1.1) ограничено, то ЦА (соответственно и МЦА) сходится за конечное число шагов.

Для упрощения записи будем использовать обозначения $y_j = x_{N_j}, \; j = 1, ..., n$. Сравнение, задающее ограничение в задаче (1.5), запишем как

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} y_j \equiv f_i,$$

где $1 > f_{ij} > 0, \; j = 1, ..., n, \;\; f_i > 0$. Пусть r – общий знаменатель рациональных чисел f_{ij} и f_i. Положим $a_j = r f_{ij}, \; c = r f_i$. Теперь задачу (1.5) в новых переменных можно записать в виде

$$\begin{gathered} \mu \;\to \min_{(y_1, ..., y_n, \mu)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = c + r\mu, \; y_j \in \mathbb{Z}_+, \; j = 1, ..., n, \; \mu \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{1.9}$$

где a_j, c, r – положительные целые числа, а $r > \max(c, a_1, ..., a_n)$. Задачу (1.9) можно перефразировать следующим образом: требуется найти минимальное целое μ, при котором уравнение в (1.9) имеет решение в неотрицательных целых числах.

Далее будем считать, что множество допустимых решений $y = (y_1, ..., y_n, \mu)$ задачи (1.9) не пусто. Для этого необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель d чисел $r, a_1, ..., a_n$ был делителем числа c. Необходимость последнего условия очевидна, а для доказательства достаточности следует построить допустимое решение, прибавив к некоторому целочисленному решению уравнения из (1.9) (см. [15, 42, 47]) решение $\lambda(r, ..., r, \sum\limits_{j=1}^{n} a_j)$ соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = r\mu, \tag{1.10}$$

где λ – подходящее натуральное число. Без потери общности будем предполагать:

1. $d = 1$ (иначе обе части уравнения в (1.9) сокращаем на d);

2. Ни одно из чисел a_j не делит c (иначе в задаче (1.9) минимум $\mu^* = 0$). В частности, $a_j > 1$;

3. Ни одно из чисел a_j не делит другое число a_i (иначе полагаем $y_i = 0$).

Пусть d_l – наибольший общий делитель чисел $a_1, ..., a_l,\ l = 1, ..., n$. В частности, $d_1 = a_1$. Отметим, что числа d_n и r взаимно простые, поскольку по предположению их наибольший общий делитель $d = 1$. Далее, из уравнения в (1.9) следует, что число d_n делит $c + r\mu$. Поэтому уравнение $d_n z = c + r\mu$ имеет неотрицательное целочисленное решение (z, μ). Среди всех таких решений возьмем решение (z_0, μ_0) с наименьшей второй компонентой. Тогда $\mu = \mu_0 + \tau d_n$, где $\tau \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что $\mu_0 \leqslant d_n - 1$ (см. ниже теорему 1.3). Кроме того, $\mu^* \geqslant \mu_0$.

В следующих двух разделах рассматриваются алгоритмы построения модифицированного отсечения.

1.2.1. Алгоритм пометок

Рассмотрим алгоритм пометок (АП) решения задачи (1.9). Аналогичный алгоритм применяется в [38, параграфы 9.2 и 16.2] при поиске кратчайшего пути в ориентированном графе, соединяющего две заданные вершины. В процессе его выполнения изменяется список F, состоящий из помеченных чисел. После некоторого шага список содержит число $c + r\mu^*$, где μ^* – компонента оптимального решения $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*, \mu^*)$ задачи (1.9). Пусть k – текущий номер элемента списка F. Алгоритм пометок состоит из начального шага и некоторой последовательности общих шагов.

Шаг 1. Полагаем $F = [0],\ k = 1,\ b = c + r\mu_0,\ \mu = \mu_0$. Элемент списка 0 помечаем нулем.

Шаг 2. Элемент списка F_k сравниваем с величиной b. При этом могут возникнуть следующие случаи:

1. $F_k = b$. Алгоритм останавливает работу. Текущее значение μ является искомым μ^*.

2. $F_k > b$ и F_k не является последним элементом списка F. Увеличиваем k на 1 и повторяем шаг 2.

3. $F_k > b$ и F_k – последний элемент списка F. Полагаем $k = 1$, величину b увеличиваем на rd_n, а μ – на d_n. Повторяем шаг 2.

4. $f = F_k < b$. Удаляем элемент F_k из списка F. В конец списка последовательно добавляем непомеченные числа $f + a_j$. Добавленные числа $f + a_j$ помечаем числом f. Повторяем шаг 2.

После завершения алгоритма компоненты $y_j^*,\ j = 1, ..., n$, оптимального решения задачи (1.9) нетрудно найти по пометкам. Отметим, что в ходе алгоритма все элементы списка F различны, а удаленное из списка число

помечено и не может быть вновь в него включено. Отсюда нетрудно вывести, что алгоритм пометок совершает порядка $O(n(c + r\mu^*))$ операций сложения и сравнения чисел (см. [38]). Поскольку величина μ^* заранее неизвестна, необходимо ее оценить сверху через входные данные задачи (1.9).

Теорема 1.1. *Оптимальное решение* $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*, \mu^*)$ *задачи* (1.9) *удовлетворяет неравенствам*

$$y_j^* \leqslant r - 1,\ j = 1, ..., n,\ \ \mu^* \leqslant \mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{1}{r}\Big((r-1)\sum_{j=1}^{n} a_j - c\Big) \right\rfloor.$$

Доказательство. Предположим, что при некотором l выполнено неравенство $y_l^* \geqslant r$. Тогда

$$r + r\mu^* > c + r\mu^* = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j^* \geqslant a_l r.$$

Тогда $1 + \mu^* > a_l$. Отсюда следует, что $\mu^* \geqslant a_l$. Возьмем решение однородного уравнения (1.10) вида $y^{(l)} = (0, ..., 0, r, 0, ..., 0, a_l)$, где l-я компонента равна r, и вычтем его из y^*. Тогда решение $y^* - y^{(l)}$ допустимо в задаче (1.9) и имеет меньшее значение целевой функции $\mu = \mu^* - a_l$, что противоречит оптимальности решения y^*. Итак,

$$y_j^* \leqslant r - 1,\ j = 1, ..., n.$$

Отсюда

$$r\mu^* = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j^* - c \leqslant (r-1)\sum_{j=1}^{n} a_j - c.$$

■

Заметим, что при $n = 1$ оценка μ_1 величины μ^* является точной. Действительно, задача (1.9) с ограничением

$$ay_1 = c + (a + c)\mu,$$

где $a, c > 0$ – взаимно простые целые числа, имеет оптимальное решение

$$y^* = (y_1^*, \mu^*) = (a + c - 1, a - 1)$$

и $\mu_1 = a - 1$. При $n > 1$ оценка μ_1 груба и будет улучшена в следующем разделе.

Замечание 1.1. Алгоритм пометок решения задачи (1.9) является псевдополиномиальным (см. [38, §16.2]). Действительно, сведем задачу (1.9) к задаче о рюкзаке (ЗР) (см. [42, §5.2]). Введем переменную $\sigma = \mu_1 - \mu$, где μ_1 определено в теореме 1.1. Тогда следующая ЗР эквивалентна задаче (1.9):

$$\begin{gathered} \sigma \ \to \max_{(y_1,\dots,y_n,\sigma)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_j y_j + r\sigma = c + r\mu_1,\ y_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1,\dots,n,\ \sigma \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Известно, что ЗР является NP-полной (см., например, [38, §16.2]). Метод динамического программирования (он же в данном случае алгоритм пометок) решения ЗР (1.11) псевдополиномиален и имеет временную сложность $O((n+1)(c+r\mu_1))$. Следовательно, алгоритм пометок решения задачи (1.9) также является псевдополиномиальным. Заметим, что не существует полиномиального алгоритма решения вспомогательной задачи (1.9), поскольку сама задача является NP-полной.

1.2.2. Алгоритм подбора параметров

Напомним, что $d_l = \text{НОД}(a_1,\dots,a_l),\ l = 1,\dots,n$. Построим $y^{(l)} = (y_1^{(l)},\dots,y_l^{(l)})$ – частные решения уравнений

$$\sum_{j=1}^{l} a_j y_j = d_l,\ l = 1,\dots,n. \tag{1.12}$$

Ясно, что $y_1^{(1)} = 1$. При каждом $l = 2,\dots,n$ возьмем $(z_1^{(l)}, z_2^{(l)})$ – решение в целых числах уравнения $d_{l-1}z_1 + a_l z_2 = d_l$. Заметим, что из предположения 3 раздела 1.2 вытекает, что $z_1^{(l)} \neq 0$. Без потери общности будем считать, что $z_1^{(l)} \geqslant 1$. Действительно, в противном случае к решению $(z_1^{(l)}, z_2^{(l)})$ можно

добавить решение $\lambda(a_l, -d_{l-1})$ однородного уравнения $d_{l-1}z_1 + a_l z_2 = 0$, где λ – подходящее натуральное число. Определим теперь последовательно

$$y_j^{(l)} = y_j^{(l-1)} z_1^{(l)},\ j = 1, ..., l-1,\ y_l^{(l)} = z_2^{(l)},\ l = 2, ..., n. \tag{1.13}$$

Нетрудно проверить, что $y^{(l)}$ удовлетворяют уравнениям (1.12).

Общее целочисленное решение уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = d_n t_n, \tag{1.14}$$

будем задавать формулами Бонда [42, с. 188]

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{l=2}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_1^{(l)} t_l + \frac{a_2}{d_2} t_1, \\ y_j &= \sum_{l=j}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_j^{(l)} t_l - \frac{d_{j-1}}{d_j} t_{j-1},\ j = 2, ..., n, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $t_1, ..., t_n$ – произвольные целые числа, а $d_{n+1} = a_{n+1} = 1$ по определению.

Найдем ограничения на параметры $t_1, ..., t_n$, при которых все компоненты решения (1.15) неотрицательны. Из уравнения (1.14) следует, что $t_n \geqslant 0$. Определим функции

$$p_j(t_{j+1}, ..., t_n) = \frac{d_{j+1}}{d_j} \sum_{l=j+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_{j+1}^{(l)} t_l,\ j = 1, ..., n-1.$$

Из (1.15) следует, что

$$y_{j+1} = \frac{d_j}{d_{j+1}} p_j(t_{j+1}, ..., t_n) - \frac{d_j}{d_{j+1}} t_j,\ j = 1, ..., n-1.$$

Из неравенств $y_{j+1} \geqslant 0,\ j = 1, ..., n-1$, следуют ограничения

$$t_j \leqslant p_j(t_{j+1}, ..., t_n),\ j = 1, ..., n-1.$$

Теперь оценим t_j снизу. Введем обозначения

$$\rho_{jl} = \sum_{k=1}^{j} a_k y_k^{(l)},\ j = 1, ..., n,\ l = j, ..., n,$$

где, в частности, $\rho_{ll} = d_l$ в силу (1.12). Справедлива лемма

Лемма 1.1. *Для целых чисел* $y_1, ..., y_n$, *определяемых формулами* (1.15), *выполнены равенства*

$$\sum_{k=1}^{j} a_k y_k = \sum_{l=j}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{jl} t_l, \ j = 1, ..., n-1. \tag{1.16}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по j. При $j = 1$ (1.16) следует из равенств $\rho_{1l} = a_1 y_1^{(l)}, \ l = 1, ..., n$. Пусть равенства (1.16) выполнены при $j = 1, ..., m < n-1$. Докажем (1.16) при $j = m+1$. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k y_k = \sum_{k=1}^{m} a_k y_k + a_{m+1} y_{m+1} =$$

$$= \sum_{l=m}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{ml} t_l + a_{m+1} \Big(\sum_{l=m+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} y_{m+1}^{(l)} t_l - \frac{d_m}{d_{m+1}} t_m \Big) =$$

$$= \frac{a_{m+1}}{d_{m+1}} \rho_{mm} t_m + \sum_{l=m+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} (\rho_{ml} + a_{m+1} y_{m+1}^{(l)}) t_l - \frac{a_{m+1} d_m}{d_{m+1}} t_m =$$

$$= \frac{a_{m+1}}{d_{m+1}} \rho_{mm} t_m + \sum_{l=m+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{m+1,l} t_l - \frac{a_{m+1} d_m}{d_{m+1}} t_m = \sum_{l=m+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{m+1,l} t_l.$$

■

Определим функции

$$q_j(t_{j+1}, ..., t_n) = -\frac{d_{j+1}}{a_{j+1} d_j} \sum_{l=j+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{jl} t_l, \ j = 1, ..., n-1.$$

Для неотрицательных y_j правые части в равенствах (1.16) также неотрицательны. Отсюда следует, что

$$t_j \geqslant q_j(t_{j+1}, ..., t_n), \ j = 1, ..., n-1.$$

Введем отрезки целых чисел

$$R_j(t_{j+1}, ..., t_n) = \{\lceil q_j(t_{j+1}, ..., t_n) \rceil, ..., \lfloor p_j(t_{j+1}, ..., t_n) \rfloor\}, \ j = 1, ..., n-1.$$

Из проведенных рассуждений следует, что справедлива

Теорема 1.2. *Для того чтобы целые числа* $t_1, ..., t_n$ *задавали по формулам* (1.15) *неотрицательное решение уравнения* (1.14)*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$t_j \in R_j(t_{j+1}, ..., t_n),\ j = 1, ..., n-1,\ t_n \geqslant 0. \tag{1.17}$$

Теперь, используя теорему 1.2, сформулируем алгоритм подбора параметров (АПП) решения задачи (1.9).

Шаг 1. Находим минимальное целое $\mu \geqslant 0$, при котором $t_n = (c + r\mu)/d_n$ – целое число и множество $R_{n-1}(t_n)$ не пусто.

Шаг 2. Перебираем числа $t_{n-1} \in R_{n-1}(t_n)$ до тех пор, пока не найдем непустое множество $R_{n-2}(t_{n-1}, t_n)$. Если такого t_{n-1} не найдется, то, поскольку числа d_n и r взаимно простые, увеличиваем значение μ на d_n, переходя к шагу 1.

Шаг k **(**$k \geqslant 3$**).** Перебираем числа

$$t_{n-k+1} \in R_{n-k+1}(t_{n-k+2}, ..., t_n)$$

до тех пор, пока не найдем непустое множество $R_{n-k}(t_{n-k+1}, ..., t_n)$. При положительном результате поиска переходим к следующему шагу $k+1$. Если такого t_{n-k+1} не найдется, то берем следующее значение

$$t_{n-k+2} \in R_{n-k+2}(t_{n-k+3}, ..., t_n),$$

возвращаясь к шагу $k-1$.

Процесс подбора параметров продолжается до построения непустого множества $R_1(t_2, ..., t_n)$. Текущее значение μ является искомым минимумом μ^* в задаче (1.9).

Теорема 1.3. *Алгоритм подбора параметров сходится за конечное число шагов. При этом справедлива оценка* $\mu^* \leqslant \mu_2 + d_n - 1$*, где*

$$\mu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{d_n}{r} \max_{j=1,...,n-1} \frac{d_j a_{j+1}}{d_{j+1}^2} \right\rceil.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $j = 1, ..., n-2$, выражение

$$\begin{gathered} p_j(t_{j+1}, ..., t_n) - q_j(t_{j+1}, ..., t_n) = \\ = \frac{d_{j+1}}{d_j a_{j+1}} \sum_{l=j+1}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} (y_{j+1}^{(l)} a_{j+1} + \rho_{jl}) t_l = \frac{d_{j+1}^2 a_{j+2}}{d_j d_{j+2} a_{j+1}} t_{j+1} + \\ + \frac{d_{j+1}}{d_j a_{j+1}} \sum_{l=j+2}^{n} \frac{a_{l+1}}{d_{l+1}} \rho_{j+1,l} t_l = \frac{d_{j+1}^2 a_{j+2} (t_{j+1} - q_{j+1}(t_{j+2}, ..., t_n))}{d_j d_{j+2} a_{j+1}} \end{gathered} \tag{1.18}$$

неотрицательно, если $t_{j+1} \in R_{j+1}(t_{j+2}, ..., t_n)$. Покажем, что

$$\rho_{j+1,n} = d_{j+1} z_1^{(j+2)} ... z_1^{(n)}. \tag{1.19}$$

Действительно,

$$\rho_{j+1,n} = \sum_{k=1}^{j+1} a_k y_k^{(n)} = z_1^{(n)} \sum_{k=1}^{j+1} a_k y_k^{(n-1)} = z_1^{(n)} z_1^{(n-1)} \sum_{k=1}^{j+1} a_k y_k^{(n-2)} = ... =$$

$$= z_1^{(j+2)} ... z_1^{(n)} \sum_{k=1}^{j+1} a_k y_k^{(j+1)} = z_1^{(j+2)} ... z_1^{(n)} d_{j+1}.$$

Подставим в функции p_j и q_j значение $t_n = (c + r\mu)/d_n$. После этого, используя (1.19), в выражении $p_j - q_j$ выделим коэффициент k_j при μ, который будет равен (см. третье выражение в (1.18))

$$k_j = \frac{d_{j+1}}{d_j a_{j+1}} \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \frac{r}{d_n} \rho_{j+1,n} = \frac{d_{j+1} r}{d_j a_{j+1} d_n} \rho_{j+1,n} =$$

$$= \frac{d_{j+1}^2 r}{d_j a_{j+1} d_n} z_1^{(j+2)} \cdots z_1^{(n)} \geqslant \frac{d_{j+1}^2 r}{d_j a_{j+1} d_n}.$$

Отсюда вытекает, что если

$$\mu \geqslant \left\lceil \frac{d_n}{r} \frac{d_j a_{j+1}}{d_{j+1}^2} \right\rceil, \ j = 1, ..., n-1,$$

то разности $p_j - q_j \geqslant 1$ и, следовательно, множества

$$R_j(t_{j+1}, ..., t_n) \neq \emptyset, \ j = 1, ..., n-1.$$

Наконец, $\mu^* = \mu_0 + \tau d_n$, где $\tau \in \mathbb{Z}_+$, а целое μ_0 определено на с. 19. Поэтому μ^* – минимальное целое такого вида, не меньшее, чем μ_2. ■

Лемма 1.2. *Временная сложность алгоритма подбора параметров равна*

$$O\Big(\frac{d_n(\mu_3+1)}{a_1...a_n}(c+r\mu_3)^{n-1}\Big), \tag{1.20}$$

где $\mu_3 = \min(\mu_1, \mu_2 + d_n - 1)$.

Доказательство. Оценим сверху длины отрезков $R_j,\ j = 1, ..., n-1$. Из равенств (1.18) и из того, что $t_{j+1} \leqslant p_{j+1}$, следует, что для любого $j = 1, ..., n-2$ выполнено

$$\begin{gathered} p_j(t_{j+1}, ..., t_n) - q_j(t_{j+1}, ..., t_n) \leqslant \frac{d_{j+1}^2 a_{j+2}(p_{j+1} - q_{j+1})}{d_j d_{j+2} a_{j+1}}, \\ p_{n-1}(t_n) - q_{n-1}(t_n) = \frac{d_n^2}{d_{n-1}a_n}t_n. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Покажем индукцией по j, что справедливы неравенства

$$p_j(t_{j+1}, ..., t_n) - q_j(t_{j+1}, ..., t_n) \leqslant \frac{d_n d_{j+1}}{d_j a_{j+1}}t_n,\ j = 1, ..., n-1. \tag{1.22}$$

При $j = n-1$ неравенство (1.22) вытекает из второго равенства в (1.21). Предположим, что неравенство (1.22) верно для $j = j_0 + 1$, т.е.

$$p_{j_0+1}(t_{j_0+2}, ..., t_n) - q_{j_0+1}(t_{j_0+2}, ..., t_n) \leqslant \frac{d_n d_{j_0+2}}{d_{j_0+1}a_{j_0+2}}t_n.$$

Покажем, что оно верно и для $j = j_0$. Действительно, используя (1.21), получаем

$$p_{j_0}(t_{j_0+1}, ..., t_n) - q_{j_0}(t_{j_0+1}, ..., t_n) \leqslant \frac{d_{j_0+1}^2 a_{j_0+2}}{d_{j_0}d_{j_0+2}a_{j_0+1}}\frac{d_n d_{j_0+2}}{d_{j_0+1}a_{j_0+2}}t_n = \frac{d_n d_{j_0+1}}{d_{j_0}a_{j_0+1}}t_n.$$

Для каждого $\mu = 0, 1, ..., \mu_3$ число всевозможных отрезков $R_j,\ j = 1, ..., n-1$, равно $\prod_{j=1}^{n-1}(p_j - q_j)$. Оценим эту величину сверху. Из неравенств (1.22) и из того, что $d_1 = a_1, t_n = (c + r\mu)/d_n$, получаем

$$\prod_{j=1}^{n-1}(p_j - q_j) \leqslant \frac{d_n^{n-1}d_n}{d_1 a_n ... a_2}t_n^{n-1} = \frac{d_n}{a_n ... a_1}(c+r\mu)^{n-1} \leqslant \frac{d_n}{a_n ... a_1}(c+r\mu_3)^{n-1}.$$

Поскольку при каждом $\mu = 0, ..., \mu_3$ приходится просматривать числа из отрезков R_j, получаем оценку (1.20). ■

Замечание 1.2. Оценка (1.20) является экспоненциальной, но в разделе 1.2.3 экспериментально показано, что при небольшом числе переменных АПП работает быстрее, чем АП.

Рассмотрим частный случай задачи (1.9), когда среди чисел a_j имеется по крайней мере два взаимно простых числа. Допустим без потери общности, что a_1 и a_2 – взаимно простые, причем $a_1 < a_2$. Здесь $d_l = 1,\ l = 2, ..., n$, и можно взять $z_1^{(l)} = 1,\ z_2^{(l)} = 0,\ l = 3, ..., n$. Из формул (1.13) получаем

$$y_j^{(l)} = y_j^{(2)},\ j = 1, 2,\ y_j^{(l)} = 0,\ j = 3, ..., n,\ l = 3, ..., n,$$

$$\rho_{jl} = a_1 y_1^{(l)} + a_2 y_2^{(l)} = d_2 = 1,\ \ j = l, ..., n,\ l = 2, ..., n.$$

Отсюда

$$p_1(t_2, ..., t_n) = \frac{y_2^{(2)}}{a_1} \sum_{l=2}^{n} a_{l+1} t_l,\ \ q_1(t_2, ..., t_n) = -\frac{y_1^{(2)}}{a_2} \sum_{l=2}^{n} a_{l+1} t_l,$$

$$p_j(t_{j+1}, ..., t_n) = 0,\ \ q_j(t_{j+1}, ..., t_n) = -\frac{1}{a_{j+1}} \sum_{l=j+1}^{n} a_{l+1} t_l,\ j = 2, ..., n-1.$$

Подставляя в эти формулы $t_n = c + r\mu,\ \mu \geqslant 0$, и полагая

$$s(t_2, ..., t_{n-1}, \mu) = \sum_{l=2}^{n} a_{l+1} t_l = c + r\mu + \sum_{l=2}^{n-1} a_{l+1} t_l,\ \xi = \frac{y_2^{(2)}}{a_1},\ \eta = -\frac{y_1^{(2)}}{a_2},$$

получим неравенства, эквивалентные условиям (1.17):

$$\lceil \eta s(t_2, ..., t_{n-1}, \mu) \rceil \leqslant t_1 \leqslant \lfloor \xi s(t_2, ..., t_{n-1}, \mu) \rfloor,$$

$$s(t_2, ..., t_{n-1}, \mu) \geqslant 0,\ \ t_j \leqslant p_j(t_{j+1}, ..., t_n) = 0,\ j = 2, ..., n-1. \tag{1.23}$$

Заметим, что $\xi - \eta = 1/(a_1 a_2) > 0$.

Итак, задача (1.9) в данном случае сводится к поиску наименьшего целого $\mu \geqslant 0$, при котором система (1.23) разрешима по переменным $t_1, ..., t_{n-1}$. Этот поиск можно осуществить следующим образом: для фиксированного μ перебираем числа $t_j \in [-\lfloor (c + r\mu)/a_{j+1} \rfloor, 0]$, $j = 2, ..., n-1$, до тех пор, пока не

найдем непустой отрезок $[\lceil \eta s(t_2,...,t_{n-1},\mu)\rceil, \lfloor \xi s(t_2,...,t_{n-1},\mu)\rfloor]$. Если такого отрезка не найдется, то увеличиваем μ и повторяем перебор. Заметим, что если $\lfloor \xi c\rfloor > \lfloor \eta c\rfloor$, то получаем $\mu^* = 0$, поскольку система (1.23) разрешима при

$$t_1^* = \lceil \eta c\rceil,\ t_j^* = 0,\ j = 2,...,n-1.$$

Замечание 1.3. Вероятность того, что среди n чисел, равномерно распределенных на отрезке $[1,k]$, найдется хотя бы одна пара взаимно простых, с увеличением k стремится к величине [74, 80, 81, 90]

$$\sum_{i=1}^{n/(n-1)/2} (-1)^{i-1} \sum_{G:\,|E(G)|=i} \prod_p \sum_{m=0}^{n} i_m(G)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{n-m}\Big(\frac{1}{p}\Big)^m,$$

где $G = (V,E)$ – граф с множеством вершин $V = \{1,2,...,n\}$ и множеством ребер E, $i_m(G)$ – число m-реберных паросочетаний в графе G. В последней формуле произведение берется по всем простым числам p. Например, для $n = 3$ эта вероятность равна 0.83 [73, 87].

Явная формула для μ^* при $n = 1$ и алгоритм нахождения μ^* при $n = 2$ в задаче (1.9) указаны в приложении 1.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу

$$\mu \to \min$$
$$ay_1 + ... + (a+n-1)y_n = 1 + (a+n)\mu,$$
$$y_j, \mu \geqslant 0,\ y_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1,...,n,\ \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

где a – натуральное число.

Покажем, что минимальное целое $\mu^* \geqslant \lceil (a-1)/n\rceil$. В самом деле, из уравнения

$$ay_1 + ... + (a+n-1)y_n = 1 + (a+n)\mu$$

следует

$$(a+n)(y_1 + ... + y_n) = ny_1 + ... + y_n + 1 + (a+n)\mu.$$

Отсюда вытекает, что число $ny_1 + ... + y_n + 1$ делится на $a + n$:

$$ny_1 + ... + y_n + 1 = (a + n)s,\ s = y_1 + ... + y_n - \mu.$$

Заметим, что $s \geqslant 1$. Теперь получаем неравенство

$$(n + a)s - 1 = \sum_{j=1}^{n} jy_{n+1-j} \leqslant n \sum_{j=1}^{n} y_j = n(s + \mu).$$

Отсюда $as - 1 \leqslant n\mu$. Из неравенства $s \geqslant 1$ следует, что $\mu \geqslant \left\lceil (a-1)/n \right\rceil$.

Нетрудно показать, что эта граница достигается при $a = kn + 1$, где k – натуральное число. В этом случае

$$\mu^* = k,\ y_1^* = k + 1,\ y_j^* = 0,\ j = 2, ..., n.$$

1.2.3. Сравнение алгоритма пометок с алгоритмом подбора параметров

В табл. 1.1 приведены результаты сравнения АП с АПП. Здесь β_i – количество задач (из 1000), в которых $\mu^* = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, δ_1 – количество задач, в которых не требовался запуск алгоритмов АП и АПП (задачи решались после проверки трех предположений, указанных на с. 19), δ_2 – количество задач, в которых требовался запуск алгоритмов АП и АПП, τ_1, τ_2 – среднее время в секундах выполнения одной задачи по АПП и АП, γ_1 – доля задач, решенных быстрее АПП, чем АП, γ_2 – доля задач, решенных быстрее АП, чем АПП.

Таблица 1.1.

n	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	δ_1	δ_2	τ_1	τ_2	γ_1	γ_2
6	214	508	67	3	1	207	793	0.0021	0.0026	16%	13%
7	255	476	42	4	0	223	777	0.0024	0.0028	18%	15%
8	275	454	10	0	0	261	739	0.0029	0.0032	19%	18%
9	306	418	5	0	0	271	729	0.0030	0.0035	22%	19%
10	308	378	6	0	0	308	692	0.0039	0.0033	20%	24%
50	210	54	0	0	0	736	264	0.0144	0.0134	44%	45%
100	112	16	0	0	0	872	128	0.0306	0.0265	34%	48%
200	29	3	0	0	0	968	32	0.0664	0.0687	41%	38%

Заметим, что при малых размерностях ($n < 10$) среднее время τ_1 меньше среднего времени τ_2, т.е. задачи решаются быстрее АПП, чем АП. Задачи большей размерности целесообразнее решать ЦА, чем МЦА, поскольку при увеличении n вероятность того, что для этих задач оптимальное μ равно нулю, стремится к единице.

В следующем разделе в табл. 1.4 и 1.5 вместо μ^* берется $\hat{\mu} = \min(\mu^*, 2)$, поскольку $(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)/\delta_2 > 99\%$.

1.3. Сравнение модифицированного циклического алгоритма с другими алгоритмами

Сначала напомним алгоритм Мартина (АМ) [86], а затем укажем для него модификацию поиска производящей строки.

Шаг 1. Решим задачу (1.2). Если оптимальное решение задачи (1.2) является допустимым в задаче (1.1), то оно оптимально и в задаче (1.1). В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. В симплекс-таблице выберем строку с номером

$$k = \min\{a'_{i0} \notin \mathbb{Z},\ i = 0, ..., n + m\}$$

и построим отсечение (1.4). Добавим соответствующую отсечению строку в симплекс-таблицу. Эта строка становится ведущей. По двойственному симплекс-алгоритму определим ведущий столбец p, но замещение не производим. Добавленное отсечение удаляем. Далее на этом шаге после нескольких преобразований k-й строки строится отсечение Мартина. Опишем их.

Пусть D – произведение всех ведущих элементов, которые встречались во всех предыдущих операциях замещения. Определим первое преобразование k-й строки

$$b_{kj}^{(1)} = \lfloor a'_{kj} \rfloor,\ c_{kj}^{(1)} = \left\{ a'_{kj} \right\} |D|,\ a_{kj}^{\prime(1)} = a'_{kj},\ j = \{0, 1, ..., n\} \backslash \{p\},$$

$$a_{kp}^{\prime(1)} = a'_{kp} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha / |D|,\ c_{kp}^{(1)} = \left\{ a'_{kp} \right\} |D|,\ D^{(1)} = |D|,$$

Рассмотрим l-е преобразование ($l \geqslant 2$) k-й строки

$$\begin{gathered} g^{(l-1)} = (c_{kp}^{(l-1)} - \alpha)(D^{(l-1)} c_{kp}^{(l-1)}), \\ d_{kj}^{(l)} = c_{kj}^{(l-1)} g^{(l-1)},\ b_{kj}^{(l)} = b_{kj}^{(l-1)} + \left\lfloor d_{kj}^{(l)} \right\rfloor,\ c_{kj}^{(l)} g^{(l-1)} = \left\{ d_{kj}^{(l)} \right\}, \\ a_{kj}^{\prime(l)} = b_{kj}^{(l)} + c_{kj}^{(l)} g^{(l-1)},\ a_{kp}^{\prime(l)} = \alpha / c_{kp}^{(l-1)},\ D^{(l)} = c_{kp}^{(l-1)}, \\ c_{kp}^{(l)} = \left\{ a_{kp}^{\prime(l)} \right\} c_{kp}^{(l-1)},\ j = \{0, 1, ..., n\} \backslash \{p\}. \end{gathered} \tag{1.24}$$

Повторим преобразование (1.24) до тех пор, пока элемент $a_{kp}^{\prime(l)}$ не станет целым. Положим

$$h_{kp} = \min\{l \mid a_{kp}^{\prime(l)} \in \mathbb{Z}\}.$$

Построим отсечение Мартина

$$s = r_0 + \sum_{j=1}^{n} r_j (-x_{N_j}),$$

задаваемое строкой r с элементами

$$r_j = -\frac{a'_{kj} - a_{kj}^{\prime(h_{kp})}}{a_{kp}^{\prime(h_{kp})}},\ j \in \{0, 1, ..., n\} \backslash \{p\},\ r_p = -\frac{a'_{kp}}{a_{kp}^{\prime(h_{kp})}}.$$

Полученную строку r добавим в симплекс-таблицу. Проведем операцию замещения с ведущим элементом r_p. Повторяем шаг 2 до получения полностью целочисленного нулевого столбца симплекс-таблицы. Переходим к шагу 1.

Замечание 1.4. В ЦА и ПЦА после добавления отсечения и замещения ведущего элемента данное отсечение из ограничений удаляется. С целью предотвращения зацикливания, в АМ необходимо оставлять каждое новое добавленное отсечение. Соответственно, в отличие от ЦА и ПЦА итоговая симплекс-таблица в АМ может содержать много строк.

Если $\alpha/|D|$ – достаточно малое отрицательное число, то преобразования (1.24) могут занять значительное время. Для устранения этого недостатка модифицируем поиск производящей строки на шаге 2.

Для каждой s-й строки, такой, что $a'_{s0} \notin \mathbb{Z},\ s = 0, ..., m+n$, добавим отсечение Гомори с целью выбора ведущего элемента a'_{sp}. Здесь выбор p зависит от s. После определения ведущего элемента $a'_{sp(s)}$ операция замещения не производится, а s-я строка из симплекс-таблицы удаляется. Пусть $a'_{sp(s)} = \alpha/|D|$.

Предположим, что $a'_{sp(s)} < 0$. Обозначим $\lambda_s = \lfloor -|D|/\alpha \rfloor$ и

$$c^{(0)}_{sp(s)} = |D| + \alpha\lambda_s.$$

Рассмотрим l-е преобразование $(l \geqslant 1)$ s-й строки

$$a'^{(l)}_{sp(s)} = \frac{\alpha}{c^{(l-1)}_{sp(s)}},\ c^{(l)}_{sp(s)} = \left\{a'^{(l)}_{sp(s)}\right\} c^{(l-1)}_{sp(s)}\ . \tag{1.25}$$

Заметим, что преобразование (1.25) является частью преобразования (1.24) и относится только к ведущему элементу $a'_{sp(s)}$. Повторим (1.25) до тех пор, пока элемент $a'^{(l)}_{sp(s)}$ не станет целым. Обозначим через $v_{sp(s)}$ число преобразований (1.25), т.е.

$$v_{sp(s)} = \min\{l \mid a'^{(l)}_{sp(s)} \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда нетрудно показать, что $h_{sp(s)} = \lambda_s + v_{sp(s)}$ для строки с отрицательным ведущим элементом $a'_{sp(s)}$.

Пусть теперь $a'_{sp(s)} > 0$. В этом случае положим $c^{(0)}_{sp(s)} = |D|$ и повторим преобразования (1.25) пока элемент $a'^{(l)}_{sp(s)}$ не станет целым. Получим $h_{sp(s)} =$

$v_{sp(s)}$. В результате в качестве производящей строки на шаге 2 АМ выберем строку с номером

$$k \in \operatorname*{Arg\,min}_{s=0,\ldots,n+m} \{h_{sp(s)} \mid a'_{s0} \notin \mathbb{Z}\}.$$

Напомним ПЦА [76].

Шаг 1. Начнем с двойственно допустимой матрицы A в уравнении (1.2). Если матрица двойственно недопустима, то необходимо добавить ограничение

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - \ldots - x_n \geqslant 0,$$

где M – достаточно большая константа и провести одну итерацию двойственного симплекс-алгоритма, выбрав в качестве производящей строки последнюю добавленную строку. После преобразования по двойственному симплекс-алгоритму переходим к шагу 2.

Шаг 2. Выберем производящую строку с номером

$$k = \min\{a'_{i0} < 0,\ i = 0, \ldots, n+m\}.$$

Если $a'_{i0} \geq 0,\ i = 0, \ldots, n+m$, то задача (1.1) решена.

Шаг 3. Выберем $\lambda > 0$ (правило выбора указано ниже) и напишем внизу таблицы дополнительную строку

$$s = \lfloor a'_{k0}/\lambda \rfloor + \sum_{j=1}^{n} \lfloor a'_{kj}/\lambda \rfloor (-x_{N_j}).$$

Шаг 4. Проведем преобразование по двойственному симплекс-алгоритму (операцию замещения) с ведущей строкой s. Убираем добавленную строку и переходим к шагу 2.

Правило выбора λ формулируется следующим образом:

Шаг 3.1. Пусть A'_s – лексикографически минимальный столбец среди столбцов с $a'_{kj} < 0$.

Шаг 3.2. Для каждого $a'_{kj} < 0$ пусть μ_j – наибольшее целое, такое, что

$$A'_s \prec \frac{A'_j}{\mu_j}.$$

Шаг 3.3. Пусть $\lfloor -a'_{kj}\lambda_j \rfloor = \mu_j$, а $\lambda_j = -a'_{kj}\mu_j$.

Шаг 3.4. Положим

$$\lambda = \max_{j:\, a'_{kj}<0} \lambda_j.$$

Пример 1.3. Рассмотрим задачу ЦЛП

$$\begin{gathered} x_0 = -79(-x_1) - 14(-x_2) \to \max \\ x_3 = 39 + 2(-x_1) + 7(-x_2), \\ x_4 = 35 + 14(-x_1) + 5(-x_2),\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Решим ее МЦА и АМ. Начальная симплекс-таблица прямо допустима. По прямому симплекс-алгоритму определим ведущий элемент $a_{41} = 14$ и сделаем операцию замещения. В результате получим прямо и двойственно допустимую симплекс-таблицу

$$A' = \begin{pmatrix} 395/2 & 79/14 & 199/14 \\ 5/2 & 1/14 & 5/14 \\ 0 & 0 & -1 \\ 34 & -1/7 & 44/7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

Поэтому вектор $\bar{x}^* = (5/2, 0, 34, 0)$ – оптимальное решение непрерывной задачи и $N_1 = 4$, $N_2 = 2$. Отсюда $|D| = a_{41} = 14$. На первом шаге МЦА (как и в ЦА) нулевая строка таблицы является производящей. Решив вспомогательную задачу

$$\mu \to \min$$

$$\mu = 9/14x_4 + 3/14x_2 - 1/2,\ \ \mu, x_4, x_2 \in \mathbb{Z}_+,$$

получим, что минимум $\mu^* = 1$ достигается на решении $(x_4, x_2) = (2, 1)$. Таким образом, добавляется отсечение

$$s = -3/2 - 9/14(-x_4) - 3/14(-x_2).$$

Элемент симплекс-таблицы $a'_{51} = -9/14$ по двойственному симплекс-алгоритму становится ведущим и после операции замещения добавленная строка равна $(0, -1, 0)$. Эту строку можно из таблицы удалить. После формирования трех аналогичных отсечений получим оптимальное решение $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (2, 1, 28, 2)$ задачи (1.26).

После шага 1 АМ также получим симплекс-таблицу (1.27). Производящая строка на первой итерации шага 2 выбирается с использованием предложенного на с. 33 модифицированного поиска. Так как элемент $a'_{00} = 395/2$ нецелый, подсчитаем $h_{0p(0)}$. Добавляем отсечение Гомори (1.4)

$$s = -1/2 - 9/14(-x_4) - 3/14(-x_2)$$

в симплекс-таблицу. Не произведя операцию замещения, определяем, что ведущим является первый столбец, т.е. $p(0) = 1$. Добавленное отсечение удаляем. Берем элемент $a'_{01} = \alpha/|D| = 79/14$. Отсюда $\alpha = 79$. Поскольку $\alpha > 0$, выбираем $c_{01}^{(0)} = |D| = 14$. Преобразования (1.25) представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2.

l	$a_{01}^{\prime(l)} = \alpha / c_{01}^{(l-1)}$	$c_{01}^{(l)} = \{a_{01}^{\prime(l)}\} c_{01}^{(l-1)}$
1	79/14	9
2	79/9	7
3	79/7	2
4	79/2	1
5	79/1	0

Получаем $h_{01} = v_{01} = 5$. Аналогично находим $h_{1p(1)} = h_{12} = 2$. Здесь номер производящей строки $k = 1$, поскольку $h_{01} > h_{12}$. Произведем преобразования (1.24). Ведущим является элемент $a'_{12} = 5/14$. Сначала определим

$$a'_{12} = a_{12}^{\prime(1)} = \alpha/|D| = 5/14.$$

Отсюда $\alpha = 5$. Получаем

$$c_{12}^{(1)} = \{a'_{12}\}|D| = 5,\ D^{(1)} = |D| = 14.$$

Определим

$$b_{10}^{(1)} = \lfloor a'_{10} \rfloor = 2,\ c_{10}^{(1)} = \{a'_{10}\}|D| = 7,\ a_{10}^{\prime(1)} = a_{10} = 5/2,$$

$$b_{11}^{(1)} = \lfloor a'_{11} \rfloor = 0,\ c_{11}^{(1)} = \{a'_{11}\}|D| = 1,\ a_{11}^{\prime(1)} = a_{11} = 1/14.$$

Преобразование (1.24) состоит из одного шага и выглядит следующим образом:

$$g^{(1)} = (c_{12}^{(1)} - \alpha)/(D^{(1)} c_{12}^{(1)}) \ = 0,$$

$$d_{10}^{(2)} = c_{10}^{(2)} g^{(1)} = 0,\ b_{10}^{(2)} = b_{10}^{(1)} + \left\lfloor d_{10}^{(2)} \right\rfloor \ = 2,\ c_{10}^{(2)} g^{(1)} = \left\{ d_{10}^{(2)} \right\} = 0,$$

$$a_{10}^{\prime(2)} = b_{10}^{(2)} + c_{10}^{(2)} g^{(1)} = 2,\ d_{11}^{(2)} = 0,\ b_{11}^{(2)} = 0,\ c_{11}^{(2)} g^{(1)} = 0,$$

$$a_{11}^{\prime(2)} = b_{11}^{(2)} + c_{11}^{(2)} g^{(1)} = 0,\ a_{12}^{\prime(2)} = \frac{\alpha}{c_{12}^{(1)}} = 1,\ D^{(2)} = c_{12}^{(1)},\ \frac{c_{12}^{(2)}}{c_{12}^{(1)}} = \left\{ a_{12}^{\prime(2)} \right\} = 0.$$

Используя формулы

$$r_j = -(a'_{1j} - a_{1j}^{\prime(2)})/a_{12}^{\prime(2)},\ j = 0, 1,\ r_2 = -a'_{12}/a_{12}^{\prime(2)},$$

находим отсечение Мартина

$$s_1 = -1/2 - 1/14(-x_4) - 5/14(-x_2).$$

Элемент таблицы $a'_{52} = -5/14$ выбирается ведущим. После операции замещения получим симплекс-таблицу

$$A'' = \begin{pmatrix} 888/5 & 14/5 & 199/5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7/5 & 1/5 & -14/5 \\ 126/5 & -7/5 & 88/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку не все компоненты нулевого столбца таблицы целые, повторяем шаг 2. Пересчитаем $|D| = |a_{41}a'_{52}| = 5$. На второй итерации шага 2

$$h_{0p(0)} = h_{01} = 3 \text{ и } h_{2p(2)} = h_{21} = 2$$

получаются аналогично предыдущему шагу. Подсчитаем $h_{3p(3)}$. После добавления отсечения Гомори (1.4)

$$s = -1/5 - 3/5(-x_4) - 3/5(-s_1)$$

ведущим является первый столбец, т.е. $p(3) = 1$. Берем элемент

$$a''_{31} = \alpha/|D| = -7/5.$$

Отсюда $\alpha = -7$. Так как в этом случае $\alpha < 0$, то ищем $\lambda_3 = \lfloor -|D|/\alpha \rfloor = 0$. Берем $c_{31}^{(0)} = |D| + \alpha\lambda_3 = 5$.

Таблица 1.3.

l	$a_{31}^{\prime\prime(l)} = \alpha/c_{31}^{(l-1)}$	$c_{31}^{(l)} = \{a_{31}^{\prime\prime(l)}\}c_{31}^{(l-1)}$
1	$-7/5$	3
2	$-7/3$	2
3	$-7/2$	1
4	$-7/1$	0

После преобразований (1.25) третьей строки, указанных в табл. 1.3, получаем $h_{31} = \lambda_3 + v_{31} = 4$. Здесь номер производящей строки $k = 2$, поскольку $h_{31} > h_{01} > h_{21}$. После аналогичных первой итерации преобразований (1.24) в симплекс-таблицу добавляется отсечение

$$s_2 = -2/5 - 1/5(-x_4) - 1/5(-s_1).$$

Производим операцию замещения с ведущим элементом $a''_{61} = -1/5$ и получим нулевой столбец симплекс-таблицы $(172, 2, 1, 28, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, а сама таблица

прямо и двойственно допустима. Отсюда $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (2, 1, 28, 2)$ – оптимальное решение задачи (1.26).

По ЦА и ПЦА находим целочисленное решение задачи (1.26) после добавления соответственно пяти и четырех отсечений.

В табл. 1.4 и 1.5 приведены результаты сравнения указанных алгоритмов. Здесь $\tau_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ – среднее время в секундах выполнения одной задачи (из 1000 задач), $V_i = \sigma_i/\tau_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ – коэффициент вариации, равный отношению среднеквадратического отклонения к среднему времени, $\gamma_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ – максимальное число замещений соответственно по ЦА, МЦА, ПЦА, АМ, δ_1 – доля задач, решенных быстрее МЦА, чем АМ, δ_2 – доля задач, решенных быстрее МЦА, чем ПЦА, δ_3 – доля задач, решенных быстрее ПЦА, чем АМ. Вспомогательная задача в МЦА решается алгоритмом подбора параметров и вместо μ^* берется $\hat{\mu} = \min(\mu^*, 2)$. При $m = n = 10$ генерировалось 500 задач.

Таблица 1.4.

m	n	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	V_1	V_2	V_3	V_4
6	6	2.6	1	7.1	1.9	1.2	1.1	6.2	3.4
7	7	4.2	1.9	33.9	5.8	1	1.1	3.6	4.5
8	8	6.8	3.4	107.2	17.1	1	1.1	2	3.6
9	9	11.5	7	228.2	43.4	0.9	1.3	1.2	2.4
10	10	15.3	12.4	323.2	79.8	0.9	1.5	1.1	2.1

Таблица 1.5.

m	n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	δ_1	δ_2	δ_3
6	6	1453	505	246 606	764	50.7%	26.6%	76.4%
7	7	905	404	256 818	1 113	52.1%	34.5%	68.2%
8	8	1630	503	291 939	1 027	59.7%	46.7%	58.1%
9	9	1426	564	339 974	1 064	59.2%	62.7%	44.3%
10	10	1272	584	402 639	1 191	58.3%	68.6%	32.1%

Преимущество МЦА по сравнению с другими алгоритмами заключается в том, что он требует для каждой задачи в среднем меньшее количество времени. В ПЦА и АМ, несмотря на то, что при $m = n = 6, 7$ бóльшая доля задач решается быстрее, чем МЦА, встречаются задачи, в которых наблюдаются выбросы как по времени выполнения, так и по числу замещений ($V_3, V_4 > V_2$). Отметим также, что с увеличением m и n доля задач, решенных быстрее ПЦА, чем МЦА и АМ, уменьшается.

ГЛАВА 2

Решение матричных игр специального вида

При решении непрерывных игр часто используется метод дискретизации. В результате возникают матричные игры. В общем случае матрицы в этих играх могут содержать большое количество строк или столбцов. Для решения матричных игр чаще всего используется прием сведения решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования (ЗЛП). При этом для ЗЛП больших размеров вместо симплекс-метода целесообразно использовать метод внутренней точки (см., например, [9, с. 298–311]). Но в случае, если матрица содержит более 10^{10} строк или столбцов, то указанный метод неприменим. В этой главе предлагается метод решения матричных игр (АРП) больших размеров специального вида, основанный на решении последовательности подыгр. Чтобы выделить специальный класс матриц в разделе 2.1 рассмотрены вспомогательные задачи (ВЗ) игроков, в которых каждый игрок находит наилучшую чистую стратегию в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера.

В разделе 2.2 исследуется модель Дрешера дискретной игры «нападение-защита». В разделе 2.2.2 сформулировано условие совпадения значения дискретной и непрерывной игр. В этом же разделе указана ВЗ для второго игрока, которая сводится к нахождению точки минимума выпуклой сепарабельной функции с использованием критерия Гросса.

Помимо решения игры в смешанных стратегиях в модели Дрешера представляет интерес нахождение нижнего и верхнего значений игры, а также максиминной и минимаксной чистой стратегий. В разделе 2.2.3 для поиска максиминной чистой стратегии используется алгоритм глобального поиска. Минимаксная чистая стратегия ищется с использованием дискретного ана-

лога принципа уравнивания. В разделе 2.2.4 АРП применяется для поиска решения игры с бюджетными ограничениями.

В разделе 2.3 АРП применяется к матричным играм комбинаторного типа, где стратегиями игроков являются всевозможные перестановки последовательности $1, ..., n$. В разделах 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.3 рассматриваются следующие игровые модели:

1. игра фермера против природы;
2. соревнование двух фермерских хозяйств;
3. взаимодействие двух сторон на нескольких пунктах.

ВЗ для каждого игрока во второй модели сводятся к упорядочиванию чисел, а в первой и третьей моделях – к решению задачи о назначениях. Во всех игровых моделях в разделах 2.2 и 2.3 АРП численно сравнивается с методом Брауна-Робинсон. Вторая модель в [26] решалась МБР. Отметим, что модификации МБР [1, 7, 45], направленные на ускорение его сходимости, для рассматриваемых матриц больших размеров использовать нельзя, поскольку они требуют дополнительных громоздких вычислений.

2.1. Алгоритм решения матричных игр

Пусть в матричной игре выигрыши первого игрока задаются матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Введем обозначения

$$A(p, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij},\ A(i, q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

Рассмотрим ВЗ для каждого игрока. Первый игрок для любой смешанной стратегии $q = (q_1, ..., q_n)$ второго игрока находит чистую стратегию из множества

$$I(q) = \Big\{ i \;\Big|\; \overline{v}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{k=1,...,m} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j = A(i, q) \Big\}.$$

Второй игрок для любой смешанной стратегии $p = (p_1, ..., p_m)$ первого игрока находит чистую стратегию из множества

$$J(p) = \left\{ j \;\middle|\; \underline{v}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{k=1,...,m} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ik} = A(p,j) \right\}.$$

Если тройка (p^0, q^0, v) является решением матричной игры в смешанных стратегиях, то для приближенного решения игры ищутся значение игры с точностью $\varepsilon > 0$ и ε-оптимальные стратегии игроков p^ε и q^ε, определяемые соответственно из условий $\underline{v}(p^\varepsilon) \geqslant v - \varepsilon$ и $\bar{v}(q^\varepsilon) \leqslant v + \varepsilon$. Отметим, что всегда выполнены неравенства $\underline{v}(p^\varepsilon) \leqslant v \leqslant \bar{v}(q^\varepsilon)$.

Предлагаемый алгоритм состоит в следующем. Пусть к k-му шагу сформированы подмножества I^k и J^k чистых стратегий игроков (на первом шаге их можно выбрать произвольно, но разумных размеров).

Шаг 1. Решается подыгра с матрицей $A^k = (a_{ij})_{i \in I^k,\, j \in J^k}$;

Шаг 2. Для оптимальной стратегия p^k первого игрока выбирается любая чистая стратегия $j_k \in J(p^k)$;

Шаг 3. Решается подыгра с матрицей $B^k = (a_{ij})_{i \in I^k,\, j \in J^{k+1}}$, где $J^{k+1} = J^k \cup \{j_k\}$;

Шаг 4. Пусть в этой подыгре q^k – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. В общем случае последовательности оценок $\underline{v}(p^k),\ k = 1, 2, ...,$ и $\bar{v}(q^k),\ k = 1, 2, ...,$ не являются монотонными. Определим наилучшие верхнюю и нижнюю оценки

$$\bar{v}^k = \min_{t=1,...,k} \bar{v}(q^t) = \bar{v}(q^{t_1}),\ \ \underline{v}^k = \max_{t=1,...,k} \underline{v}(p^t) = \underline{v}(p^{t_2});$$

Шаг 5. Проверяется неравенство $\bar{v}^k - \underline{v}^k \leqslant \varepsilon$. Если оно выполнено, то величина $(\bar{v}^k + \underline{v}^k)/2$ является ε-приближением для значения игры v, а p^{t_2} и q^{t_1} - соответствующими ε-оптимальными стратегиями;

Шаг 6. Если $\bar{v}^k - \underline{v}^k > \varepsilon$, то выбирается любая чистая стратегия $i_k \in I(q^k)$, формируется подматрица $A^{k+1} = (a_{ij})_{i \in I^{k+1},\, j \in J^{k+1}}$, где $I^{k+1} = I^k \cup \{i_k\}$, и осуществляется переход к $(k+1)$-му шагу.

Если число строк m невелико, то на любом k-м шаге алгоритма следует взять $I^k = \{1, ..., m\}$, а матрицу A^{k+1} положить равной B^k. При этом верхняя оценка $\bar{v}^k = \bar{v}(q^k)$ не возрастает по k, поскольку число строк матрицы подыгры не меняется, а число столбцов увеличивается. Если число столбцов n невелико, то следует взять $J^k = \{1, ..., n\}$, а матрицу B^k положить равной A^k. При этом нижняя оценка $\underline{v}^k = \underline{v}(p^k)$ не убывает по k.

Алгоритм сходится за конечное число шагов, поскольку на каждом шаге множества I^k и J^k увеличиваются, а величины $\bar{v}^k$ и $\underline{v}^k$ соответственно не возрастают и не убывают.

Напомним МБР [41]. На первом шаге сначала первый игрок выбирает произвольную чистую стратегию i_1. Затем второй игрок выбирает любую чистую стратегию

$$j_1 \in \operatorname*{Arg\,min}_{j=1,...,n} a_{i_1 j}.$$

Пусть после k шагов игроки выбрали стратегии $i_1, ..., i_k$ и $j_1, ..., j_k$ соответственно. При этом второй игрок γ_j раз выбрал чистую стратегию j. Определим вектор частот $q^k = (\gamma_1/k, ..., \gamma_n/k)$. На $(k+1)$-м шаге первый игрок выбирает стратегию $i_{k+1} \in I(q^k)$. Пусть первый игрок за $k+1$ шагов выбрал δ_i раз чистую стратегию i. Определим вектор частот

$$p^{k+1} = (\delta_1/(k+1), ..., \delta_m/(k+1)).$$

На $(k+1)$-м шаге второй игрок выбирает стратегию $j_{k+1} \in J(p^{k+1})$. Условие остановки алгоритма по МБР определяется так же, как и выше.

В следующих двух разделах рассматриваются матричные игры, в которых элементы матрицы генерируются не случайным образом, а задаются некоторыми формулами и каждая ВЗ рассматривается как задача дискретной минимизации (максимизации). Показывается, что для каждой модели существует быстрый алгоритм решения ВЗ. Под «быстрым» подразумевается, во-первых, что для решения ВЗ не требуется загрузка всей матрицы игры в память вычислительной системы, и, во-вторых, существует быстрый алгоритм на-

хождения чистой стратегии, который не сводится к полному перебору. Кроме того, АРП можно применить к матричным играм, в которых матрицы игр содержат большое число строк и небольшое число столбцов (либо большое число столбцов и небольшое число строк), но элементы которых генерированы случайным образом. В таблице 2.1 указаны результаты решения игр с матрицами $k \times 200000$ ($w^{\max}$ — максимальное число столбцов в матрице итоговой подыгры, τ — среднее время в секундах выполнения одной задачи (из 1000 задач)). Решение этих игр другими методами (например, методом внутренней точки соответствующих задач линейного программирования) занимает существенно больше времени.

Таблица 2.1. Результаты решения игр с матрицами $k \times 200000$.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w^{max}	4	14	19	24	29	33	38	42	46
τ	0.1	0.26	0.47	0.7	0.86	1.03	1.32	1.56	1.82

Также заметим, что МБР, как и АРП, не требует загрузки всей матрицы игры в память вычислительной системы, но в отличие от АРП в МБР в качестве стратегий игроков используются векторы частот, вычисление которых замедляет работу этого алгоритма. В разделе 2.3 быстрые алгоритмы решения ВЗ указаны для обоих методов АРП и МБР.

2.2. Дискретная игра «нападение-защита»

2.2.1. Постановка задачи

Пусть A и B — положительные целые числа, задающие количества средств нападения и защиты, распределяемые по n пунктам в соответствии со стратегиями $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$. Определим сначала непрерывную антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$, в которой множества

стратегий X и Y нападения и защиты (первого и второго игроков) имеют вид

$$X = \Big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A\Big\} \text{ и } Y = \Big\{y \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B\Big\},$$

а функция выигрыша нападения

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y_i)$$

задает суммарный эффект ее взаимодействия с защитой на всех пунктах.

Предположим, что каждая функция f_i :

- неотрицательна и непрерывна на $[0, A] \times [0, B]$,
- не убывает и выпукла по x_i,
- обращается в нуль при $x_i = 0$,
- не возрастает и выпукла по y_i.

Например, функции $f_i(x_i, y_i) = \lambda_i(x_i - \mu_i y_i)^+$ перечисленным требованиям удовлетворяют. В этом случае будем говорить о модели Дрешера, предложившего в [21] следующую интерпретацию функций f_i. Коэффициент $\mu_i > 0$ определяет количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств защиты на i-м пункте, а множитель $\lambda_i > 0$ задает величину ущерба, наносимого единицей средств нападения, прорвавшегося на этом пункте. При $\mu_i = 1,\ i = 1, ..., n$, получаем модель Гросса [78], а при $\lambda_i = 1,\ i = 1, ..., n,$ – модель Гермейера [11, 12]. Далее без потери общности будем предполагать, что в модели Дрешера $\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$, а в модели Гермейера $\mu_1 \geqslant ... \geqslant \mu_n$.

Дискретная игра $\Gamma' = \big\langle X', Y', F(x,y)\big\rangle$ получается из игры Γ при дополнительном предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами. Множества X' и Y' могут содержать большое число стратегий. Поэтому в общем случае стандартный прием сведения решения матричной игры к ЗЛП неприменим.

2.2.2. Решение дискретной игры в смешанных стратегиях

Смешанными стратегиями $p = (p_1, ..., p_r)$ и $q = (q_1, ..., q_l)$ соответственно первого и второго игроков в игре Γ' называются вероятностные распределения на некоторых множествах чистых стратегий $\{x^1, ..., x^r\} \subseteq X'$ и $\{y^1, ..., y^l\} \subseteq Y'$. Положим

$$F(p, y) = \sum_{k=1}^{r} p_k F(x^k, y),\ y \in Y',\ F(x, q) = \sum_{j=1}^{l} q_j F(x, y^j),\ x \in X'.$$

Тройка (p', q', v'), состоящая из стратегий p', q' и числа v', называется решением игры Γ' в смешанных стратегиях, если справедливы равенства

$$\min_{y \in Y'} F(p', y) = v' = \max_{x \in X'} F(x, q'). \tag{2.1}$$

При этом p' и q' называются оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков, а v' – значением игры Γ'.

При каждом $i = 1, ..., n$ определим стратегию нападения $x^{(i)} = Ae^i$, т.е. для каждого $j = 1, ..., n$,

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} A, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

состоящую в концентрированном ударе по i-му пункту. Покажем, что в игре Γ любая стратегия $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ первого игрока доминируется смешанной стратегией $p = (x_1/A, ..., x_n/A)$, выбирающей $x^{(i)}$ с вероятностью $p_i = x_i/A,\ i = 1, ..., n$. Действительно, из выпуклости функции $F(x, y)$ по x следует, что для любой стратегии $y \in Y$ справедливо неравенство $F(p, y) \geqslant F(x, y)$. Поэтому при решении игры Γ' в смешанных стратегиях первый игрок может использовать только вероятностные распределения $p = (p_1, ..., p_n)$ на множестве $\{x^{(i)},\ i = 1, ..., n\}$. Множество всех смешанных стратегий такого вида обозначим через P. Отсюда вытекает, что значение

игры Γ' можно записать как

$$v' = \max_{p \in P} \min_{y \in Y'} F(p, y).$$

Поскольку в игре Γ функция выигрыша $F(x, y)$ выпукла по y, ее значение равно

$$v = \min_{y \in Y} \max_{i=1,...,n} F(x^{(i)}, y) = \max_{i=1,...,n} F(x^{(i)}, y^0),$$

а минимаксная стратегия y^0 второго игрока оптимальна (см., например, [11, с. 54]).

Стратегию y^0 можно найти с помощью принципа уравнивания Гермейера [10]. Сформулируем его для данного случая. Пусть без потери общности $f_1(A, 0) \geqslant ... \geqslant f_n(A, 0)$. Тогда для того чтобы стратегия y^0 была минимаксной в игре Γ, достаточно выполнения следующего условия: найдутся такие число C и номер $k \in \{1, ..., n\}$, что

$$f_i(A, y_i^0) = C,\ i = 1, ..., k,\ y_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n,\ C \geqslant f_{k+1}(A, 0). \qquad (2.2)$$

Если $k = n$, то последние соотношения отсутствуют. Перебирая последовательно $k = 1, ..., n$, найдем систему (2.2), имеющую решение относительно $y_i^0,\ i = 1, ..., n$, и C. При этом $C = v$.

Решим игру Γ' в смешанных стратегиях в сделанных предположениях относительно функции выигрыша нападения $F(x, y)$. Рассмотрим ВЗ для второго игрока. Как было указано выше, нападение может ограничиться использованием вероятностных распределений на множестве стратегий $\{x^{(i)},\ i = 1, ..., n\}$. Таким образом, матрица игры содержит n строк и C_{n+B-1}^{B} столбцов.

Замечание 2.1. В сделанных предположениях относительно функций $f_i(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., n$, решение игры Γ' в смешанных стратегиях может быть найдено с использованием АРП. В самом деле, при решении игры Γ' в смешанных стратегиях первый игрок может ограничиться смешанными страте-

гиями из множества P. Поэтому в матрице игры Γ' можно оставить только n строк, соответствующих стратегиям $x^{(i)}$, $i = 1, ..., n$. Тогда поскольку каждая функция f_i удовлетворяет указанным на с. 46 предположениям, то для любой смешанной стратегии p первого игрока нижняя оценка

$$\underline{v}(p) = \min_{y \in Y} F(p, y) = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{n} p_i F(x^{(i)}, y)$$

может быть найдена с использованием критерия Гросса для точки минимума выпуклой сепарабельной функции. При этом в алгоритме в качестве начального приближения целесообразно взять вектор, полученный округлением компонент минимаксной стратегии y^0 игры Γ.

В МБР чистая стратегия второго игрока

$$y \in Y(p) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} F(p, y)$$

также находится по критерию Гросса, а для вектора частот q (стратегия y^r применялась вторым игроком с частотой q_r, $r = 1, ..., w$) первый игрок выбирает чистую стратегию $x^{(i)}$, где i берется из множества

$$I(q) = \operatorname{Arg}\max_{i=1,...,n} \sum_{r=1}^{w} q_r F(x^{(i)}, y^r).$$

Лемма 2.1. *В сделанных предположениях относительно функций* $f_i(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., n$, *выполнено* $v' \geqslant v$.

Доказательство. Имеем:

$$v = \max_{p \in P} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{n} p_i F(x^{(i)}, y) = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) \leqslant$$

$$\leqslant \min_{y \in Y'} \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) \leqslant \max_{p \in P} \min_{y \in Y'} \sum_{i=1}^{n} p_i F(x^{(i)}, y) = v'.$$

■

Определим множества

$$Y_1 = \{y \in Y \mid y_i \le \lfloor A/\mu_i \rfloor,\ i = 1, ..., n\},\ Y_1' = \{y \in Y_1 \mid y_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, ..., n\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y \mid y_i \le \lceil A/\mu_i \rceil,\ i = 1, ..., n\},\ Y_2' = \{y \in Y_2 \mid y_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, ..., n\}.$$

Обозначим через Y_1^{ext}, Y_2^{ext} множества крайних точек множеств Y_1, Y_2.

Для модели Дрешера укажем условие, при котором $v' = v$.

Теорема 2.1. *Пусть в непрерывной игре* Γ *модели Дрешера* p^0 *– оптимальная смешанная стратегия первого игрока, а минимаксная стратегия второго игрока* $y^0 \in Y_1$. *Тогда* (p^0, q^0, v) *– решение дискретной игры* Γ', *где оптимальная смешанная стратегия второго игрока* q^0 *состоит в выборе чистой стратегии* $y^{(j)}$ *с вероятностью* $q_j^0,\ j = 1, ..., s$.

Доказательство. Отметим, что оптимальная стратегия первого игрока p^0 была построена Огарышевым в [37]. Нетрудно показать, что $Y_1^{\text{ext}} \subset Y'$. Используя теорему Каратеодори [46], представим вектор y^0 как выпуклую комбинацию векторов $y^{(j)} \in Y_1^{\text{ext}}$ с коэффициентами $q_j^0 \geqslant 0,\ j = 1, ..., s,\ q_1^0 + ... + q_s^0 = 1$. Стратегия y^0 и значение v игры Γ удовлетворяют при некотором $k \in \{1, ..., n\}$ системе

$$\lambda_i(A - \mu_i y_i^0) = v,\ i = 1, ..., k,\ y_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n,\ v \geqslant \lambda_{k+1} A. \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что

$$y_i^{(j)} = 0,\ i = k+1, ..., n,\ j = 1, ..., s. \tag{2.4}$$

Теперь докажем оптимальность смешанной стратегии второго игрока q^0 в игре Γ'. Из (2.3) и (2.4) получим

$$F(x^{(i)}, q^0) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_i q_j^0 (A - \mu_i y_i^{(j)}) = \lambda_i(A - \mu_i y_i^0) = v, & i = 1, ..., k, \\ \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_i q_j^0 A = \lambda_i A \leqslant v, & i = k+1, ..., n. \end{cases}$$

Следовательно, применяя стратегию q^0, второй игрок не позволит первому выиграть в игре Γ' больше, чем v, т.е.

$$v' = \max_{i=1,...,n} F(x^{(i)}, q^0) \leqslant v.$$

Из последнего неравенства и леммы 2.1 следует $v' = v$, а p^0 и q^0 – оптимальные смешанные стратегии игроков. ■

Замечание 2.2. Для нахождения стратегии q^0 необходимо построить все вершины многогранника Y_1. Это можно сделать, используя симплекс-метод для ЗЛП с двусторонними ограничениями на переменные [10, с. 75]. Другие алгоритмы построения Y_1^{ext} можно найти, например, в [40, 65].

В частных случаях стратегия q^0 строится явно.

Следствие 2.1. *Пусть в модели Гермейера* $\mu_i = \mu,\ i = 1, ..., n$, *а* $B \leqslant n\lfloor A/\mu \rfloor$ *и* n *не делит* B. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 2.1.

Доказательство. Положим $m = B - n\lfloor B/n \rfloor$. Определим вектор

$$y^{(1)} = \lfloor B/n \rfloor e^{\{1,...,n\}} + e^{\{1,...,m\}}.$$

Пусть векторы $y^{(i)},\ i = 2, ..., n$, получаются из $y^{(1)}$ циклическим сдвигом компонент вправо на $i-1$ разрядов. Покажем, что стратегия $y^0 = (y^{(1)} + ... + y^{(n)})/n$ является минимаксной в игре Γ, а оптимальная смешанная стратегия q^0 второго игрока в игре Γ' с равными вероятностями $1/n$ реализует векторы $y^{(i)},\ i = 1, ..., n$. Действительно, для любого $i = 1, ..., n$ выполнено

$$y_i^0 = \frac{1}{n}\Big((\lfloor B/n \rfloor + 1)m + (\lfloor B/n \rfloor)(n - m)\Big) = B/n.$$

Поскольку $y_1^0 = ... = y_n^0 = B/n$, y^0 удовлетворяет (2.2) при $k = n$, и y^0 является минимаксной в игре Γ. Так как $B \leqslant n\lfloor A/\mu \rfloor$, получаем, что $y^0 \in Y_1$. Таким образом, справедливо утверждение теоремы 2.1. ■

В общем случае множество Y' может содержать достаточно большое число стратегий. В модели Гермейера следует воспользоваться соображениями доминирования.

Лемма 2.2. *Для игры* Γ' *модели Гермейера верны следующие утверждения:*

1. Любая стратегия $y \notin Y_2'$ *доминируется некоторой стратегией* $\tilde{y}$ *из множества* Y_2', *т.е.* $F(p,y) \leqslant F(p,\tilde{y})$ *для всех* $p \in P$.

2. Любая стратегия $y \in Y_1'$ *эквивалентна некоторой смешанной стратегии* q, *распределенной на множестве* Y_1^{ext}, *т.е.* $F(p,q) = F(p,y)$ *для всех* $p \in P$.

Доказательство. Сначала заметим, что $Y_1' \subseteq Y_2'$. Докажем первое утверждение. Пусть $y \notin Y_2'$. Тогда существует такое k, что $y_k \geq \lceil A/\mu_k \rceil + 1$. Возьмем стратегию $\tilde{y} \in Y_2'$:

$$\tilde{y} = (y_1, ..., y_l + 1, ..., y_k - 1, ..., y_n),$$

где $l -$ любое, не равное k. Тогда для любой смешанной стратегии $p \in P$

$$F(p,\tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} p_i (A - \mu_i \tilde{y}_i)^+ \leq \sum_{i=1}^{n} p_i (A - \mu_i y_i)^+ = F(p,y).$$

Тем самым получаем, что $\tilde{y}$ доминирует y.

Далее будем рассматривать только $y \in Y_2'$. Докажем второе утверждение. В самом деле, для любого $y \in Y_1'$ найдутся такие числа $\alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_1 + ... + \alpha_s = 1$, и $y^{(r)} \in Y_1^{\text{ext}}$, $r = 1, ..., s$, что выполнено

$$y = \sum_{r=1}^{s} \alpha_r y^{(r)}.$$

Отсюда для любой смешанной стратегии $p \in P$ выполнено

$$\sum_{r=1}^{s} \alpha_r F(p, y^{(r)}) = \sum_{r=1}^{s} \alpha_r \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(A - \mu_i y_i^{(r)}\Big)^+ = \sum_{r=1}^{s} \alpha_r \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(A - \mu_i y_i^{(r)}\Big) =$$

$$= A - \sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} \alpha_r p_i \mu_i y_i^{(r)} = A - \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{n} p_i (A - \mu_i y_i) = F(p, y),$$

Смешанная стратегия q второго игрока, выбирающего $y^{(r)}$ с вероятностями α_r, эквивалентна стратегии y. ■

Следующий пример показывает, что существует такая стратегия $\tilde{y} \in Y_2' \backslash Y_1'$, которая не доминируется ни одной смешанной стратегией, распределенной на множестве $Y_1^{\text{ext}} \cup Y_2^{\text{ext}}$, т.е. для любых $y^{(r)} \in Y_1^{\text{ext}} \cup Y_2^{\text{ext}}$ и $q_r \geqslant 0,\ r = 1, ..., h,\ q_1 + ... + q_h = 1$, существует такое $p \in P$, что выполнено

$$F(p, \tilde{y}) < \sum_{r=1}^{h} q_r F(p, y^{(r)}). \tag{2.5}$$

Пример 2.1. Пусть $n = 4$, $A = 11$, $B = 9$, $\mu_1 = 3.7$, $\mu_2 = 3.6$, $\mu_3 = 3.3$, $\mu_4 = 2.9$. Множество Y' содержит 220 стратегий, а множества

$$Y_1' = \{y \in Y' \mid y_1 \leqslant 2, y_i \leqslant 3,\ i = 2, 3, 4\},$$

$$Y_2' = \{y \in Y' \mid y_1 \leqslant 3, y_i \leqslant 4,\ i = 2, 3, 4\}$$

содержат соответственно 10 и 62 стратегий. Находим множества крайних точек

$$Y_1^{\text{ext}} = \{(0,3,3,3), (2,1,3,3), (2,3,1,3), (2,3,3,1)\},$$

$$Y_2^{\text{ext}} = \left\{ \begin{array}{l} (0,1,4,4), (0,4,1,4), (0,4,4,1), (1,0,4,4), (1,4,0,4), (1,4,4,0), \\ (3,0,2,4), (3,0,4,2), (3,2,0,4), (3,2,4,0), (3,4,0,2), (3,4,2,0) \end{array} \right\}.$$

Получаем

$$v_1' = \max_{p \in P} \min_{y \in Y_1^{\text{ext}} \cup Y_2^{\text{ext}}} F(p, y) = \min_{y \in Y_1^{\text{ext}} \cup Y_2^{\text{ext}}} F(p^1, y) = 3.4808,$$

где

$$p^1 = (0.2659, 0.2203, 0.2403, 0.2735).$$

Возьмем стратегию $\tilde{y} = (3, 0, 3, 3) \in Y_2' \backslash Y_1'$. Покажем, что для этой стратегии выполнено неравенство (2.5) при $p = p^1$. Действительно, для любых $q_r \geqslant$

$0,\ r = 1, ..., h,\ q_1 + ... + q_h = 1,$ получим

$$F(p^1, \tilde{y}) = 3.3167 < v_1' = \min_{y \in Y_1^{\text{ext}} \cup Y_2^{\text{ext}}} F(p^1, y) \leqslant \sum_{r=1}^{h} q_r F(p^1, y^{(r)}).$$

Замечание 2.3. Для малых n предложим следующий эвристический метод решения игры Γ'. Пусть $(\tilde{p}^j,\, \tilde{q}^j,\, \tilde{v}^j)$ – решение игры $\tilde{\Gamma}_j = \left\langle x^{(i)},\, \tilde{Y}_j,\, F(x^{(i)}, y) \right\rangle,\ j = 1, 2,$ т.е.

$$\tilde{v}^j = \max_{i=1,...,n} F(x^{(i)}, \tilde{q}^j) = \min_{y \in \tilde{Y}_j} F(\tilde{p}^j, y),$$

где

$$\tilde{Y}_1 = \left\{ y \in Y \mid \lfloor y_i^0 \rfloor \leqslant y_i \leqslant \lceil y_i^0 \rceil,\ y_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, ..., n \right\}.$$

и

$$\tilde{Y}_2 = \left\{ y \in Y \middle|\ y_i = B - \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq i}}^{n} y_j,\ \lfloor y_j^0 \rfloor \leqslant y_j \leqslant \lceil y_j^0 \rceil,\ j \neq i,\ y_j \in \mathbb{Z}_+,\ i, j = 1, ..., n \right\}.$$

Заметим, что $\tilde{Y}_1 \subseteq \tilde{Y}_2$. Если для тройки $(\tilde{p}^1,\, \tilde{q}^1,\, \tilde{v}^1)$ выполнено условие (2.1), то она является решением исходной игры Γ'. Если условие не выполнено, то его можно проверить для тройки $(\tilde{p}^2,\, \tilde{q}^2,\, \tilde{v}^2)$. В качестве недостатка метода укажем следующее: при больших n множество $\tilde{Y}_1$ содержит порядка $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ стратегий (причем все стратегии являются крайними точками множества $\tilde{Y}_1$), а множество $\tilde{Y}_2$ содержит порядка $n \cdot 2^{n-1}$ стратегий. При $n = 20$, например, $C_{20}^{10} = 184\,756$, а $20 \cdot 2^{19} = 10\,485\,760$. Помимо нахождения всех стратегий множеств $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_2$ возникает сложность и в решении итоговой матричной игры с таким количеством столбцов.

Ниже в табл. 2.2-2.5 указаны результаты сравнения двух алгоритмов, где $t_1\,(t_2)$ – среднее время в секундах выполнения одной задачи по предложенному алгоритму АРП (по алгоритму МБР), $h^{\max}(w^{\max})$ – максимальное число строк (столбцов) в матрице итоговой подыгры, а ε – точность решения игр.

Таблица 2.2. Результаты сравнения алгоритмов для задачи 2.2.

n	ε	A	B	t_1	t_2	$w^{\max}$
3	10^{-3}	10	10	0.0873	3.7966	6
5	10^{-3}	20	20	0.1731	2 мин 42с	11
10	10^{-3}	50	50	0.2839	>5 мин	18
10	10^{-4}	100	100	0.3099	>5 мин	20
20	10^{-5}	700	700	4.0287	>5 мин	33

2.2.3. Поиск нижнего и верхнего значений игры

Положим

$$W(x) = \min_{y \in Y} F(x,y),\ W'(x) = \min_{y \in Y'} F(x,y),\ Y(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} F(x,y),$$

$$Y'(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y'} F(x,y),\ M(y) = \max_{i=1,\dots,n} F(x^{(i)},y).$$

Помимо решения игры Γ' в смешанных стратегиях, представляет интерес нахождение нижнего и верхнего значений $\underline{v}'$ и $\overline{v}'$, а также максиминной и минимаксной стратегий $x^* \in X'$ и $y^* \in Y'$, определяемых равенствами

$$\underline{v}' = \max_{x \in X'} W'(x) = W'(x^*),\ \overline{v}' = \min_{y \in Y'} M(y) = M(y^*).$$

В отличие от функции $W(x)$, которая является выпуклой (см. [36]), функция $W'(x)$ в общем случае многоэкстремальна на множестве X (рис. 2.1, где $n = 2$, $A = 10$, $B = 8$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.2$).

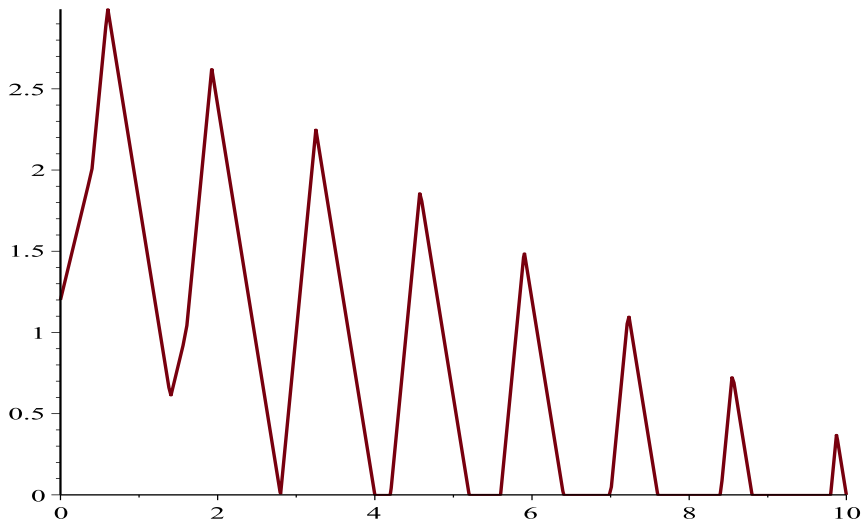


Рисунок 2.1. График функции $W'(x)$ при $n = 2$.

В модели Дрешера для применения метода глобальной максимизации [23, 46] докажем следующую лемму

Лемма 2.3. *Для любого $x', x'' \in X$ верно неравенство*

$$W'(x') - W'(x'') \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i' - x_i'')^+. \tag{2.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$W'(x') - W'(x'') = F(x', y') - F(x'', y'') =$$

$$= F(x', y') - F(x', y'') + F(x', y'') - F(x'', y'') \leqslant$$

$$\leqslant F(x', y'') - F(x'', y'') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ((x_i' - \mu_i y_i'')^+ - (x_i'' - \mu_i y_i'')^+) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i' - x_i'')^+.$$

■

Правильный симплекс $S(\Delta, z)$ в X с вершинами $x^j = z + \Delta e^j,\ j = 1, ..., n$, задается целым числом $\Delta \in (0, A]$ и вектором $z = (z_1, ..., z_n)$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$z_1 + ... + z_n = A - \Delta,\ z_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, ..., n.$$

Из неравенства (2.6) следует, что функция

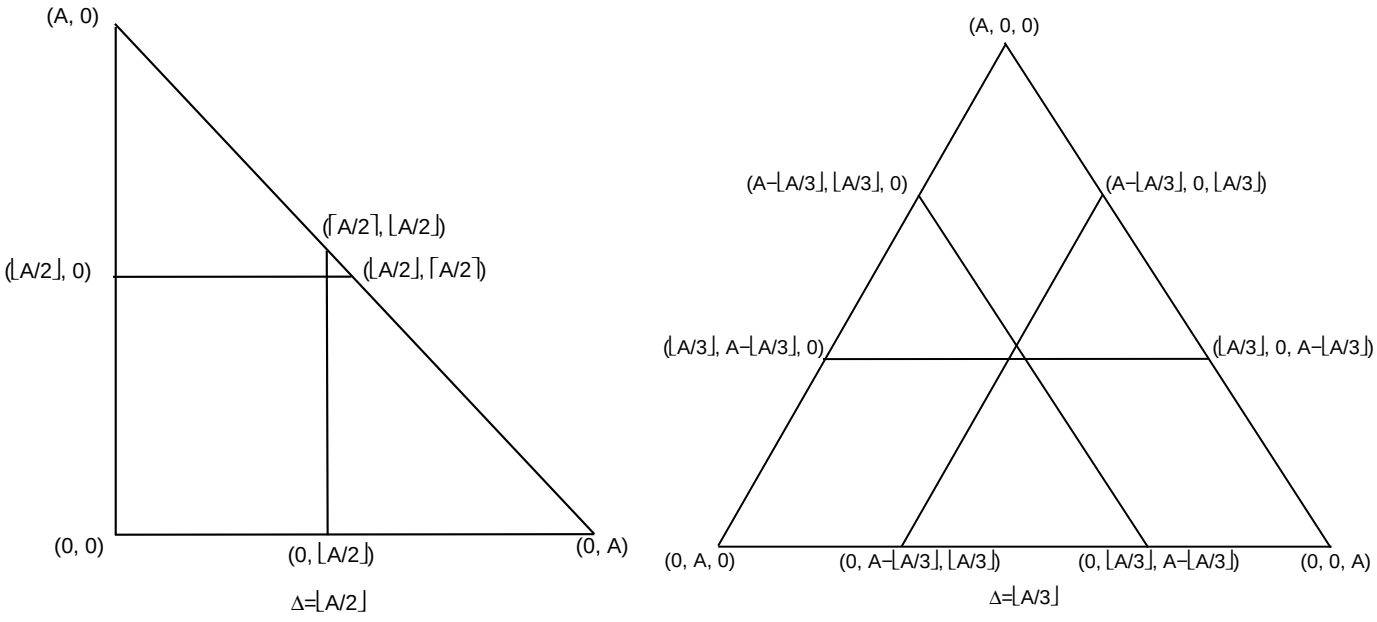
$$g(x) = \min_{j=1,\dots,n} \left[W'(x^j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^j)^+ \right] = \min_{j=1,\dots,n} \left[W'(x^j) + \sum_{i \neq j} \lambda_i (x_i - x_i^j) \right]$$

является мажорантой функции W' на симплексе $S(\Delta, z)$, причем в вершинах симплекса значения функций W' и g совпадают. Максимизация мажоранты g на симплексе $S(\Delta, z)$ сводится к решению ЗЛП.

Положим $\chi(\Delta) = \max(\lfloor \Delta/n \rfloor, 1)$. Определим симплексы

$$S_i = S(\Delta - \chi(\Delta), z + \chi(\Delta) e^i),\ i = 1, \dots, n.$$

Будем называть $\tilde{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ стандартным покрытием симплекса $S(\Delta, z)$ (см. рис. 2.2a и 2.2b).



(a) (b)

Рисунок 2.2. Стандартные покрытия при $n = 2, 3$.

Рассмотрим алгоритм глобальной оптимизации поиска величины $\underline{v}'$. Аналогичный алгоритм, названный методом покрытий, применяется в [46, глава 2, §2] при поиске глобального экстремума функций одной переменной,

удовлетворяющих условию Липшица. Пусть N – наибольшее текущее значение функции W', найденное по некоторому набору точек из X'. В начале алгоритма положим $N = \max(W'(x^{(1)}), ..., W'(x^{(n)}))$. Будем просматривать симплексы стандартного покрытия множества X, вычисляя в их вершинах значения функции W', изменяя N и отбрасывая те симплексы, для которых максимум мажоранты меньше $N + \varepsilon$, где константа $\varepsilon > 0$ задает точность поиска величины $\underline{v}'$. Среди оставшихся симплексов возьмем симплекс с максимальным значением мажоранты и произведем для него стандартное покрытие и т.д. Вычисления продолжаются до тех пор, пока все симплексы не будут отброшены. Если коэффициенты $\lambda_i,\ \mu_i,\ i = 1, ..., n$, целые, то при $\varepsilon = 1$ после завершения работы алгоритма получаем точное значение $\underline{v}' = N$. Действительно, в этом случае значение $W'(x)$ является целым, и N достигается на некотором векторе $\tilde{x}$. Тогда для любого симплекса $S(\Delta, z)$, с максимальным значением мажоранты, выполнено

$$N = W'(\tilde{x}) \leqslant \underline{v}' = \max_{x \in X'} W'(x) \leqslant \max_{x \in S(\Delta, z)} g(x) < N + 1.$$

При стандартном покрытии $\tilde{S}$ симплекса $S(\Delta, z)$ можно воспользоваться соображениями симметрии.

Теорема 2.2. *Если в модели Дрешера при стандартном покрытии $\tilde{S}$ симплекса $S(\Delta, z)$ при некоторых i и $j\,(i < j)$ выполнены равенства $z_i = z_j,\ \lambda_i = \lambda_j,\ \mu_i = \mu_j$, то симплекс S_j можно отбросить.*

Доказательство. Пусть

$$\rho = (\rho_1, ..., \rho_n),\ \rho_k \geqslant 0,\ k = 1, ..., n,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = \Delta - \chi(\Delta).$$

Запишем все целые точки симплекса S_i в покрытии $\tilde{S}$ следующим образом:

$$z^1 = (z_1 + \rho_1, ..., z_i + \chi(\Delta) + \rho_i, ..., z_n + \rho_n).$$

Возьмем точку $\tilde{y}^1 \in Y'(z^1)$. Докажем, что для любой точки $z^1 \in S_i$ найдется такая точка $z^2 \in S_j$, что выполнено $W'(z^1) = W'(z^2)$. Действительно, в точке z^1 изменим i-ю и j-ю компоненты. В результате получим точку

$$z^2 = (z_1 + \rho_1, ..., z_i + \rho_j, ..., z_j + \chi(\Delta) + \rho_i, ..., z_n + \rho_n) \in S_j,$$

для которой выполнено

$$W'(z^1) = \min_{y \in Y'} F(z^1, y) = F(z^1, \tilde{y}^1) = F(z^2, \tilde{y}^2) = \min_{y \in Y'} F(z^2, y) = W'(z^2),$$

где

$$\tilde{y}^2 = (\tilde{y}^1_1, ..., \tilde{y}^1_{i-1}, \tilde{y}^1_j, \tilde{y}^1_{i+1}, ..., \tilde{y}^1_{j-1}, \tilde{y}^1_i, \tilde{y}^1_{j+1}, ..., \tilde{y}^1_n).$$

■

Покажем, что мажоранту можно улучшить. Обозначим

$$\omega = \max_{y \in Y} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i (y_i - y'_i)^+.$$

Лемма 2.4. *В качестве мажоранты для симплекса $S(\Delta, z)$ с вершинами $x^j,\ j = 1, ..., n$, вместо $g(x)$ можно использовать*

$$\min \left(g(x), \max_{j=1,...,n} W(x^j) + \omega \right).$$

Доказательство. Заметим, что при любом $x \in X'$ выполнено неравенство $W'(x) \geqslant W(x)$. Кроме того, докажем, что $W'(x) - W(x) \leqslant \omega$. Действительно, при фиксированном $\tilde{y} \in Y(x)$ и любом $y' \in Y'$ верно

$$W'(x) - W(x) = W'(x) - F(x, \tilde{y}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \mu_i y'_i)^+ - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - \mu_i \tilde{y}_i)^+ \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i (\tilde{y}_i - y'_i)^+.$$

Отсюда следует, что

$$W'(x) - W(x) \leqslant \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i (\tilde{y}_i - y'_i)^+ \leqslant \max_{y \in Y} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i (\tilde{y}_i - y'_i)^+ = \omega.$$

■

Замечание 2.4. Из [37] известно, что если $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i/\mu_i > B$, то при $\lambda_1\mu_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_n\mu_n$ существует $y^* \in Y(x)$, которое представимо в виде

$$y_i^* = \begin{cases} x_i/\mu_i, & i \leqslant k-1, \\ B - \sum\limits_{j=1}^{k-1} y_j^*, & i = k, \\ 0, & i \geqslant k+1, \end{cases} \qquad i = 1, ..., n,$$

где k однозначно определяется из неравенств

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_j/\mu_j \leqslant B < \sum_{j=1}^{k} x_j/\mu_j.$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i/\mu_i \leqslant B$, то $y_i^* = x_i/\mu_i,\ i = 1, ..., n.$

Укажем явные значения ω в частных случаях.

Теорема 2.3. *Пусть* $\lambda_1\mu_1 = ... = \lambda_n\mu_n$. *Тогда*

$$\omega = \lambda_1\mu_1\lfloor n^2/4 \rfloor/n.$$

Доказательство см. в приложении 2.

Теорема 2.4. *При* $n = 3$

$$\omega = \max\left(\frac{1}{1/(\lambda_1\mu_1) + 1/(\lambda_2\mu_2)}, \frac{2}{1/(\lambda_1\mu_1) + 1/(\lambda_2\mu_2) + 1/(\lambda_3\mu_3)}\right).$$

Доказательство см. в приложении 2.

Обратимся к модели Гермейера. Укажем случаи, когда максимин $\underline{v}'$ и максиминную стратегию x^* можно указать явно. Предположим, что коэффициенты μ_i, $i = 1, ..., n$, целые. Определим на множестве X функции

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i/\mu_i \rfloor \text{ и } U(x) = \sum_{i=1}^{n} \lceil x_i/\mu_i \rceil.$$

Лемма 2.5. *Пусть* $\mu_1 \geqslant ... \geqslant \mu_n > 1$. *Тогда*

$$B_1 = \max_{x \in X'} U(x) = \begin{cases} n-1+\left\lceil (A-n+1)/\mu_n \right\rceil, & A \geqslant n-1, \\ A, & A < n-1, \end{cases}$$

$$B_2 = \min_{x \in X'} T(x) = \begin{cases} \left\lfloor (A-\sigma)/\mu_1 \right\rfloor, & A \geqslant \sigma, \\ 0, & A < \sigma, \end{cases}$$

где $\sigma = \sum\limits_{i=2}^{n} (\mu_i - 1)$.

Доказательство. Покажем, что для любых $x_j,\ j = 1, ..., n-1$, справедливо неравенство

$$\left\lceil \frac{x_j}{\mu_j} \right\rceil + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{r_j}{\mu_j} \right\rceil + \left\lceil \frac{x_j - r_j + x_n}{\mu_n} \right\rceil, \tag{2.7}$$

где $x_j = k_j\mu_j + r_j$, r_j – остаток от деления x_j на μ_j. Действительно, поскольку верно

$$\left\lceil \frac{x_j}{\mu_j} \right\rceil - \left\lceil \frac{r_j}{\mu_j} \right\rceil = k_j,$$

(2.7) эквивалентно неравенству

$$k_j + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil \leqslant k_j + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} + \frac{k_j(\mu_j - \mu_n)}{\mu_n} \right\rceil.$$

Но последнее верно, так как $\mu_j \geqslant \mu_n,\ j = 1, ..., n-1$. Получаем, что для любого $x \in X'$ выполнено

$$\begin{aligned} U(x) = \left\lceil \frac{x_1}{\mu_1} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{x_2}{\mu_2} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil + \\ + \left\lceil \frac{r_1}{\mu_1} \right\rceil + \left\lceil \frac{x_1 - r_1 + x_n}{\mu_n} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{x_3}{\mu_3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{r_1}{\mu_1} \right\rceil + \\ + \left\lceil \frac{r_2}{\mu_2} \right\rceil + \left\lceil \frac{x_1 - r_1 + x_n}{\mu_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{x_2 - r_2 + x_n}{\mu_n} \right\rceil \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left\lceil \frac{r_i}{\mu_i} \right\rceil + \\ + \left\lceil \frac{1}{\mu_n} \Big(A - \sum_{i=1}^{n-1} r_i \Big) \right\rceil = U\Big(r_1, ..., r_{n-1}, A - \sum_{i=1}^{n-1} r_i \Big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Пусть $A \geqslant n-1$. Выражение

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\lceil \frac{r_i}{\mu_i} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{\mu_n} \Big(A - \sum_{i=1}^{n-1} r_i \Big) \right\rceil$$

в (2.8) достигает максимума при $r_i = 1,\ i = 1, ..., n-1$. Соответственно, максимум $U(x)$ достигается при

$$x_i^* = 1,\ i = 1, ..., n-1,\ x_n^* = A - (n-1).$$

Отсюда находим B_1 при $A \geqslant n-1$.

В случае если $A < n-1$ максимум в правой части (2.8) достигается при

$$r_i = 1,\ i = 1, ..., A,\ r_j = 0,\ j = A+1, ..., n-1.$$

Тогда

$$x_i^* = 1,\ i = 1, ..., A,\ x_j^* = 0,\ j = A+1, ..., n.$$

Отсюда $U(x^*) = A = B_1$.

Теперь найдем B_2. Покажем, что для любых $x_j,\ j = 2, ..., n$, справедливо неравенство

$$\left\lfloor \frac{x_1}{\mu_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x_j}{\mu_j} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x_1 + x_j - r_j}{\mu_1} \right\rfloor, \tag{2.9}$$

где $x_j = k_j \mu_j + r_j$, r_j – остаток от деления x_j на μ_j. Действительно, так как $\mu_1 \geqslant \mu_j,\ j = 2, ..., n$, верно

$$\frac{x_1}{\mu_1} + k_j \geqslant \frac{x_1 + k_j \mu_j}{\mu_1}.$$

Отсюда

$$\left\lfloor \frac{x_1}{\mu_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x_j}{\mu_j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x_1}{\mu_1} \right\rfloor + k_j = \left\lfloor \frac{x_1}{\mu_1} + k_j \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x_1 + k_j \mu_j}{\mu_1} \right\rfloor.$$

Для любого $x \in X'$ выполнено

$$T(x) = \left\lfloor \frac{x_1}{\mu_1} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{x_n}{\mu_n} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x_3}{\mu_3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{x_n}{\mu_n} \right\rfloor +$$

$$+ \left\lfloor \frac{x_1 + x_2 - r_2}{\mu_1} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{x_4}{\mu_4} \right\rfloor + ... + \left\lceil \frac{x_n}{\mu_n} \right\rceil + \left\lfloor \frac{x_1 + x_2 - r_2 + x_3 - r_3}{\mu_1} \right\rfloor \geqslant \tag{2.10}$$

$$\geqslant \Big\lfloor \frac{1}{\mu_1}\Big(A - \sum_{i=2}^{n} r_i\Big)\Big\rfloor = T\Big(A - \sum_{i=2}^{n} r_i, r_2, ..., r_n\Big).$$

Пусть $A \geqslant \sigma$. Минимум

$$\Big\lfloor \frac{1}{\mu_1}\Big(A - \sum_{i=2}^{n} r_i\Big)\Big\rfloor$$

в неравенстве (2.10) достигается при $r_i = \mu_i - 1,\ i = 2, ..., n$. Следовательно, минимум $T(x)$ достигается при

$$x_1^* = A - \sigma,\ x_i^* = \mu_i - 1,\ i = 2, ..., n.$$

Отсюда находим B_2 при $A \geqslant \sigma$.

Нетрудно показать, что при $A < \sigma$ минимум правой части в (2.10) равен нулю. ■

Теорема 2.5. *Пусть в игре* Γ' *модели Гермейера* $\mu_n \geqslant 1$. *Если* $B \geqslant B_1$, *то* $\underline{v}' = 0$. *Если* $B \leqslant B_2$, *то* $\underline{v}' = A - \mu_n B$, *а* $x^{(n)}$ *– максиминная стратегия в игре* Γ'.

Доказательство. Если $B \geqslant B_1$, то для любой стратегии $x \in X'$ защита в состоянии уничтожить все средства нападения, поскольку $B \geqslant B_1 \geqslant U(x)$. Следовательно, $\underline{v}' = 0$. Пусть $B \leqslant B_2$. Для любой стратегии $x \in X$ выполнено неравенство $B \leqslant T(x)$. Поэтому найдется такая стратегия $y \in Y'$, что $y_i \leqslant \lfloor x_i/\mu_i \rfloor,\ i = 1, ..., n$. Отсюда

$$W'(x) \leqslant F(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i y_i) = A - \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \leqslant A - \mu_n B = W'(x^{(n)}).$$

■

Обозначим через $F_s(x, y)$ функцию выигрыша в модели Гермейера с коэффициентами $\mu_1 = ... = \mu_s \geqslant \mu_{s+1} \geqslant ... \geqslant \mu_n$. Определим игру

$$\Gamma'_s = \langle X', Y', F_s \rangle.$$

Следующий случай относится к игре Γ'_n, в которой $\mu_i = \mu,\ i = 1, ..., n$, где $\mu \geqslant 2$ – целое число. Обозначим эту игру через $\Gamma'_n(\mu)$. Для любой стратегии $x \in X$, если $B \leqslant T(x)$, то по теореме 2.5 $W'(x) \leqslant (A - \mu B)^+$, а при $B \geqslant U(x)$ получаем, что $W'(x) = 0$. Рассмотрим множество

$$X'_1 = \{x \in X' \mid T(x) < B < U(x)\}.$$

Для каждой стратегии $x \in X'_1$ представим ее компоненты в виде

$$x_i = \mu\lfloor x_i/\mu \rfloor + r_i,\ r_i \in [0, \mu),\ i = 1, ..., n.$$

Суммируя последние равенства, получим

$$A = \mu T(x) + r(x),\ r(x) = r_1 + ... + r_n.$$

На множестве X'_1 определим функцию $q(x) = B - T(x)$. Заметим, что $T(x) + n \geqslant U(x)$. Поэтому $q(x) \in [1, n-1]$, $x \in X'$. При целом $q \in [1, n-1]$ на множестве

$$X'_1(q) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X'_1 \mid q(x) = q\}$$

функция $r(x)$ постоянна и равна $r = A - \mu(B - q)$. Поскольку $r \in [0, n(\mu - 1)]$, отсюда следует, что $q = B - A/\mu + r/\mu \in [q_2, q_1]$, где

$$q_1 = \min(n - 1, \lfloor n(\mu - 1)/\mu + B - A/\mu \rfloor),\ q_2 = \max(1, \lceil B - A/\mu \rceil).$$

Положим $s = r - n\lfloor r/n \rfloor$.

Лемма 2.6. *Предположим, что в игре $\Gamma'_n(\mu)$ модели Гермейера целый коэффициент $\mu \geqslant 2$, а $B \in (B_2, B_1)$, где константы B_1 и B_2 определены в лемме 2.5. Тогда нижнее значение в игре $\Gamma'_n(\mu)$*

$$\underline{v}'(\mu) = \max\left(A - \mu B, \max_{q_2 \leqslant q \leqslant q_1} \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor (n - q) + (s - q)^+\right)$$

Доказательство. Возьмем $x \in X'_1(q)$ и $y \in Y'(x)$. Тогда найдется такое множество $J \subset \{1, ..., n\},\ |J| = q$, что

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_i}{\mu} \right\rfloor e^i + e^J,\ F(x, y) = \sum_{i \notin J} \left(x_i - \mu \left\lfloor \frac{x_i}{\mu} \right\rfloor\right) = \sum_{i \notin J} r_i.$$

Отсюда

$$W'(x) = \min_{y \in Y'} F(x,y) = \min_{J:\,|J|=q} \sum_{i \notin J} r_i. \tag{2.11}$$

Максимум функции $W'(x)$ на $X_1'(q)$ достигается на стратегии x^q, для которой вектор остатков от деления на μ равен

$$(r_1, ..., r_n) = \lfloor r/n \rfloor e^{\{1,...,n\}} + e^{\{1,...,s\}}.$$

Чтобы построить стратегию x^q, выберем такие числа $c_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, ..., n$, что $c_1 + ... + c_n = (A - r)/\mu$. Определим $x_i^q = c_i\mu + r_i,\ i = 1, ..., n$. При этом согласно формуле (2.11)

$$W'(x^q) = \lfloor r/n \rfloor (n - q) + (s - q)^+.$$

■

Из леммы 2.6 следует

Теорема 2.6. *Пусть в игре* Γ' *модели Гермейера наименьший коэффициент* μ_n *целый. Если в соответствующей игре* $\Gamma_n'(\mu_n)$ *выполнено* $\underline{v}'(\mu_n) = (A - \mu_n B)^+$, *то* $\underline{v}' = v'(\mu_n)$, *а* $x^{(n)}$ *– максиминная стратегия нападения.*

Доказательство. Так как в игре $\Gamma_n'(\mu_n)$ нижнее значение $\underline{v}'(\mu_n) = (A - \mu_n B)^+$, этот результат достижим и в исходной игре Γ'. Он не улучшаем, поскольку $\mu_i \geqslant \mu_n$, $i = 1, ..., n-1$, и эффективность защиты в игре Γ' не меньшая, чем в игре $\Gamma_n'(\mu_n)$. ■

Следствие 2.2. *Пусть в игре* Γ_s' *модели Гермейера стратегия* $x^* = (0, ..., 0, x_s^*, ..., x_n^*)$ *является максиминной. Тогда для нижнего значения* $\underline{v}'$ *в исходной игре* Γ' *модели Гермейера верно*

$$\underline{v}' = W_s'(x^*) = \min_{y \in Y'} F_s(x^*, y).$$

Доказательство. Докажем, что

$$W_s'(x^*) \geqslant W'(x),\ \forall x \in X'.$$

Действительно, так как выполнены неравенства

$$(x_i - \mu_i y_i)^+ - (x_i - \mu_s y_i)^+ \leqslant (\mu_s - \mu_i)^+ y_i = 0,\ i = 1, ..., s,$$

верно

$$F_s(x, y) = \sum_{i=1}^{s} (x_i - \mu_s y_i)^+ + \sum_{i=s+1}^{n} (x_i - \mu_i y_i)^+ \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i y_i)^+ = F(x, y),\ \forall x \in X,\ y \in Y.$$

Отсюда получаем, что

$$W'_s(x) \geqslant W'(x),\ \forall x \in X'.$$

Тогда

$$W'_s(x^*) = \max_{x \in X'} W'_s(x) \geqslant \max_{x \in X'} W'(x) = \underline{v}'.$$

Так как первые $s - 1$ компонента максиминной стратегии x^* нулевые, то выигрыш $W'_s(x^*)$ достижим для первого игрока и в исходной игре Γ'. ■

Замечание 2.5. Поскольку в игре Γ'_s $\lambda_i = 1,\ i = 1, ..., n,\ \mu_1 = ... = \mu_s$, для сокращения перебора при поиске максимина при покрытии симплекса $S(\Delta, z)$ симплексами S_i следует воспользоваться соображениями симметрии (см. теорему 2.2).

Замечание 2.6. Максиминная стратегия x^* также может быть найдена методом динамического программирования [4,91], позволяющем получать верхние и нижние оценки для $\underline{v}'$.

Рассмотрим поиск минимаксной стратегии в игре Γ' модели Дрешера. Так как для верхнего значения игры выполнено

$$\overline{v}' = \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} F(x, y) = \max_{x \in X'} F(x, y^*) = \max_{i=1,...,n} F(x^{(i)}, y^*) = \max_{i=1,...,n} f_i(A, y_i^*),$$

при поиске минимаксной стратегии y^* можно воспользоваться дискретным аналогом принципа уравнивания ([10, теорема 9.2]), т.е. использовать следующее достаточное условие:

$$\text{если } y_j^* > 0, \text{ то } f_j(A, y_j^* - 1) \geqslant \max_{i=1,\dots,n} f_i(A, y_i^*) = f_l(A, y_l^*). \tag{2.12}$$

Если для некоторого вектора y^1 условие (2.12) не выполнено, то следует перебросить единицу с j-го пункта на l-й, затем для полученного вектора y^2 вновь проверить условие (2.12) и т.д. вплоть до его выполнения на некотором шаге k для стратегии $y^k = y^*$.

Пример 2.2. Пусть $n = 3,\ A = 75,\ B = 15,\ \mu_1 = \mu_3 = 6,\ \mu_2 = 5,\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Тогда (p', q', v') – решение в смешанных стратегиях игры Γ', где $v' = 4500/43 \approx 104.65,\ p' = (10/43, 18/43, 15/43)$ – распределение на множестве $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, а $q' = (4/43, 19/86, 59/86)$ – распределение на множестве $\{(6,5,4), (6,6,3), (7,4,4)\}$. Заметим, что $v' = v$, поскольку минимаксная стратегия в непрерывной игре $y^0 = (6.69,\ 4.53,\ 3.78) \in Y_1$ (см. теорему 2.1). Нижнее и верхнее значения игры Γ' равны $\underline{v}' = 7$ и $\overline{v}' = 110$, максиминная и минимаксная чистые стратегии $x^* = (1, 72, 2)$ и $y^* = (7, 4, 4)$.

2.2.4. Игра с бюджетными ограничениями

Пусть в игре Γ множества стратегий X и Y имеют вид

$$X = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leqslant A\Big\},\ Y = \Big\{y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n b_i y_i \leqslant B\Big\},$$

где A и B – капиталы первого и второго игроков, используемые для приобретения средств нападения и защиты на i-м пункте по ценам a_i и b_i. Без потери общности будем считать числа $A, B, a_i, b_i,\ i = 1, \dots, n$, целыми. Действительно, если они рациональные, то неравенства в определении множеств X и Y домножим на общие знаменатели чисел $a_i,\ i = 1, \dots, n,\ A$ и $b_i,\ i = 1, \dots, n,\ B$ соответственно.

Как и выше, игра Γ' получается из игры Γ в предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами. Чтобы применить АРП поиска решения в смешанных стратегиях игры Γ', необходимо существенно сократить множество стратегий X' первого игрока.

Определение 2.1. *Будем говорить, что стратегия* $x' \in X'$ *доминирует стратегию* $x'' \in X'$, *если* $x'_i \geqslant x''_i,\ i = 1, ..., n$.

Пусть $X^{\max}$ – множество всех недоминируемых стратегий из X', а X^{ext} – множество крайних точек выпуклой оболочки conv $X^{\max}$. Из монотонности и выпуклости функций f_i по переменным x_i следует, что первый игрок может ограничиться стратегиями из множества X^{ext}.

Займемся построением множества X^{ext}. Сделаем два упрощающих предположения. Пусть $d =$НОД$(a_1, ..., a_n)$.

1. Без потери общности будем считать, что $d = 1$. Действительно, если d не делит A, то A можно уменьшить до ближайшего целого A', кратного d, с сохранением множества стратегий X'. После этого обе части неравенства $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leqslant A'$ можно сократить на d.

2. Предположим, что каждый коэффициент $a_i \neq 1$ и не делит другой коэффициент a_j. В самом деле, пусть, например, $a_1 = ka_2,\ k \in \mathbb{Z}$. Обозначим

$$\tilde{X}^{\max} = X^{\max} \cap \{x \in X' \mid x_1 = 0\},$$

а $\tilde{X}^{\text{ext}}$ – множество крайних точек выпуклой оболочки conv $\tilde{X}^{\max}$. Тогда

$$X^{\text{ext}} = \tilde{X}^{\text{ext}} \cup \{(x_2^*/k, 0, x_3^*, ..., x_n^*) \mid (x_2^*, ..., x_n^*) \in \tilde{X}^{\text{ext}} \text{ и } k \text{ делит } x_2^*\}.$$

Итак, множество X^{ext} строится по множеству $\tilde{X}^{\text{ext}}$. Дальше будем считать, что $1 < a_1 < ... < a_n$.

Теперь займемся вопросом разрешимости в $\mathbb{Z}_+$ (т.е. в целых неотрицательных числах) уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A. \tag{2.13}$$

В [77] показано, что при $A > a_1 a_2 - a_1 - a_2$ уравнение $a_1 x_1 + a_2 x_2 = A$ имеет решение в $\mathbb{Z}_+$. Отсюда вытекает

Теорема 2.7. *Если при некоторых $i \neq j$ из $\{1, ..., n\}$ выполнено неравенство $A > a_i a_j - a_i - a_j$, то уравнение* (2.13) *разрешимо в $\mathbb{Z}_+$.*

Чтобы установить критерий разрешимости в $\mathbb{Z}_+$ в общем случае, рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i/a_n) x_i \ \to \ \min \\ \sum_{i=1}^{n-1} \{a_i/a_n\} x_i - \{A/a_n\} \equiv 0, \ x_i \in \mathbb{Z}_+, \ i = 1, ..., n-1. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Аналогичная задача решается в разделе 1.2 главы 1. Заметим, что минимум в задаче (2.14) равен $\{A/a_n\} + m_n^*$, где $m_n^* \in \mathbb{Z}_+$.

Справедлива

Теорема 2.8. *Для того чтобы уравнение* (2.13) *было разрешимо в $\mathbb{Z}_+$, необходимо и достаточно, чтобы $m_n^* \leqslant \lfloor A/a_n \rfloor$.*

Если $(x_1^*, ..., x_{n-1}^*)$ — оптимальное решение задачи (2.14)*, то $(x_1^*, ..., x_{n-1}^*, \lfloor A/a_n \rfloor - m_n^*)$ — решение уравнения* (2.13) *с максимальной n-й компонентой.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Действительно, из неравенств $1 < a_1 < ... < a_n$ следует, что

$$\{a_i/a_n\} = a_i/a_n, \ i = 1, ..., n-1.$$

Разделим обе части (2.13) на a_n

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i/a_n)x_i + x_n = A/a_n. \tag{2.15}$$

Для любых $x_i,\ i = 1, ..., n-1$, в задаче (2.14) справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i/a_n)x_i \geqslant \{A/a_n\} + m_n^*. \tag{2.16}$$

Подставив (2.16) в (2.15), находим

$$m_n^* + x_n \leqslant \lfloor A/a_n \rfloor. \tag{2.17}$$

Поскольку $x_n \geqslant 0$, для того чтобы (2.13) было разрешимо в $\mathbb{Z}_+$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$m_n^* \leqslant \lfloor A/a_n \rfloor.$$

Обратно, пусть последнее неравенство выполнено. Оптимальное решение $(x_1^*, ..., x_{n-1}^*)$ задачи (2.14) удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i/a_n)x_i^* = \{A/a_n\} + m_n^*. \tag{2.18}$$

В этом случае, подставив (2.18) в (2.15), получаем, что существует такое $x_n^* = \lfloor A/a_n \rfloor - m_n^* \geqslant 0$, что в (2.17) достигается равенство. Это соответствует решению уравнения (2.13) с максимальной n-ой компонентой. ■

Для всякого натурального C обозначим через X_C симплекс, состоящий из всех неотрицательных решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = C,$$

а через X'_C соответствующее множество целых решений.

Рассмотрим алгоритм построения множества X^{ext}. Пусть X_A^{ext} – множество крайних точек выпуклой оболочки $\operatorname{conv} X'_A$, а A^* – наибольшее из чисел

$a_i a_j - a_i - a_j,\ i \neq j$. При $A > A^*$ на всех ребрах симплекса X_A существуют точки из множества X'_A. Для каждого ребра $[(A/a_i)e^i, (A/a_j)e^j]$ симплекса X_A строим на нем крайние точки x^{ij} и x^{ji} из X_A^{ext}, имеющие соответственно максимальные i-ю и j-ю компоненты. При этом компонента x_j^{ij} равна наименьшему числу $x_j \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющему сравнению

$$\{a_j/a_i\}x_j \equiv \{A/a_i\},\ x_i^{ij} = (A - a_j x_j^{ij})/a_i.$$

Аналогично определяется точка x^{ji}. Пусть

$$h_i = \min_{j \neq i} x_i^{ij},\ A_i = A - a_i(h_i + 1),\ i = 1, ..., n.$$

Просматриваем все симплексы

$$X_{A_i} = \{x \in X_A \mid x_i \geqslant h_i + 1\},$$

близкие к вершинам $(A/a_i)e^i$ симплекса X_A. Если $A_i > A^*$, то по аналогии с предыдущим строим на ребрах симплекса X_{A_i} точки из $X_{A_i}^{\text{ext}} \subset X_A^{\text{ext}}$ и симплексы, близкие к вершинам симплекса X_{A_i}. В противном случае перебором строим все множество $X_{A_i}^{\text{ext}}$. Процесс продолжается до полного просмотра всех возникающих симплексов и завершается построением множества X^{ext} (см. рис. 2.3).

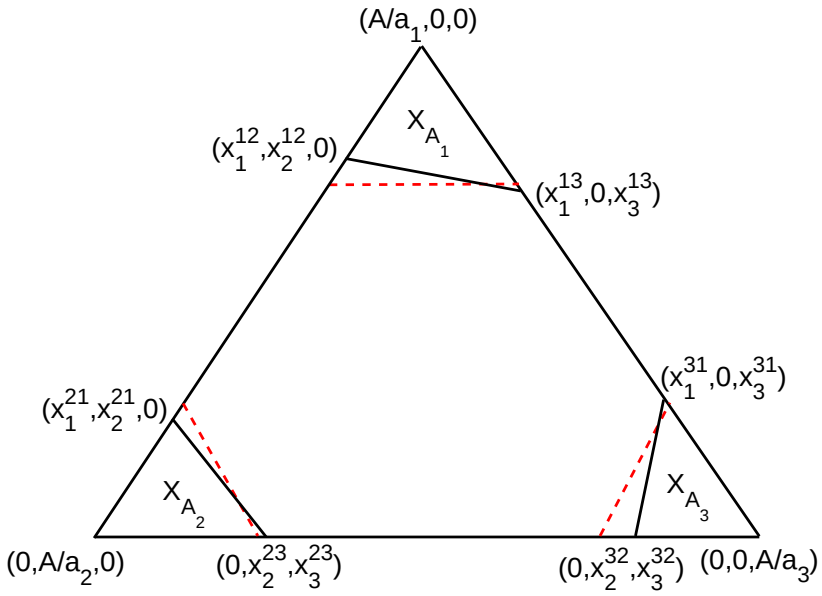


Рисунок 2.3. Построение множества X^{ext} при $n = 3$.

Таким способом находятся множества $X^{\text{ext}}_{A-1}, ..., X^{\text{ext}}_{A-a_1+1}$. Отметим, что симплекс X_{A-a_1} рассматривать не нужно, поскольку каждая точка $x \in X_{A-a_1}$ доминируется точкой $(x_1+1, x_2, ..., x_n) \in X_A$. В каждом из множеств X^{ext}_{A-i} отбрасываются точки, доминируемые выпуклыми комбинациями точек из множеств $X^{\text{ext}}_A, ..., X^{\text{ext}}_{A-i+1}$, $i = 1, ..., a_1 - 1$. Оставшиеся недоминируемые точки образуют множество X^{ext}.

Рассмотрим ВЗ для второго игрока в модели Дрешера. Далее предполагается, что коэффициенты λ_i, μ_i, $i = 1, ..., n$, целые. Она заключается в нахождении следующего минимума:

$$\min_{y \in Y'} F(p, y) = \min_{y \in Y'} \sum_{i=1}^{|X^{\text{ext}}|} p_i F(x^{(i)}, y) = \min_{y \in Y'} \sum_{i=1}^{|X^{\text{ext}}|} p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j^{(i)} - \mu_j y_j)^+.$$

После введения вспомогательных переменных ξ_{ij} эта задача сводится к задаче ЦЛП

$$\sum_{i=1}^{|X^{\text{ext}}|} p_i \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \to \min$$
$$\xi_{ij} \geqslant \lambda_j (x_j^{(i)} - \mu_j y_j),$$
$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j \leqslant B,\ \xi_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ y_j \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,$$

для решения которой в данной работе использовался метод ветвей и границ [29, 44].

Пример 2.3. Пусть $n = 3,\ \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4,\ \mu_1 = 2,\ \mu_2 = 5,\ \mu_3 = 3,$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3_+ \mid 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 179\},$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3_+ \mid y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leqslant 55\}.$$

Здесь

$$X^{\text{ext}} = \left\{ \begin{array}{c} (1, 59, 0), (88, 1, 0), (2, 0, 35), (87, 0, 1), \\ (0, 3, 34), (0, 58, 1), (89, 0, 0), (0, 1, 35) \end{array} \right\},$$

(p', q', v') – решение игры Γ', где $p' = (2/9, 5/9, 2/9)$ – распределение на множестве $\{(1, 59, 0), (2, 0, 35), (89, 0, 0)\}$, $q' = (1271/13770, 12007/27540, 12991/27540)$ – распределение на множестве $\{(4, 9, 11), (41, 1, 4), (33, 11, 0)\}$, а $v' = 962/9$.

2.3. Игры комбинаторного типа

2.3.1. Игра фермера против природы

Следующая постановка является обощением игры из [26]. Фермер (первый игрок) имеет m участков земли разных площадей и плодородностей. Обозначим через s_l долю площади l-го участка в общей площади S. Тогда $\sum_{l=1}^{m} s_l = 1$ и без потери общности $s_1 \geqslant s_2 \geqslant ... \geqslant s_m > 0$. Фермер намеревается

засеять участки m видами сельскохозяйственных культур по одному виду на каждом участке. Природа (второй игрок) реализует одно из n погодных условий. Если фермер засеет i-й культурой l-й участок, то при j-м погодном условии его прибыль с l-го участка составит величину $s_l b_{ijl} S$. Стратегия фермера состоит в выборе $\pi = (\pi(1), ..., \pi(m))$ - перестановки последовательности $1, ..., m$, означающей, что i-й культурой засевается $\pi(i)$-й участок. Тогда прибыль (выигрыш) фермера с единицы общей площади равна

$$a_{\pi j} = \sum_{i=1}^{m} s_{\pi(i)} b_{ij\pi(i)}.$$

Здесь матрица игры $A = (a_{\pi j})$ содержит $m!$ строк и n столбцов. Отметим, что в [26] участки земли не различались по плодородию. Поэтому вместо матрицы $(b_{ijl})_{m\times n\times m}$ использовалась матрица $(b_{ij})_{m\times n}$.

Рассмотрим ВЗ первого игрока. Пусть второй игрок использует смешанную стратегию q. Положим

$$c_{li} = \sum_{j=1}^{n} s_l b_{ijl} q_j.$$

Для нахождения чистой стратегии $\pi \in I(q)$ требуется решить задачу о назначениях с матрицей $(c_{li})_{m\times m}$, т.е. максимизировать сумму $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{\pi(i)i}$ по всем перестановкам π (см., например, [27, с. 161–167]). При этом

$$\bar{v}(q) = \max_{\pi} \sum_{i=1}^{m} c_{\pi(i)i}.$$

В МБР, где p и q – векторы частот (чистая стратегия π^r выбиралась первым игроком с частотой p_r), для нахождения $\pi \in I(q)$ также необходимо решить задачу о назначениях, а чистая стратегия из множества $J(p)$ находится минимизацией по j суммы $\sum\limits_{r=1}^{h} p_r \sum\limits_{i=1}^{m} s_{\pi^r(i)} b_{ij\pi^r(i)}$.

Замечание 2.7. Если участки не различаются по плодородию, то стратегия $\pi \in I(q)$ определяется из условия $c_{\pi(1)} \geqslant c_{\pi(2)} \geqslant ... \geqslant c_{\pi(m)}$, где $c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} q_j$ (см. [25]).

В табл. 2.3–2.5 указаны результаты сравнения двух алгоритмов: АРП и МБР. $t_1\,(t_2)$ – среднее время в секундах выполнения одной задачи по предложенному алгоритму АРП (по алгоритму МБР), $h^{\max}(w^{\max})$ – максимальное число строк (столбцов) в матрице итоговой подыгры, а ε – точность решения задач.

Таблица 2.3. Сравнение алгоритмов для игры 2.3.1 с матрицей $(b_{ijl})_{m\times n\times m}$.

m	n	ε	t_1	t_2	$h^{\max}$
3	3	10^{-3}	0.1214	0.7309	4
10	10	10^{-5}	1.3449	>5 мин	31
20	20	10^{-5}	4.4094	>5 мин	61
50	50	10^{-5}	29.0473	>5 мин	85
100	100	10^{-5}	3 мин 5с	>1 час	132

2.3.2. Соревнование двух фермерских хозяйств

Рассмотрим соревнование двух фермеров, имеющих в своем распоряжении соответственно m и n участков земли разной площади, но одинаковых по плодородию [26]. Стратегия π первого фермера описана в разделе 2.3.1. Обозначим через t_l долю площади l-го участка в общей площади земли второго фермера. Тогда $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l = 1$ и без потери общности выполнены неравенства $t_1 \geqslant t_2 \geqslant ... \geqslant t_n > 0$. Второй фермер намерен засеять участки n культурами и выбирает стратегию $\sigma = (\sigma(1), ..., \sigma(n))$ – перестановку последовательности чисел $1, ..., n$, означающую, что j-й культурой засевается $\sigma(j)$-й участок. Пусть b_{ij} - разность прибылей двух хозяйств при условии, что оба фермера засеяли все свои участки соответственно i-й и j-й культурами. При использовании стратегий π и σ выигрыш первого фермера берется равным

$$a_{\pi\sigma} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{\pi(i)} b_{ij} t_{\sigma(j)}.$$

Возникает игра с матрицей, содержащей $m!$ строк и $n!$ столбцов. Пусть q – смешанная стратегия, применяя которую второй игрок выбирает чистые стратегии $\sigma^r = (\sigma^r(1), ..., \sigma^r(n))$ с вероятностями $q_r, \quad r = 1, ..., w$. Как и в разделе 2.3.1 (при условии, что участки не различаются по плодородию) (см. замечание 2.7), чтобы получить стратегию $\pi \in I(q)$ достаточно упорядочить числа

$$c_i = \sum_{r=1}^{w} q_r \sum_{j=1}^{n} b_{ij} t_{\sigma^r(j)}$$

по убыванию: $c_{\pi(1)} \geqslant c_{\pi(2)} \geqslant ... \geqslant c_{\pi(m)}$. Аналогично находится чистая стратегия $\sigma \in J(p)$ для смешанной стратегии p первого игрока. Особенности применения МБР для данной игры см. в [26].

Таблица 2.4. Результаты сравнения алгоритмов для задачи 2.3.2.

m	n	ε	t_1	t_2	$h^{\max}$	$w^{\max}$
3	3	10^{-3}	0.0551	0.4508	4	4
10	10	10^{-3}	0.2213	0.4639	18	19
50	50	10^{-4}	1.5875	27.5269	50	51
100	100	10^{-5}	14.7313	>5 мин	103	102
500	500	10^{-5}	1.2643	>5 мин	33	33

Замечание 2.8. Отметим парадоксальное уменьшение величин $h^{\max}$ и $w^{\max}$ с ростом m, начиная с $m = 100$.

Пример 2.4. Пусть $s = (15, 39, 68, 69, 84)$ и $t = (28, 39, 53, 87, 98)$,

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 29 & 12 & 73 & 74 \\ 18 & 54 & 89 & 2 & 83 \\ 43 & 94 & 53 & 22 & 35 \\ 67 & 18 & 98 & 27 & 15 \\ 98 & 80 & 76 & 9 & 67 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $\varepsilon = 10^{-8}$. По предложенному алгоритму потребовалось 9 шагов и найдены следующие стратегии p^ε и q^ε: первый игрок с вероятностями $0.0307, 0.8074, 0.0270,\ 0.1349$ выбирает соответственно перестановки $(4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5), (4,\ 1,\ 3,\ 2,\ 5), (4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5)$, а второй игрок с вероятностями $0.1947, 0.4078, 0.3975$ выбирает перестановки $(3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 4), (4,\ 1,\ 2,\ 5,\ 3), (3,\ 1, 2,\ 5,\ 4)$. Значение игры v принадлежит отрезку $[\underline{v}^9, \bar{v}^9] = [47.712957668,\ 47.712957669]$. Для доказательства ε-оптимальности стратегии q^ε достаточно упорядочить по убыванию числа

$$c_i^\varepsilon = \sum_{r=1}^{3} q_r^\varepsilon \sum_{j=1}^{5} b_{ij} t_{\sigma^r(j)},\ i = 1, ..., 5,$$

и проверить равенство

$$\bar{v}^9 = \sum_{i=1}^{5} c_{\pi(i)}^\varepsilon s_i.$$

Аналогичную проверку ε-оптимальности можно сделать и для смешанной стратегии p^ε.

2.3.3. Взаимодействие двух сторон на нескольких пунктах

Каждая из сторон имеет в своем распоряжении m средств, предназначенных для взаимодействия с другой стороной на m пунктах. Если на l-м пункте первая сторона и вторая сторона применяют соответственно i-е и j-е средства, то эффект этого взаимодействия для первой стороны равен b_{ijl}. Стратегиями сторон (игроков), в отличие от раздела 2.3.2, являются перестановки π и σ последовательности $1, ..., m$, означающие, что стороны направляют на l-й пункт соответственно $\pi(l)$-е и $\sigma(l)$-е средства. Выигрыш первой стороны при этом равен величине суммарного эффекта взаимодействия

$$a_{\pi\sigma} = \sum_{l=1}^{m} b_{\pi(l)\sigma(l)l}.$$

Получаем игру с $m! \times n!$-матрицей.

Рассмотрим ВЗ. Предположим, что второй игрок использует смешанную стратегию q. Положим

$$d_{il} = \sum_{r=1}^{w} b_{i\sigma^r(l)l} q_r.$$

Как и в разделе 2.3.1, для нахождения чистой стратегии $\pi \in I(q)$ требуется решить задачу о назначениях с матрицей $(d_{il})_{m\times m}$, т.е. найти максимум $\sum\limits_{l=1}^{m} d_{\pi(l)l}$. Аналогично, если первый игрок использует смешанную стратегию p, то чистая стратегия второго игрока $\sigma \in J(p)$ находится минимизацией суммы $\sum\limits_{l=1}^{m} c_{\sigma(l)l}$, где

$$c_{il} = \sum_{r=1}^{h} p_r b_{\pi^r(l)il}.$$

В МБР наилучшие чистые стратегии игроков на векторы частот p и q также находятся решением задач о назначениях.

Таблица 2.5. Результаты сравнения алгоритмов для задачи 2.3.3.

m	ε	t_1	t_2	$h^{\max}$	$w^{\max}$
3	10^{-3}	0.2052	3.6849	5	5
5	10^{-4}	0.8381	>5 мин	21	20
7	10^{-5}	2.3729	>5 мин	49	47
9	10^{-5}	6.6168	>5 мин	91	91
11	10^{-5}	59.7255	>5 мин	181	154

Как показывают проведенные вычисления, для решения рассмотренных игр он явно предпочтительнее МБР. В МБР значительное время тратится на формирование векторов частот. Однако, если поставлена задача поиска только приближенного значения игры, то МБР работает быстро. Отметим возможность нового подхода к задаче линейного программирования. Известно, что последняя сводится к решению игры с кососимметричной матрицей [27, с. 154–155]. Если при этом матрица принадлежит рассматриваемому классу, то для построения ее решения можно воспользоваться предложенным алгоритмом.

ГЛАВА 3

Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта

Данная глава посвящена антагонистической игре нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. Рассматривается игровая модель, в которой обе стороны могут использовать одновременно несколько средств взаимодействия. Считается, что стратегия нападения преодолело стратегию защиты, если для каждого средства защиты существует средство нападения, которое это средство защиты преодолеет. Вероятность этого события возьмем в качестве функции выигрыша нападения. В отличие от модели Дрешера главы 2 функция выигрыша в данной игре в общем случае не является ни выпуклой, ни вогнутой. В разделе 3.2 изучаются свойства Z-образных функций. В разделе 3.3 указаны достаточные условия существования решения в чистых стратегиях игры Γ'. В разделе 3.4 строятся оптимальные смешанные стратегии игроков, рандомизирующие выбор крайних точек множеств стратегий X и Y в игре Γ. В разделе 3.5 обсуждаются условия доминирования. В разделе 3.6 с помощью метода возможных направлений (МВН) оценивается нижнее значение игры Γ'. Автор выражает огромную благодарность доценту В.Ю. Решетову за предложенную постановку задачи.

3.1. Постановка задачи

Пусть имеется m типов средств нападения и n типов средств защиты. Введем обозначения:

- A и B – общее количество средств нападения и защиты;

- x_i, y_j – количество средств нападения и защиты соответственно i-го и j-го типа;

- p_{ij} – вероятность преодоления одним средством нападения i-го типа одного средства защиты j-го типа, $p_{ij} \in [0, 1]$.

Стратегии нападения $x = (x_1, ..., x_m)$ и защиты $y = (y_1, \ldots, y_n)$ принадлежат множествам

$$X = \Big\{ x \in \mathbb{R}_+^m \;\Big|\; \sum_{i=1}^{m} x_i = A \Big\} \;\text{ и }\; Y = \Big\{ y \in \mathbb{R}_+^n \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} y_j = B \Big\}.$$

Пусть $P_{ij}(x_i, y_j)$ – вероятность преодоления i-м типом нападения в количестве x_i j-го типа защиты в количестве y_j. Следуя [48], положим

$$P_{ij}(x_i, y_j) = \big(1 - (1 - p_{ij})^{x_i}\big)^{y_j},$$

если $x_i, y_j > 0$. Будем говорить, что стратегия нападения x преодолела стратегию защиты y, если каждое средство защиты преодолевается некоторым средством нападения. Вероятность этого события обозначим через $F(x, y)$ и примем за функцию выигрыша нападения. Таким образом, определена антагонистическая игра

$$\Gamma = \Big\langle X,\; Y,\; F(x,y) = \prod_{j \in J(y)} \Big(1 - \prod_{i \in I(x)} \big(1 - P_{ij}(x_i, y_j)\big)\Big)\Big\rangle,$$

где $I(x) = \{x_i > 0,\; i = 1, ..., m\},\; J(y) = \{y_j > 0,\; j = 1, ..., n\}$.

Дискретная игра $\Gamma' = \big\langle X', Y', F(x, y)\big\rangle$ получается из игры Γ при дополнительном предположении, что компоненты стратегий игроков являются целыми числами.

3.2. Свойства Z-образных функций

Определение 3.1. *Убывающую функцию $f(z)$, определенную на полупрямой $\mathbb{R}_+$, будем называть Z-образной, если*

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0\ \ и\ \ \lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

Определим на $\mathbb{R}_+$ семейство Z-образных функций

$$f_{\alpha\beta}(z) = 1 - (1-\alpha^z)(1-\beta^z) = \alpha^z + \beta^z - (\alpha\beta)^z,$$

зависящих от параметров $\alpha, \beta \in (0,1)$. Нетрудно видеть, что функция $f_{\alpha\beta}$ убывает, а при любом фиксированном $z > 0$ выражение $f_{\alpha\beta}(z)$ возрастает по параметрам α и β.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in (0,1)$. При $(\alpha,\beta) \neq (\gamma,\delta)$ уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет не более одного положительного корня. Если, к тому же, $\gamma \geqslant \alpha,\ \delta \geqslant \beta$ (или $\gamma \leqslant \alpha,\ \delta \leqslant \beta$), то уравнение не имеет положительных корней.*

Доказательство. Второе утверждение теоремы вытекает из монотонности выражения $f_{\alpha\beta}(z)$ по параметрам α и β при любом фиксированном $z > 0$.

Докажем первое утверждение, предполагая без потери общности, что $\alpha < \gamma \leqslant \delta < \beta$. Отсюда следует, что при достаточно больших z выполнено неравенство $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$.

Предположим, что $\alpha\beta \geqslant \gamma\delta$. Определим при фиксированных α, β и $z > 0$ функцию преобразования параметров

$$\zeta(c) = f_{\alpha c,\beta/c}(z) = (\alpha c)^z + (\beta/c)^z - (\alpha\beta)^z,\ c \geqslant 1.$$

Эта функция достигает минимума в точке $c^* = \sqrt{\beta/\alpha}$. Из неравенства $\alpha\beta \geqslant \gamma\delta$, следует

$$1 < c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma/\alpha \leqslant \sqrt{\gamma\delta}/\alpha \leqslant c^*$$

и

$$\zeta(1) = f_{\alpha\beta}(z) > \zeta(c_1) = f_{\gamma,\beta\alpha/\gamma}(z),$$

где $\beta\alpha/\gamma \geqslant \delta$. Поэтому функция $\zeta(c)$ убывает на отрезке $[1, c_1]$ и

$$f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma,\beta\alpha/\gamma}(z) \geqslant f_{\gamma\delta}(z) \tag{3.1}$$

при $z > 0$. Таким образом, если $\alpha\beta \geqslant \gamma\delta$, то уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ не имеет положительных корней.

Рассмотрим теперь случай $\alpha\beta < \gamma\delta$. Покажем, что уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет на $\mathbb{R}_+$ конечное число корней. Действительно, функция $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость. Поэтому множество ее нулей не может иметь предельную точку.

Предположим, что первое утверждение теоремы не выполнено, т.е. уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет на $\mathbb{R}_+$ по меньшей мере три корня (включая 0). Пусть z_0 – один из таких корней. Подставим

$$(\alpha\beta)^{z_0} = \alpha^{z_0} + \beta^{z_0} - \gamma^{z_0} - \delta^{z_0} + (\gamma\delta)^{z_0}$$

в выражение для $f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0)$. В результате получим

$$f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) = \ln(\alpha)\alpha^{z_0} + \ln(\beta)\beta^{z_0} -$$

$$- \ln(\alpha\beta)[\alpha^{z_0} + \beta^{z_0} - \gamma^{z_0} - \delta^{z_0} + (\gamma\delta)^{z_0}] - \ln(\gamma)\gamma^{z_0} - \ln(\delta)\delta^{z_0} + \ln(\gamma\delta)(\gamma\delta)^{z_0}.$$

Определим на $\mathbb{R}_+$ функцию $q(z)$, равную правой части последнего равенства после замены z_0 на z. Заметим, что

$$f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) = q(z_0).$$

Лемма 3.1. *Найдется такое малое число $\varepsilon_1 > 0$, что на интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ функции $q(z)$ и $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ имеют одинаковые знаки.*

Доказательство леммы 3.1. Если

$$q(z_0) = f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) \neq 0,$$

то утверждение леммы обосновать нетрудно. В самом деле, пусть, например, $q(z_0) > 0$. Тогда в достаточно малом интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ справедливы неравенства $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z) > 0$ и $q(z) > 0$. Предположим теперь, что $q(z_0) = 0$ и на некотором интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 > 0$, разность

$$f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z) = \alpha^z + \beta^z - (\alpha\beta)^z - \gamma^z - \delta^z + (\gamma\delta)^z > 0.$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$, что на интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ разность производных $f'_{\alpha\beta}(z) - f'_{\gamma\delta}(z) > 0$. Но на этом интервале

$$q(z) = \ln(\alpha)\alpha^z + \ln(\beta)\beta^z - \ln(\alpha\beta)[\alpha^z + \beta^z - \gamma^z - \delta^z + (\gamma\delta)^z] -$$

$$- \ln(\gamma)\gamma^z - \ln(\delta)\delta^z + \ln(\gamma\delta)(\gamma\delta)^z > f'_{\alpha\beta}(z) - f'_{\gamma\delta}(z) > 0.$$

Аналогично разбирается случай, когда $q(z_0) = 0$ и на некотором интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_2)$ разность $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ отрицательна. ■

Завершим доказательство теоремы 3.1. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Из леммы 3.1 вытекает, что для любых случаев расположения графиков функций $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\gamma\delta}$ уравнение $q(z) = 0$ имеет по меньшей мере три корня (см. рис. 3.1). Отметим, что возможные точки касания этих графиков (например, $z = 0$) являются корнями уравнения $q(z) = 0$. Запишем $q(z)/\gamma^z$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{q(z)}{\gamma^z} = (\ln(\alpha) - \ln(\alpha\beta))\Big(\frac{\alpha}{\gamma}\Big)^z + (\ln(\beta) - \ln(\alpha\beta))\Big(\frac{\beta}{\gamma}\Big)^z + \\ +(\ln(\gamma\delta) - \ln(\alpha\beta))\delta^z + (\ln(\alpha\beta) - \ln(\delta))\Big(\frac{\delta}{\gamma}\Big)^z + \ln(\alpha\beta) - \ln(\gamma). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Первые три слагаемых правой части положительные. Поэтому при $\gamma = \delta$ функция $q(z)/\gamma^z$ строго выпуклая и не может иметь более двух нулей (противоречие). Пусть $\gamma < \delta$. После замены $z = \ln t / \ln(\delta/\gamma)$ в правой части в (3.2) получаем функцию

$$- \ln(\beta)t^{\ln(\alpha/\gamma)/\ln(\delta/\gamma)} - \ln(\alpha)t^{\ln(\beta/\gamma)/\ln(\delta/\gamma)} + \ln\Big(\frac{\delta\gamma}{\alpha\beta}\Big)t^{\ln(\delta)/\ln(\delta/\gamma)} +$$

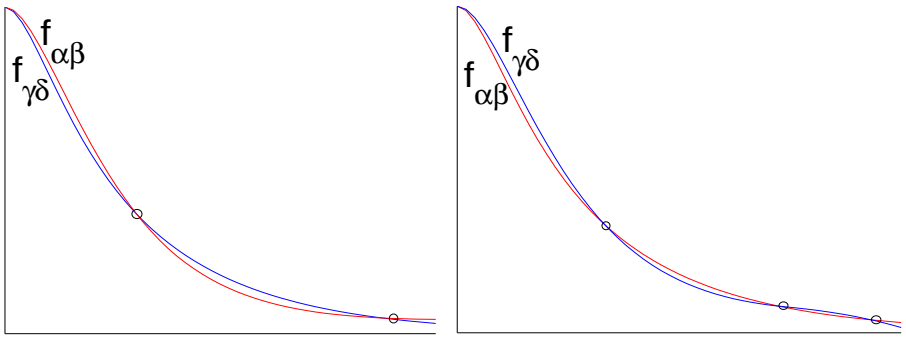


Рисунок 3.1. Два варианта расположения графиков функций $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\gamma\delta}$.

$$+\ln\left(\frac{\alpha\beta}{\delta}\right)t+\ln\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right).$$

Поскольку $0\leqslant\alpha<\gamma<\delta<\beta\leqslant 1$ и $\alpha\beta<\gamma\delta$, показатели степени при t либо отрицательны, либо не меньше 1, а первые три коэффициента неотрицательны. Следовательно, эта функция является строго выпуклой. ■

Замечание 3.1. Без потери общности будем считать, что $\beta\geqslant\alpha$, $\delta\geqslant\gamma$. При $(\alpha,\beta)\neq(\gamma,\delta)$ неравенства $\gamma\geqslant\alpha$, $\delta\geqslant\beta$ (или $\gamma\leqslant\alpha$, $\delta\leqslant\beta$) во второй части формулировки теоремы 3.1 являются достаточными, но не являются необходимыми. Например, если выполнены неравенства $\delta>\beta$, $\ln(\gamma)\ln(\delta)>\ln(\alpha)\ln(\beta)$ (или $\delta<\beta$, $\ln(\gamma)\ln(\delta)<\ln(\alpha)\ln(\beta)$), то уравнение $f_{\alpha\beta}(z)=f_{\gamma\delta}(z)$ также не имеет положительных корней. Ограничимся случаем $\delta>\beta$, $\ln(\gamma)\ln(\delta)>\ln(\alpha)\ln(\beta)$. Действительно, поскольку по условию теоремы 3.1 уравнение $f_{\alpha\beta}(z)=f_{\gamma\delta}(z)$ имеет не более одного положительного корня, для того чтобы это уравнение вообще не имело положительных корней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $f''_{\gamma\delta}(0)>f''_{\alpha\beta}(0)$, $\lim\limits_{t\to\infty}f_{\gamma\delta}(t)\geqslant\lim\limits_{t\to\infty}f_{\alpha\beta}(t)$. Отсюда получаем

$$\frac{f''_{\gamma\delta}(0)}{f''_{\alpha\beta}(0)}=\frac{\ln(\gamma)\ln(\delta)}{\ln(\alpha)\ln(\beta)}>1,\ \frac{\lim\limits_{t\to\infty}f_{\gamma\delta}(t)}{\lim\limits_{t\to\infty}f_{\alpha\beta}(t)}=\lim_{t\to\infty}(\delta/\beta)^t>1.$$

Определим на интервале $(0,\infty)$ более общие функции

$$f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)=1-\prod_{i=1}^{m}(1-\alpha_i^z),$$

зависящие от параметров $\alpha_i\in[0,1],\ i=1,...,m,\ m\geqslant 2$.

Теорема 3.2. *При любых* $0<z_1<z_2$ *справедливо неравенство*

$$f^{z_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z_1)\geqslant f^{z_1}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z_2). \tag{3.3}$$

Доказательство. Если некоторый параметр $\alpha_i=1$, то обе части неравенства (3.3) равны 1. Если некоторые $\alpha_i=0$, то в формуле для $f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)$ будет фигурировать произведение сомножителей, соответствующих положительным α_i. Поэтому без потери общности предположим, что $\alpha_i\in(0,1),\ i=1,...,m$. Применим метод математической индукции. Возьмем $m=2,\ \alpha,\beta\in(0,1)$ и докажем неравенство $f^{z_2}_{\alpha\beta}(z_1)>f^{z_1}_{\alpha\beta}(z_2)$ или

$$\alpha^{z_1}>-\beta^{z_1}+(\alpha\beta)^{z_1}+\left(\alpha^{z_2}+\beta^{z_2}-(\alpha\beta)^{z_2}\right)^{z_1/z_2}.$$

Пусть $\alpha<\beta$. Разделим обе части неравенства на α^{z_1} и сделаем замену $z_1=\ln t/\ln(\beta/\alpha)$. В результате получим

$$1>-t+t^{\ln\beta/\ln(\beta/\alpha)}+t^{\ln(1+(\beta/\alpha)^{z_2}-\beta^{z_2})/(z_2\ln(\beta/\alpha))}.$$

Правая часть неравенства является выпуклой по t функцией, поскольку один показатель степени отрицателен, а два других не меньше 1. Она принимает значение 1 в точках $t=1$ и $t=(\beta/\alpha)^{z_2}$. Тем самым, последнее неравенство выполнено. Если $\alpha=\beta$, то неравенство

$$f^{z_2}_{\alpha\alpha}(z_1)>f^{z_1}_{\alpha\alpha}(z_2)$$

эквивалентно неравенству

$$2-\alpha^{z_1}>(2-\alpha^{z_2})^{z_1/z_2},$$

в котором правая часть убывает по z_2 при фиксированном z_1. Итак, в случае $m = 2$ неравенство (3.3) доказано.

Пусть $m > 2$. Сделаем индуктивное предположение, что справедливо неравенство

$$f^{z_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_1) \geqslant f^{z_1}_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_2).$$

Определим число $\tau = f^{1/z_1}_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_1)$. По индуктивному предположению

$$\tau^{z_2} \geqslant f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_2).$$

Отсюда, используя тождество

$$1 - f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z) = (1 - \alpha_1^z) \cdots (1 - \alpha_{m-1}^z),$$

получим

$$f^{z_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1) = f^{z_2}_{\tau \alpha_m}(z_1) \geqslant f^{z_1}_{\tau \alpha_m}(z_2) = (1 - (1 - \tau^{z_2})(1 - \alpha_m^{z_2}))^{z_1} \geqslant$$

$$\geqslant (1 - (1 - f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_2))(1 - \alpha_m^{z_2}))^{z_1} = f^{z_1}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_2).$$

■

Теорема 3.3. *Пусть* $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1],\ i = 1, ..., m$. *Тогда при любых* $z_1, z_2 > 0$ *справедливо неравенство*

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1) f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_2) \geqslant \min[f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1 + z_2), f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_1 + z_2)]. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Без потери общности предположим, что параметры $\alpha_i, \beta_i \in (0, 1),\ i = 1, ..., m$. Сначала докажем, что при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, 1)$ и $z_1, z_2 > 0$ выполнено неравенство

$$f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) \geqslant \min[f_{\alpha\beta}(z_1 + z_2), f_{\gamma\delta}(z_1 + z_2)]. \qquad (3.5)$$

Пусть $\alpha \leqslant \beta$ и $\gamma \leqslant \delta$. Если $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, то неравенство (3.5) следует из тождества

$$f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\alpha\beta}(z_2) = f_{\alpha\beta}(z_1 + z_2) +$$

$$+(\alpha^{z_2}-\alpha^{z_1+z_2})(\beta^{z_1}-\beta^{z_1+z_2})+(\alpha^{z_1}-\alpha^{z_1+z_2})(\beta^{z_2}-\beta^{z_1+z_2}),$$

где последние два слагаемые неотрицательны.

Если $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \delta$, то, пользуясь монотонностью по параметрам, получим

$$f_{\alpha\beta}(z_1)f_{\gamma\delta}(z_2) \geqslant f_{\alpha\beta}(z_1)f_{\alpha\beta}(z_2) \geqslant f_{\alpha\beta}(z_1+z_2).$$

Аналогично разбирается случай $\alpha \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant \delta$.

Без потери общности будем считать, что $\alpha < \gamma \leqslant \delta < \beta$. Пусть $\alpha\beta \geqslant \gamma\delta$. В (3.1) было показано, что $f_{\alpha\beta}(z_1) > f_{\gamma\delta}(z_1)$. Отсюда

$$f_{\alpha\beta}(z_1)f_{\gamma\delta}(z_2) > f_{\gamma\delta}(z_1)f_{\gamma\delta}(z_2) \geqslant f_{\gamma\delta}(z_1+z_2).$$

Осталось разобрать случай $\alpha\beta < \gamma\delta$. Поскольку β больше остальных параметров, то при достаточно больших z $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$. Далее, $f'_{\alpha\beta}(0) = f'_{\gamma\delta}(0) = 0$, а

$$f''_{\alpha\beta}(0) = -2\ln(\alpha\beta) > -2\ln(\gamma\delta) = f''_{\gamma\delta}(0).$$

Отсюда следует, что $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$ при малых $z > 0$. Если $f_{\alpha\beta}(z_1) < f_{\gamma\delta}(z_1)$, то уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет по меньшей мере два положительных корня, что противоречит теореме 3.1. Поэтому $f_{\alpha\beta}(z_1) \geqslant f_{\gamma\delta}(z_1)$ и

$$f_{\alpha\beta}(z_1)f_{\gamma\delta}(z_2) \geqslant f_{\gamma\delta}(z_1)f_{\gamma\delta}(z_2) \geqslant f_{\gamma\delta}(z_1+z_2).$$

Итак, неравенство (3.4) доказано при $m = 2$. Завершим доказательство в общем случае. Пусть $z_1, z_2 > 0$. Определим следующие числа:

$$\alpha = f^{1/z_1}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}(z_1),\ \beta = f^{1/z_2}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}}(z_2).$$

Тогда по теореме 3.2

$$\alpha^{z_1+z_2} \geqslant f_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}(z_1+z_2),\quad \beta^{z_1+z_2} \geqslant f_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}}(z_1+z_2).$$

Отсюда

$$f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z_1)f_{\beta_1\ldots\beta_m}(z_2) = f_{\alpha,\,\alpha_m}(z_1)f_{\beta,\,\beta_m}(z_2) \geqslant$$

$$\geqslant \min[f_{\alpha,\,\alpha_m}(z_1+z_2), f_{\beta,\,\beta_m}(z_1+z_2)] \geqslant \min[f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z_1+z_2), f_{\beta_1\ldots\beta_m}(z_1+z_2)].$$

■

Следствие 3.1. *Пусть* $\alpha_{ij} \in [0,1],\ i = 1,...,m,\ j = 1,...,n$. *Тогда для любых* $z_j > 0,\ j = 1,...,n$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{j=1}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(z_j) \geqslant \min_{j=1,...,n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(z_1 + ... + z_n). \tag{3.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$\prod_{j=1}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(z_j) \geqslant \min\Big(f_{\alpha_{11}...\alpha_{m1}}(z_1+z_2), f_{\alpha_{12}...\alpha_{m2}}(z_1+z_2)\Big) \prod_{j=3}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(z_j) \geqslant$$

$$\geqslant \min\Big(f_{\alpha_{11}...\alpha_{m1}}(z_1+z_2+z_3), f_{\alpha_{12}...\alpha_{m2}}(z_1+z_2+z_3), f_{\alpha_{13}...\alpha_{m3}}(z_1+z_2+z_3)\Big)\cdot$$

$$\cdot \prod_{j=4}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(z_j) \geqslant ... \geqslant \min\Big(f_{\alpha_{11}...\alpha_{m1}}(z_1+...+z_n), ..., f_{\alpha_{1n}...\alpha_{mn}}(z_1+...+z_n)\Big).$$

■

3.3. Решение игры в чистых стратегиях

Напомним необходимые определения (см., например, [10, 11]).

Определение 3.2. *Тройка* (x^0, y^0, v) *называется решением игры* Γ *в чистых стратегиях, если* (x^0, y^0) *– седловая точка функции* $F(x,y)$ *на* $X \times Y$: $F(x, y^0) \leqslant F(x^0, y^0) = v \leqslant F(x^0, y)$ *для любых* $x \in X$ *и* $y \in Y$. *При этом* v *называется значением игры* Γ, *а* x^0, y^0 *– оптимальными стратегиями. Аналогично определяется решение* (x^*, y^*, v') *игры* Γ'.

Определение 3.3. *Стратегии* x^0, y^0 *называются соответственно максиминной и минимаксной, а* $\underline{v}$ *и* $\overline{v}$ *– нижним и верхним значениями игры* Γ, *если*

$$\underline{v} = \max_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(x,y) = \inf_{y\in Y} F(x^0, y),\ \overline{v} = \min_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(x,y) = \sup_{x\in X} F(x, y^0).$$

Аналогично определяются $\underline{v}', \overline{v}'$ *– нижнее и верхнее значения дискретной игры* Γ'. *Для того чтобы игра* Γ *(*Γ'*) имела решение в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы* $\underline{v} = \overline{v}$ *(*$\underline{v}' = \overline{v}'$*)* [10, 11].

Перейдем к вопросу существования решения игры Γ' в чистых стратегиях. При каждом $j = 1, ..., n$ определим стратегию нападения $y^{(j)} = Be^j$, т.е. для каждого $k = 1, ..., n$,

$$y_k^{(j)} = \begin{cases} B, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

состоящую в концентрированном ударе по j-му пункту. Аналогично определим стратегии нападения $x^{(i)},\ i = 1, ..., m$. Положим $\lambda_{ij} = 1 - p_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$. Тогда $P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j}$, если $x_i, y_j > 0$.

Лемма 3.2. *Пусть при некоторых i и j вероятность $p_{ij} \in (0, 1)$. При любом фиксированном $y_j > 0$ функция $\ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j))$ переменной x_i строго вогнута, если $y_j > 1$, и линейна, если $y_j = 1$.*

Доказательство. Вторая производная $(\ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j))''_{x_i x_i}$ равна

$$\frac{y_j \lambda_{ij}^{x_i} \ln^2(\lambda_{ij})(1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j - 2}[1 - y_j \lambda_{ij}^{x_i} - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j}]}{(1 - P_{ij}(x_i, y_j))^2}.$$

Она отрицательна, если $y_j > 1$, и равна нулю, если $y_j = 1$. ■

Теорема 3.4. *Для любой стратегии нападения $x \in X$*

$$\min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{j=1,...,n} F(x, y^{(j)}). \tag{3.7}$$

Кроме того,

$$\max_{x \in X} F(x, y^{(j)}) = \max_{i=1,...,m} F(x^{(i)}, y^{(j)}),\ j = 1, ..., n. \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим, что всегда выполнены неравенства

$$\min_{j=1,...,n} F(x, y^{(j)}) \geqslant \min_{y \in Y} F(x, y) \tag{3.9}$$

и

$$\max_{i=1,...,m} F(x^{(i)}, y^{(j)}) \leqslant \max_{x \in X} F(x, y^{(j)}),\ j = 1, ..., n. \tag{3.10}$$

Докажем равенство (3.7). Без потери общности можно считать, что все компоненты вектора x положительны. Обозначим $\alpha_{ij} = 1 - \lambda_{ij}^{x_i}$. Тогда

$$P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j} = \alpha_{ij}^{y_j},$$

если $y_j > 0$. Из (3.6) следует, что для любой стратегии $y \in Y$

$$F(x,y) = \prod_{j \in J(y)} \Big(1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - P_{ij}(x_i, y_j)\big)\Big) = \prod_{j \in J(y)} f_{\alpha_{1j} \ldots \alpha_{mj}}(y_j) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j \in J(y)} f_{\alpha_{1j} \ldots \alpha_{mj}}(B) \geqslant \min_{j=1,\ldots,n} F(x, y^{(j)}).$$

Отсюда

$$\min_{y \in Y} F(x,y) \geqslant \min_{j=1,\ldots,n} F(x, y^{(j)}).$$

Из последнего неравенства и (3.9) следует равенство (3.7). Докажем равенства (3.8). Вначале покажем, что для любой стратегии $x \in X$

$$\prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, B)) \geqslant \min_{i=1,\ldots,m} (1 - P_{ij}(A, B)). \tag{3.11}$$

Действительно, без потери общности пусть $\lambda_{ij} \in (0,1),\ i \in I(x)$. По лемме 3.2 функция

$$g_j(x) = \sum_{i \in I(x)} \ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j))$$

вогнута на множестве X. Она достигает минимума в одной из крайних точек $x^{(i)},\ i \in I(x)$, множества X (см., например, [46]). Тем самым, неравенство (3.11) доказано. Из него вытекает, что для любой стратегии $x \in X$

$$F(x, y^{(j)}) = 1 - \prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, B)) \leqslant \max_{i=1,\ldots,m} P_{ij}(A,B) = \max_{i=1,\ldots,m} F(x^{(i)}, y^{(j)}).$$

Из последнего неравенства и (3.10) следуют равенства (3.8). ■

Следствие 3.2. *Для любой стратегии нападения $x \in X'$*

$$\min_{y \in Y'} F(x,y) = \min_{j=1,\ldots,n} F(x, y^{(j)}). \tag{3.12}$$

$$\max_{x \in X'} F(x, y^{(j)}) = \max_{i=1,\ldots,m} F(x^{(i)}, y^{(j)}),\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Приведем достаточные условия существования решения игры Γ' в чистых стратегиях. Пусть Γ'' – игра с $m \times n$-матрицей $(F(x^{(i)}, y^{(j)}))$.

Теорема 3.5. *Если матричная игра* Γ'' *имеет решение в чистых стратегиях* $(x^{(i_0)}, y^{(j_0)}, v'')$, *то* $(x^{(i_0)}, y^{(j_0)}, v'')$ *является решением исходной игры* Γ'.

Доказательство. Используя равенства (3.12) и (3.13), получим

$$\underline{v}' = \max_{x \in X'} \min_{y \in Y'} F(x, y) = \max_{x \in X'} \min_{j=1,\dots,n} F(x, y^{(j)}) \geqslant \underline{v}'' \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} F(x^{(i)}, y^{(j)}) = \overline{v}'' \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} F(x^{(i)}, y^{(j)}) =$$

$$= \min_{j=1,\dots,n} \max_{x \in X'} F(x, y^{(j)}) \geqslant \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} F(x, y) = \overline{v}'.$$

Поскольку всегда справедливо $\underline{v}' \leqslant \overline{v}'$, последние неравенства могут выполняться только как равенства. ■

В заключение раздела рассмотрим частный случай. Пусть $m = n$, а $(p_{ij})_{m \times m}$ – диагональная матрица с элементами на диагонали $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, ..., m$. Тем самым, i-е средство нападения способно преодолеть только соответствующее i-е средство защиты. Тогда $\lambda_{ij} = 1$, $i \neq j$ и $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{ii} \in (0, 1)$. Обозначим эту игру через $\Gamma_d = \langle X,\ Y,\ F(x, y) \rangle$. Положим

$$\delta = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\ln \lambda_i}.$$

Сначала покажем, что игра Γ имеет решение в чистых стратегиях. Если стратегия нападения x содержит i-ю нулевую компоненту, то она полностью нейтрализуется стратегией защиты y с $y_i > 0$. Поэтому максиминная стратегия x^0 должна содержать только положительные компоненты. Эта стратегия максимизирует функцию

$$\min_{y \in Y} F(x^0, y) = \min_{i=1,\dots,m} F(x^0, y^{(i)}) = \min_{i=1,\dots,m} (1 - \lambda_i^{x_i^0})^B.$$

В соответствии с принципом уравнивания [10, теорема 9.1] стратегия x^0 и нижнее значение $\underline{v}$ удовлетворяют системе уравнений

$$(1-\lambda_i^{x_i^0})^B = \underline{v},\ i=1,...,m,\ \sum_{i=1}^m x_i^0 = A. \tag{3.14}$$

Следовательно,

$$x_i^0 = \frac{\ln(1-\underline{v}^{1/B})}{\ln\lambda_i},\ i=1,...,m,$$

и

$$\sum_{i=1}^m \frac{\ln(1-\underline{v}^{1/B})}{\ln\lambda_i} = A.$$

Отсюда находим

$$\underline{v} = \left(1-e^{A\delta}\right)^B$$

и

$$x_i^0 = \frac{\ln(1-\underline{v}^{1/B})}{\ln\lambda_i} = \frac{A\delta}{\ln\lambda_i},\ i=1,...,m.$$

Заметим, что найденная максиминная стратегия x^0 является выравнивающей, т.е.

$$F(x^0,y) = \prod_{i=1}^m \left(1-\lambda_i^{x_i^0}\right)^{y_i} = \underline{v}$$

для любой стратегии $y \in Y$.

Покажем, что $\overline{v} = \underline{v}$. Пусть вектор y имеет положительные компоненты. Для максимизации по x функции $F(x,y)$ достаточно найти

$$\max_{x\in X}\ln(F(x,y)) = \max_{x\in X}\ln\Big(\prod_{i=1}^m(1-\lambda_i^{x_i})^{y_i}\Big) = \max_{x\in X}\sum_{i=1}^m y_i\ln(1-\lambda_i^{x_i}).$$

Функция $\ln(F(x,y))$ строго вогнута по x и сепарабельна. По лемме Гиббса [10, лемма 9.1] максимизирующее x удовлетворяет условиям

$$(\ln(F(x,y))'_{x_i} = -y_i\ln(\lambda_i)\cdot\frac{\lambda^{x_i}}{1-\lambda^{x_i}} = C,\ i=1,...,m,\ \sum_{i=1}^m x_i = A, \tag{3.15}$$

представляющим собой систему уравнений относительно неизвестных $x_1,...,x_n,C$. Определим следующую стратегию защиты:

$$y_i^0 = \frac{C}{\mu_i},\ \text{где } C = B\Big(\sum_{k=1}^m\frac{1}{\mu_k}\Big)^{-1},\ \mu_i = -\ln(\lambda_i)\cdot\frac{1-\underline{v}^{1/B}}{\underline{v}^{1/B}},\ i=1,...,m.$$

Подставляя в систему (3.15) y^0 и соответствующее значение C, получим систему относительно переменных $x_1, ..., x_n, \underline{v}$, эквивалентную системе (3.14). Следовательно, x^0 максимизирует $F(x, y^0)$ на множестве X и $F(x^0, y^0) = \underline{v}$. Отсюда $\overline{v} = \underline{v}$, а x^0, y^0 – оптимальные стратегии игры Γ. Заметим, что в данном частном случае матричная игра Γ'' не имеет решения в чистых стратегиях. Это говорит о том, что обратное утверждение в теореме 3.5 неверно.

Теперь найдем верхнее и нижнее значения дискретной игры Γ'. Справедливы равенства

$$\underline{v}' = \min_{y \in Y'} F(x^*, y) = \min_{i=1,...,m} F(x^*, y^{(i)}) = \min_{i=1,...,m} \left(1 - \lambda_i^{x_i^*}\right)^B.$$

Для поиска максиминной стратегии x^* можно воспользоваться следующим достаточным условием ([10, теорема 9.2]):

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \lambda_l^{x_l^*} = \max_{i=1,...,m} \lambda_i^{x_i^*} \leqslant \lambda_j^{x_j^*-1}. \tag{3.16}$$

Вкратце опишем алгоритм нахождения x^*. Если для некоторого вектора x^1 условие (3.16) не выполнено, то следует перебросить единицу с j-го пункта на l-й, затем для полученного вектора x^2 вновь проверить условие (3.16) и т.д. вплоть до его выполнения на некотором шаге k для стратегии $x^k = x^*$. Заметим, что в качестве начального вектора x^1 целесообразно взять вектор, полученный округлением компонент максиминной стратегии x^0 игры Γ.

Дискретную минимаксную стратегию можно найти, используя минимизацию по сетке, заданной на Y'. Из монотонности логарифма функцию $F(x, y)$ можно заменить на $\ln(F(x, y))$. Для каждого $y \in Y'$ найдем

$$\max_{x \in X'} \ln(F(x, y)) = \max_{x \in X'} \sum_{i=1}^{m} y_i \ln(1 - \lambda_i^{x_i}). \tag{3.17}$$

Поскольку в правой части равенства (3.17) стоит выпуклая функция переменной y, в качестве начального $y^1 \in Y'$ можно взять вектор, полученный округлением компонент минимаксной стратегии y^0 игры Γ. Для каждого $y \in Y'$ максимум по x в правой части (3.17) ищется с помощью критерия

Гросса ([10, теорема 9.3]), т.е. для оптимальной стратегии $\tilde{x}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\text{если } \tilde{x}_j > 0, \text{ то } y_j \ln\left(\frac{1-\lambda_j^{\tilde{x}_j}}{1-\lambda_j^{\tilde{x}_j-1}}\right) \geqslant \max_{i=1,\dots,m} y_i \ln\left(\frac{1-\lambda_i^{\tilde{x}_i+1}}{1-\lambda_i^{\tilde{x}_i}}\right).$$

3.4. Использование смешанных стратегий

Об использовании смешанных стратегий в непрерывной модели рассматриваемой игры см. [32]. Данный раздел показывает, что в дискретном случае нахождение оптимальной смешанной стратегии встречает довольно серьезные затруднения. Ограничимся для нападения и защиты смешанными стратегиями специального вида. Пусть $\varphi = (\varphi_i,\ i = 1, ..., m)$ – смешанная стратегия нападения, где φ_i – вероятность выбора чистой стратегии $x^{(i)}$. Аналогично определяется смешанная стратегия защиты $\psi = (\psi_j,\ j = 1, ..., n)$ – вероятностное распределение на точках $y^{(j)},\ j = 1, ..., n$. Множества всех смешанных стратегий нападения и защиты указанных видов обозначим соответственно Φ и Ψ. Множества всех смешанных стратегий первого и второго игроков обозначаются, как и раньше, через P и Q соответственно. Положим $h = C^A_{m+A-1}$, $d = C^B_{n+B-1}$. Определим величины $\underline{w}'$, $\overline{w}'$ и стратегии φ^0, ψ^0 :

$$\underline{w}' = \max_{\varphi\in\Phi} \min_{y\in Y'} F(\varphi, y) = \min_{y\in Y'} F(\varphi^0, y),$$

$$\overline{w}' = \min_{\psi\in\Psi} \max_{x\in X'} F(x, \psi) = \max_{x\in X'} F(x, \psi^0),$$

где

$$F(\varphi, y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i F(x^{(i)}, y),\ F(x, \psi) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j F(x, y^{(j)}).$$

Заметим, что справедливы следующие оценки для v' :

$$\overline{w}' \geqslant v' = \min_{q\in Q} \max_{x\in X'} \sum_{j=1}^{d} q_j F(x, y^j) = \max_{p\in P} \min_{y\in Y'} \sum_{i=1}^{h} p_i F(x^i, y) \geqslant \underline{w}',$$

где

$$P = \Big\{p = (p_1, ..., p_h) \in \mathbb{R}^h_+ \ \Big|\ \sum_{i=1}^{h} p_i = 1\Big\},$$

$$Q = \Big\{ q = (q_1, ..., q_d) \in \mathbb{R}^d_+ \;\Big|\; \sum_{i=1}^{d} q_i = 1 \Big\}.$$

Для нахождения нижней оценки $\underline{w}'$ можно воспользоваться АРП главы 2. Поскольку $p_{ij} \in (0,1)$, то и $\lambda_{ij} = (1 - p_{ij}) \in (0,1)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Функция

$$\ln(F(x^{(i)}, y)) = \sum_{j \in J(y)} \ln\left((1 - \lambda_{ij}^A)^{y_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \ln(1 - \lambda_{ij}^A)$$

линейна по y. Поэтому функция $F(x^{(i)}, y)$ выпукла по y. Следовательно, нахождение минимума во вспомогательной задаче АРП для второго игрока сводится к нахождению минимума выпуклой функции на множестве Y'. Его можно найти с помощью критерия Гросса ([10, теорема 9.3]) (частный случай применения критерия указан в конце предыдущего раздела). В качестве начального $y^1 \in Y'$ можно взять вектор, полученный округлением компонент стратегии

$$\hat{y} \in \operatorname*{Arg\,min}_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i F(x^{(i)}, y).$$

Для поиска минимума $\hat{y} \in Y$ выпуклой функции $\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i F(x^{(i)}, y)$ целесообразно использовать МВН [8, 30, 60].

Для нахождения верхней оценки $\overline{w}'$ необходимо в явном виде решить матричную игру, содержащую m строк и d столбцов. Пример 3.1 показывает, что величину

$$\tilde{w}' = \max_{\varphi \in \Phi} \min_{j=1,...,m} F(\varphi, y^{(j)})$$

нельзя брать в качестве альтернативной верхней оценки значения v' игры Γ'.

Рассмотрим нахождение $\overline{w}'$ и $\underline{w}'$ в игре Γ_d с диагональной матрицей $(p_{ij})_{m \times m}$, которая была определена в конце предыдущего раздела. Возьмем произвольную стратегию $\tilde{y} \in Y'$ с двумя положительными компонентами. Для нее выполнено $F(x^{(i)}, \tilde{y}) = 0$, $i = 1, ..., m$. Тогда для любого $\varphi \in \Phi$ вы-

полнено $F(\varphi, \tilde{y}) = 0$. Отсюда

$$\underline{w}' = \max_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y'} F(\varphi, y) = 0.$$

Для нахождения верхней оценки $\overline{w}'$ следует воспользоваться АРП главы 2. Выполнено

$$\overline{w}' = \min_{\psi \in \Psi} \max_{x \in X'} F(x, \psi) = \min_{\psi \in \Psi} \max_{x \in X'} \sum_{j=1}^{m} \psi_j (1 - \lambda_j^{x_j})^B.$$

Для произвольной фиксированной стратегии $\psi \in \Psi$ максимум по x последней суммы во вспомогательной задаче первого игрока в АРП ищется методом динамического программирования.

Пример 3.1. Пусть $m = n = 3,\ A = 8,\ B = 7,$

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3.$$

Получаем

$$\overline{w}' = 0.495 > v' = \min_{y \in Y'} \sum_{i=1}^{45} p_i^* F(x^i, y) = 0.492 > \tilde{w}' =$$

$$= \min_{j=1,\ldots,n} F(\varphi^{1*}, y^{(j)}) = 0.475 > \underline{w}' = \min_{y \in Y'} F(\varphi^{2*}, y) = 0.192,$$

где с вероятностями $p_1^* = 0.404$, $p_2^* = 0.595$, $p_3^* = 0.001$ берутся стратегии $(4, 0, 4), (5, 0, 3), (8, 0, 0),\ p_i^* = 0,\ i = 4, ..., 45,$ а $\varphi^{1*} = (0.4, 0.17, 0.43), \varphi^{2*} = (0.28, 0.28, 0.44)$.

3.5. Доминирование при поиске максиминных и минимаксных стратегий

При поиске максиминных и минимаксных стратегий следует использовать соображения доминирования.

Теорема 3.6. *Пусть l-я строка матрицы (p_{ij}) доминирует k-ю, т.е. $p_{lj} \geqslant p_{kj},\ j = 1, ..., n,\ l \neq k = 1, ..., m$. Тогда*

1. Найдется максиминная стратегия нападения, не использующая k-е средство.

2. Если стратегия $y \in Y$ удовлетворяет неравенствам $y_j \geqslant 1,\ j = 1, ..., n$, то при нахождении $\max\limits_{x \in X} F(x, y)$ нападение k-е средство может не использовать.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Сначала проверим справедливость неравенства

$$(1 - (1 - \alpha)^B)(1 - (1 - \beta)^B) \geqslant 1 - (1 - \alpha\beta)^B. \tag{3.18}$$

Для этого достаточно доказать два неравенства

$$\frac{1 - (1 - \alpha)^B}{1 - (1 - \alpha\beta)^B} \geqslant \frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{1 - (1 - \beta)^B}.$$

Первое следует из

$$\beta - 1 \geqslant (1 - \alpha\beta)^B(\beta - 1) \geqslant (1 - \alpha)^B\beta - (1 - \alpha\beta)^B,$$

а второе $-$ из неравенства $B \geqslant 1$.

Из условия доминирования вытекает, что $\lambda_{lj} \leqslant \lambda_{kj},\ j = 1, ..., n$. Пусть $x^0 \in X$ $-$ максиминная стратегия нападения, удовлетворяющая условию $x^0_k > 0$. Определим стратегию x' со следующими компонентами:

$$x'_i = \begin{cases} x^0_i, & i \neq l, k, \\ x^0_l + x^0_k, & i = l, \\ 0, & i = k, \end{cases} \qquad i = 1, ..., m.$$

Используя неравенство (3.18) при $\alpha = \lambda_{lj}^{x^0_l},\ \beta = \lambda_{lj}^{x^0_k}$, получим

$$(1 - (1 - \lambda_{lj}^{x^0_l})^B)(1 - (1 - \lambda_{kj}^{x^0_k})^B) \geqslant (1 - (1 - \lambda_{lj}^{x^0_l})^B)(1 - (1 - \lambda_{lj}^{x^0_k})^B) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \left(1 - \lambda_{lj}^{x_l^0 + x_k^0}\right)^B = 1 - \left(1 - \lambda_{lj}^{x_l'}\right)^B,\ j = 1, ..., n.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$F(x', y^{(j)}) \geqslant F(x^0, y^{(j)}),\ j = 1, ..., n.$$

Следовательно, x' – максиминная стратегия и первое утверждение доказано. Второе доказывается аналогично. ■

Теорема 3.7. *Пусть l-й столбец матрицы (p_{ij}) доминируется ее k-м столбцом, т.е. $p_{ik} \geqslant p_{il},\ i = 1, ..., m,\ k \neq l = 1, ..., n$. Тогда*

1. Найдется минимаксная стратегия защиты, не использующая k-е средство.

2. Для любой стратегия нападения $x \in X$ выполнено неравенство $F(x, y^{(k)}) \geqslant F(x, y^{(l)})$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Возьмем произвольную стратегию нападения $x \in X$ и положим $\alpha_{ij} = 1 - \lambda_{ij}^{x_i},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$. Тогда

$$\alpha_{ik} = 1 - \lambda_{ik}^{x_i} \geqslant 1 - \lambda_{il}^{x_i} = \alpha_{il},\ i = 1, ..., m.$$

Пусть $y^0 \in Y$ – минимаксная стратегия защиты, удовлетворяющая условию $y_k^0 > 0$. Определим стратегию y' со следующими компонентами:

$$y_j' = \begin{cases} y_j^0, & j \neq l, k, \\ y_l^0 + x_k^0, & j = l, \\ 0, & j = k, \end{cases} \qquad j = 1, ..., n.$$

Используя неравенство (3.4), получим

$$f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(y_l^0) f_{\alpha_{1k}...\alpha_{mk}}(y_k^0) \geqslant f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(y_l^0) f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(y_k^0) \geqslant$$

$$\geqslant f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(y_l^0 + y_k^0) = f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(y_l').$$

Отсюда для любого $x \in X$

$$F(x, y^0) = \prod_{j=1}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}(y_j^0) \geqslant F(x, y').$$

Следовательно, y' – минимаксная стратегия и первое утверждение доказано. Второе утверждение следует из неравенства

$$F(x, y^{(k)}) = f_{\alpha_{1k}...\alpha_{mk}}(B) \geqslant f_{\alpha_{1l}...\alpha_{ml}}(B) = F(x, y^{(l)}).$$

■

3.6. Поиск максиминных и минимаксных стратегий

Оценим нижнее значение игры Γ' следующим образом:

$$\begin{gathered}\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{j=1,...,n} F(x, y^{(j)}) \geqslant \underline{v}' = \max_{x \in X'} \min_{j=1,...,n} F(x, y^{(j)}) \geqslant \\ \geqslant \max_{x \in \tilde{X}} \min_{j=1,...,n} F(x, y^{(j)}),\end{gathered} \tag{3.19}$$

где

$$\tilde{X} = \{x^{(i)},\ i = 1, ..., m\} \cup X^0,$$

а X^0 – множество стратегий, полученных всевозможными округлениями компонент максиминной стратегии x^0 игры Γ.

Теперь займемся поиском максиминной стратегии x^0 и нижнего значения игры Γ. Пользуясь равенством (3.7), запишем нижнее значение в виде

$$\underline{v} = 1 - \min_{x \in X} \max_{j=1,...,n} \prod_{i=1}^{m} \left(1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^B\right) = 1 - \min_{x \in X} \max_{j=1,...,n} \prod_{i=1}^{m} (1 - P_{ij}(x_i, B)).$$

Введем функции

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - P_{ij}(x_i, B)),\ j = 1, ..., n.$$

Поскольку монотонное преобразование целевой функции не меняет минимизирующие стратегии, для поиска максиминной стратегии x^0 достаточно

решить задачу

$$\min_{x\in X}\max_{j=1,...,n} g_j(x) = \max_{j=1,...,n} g_j(x^0). \tag{3.20}$$

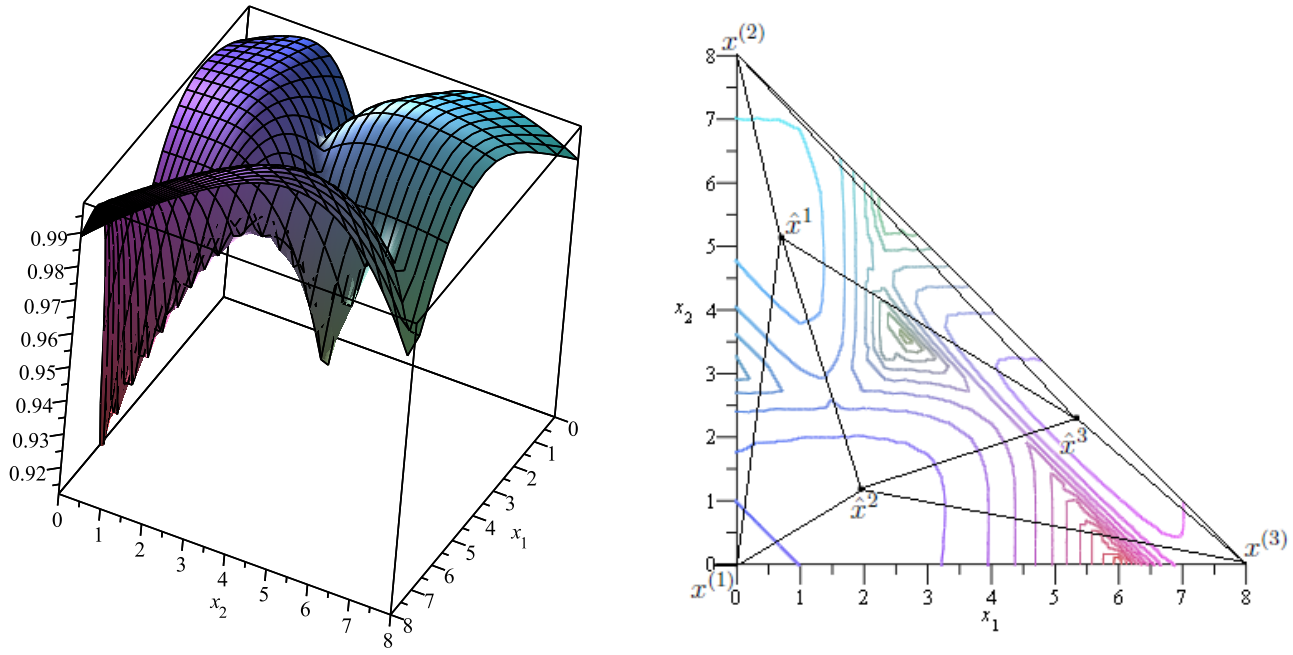
Обсудим применение метода возможных направлений (МВН). По лемме 3.2 функции $g_j(x),\ j = 1,...,n,$ строго вогнуты на множестве X и МВН найдет лишь точку локального минимума функции $\max\limits_{j=1,...,n} g_j(x)$. Поэтому минимизацию следует повторять, начиная из нескольких начальных точек. Укажем эти начальные точки. Пусть $\hat{x}^j$ – точка максимума функции $g_j(x)$ на множестве $X,\ j = 1,...,n$. По лемме Гиббса она удовлетворяет системе уравнений

$$g'_{jx_i}(x) = C,\ i = 1,...,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = A.$$

При этом вектор $\hat{x}^j$ имеет положительные компоненты. Произведем симплициальное разбиение множества X, т.е. разобьем его на симплексы размерности $m-1$, имеющие попарно непересекающиеся внутренности и вершинами которых служат точки из множества

$$\{x^{(i)},\ i = 1,...,m\} \cup \{\hat{x}^j,\ j = 1,...,n\}.$$

Для этого возьмем точку $\hat{x}^1$ и разобьем множество X на m симплексов, имеющих общую вершину в точке $\hat{x}^1$. Если какой-нибудь из построенных симплексов содержит внутри точку $\hat{x}^j$, то разобъем его на m симплексов, имеющих общую вершину в точке $\hat{x}^j$ и т.д. (см. рис. 3.2b). В качестве начальных точек для МВН следует взять центры построенных симплексов. Выбор величины шага вдоль направления убывания и условия остановки можно взять те же, что и в МВН [8, 20].



(a) (b)

Рисунок 3.2. График и линии уровня функции $\max\limits_{j=1,\dots,n} g_j(x)$.

Замечание 3.2. Задачу (3.20) можно также свести к задаче

$$f(x,u) = u \to \min\limits_{(x,\,u)}$$
$$g_j(x) \leqslant u,\ j = 1,\dots,n,\ x \in X,$$

которую, в свою очередь, можно решить МВН, поскольку функции $f(x,u)$ и $g_j(x) - u$, $j = 1,\dots,n$, являются гладкими (см. [8, С. 269]).

Отметим, что минимаксную стратегию в игре Γ' следует искать, используя минимизацию по сетке, заданной на Y', сгущая сетку в окрестностях точек минимума [20].

Пример 3.2. Пусть $m = n = 3$, $A = B = 8$,

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3,\ j = 1,2,3.$$

Решая МВН игру Γ, получаем нижнее значение игры $\underline{v} = 0.0784$, максиминную стратегию $x^0 = (2.54, 3.65, 1.81)$ и $\hat{x}^1 = (0.78,\ 5.14,\ 2.08)$, $\hat{x}^2 =$

(3.56, 3.56, 0.88), $\hat{x}^3 = (3.58, 0.85, 3.57)$. Из (3.19) нижнее значение игры Γ' оценивается

$$\underline{v} = 0.0784 \geqslant \underline{v}' \geqslant \max_{x \in \tilde{X}} \min_{j=1,2,3} F(x, y^{(j)}) = 0.0347,$$

где

$$\tilde{X} = \left\{ \begin{array}{c} (8,0,0), (0,8,0), (0,0,8), (2,3,3), (2,5,1), \\ (2,4,2), (3,3,2), (3,4,1), (4,3,1) \end{array} \right\}.$$

Нижнее и верхнее значения, максиминная и минимаксная стратегии игры Γ', найденные по сетке, соответственно равны $\underline{v}' = 0.0448$, $\overline{v}' = 0.169$, $x^* = (3,5,0)$ и $y^* = (2,3,3)$. Поскольку выполнено

$$\min_{y \in Y'} (\varphi_1^0 F(x^{(1)}, y) + \varphi_2^0 F(x^{(2)}, y)) = 0.0917 > \underline{v}',$$

где $\varphi_1^0 = 0.57$, $\varphi_2^0 = 0.43$, нападению в данной игре целесообразно использовать смешанную стратегию $\varphi = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, 0)$, в которой с вероятностями φ_1^0 и φ_2^0 выбираются чистые стратегии $(8,0,0)$ и $(0,8,0)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Предложена модификация циклического алгоритма Гомори, имеющая при небольшом числе переменных более высокую скорость сходимости, чем ряд известных алгоритмов отсечений.

2. Разработан алгоритм подбора параметров для решения вспомогательной задачи, возникающей при поиске отсечения в модифицированном циклическом алгоритме.

3. При построении отсечения Мартина предложен поиск производящей строки, который минимизирует число преобразований в алгоритме Мартина.

4. Приведены результаты численного сравнения циклического алгоритма Гомори, полностью целочисленного алгоритма Гомори, модифицированного циклического алгоритма и алгоритма Мартина.

5. Предложен метод решения матричных игр больших размеров специального вида, в которых существует быстрый алгоритм нахождения наилучшей чистой стратегии для каждого игрока в ответ на произвольную смешанную стратегию партнера. Алгоритм был применен к модели Дрешера игры «нападение-защита» и к играм комбинаторного типа, в которых стратегиями игроков являются всевозможные перестановки последовательности $1, ..., m$. Приведены результаты численного сравнения предложенного алгоритма с методом Брауна-Робинсон.

6. Исследована модель Дрешера дискретной игры «нападение-защита». Сформулировано условие совпадения значения дискретной и непрерывной игр. Найдены максиминные и минимаксные стратегии.

7. Сформулированы условия существования решения антагонистической игры нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта, в чистых и смешанных стратегиях. Исследованы свойства Z-образных функций, на основе которых разработаны методы поиска максиминных и минимаксных стратегий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Амвросенко В.В. Ускорение сходимости метода Брауна решения матричных игр // Экономика и математические методы. — 1965. — Т. 1, В. 4. — С. 571–575.

[2] Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2013. — № 53. — С. 225–237.

[3] Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А., Поманский А.Б., Шапиро А.Д. Итеративные методы в теории игр и программировании. — М.: Наука, 1974.

[4] Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Иностранная литература, 1960.

[5] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр. — М.: Радио и связь, 1983.

[6] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. — М.: Советское радио, 1974.

[7] Борисова Э.П., Магарик И.В. О двух модификациях метода Брауна решения матричных игр // Экономика и математические методы. — 1966. — Т. 2, В. 5. — С. 733–738.

[8] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.

[9] Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. — М.: Факториал, 2008.

[10] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. — М.: Издательский центр «Академия», 2008.

[11] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр. — М.: МАКС-Пресс, 2008.

[12] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС-Пресс, 2005.

[13] Васин А.А., Шумов В.В., Уразов А.С. Об оптимальных стратегиях применения пограничных средств обнаружения. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2011. — № 2. — С. 30–36.

[14] Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.

[15] Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978.

[16] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.

[17] Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. — М.: Советское радио, 1968.

[18] Давыдов Э.Г. Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990.

[19] Данскин Д.М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. — М.: Советское радио, 1970.

[20] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.

[21] Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. — М.: Советское радио, 1964.

[22] Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введению в прикладную теорию игр. — М.: Наука, 1981.

[23] Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 1971. — Т. 11, № 6. — С. 1390–1403.

[24] Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании. — К.: 1992.

[25] Емец О.А., Устьян Н.Ю. Игры с комбинаторными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 134–141.

[26] Емець О.О., Ольховська О.В. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод // Системні дослідження та інформаційні технології. — № 4. — С. 80–93.

[27] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.

[28] Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969.

[29] Ковалев М.М. Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

[30] Ларин Р.М., Плясунов А.В., Пяткин А.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2003.

[31] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. Метод решения матричных игр специального вида // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 14-23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 30–31.

[32] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5, В. 4. — С. 66–83.

[33] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О решении дискретной игры распределения ресурсов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2014. — № 2. — С. 10–16. (Morozov V.V., Shalbuzov K.D. On a solution of the discrete resource allocation game // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2014. — V. 38, № 2. — P. 37–44.)

[34] Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О численном решении матричных игр специального вида // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 10. — С. 1557–1562. (Morozov V.V., Shalbuzov K.D. Numerical solution of special matrix games // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — V. 54, № 10. — P. 1499–1504.)

[35] Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л., Тролл Р.М. Метод двойного описания // Матричные игры. Сб. статей (ред. Н.Н. Воробьев). — М.: Физматгиз, 1961. — С. 81–109.

[36] Огарышев В.Ф. Обобщение задачи Гросса // В сб. «Кибернетику на службу коммунизму». — 1971. — № 6. — С. 264–283.

[37] Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 1973. — Сер. 13, № 1. — С. 59–70.

[38] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985.

[39] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014.

[40] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. — М.: Мир, 1989.

[41] Робинсон Дж. Итеративный метод решения игр // Матричные игры. Сборник статей под. ред. Н.Н. Воробьева. — М.: Физматгиз. — 1961. — С. 110-118.

[42] Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. — М.: Мир, 1973.

[43] Садовский А.Л. Монотонный итеративный алгоритм решения матричных игр // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 3. — С. 538–540.

[44] Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. Учеб. пособие. — М.: Физматлит, 2007.

[45] Строцев А.А. Модифицированный метод Брауна решения матричной игры "неклассического" типа // Экономика и математические методы. — 2001. — Т. 37, В. 3. — С. 106–110.

[46] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. — М.: Физматлит, 2011.

[47] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В двух томах. — М.: Мир, 1991.

[48] Фейн У.У. Роль связи в войне. Применение теории игр к задачам военной связи. В кн. [21] — С. 246–259.

[49] Финкельштейн Ю.Ю. Метод отсечения и ветвления для решения задач целочисленного линейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. — 1971. — № 4. — С. 34–38.

[50] Хохлюк В.И. Алгоритмы целочисленной оптимизации. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1982.

[51] Хохлюк В.И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации. — М.: Радио и связь, 1987.

[52] Хохлюк В.И. Прямой метод целочисленной оптимизации. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2002.

[53] Хохлюк В.И. Задачи целочисленной оптимизации (алгоритмы). — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.

[54] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974.

[55] Червак Ю.Ю. Метод отсечений для дискретных задач // Украинский математический журнал. — 1971. — Сер. 23, № 6. — С. 839–843.

[56] Чижонков Е.В. Итерационное решение матричных игр методами сеточных вариационных неравенств // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2010. — Т. 50, № 8. — С. 1367–1380.

[57] Шалбузов К.Д., Морозов В.В. Об одной модификации метода Гомори // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2012. — № 1. — С. 3–9. (Shalbuzov K.D., Morozov V.V. One modification of Gomory's Algorithm // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2012. — V. 36, № 1. — P. 1–7.)

[58] Шалбузов К.Д. О сравнении некоторых методов отсечения для задач целочисленного линейного программирования // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова / Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. — М.: МАКС Пресс. — 2014. — № 45. — С. 123–130.

[59] Шалбузов К.Д. Модификация метода Гомори для решения задач целочисленного программирования // VI Московская международная конфе-

ренция по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19-23 октября 2010 г.: Труды. — М.: МАКС Пресс. — С. 260–261.

[60] Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — К.: Наукова думка, 1979.

[61] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). — М.: Наука, 2012.

[62] Balas E. Disjunctive programming. Properties of the convex hull of feasible points, MSRR № 348, GSIA, Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh, PA. — 1974.

[63] Balas E. Disjunctive programming: Facets of the convex hull of feasible points, MSRR № 348, Carnegie-Mellon Univ. — 1974.

[64] Balas E. Disjunctive programming // Annuals of Discrete Mathematics. — 1979. — V. 5. — P. 3–51.

[65] Balinski M.L. An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1961. — V. 9. — P. 72–88.

[66] Balinski M.L. Integer programming: methods, uses, computation // Management Science. — 1965. — V. 12, № 6. — P. 253–313.

[67] Balinski M.L. On recent developments in integer programming // Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming (Princeton, 1967, Kuhn H.W., Editor). — N.J.: Princeton University Press, 1970. — P. 267–302.

[68] Balinski M.L. Some general methods in integer programming // Nonlinear Programming (Abadie J., Editor). — Amsterdam, 1967. — P. 221–247.

[69] Beale E.M.L., Heselden G.P.M. An approximate method of solving Blotto games // Naval Research Logistic Quarterly. — 1962. — V. 9, № 2. — P. 65–79.

[70] Bellman R. On "Colonel Blotto" and analogous games // SIAM Review. — 1969. — V. 11, № 1. — P. 66–68.

[71] Blackett D.W. Some Blotto games // Naval Research Logistic Quarterly. — 1954. — V. 1, № 1. — P. 55–60.

[72] Cooper J.N., Restrepo R.A. Some problems of attack and defense // SIAM Review. — 1967. — V. 9, № 4. — P. 680–691.

[73] Freiberg T. The probability that three positive integers are pairwise coprime, unpublished manuscript (2005).

[74] Golomb S.W. A class of probability distributions on the integers // Journal of Number Theory. — 1970. — V. 2. — P. 189–192.

[75] Gomory R.E. An algorithm for integer solutions to linear programs // Recent Advances in Mathematical Programming. Robert L. Graves and Philip Wolfe, Editors. — N.Y.: McGraw-Hill, 1963. — P. 193–206.

[76] Gomory R.E. An all-integer programming algorithm // IBM Research Center. — 1960 January. — Research Report RC-189.

[77] Green T.M. Linear diophantine equation with non-negative parameters and solutions // The Fibonacci Quarterly. — 1968. — V. 6, № 2. — P. 177–184.

[78] Gross O., Wagner R. A continuous colonel Blotto game // U.S. Air Force Project RAND, Research Memorandum – 408. — 1950.

[79] Gross O. Targets of differing vulnerability with attack stronger than defense. — Santa Monica, California: The RAND Corporation, 1950.

[80] Hu J. Pairwise relative primality of positive integers // New York Number Theory Seminar CANT 2012. Tenth Annual Workshop on Combinatorial and Additive Number Theory. CUNY Graduate Center. — 2012.

[81] Hu J. The probability that random positive integers are k-wise relatively prime // arXiv:1208.1537v1 [math.NT]. — 2012.

[82] Jeroslow R.G. Cutting-plane theory: Disjunctive methods // Annals of Discrete Mathematics. — 1977. — V. 1. — P. 293–330.

[83] Jeroslow R. Cutting-plane theory: Algebraic methods // Discrete Mathematics. — 1978. — V. 23, № 2. — P. 121–150.

[84] Jeroslow R. Cutting-planes for complementarity constraints. MSRR no. 394, GSIA, Carnegie-Mellon University. 1976. A revised and abbreviated version has appeared in SIAM Journal Control and Optimization 16. — 1978. — P. 56–62.

[85] Jeroslow R. An Introduction to the Theory of Cutting-planes // Annals of Discrete Mathematics. — 1979. — V. 5. — P. 71–95.

[86] Martin G.T. An accelerated Euclidean algorithm for integer linear programming // Recent Advances in Mathematical Programming. Robert L. Graves and Philip Wolfe, Editors. — N.Y.: McGraw-Hill, 1963. — P. 311–317.

[87] Moree P. Counting carefree couples // arXiv:math/0510003v1 [math.NT]. — 2005. arxiv.org/pdf/math/0510003.pdf

[88] Morozov V.V., Shalbuzov K.D. Zero-sum game of resource allocation // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15-19 октября 2013 г.: Труды. — Т. 1. — М.: МАКС Пресс. — С. 193–195.

[89] Nikoofal M.E., Zhuang J. Robust Allocation of a Defensive Budget Considering an Attacker's Private Information. Risk Analysis. — 2012. — V. 32, № 5. — P. 930–943.

[90] Nymann J.E. On the probability that k positive integers are relatively prime // Journal of Number Theory. — 1972. — V. 4. — P. 469–473.

[91] Randolph P.H., Swinson G.E. The discrete max-min problem // Naval Research Logistic Quarterly. — 1969. V. 16, № 3. — P. 309–314.

[92] Vicki B. Choosing what to protect: Strategic Defensive Allocation against an Unknown Attacker // Create Interim Report under office of Naval Research. — L.A.: Create Homeland security center, 2005.

[93] Von Neumann J. A numerical method to determine optimum strategy // Naval Research Logistics Quarterly. — 1954. — V. 1, № 2. — P. 109–115.

Приложение 1. Решение вспомогательной задачи в модифицированном циклическом алгоритме при $n = 1, 2$

Укажем явную формулу для μ^* при $n = 1$ в задаче (1.9). Будем писать

$$\big[\big[y \pmod m\big]\big] = x, \text{ если } x \equiv y \pmod m \text{ и } 0 \leqslant x \leqslant m-1.$$

Таким образом, x является остатком от деления y на m.

В замечании 1.1 было показано, что задача (1.9) эквивалентна следующей задаче о рюкзаке:

$$\begin{gathered} \sigma \to \max_{(y_1,\,\sigma)} \\ a_1 y_1 + r\sigma = c + r\mu_1,\ y_1, \sigma \in Z_+, \end{gathered} \tag{П1.1}$$

где $\mu_1 = r\big\lfloor\big((r-1)a_1 - c\big)/r\big\rfloor$, $\sigma = \mu_1 - \mu$. Так как НОД$(a_1, r) = d = 1$ (см. предположение 1 раздела 1.2), получаем (см. [77]), что максимум в задаче (П1.1) достигается на

$$\sigma^* = \Big\lfloor \frac{c + r\mu_1}{r} \Big\rfloor - \big[\big[- \big[\big[(c + r\mu_1) \pmod r\big]\big] r^{\varphi(a_1)-1} \pmod{a_1}\big]\big], \tag{П1.2}$$

где $\varphi(x)$ – функция Эйлера. Напомним, что для любого целого положительного x функция Эйлера $\varphi(x)$ равна числу взаимно простых с x чисел из ряда $0, ..., x-1$. Она может быть найдена по формуле

$$\varphi(x) = x \prod_{p\,|\,x} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

где произведение берется по всем простым числам p, делящим x. В силу соотношения $\sigma = \mu_1 - \mu$, максимальному σ соответствует минимальное значение μ. Таким образом, находим $\mu^* = \mu_1 - \sigma^*$.

Пусть $n = 2$. Укажем алгоритм нахождения μ^* в задаче (1.9), которая в данном случае переписывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \mu \to \min_{(y_1, y_2, \mu)} \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 = c + r\mu,\ y_1, y_2, \mu \in Z_+. \end{gathered} \tag{П1.3}$$

Лемма П1.1. *Пусть минимум в задаче* (П1.3) *достигается на тройке* (y_1^*, y_2^*, μ^*). *Тогда* μ^* *– наименьшее* μ, *удовлетворяющее неравенству*

$$a_1\Big[\Big[\frac{c + r\mu}{d_2}\Big(\frac{a_1}{d_2}\Big)^{\varphi(a_2/d_2)-1}\Big(\mathrm{mod}\ \frac{a_2}{d_2}\Big)\Big]\Big] \leqslant \frac{c + r\mu}{d_2} \tag{П1.4}$$

и

$$y_1^* = \Big[\Big[\frac{c + r\mu^*}{d_2}\Big(\frac{a_1}{d_2}\Big)^{\varphi(a_2/d_2)-1}\Big(\mathrm{mod}\ \frac{a_2}{d_2}\Big)\Big]\Big],\ y_2^* = \frac{c + r\mu^* - a_1 y_1^*}{a_2},$$

где $d_2 =$НОД(a_1, a_2).

Доказательство. Положим $a_1' = a_1/d_2,\ a_2' = a_2/d_2$. Так как d_2 делит $c + r\mu$ (иначе в задаче (П1.3) не существует допустимых решений), разделим обе части уравнения $a_1 y_1 + a_2 y_2 = c + r\mu$ в задаче (П1.3) на d_2. Получим

$$a_1' y_1 + a_2' y_2 = (c + r\mu)/d_2. \tag{П1.5}$$

Поскольку a_1' и a_2' – взаимно простые, при фиксированном μ найдем минимальное y_1, для которого выполнено уравнение (П1.5). Получим (см. [77])

$$y_{1\min} = \Big[\Big[\frac{(c + r\mu){a_1'}^{\varphi(a_2')-1}}{d_2}(\mathrm{mod}\ a_2')\Big]\Big].$$

Условие (П1.4) совпадает с неравенством $a_1 y_{1\min} \leqslant (c + r\mu)/d_2$. Однако если последнее неравенство выполнено, тогда найдется неотрицательное y_2, удовлетворяющее уравнению (П1.5). Таким образом, минимальное μ, для которого выполнено $a_1 y_{1\min} \leqslant (c + r\mu)/d_2$, $y_2 \geqslant 0$, будет оптимальным в задаче (П1.3). ■

Замечание П1.1. При поиске

$$y_1^* = \Big[\Big[\frac{c + r\mu^*}{d_2}\Big(\frac{a_1}{d_2}\Big)^{\varphi(a_2/d_2)-1}\Big(\mathrm{mod}\ \frac{a_2}{d_2}\Big)\Big]\Big]$$

можно воспользоваться следующим сравнением [77]: для любых натуральных чисел $q_i,\ i=1,...,n$, выполнено

$$\left[\left[\left(\prod_{i=1}^{n} q_i\right) \pmod m\right]\right] \equiv \prod_{i=1}^{n} \left[\left[q_i \pmod m\right]\right] \pmod m.$$

Приложение 2. Доказательство теорем 2.3 и 2.4

Нам потребуются вспомогательные факты. Положим $\rho_i = \lambda_i \mu_i,\ i=1,...,n$. Определим на $Y \times Y'$ функцию

$$G(y,y') = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (y_i - y_i')^+.$$

Поскольку для целых y из множества Y выполнено $\min\limits_{y' \in Y'} G(y,y') = 0$, далее будем рассматривать только $y \in Y \backslash Y'$. Определим на множестве Y функции

$$T_1(y) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor y_i \rfloor,\ U_1(y) = \sum_{i=1}^{n} \lceil y_i \rceil.$$

Покажем, что для любых $y \in Y \backslash Y'$

$$U_1(y) > B > T_1(y). \tag{П2.1}$$

Действительно, так как для любого i выполнено $\lceil y_i \rceil \geqslant y_i \geqslant \lfloor y_i \rfloor$, и хотя бы одна компонента y_i нецелая, имеем:

$$U_1(y) = \sum_{i=1}^{n} \lceil y_i \rceil > \sum_{i=1}^{n} y_i = B > \sum_{i=1}^{n} \lfloor y_i \rfloor = T_1(y).$$

Складывая все неравенства $\lfloor y_i \rfloor + 1 \geqslant \lceil y_i \rceil$, получим $U_1(y) - T_1(y) \leqslant n$. Отсюда и из (П2.1) следует, что $n-1 \geqslant B - T_1(y) \geqslant 1,\ y \in Y \backslash Y'$.

Для каждого $q = 1,...,n-1$ определим множества

$$Y_q = \left\{ y \in Y \,\middle|\, T_1(y) = B - q \right\}$$

и

$$R_q = \left\{ r = (r_1,...,r_n) \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} r_i = q,\ r_i < 1,\ i=1,...,n \right\}.$$

Заметим, что для всякого $r \in R_q$ существует $y \in Y_q$, такое, что выполнено $r_i = \{y_i\},\ i = 1, ..., n$. Поскольку $Y \backslash Y' = Y_1 \cup ... \cup Y_{n-1}$, получаем

$$\omega = \max_{y \in Y} \min_{y' \in Y'} G(y, y') = \max_{y \in Y \backslash Y'} \min_{y' \in Y'} G(y, y') = \max_{q=1,...,n-1} \max_{y \in Y_q} \min_{y' \in Y'} G(y, y').$$

Замечание П2.1. Поскольку множества Y_q не являются замкнутыми, некоторые из этих максимумов могут не достигаться, но обязательно найдется $q = 1, ..., n-1$, на котором максимум будет достигаться.

Без потери общности будем считать, что $\rho_1 \geqslant ... \geqslant \rho_n > 0$. Положим

$$\bar{Y}(y) = \mathop{\text{Arg}\min}_{y' \in Y'} G(y, y').$$

Лемма П2.1. *Для любых векторов $y \in Y \backslash Y'$ и $y' \in \bar{Y}(y)$ выполнены неравенства $y'_i \leqslant \lceil y_i \rceil,\ i = 1, ..., n$.*

Доказательство. Действительно, в противном случае найдется такое k, что $y'_k \geqslant \lceil y_k \rceil + 1$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} y'_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = B$, существует такой номер l, что $y'_l < y_l$. Отсюда $y'_l \leqslant \lfloor y_l \rfloor$. Возьмем следующую стратегию $y'^{(1)} \in Y'$:

$$y_i'^{(1)} = \begin{cases} y'_i, & i \neq k, l, \\ y'_k - 1, & i = k, \\ y'_l + 1, & i = l, \end{cases} \qquad i = 1, ..., n.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $y'_l = \lfloor y_l \rfloor < y_l$. Тогда

$$G(y, y') - G(y, y'^{(1)}) = \rho_k (y_k - y'_k)^+ + \rho_l (y_l - \lfloor y_l \rfloor) -$$

$$-\rho_k (y_k - (y'_k - 1))^+ - \rho_l (y_l - (\lfloor y'_l \rfloor + 1))^+ = \rho_l (y_l - \lfloor y_l \rfloor) > 0.$$

Если $y'_l < \lfloor y_l \rfloor$, то

$$G(y, y') - G(y, y'^{(1)}) = \rho_k (y_k - y'_k)^+ + \rho_l (y_l - y'_l) -$$

$$-\rho_k (y_k - (y'_k - 1))^+ - \rho_l (y_l - (y'_l + 1)) = \rho_l > 0.$$

Таким образом, $y' \notin \bar{Y}(y)$ (противоречие). ■

Теорема 2.3. *Пусть* $\rho_i = \rho,\ i = 1, ..., n$. *Тогда*

$$\omega = \rho \lfloor n^2/4 \rfloor / n.$$

Доказательство. По условию

$$\omega = \max_{q=1,...,n-1} \max_{y \in Y_q} \min_{y' \in Y'} G(y, y') = \rho \max_{q=1,...,n-1} \max_{y \in Y_q} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i)^+.$$

Возьмем

$$y^* \in Y_q^* = \operatorname{Arg} \max_{y \in Y_q} \min_{y' \in Y'} G(y, y').$$

По лемме П2.1 для любого $y \in \bar{Y}(y^*)$ выполнены неравенства $y_i \leqslant \lceil y_i^* \rceil,\ i = 1, ..., n$. Покажем, что существует такой вектор $y' \in \bar{Y}(y^*)$, что

$$y'_j = \begin{cases} \lceil y_j^* \rceil, & j = 1, ..., q, \\ \lfloor y_j^* \rfloor, & j = q+1, ..., n. \end{cases}$$

Предположим противное. Тогда для любого $y' \in \bar{Y}(y^*)$ существует такой номер k, что $y'_k < \lfloor y_k^* \rfloor$. Поскольку $B > T_1(y)$, найдется номер l, для которого $y'_l = \lceil y_l^* \rceil > \lfloor y_l^* \rfloor$. Определим следующий вектор $y'^{(1)} \in Y'$:

$$y_i'^{(1)} = \begin{cases} y'_i, & i \neq k, l, \\ y'_k + 1, & i = k, \\ y'_l - 1, & i = l, \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^* - y'_i)^+ - \sum_{i=1}^{n} (y_i^* - y_i'^{(1)})^+ =$$

$$= (y_k^* - y'_k) + (y_l^* - \lceil y_l^* \rceil)^+ - (y_k^* - (y'_k + 1)) - (y_l^* - (\lceil y_l^* \rceil - 1)) = \lceil y_l^* \rceil - y_l^* > 0.$$

Следовательно, $y' \notin \bar{Y}(y^*)$ (противоречие). Итак, для любого $y' \in \bar{Y}(y^*)$ выполнены неравенства $\lfloor y_i^* \rfloor \leqslant y'_i \leqslant \lceil y_i^* \rceil,\ i = 1, ..., n$. Из соображений симметрии можно считать, что $r_1 = \{y_1^*\} \geqslant ... \geqslant r_n = \{y_n^*\}$. Поскольку $y^* \in Y_q^*$,

можно считать, что $y'_i = \lceil y^*_i \rceil,\ i = 1, ..., q$. Таким образом,

$$\omega = \rho \max_{q=1,...,n-1} \max_{y\in Y_q} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i)^+ = \rho \max_{q=1,...,n-1} \max_{\substack{r\in R_q: \\ r_1\geqslant ...\geqslant r_n\geqslant 0}} \sum_{k=q+1}^{n} r_k =$$

$$= \rho \max_{q=1,...,n-1} \max_{l=q+1,...,n} \frac{(l-q)q}{l} = \rho \max_{q=1,...,n-1} \frac{(n-q)q}{n} = \rho \frac{\lfloor n^2/4 \rfloor}{n}.$$

■

Теорема 2.4. *При* $n = 3$

$$\omega = \max\Big(\frac{1}{1/\rho_1 + 1/\rho_2}, \frac{2}{1/\rho_1 + 1/\rho_2 + 1/\rho_3}\Big).$$

Доказательство. Заметим, что для каждого $q = 1, 2$ множество Y_q является объединением следующих четырех подмножеств:

$$Y_q^1 = \{y \in Y_q \mid r_1\rho_1 \leqslant \rho_3, r_2\rho_2 \leqslant \rho_3,\ r_i = \{y_i\},\ i = 1, 2, 3\},$$

$$Y_q^2 = \{y \in Y_q \mid r_1\rho_1 \leqslant \rho_3, r_2\rho_2 \geqslant \rho_3,\ r_i = \{y_i\},\ i = 1, 2, 3\},$$

$$Y_q^3 = \{y \in Y_q \mid r_1\rho_1 \geqslant \rho_3, r_2\rho_2 \leqslant \rho_3,\ r_i = \{y_i\},\ i = 1, 2, 3\},$$

$$Y_q^4 = \{y \in Y_q \mid r_1\rho_1 \geqslant \rho_3, r_2\rho_2 \geqslant \rho_3,\ r_i = \{y_i\},\ i = 1, 2, 3\}.$$

Определим величины

$$\omega_q^i = \max_{y\in Y_q^i} \min_{y'\in Y'} G(y, y'),\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда

$$\omega = \max_{q=1,2} \max_{i=1,2,3,4} \omega_q^i. \qquad (\text{П}2.2)$$

Из леммы П2.1 следует, что $\bar{Y}(y) \subseteq \{y^i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ при $q = 1$ и $\bar{Y}(y) \subseteq \{y^i,\ i = 7, 8, 9\}$ при $q = 2$, где

$$y^1 = (\lceil y_1 \rceil, \lfloor y_2 \rfloor, \lfloor y_3 \rfloor),\ y^2 = (\lfloor y_1 \rfloor, \lceil y_2 \rceil, \lfloor y_3 \rfloor),\ y^3 = (\lfloor y_1 \rfloor, \lfloor y_2 \rfloor, \lceil y_3 \rceil),$$

$$y^4 = (\lfloor y_1 \rfloor - 1, \lceil y_2 \rceil, \lceil y_3 \rceil),\ y^5 = (\lceil y_1 \rceil, \lfloor y_2 \rfloor - 1, \lceil y_3 \rceil),\ y^6 = (\lceil y_1 \rceil, \lceil y_2 \rceil, \lfloor y_3 \rfloor - 1),$$

$$y^7 = (\lfloor y_1 \rfloor, \lceil y_2 \rceil, \lceil y_3 \rceil),\ y^8 = (\lceil y_1 \rceil, \lfloor y_2 \rfloor, \lceil y_3 \rceil),\ y^9 = (\lceil y_1 \rceil, \lceil y_2 \rceil, \lfloor y_3 \rfloor).$$

Имеем ($r_i = \{y_i\},\ i = 1, 2, 3$):

$$G(y, y^1) = \rho_2 r_2 + \rho_3 r_3,\ G(y, y^2) = \rho_1 r_1 + \rho_3 r_3,\ G(y, y^3) = \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2,$$

$$G(y, y^4) = \rho_1(1 + r_1),\ G(y, y^5) = \rho_2(1 + r_2),\ G(y, y^6) = \rho_3(1 + r_3),$$

$$G(y, y^7) = \rho_1 r_1,\ G(y, y^8) = \rho_2 r_2,\ G(y, y^9) = \rho_3 r_3,$$

Поскольку $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 > 0$, $G(y, y^4) \geqslant G(y, y^2)$ и $G(y, y^5) \geqslant G(y, y^1)$. Отсюда $\bar{Y}(y) \subseteq \{y^1, y^2, y^3, y^6\}$.

Покажем, что существует вектор

$$y^* \in Y^* = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} \min_{y' \in Y'} G(y, y'),$$

такой, что $\rho_1 r_1^* \geqslant \rho_2 r_2^*$. В самом деле, если $\rho_1 r_1^* < \rho_2 r_2^*$, то можно определить вектор $y^*(\varepsilon) = (y_1^* + \varepsilon, y_2^* - \varepsilon, y_3^*) \in Y^*$, где ε можно увеличить до тех пор, пока не выполнится равенство $\rho_1 r_1^*(\varepsilon) = \rho_2 r_2^*(\varepsilon)$. При этом значения функций $G(y, y^2)$, $G(y, y^3)$, $G(y, y^6)$, $G(y, y^7)$ и $G(y, y^9)$ не уменьшатся. Итак, можно рассматривать $r \in R_q$, для которых $\rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2$. Отсюда следует, что множество Y_q^2 можно отбросить.

Рассмотрим случай $q = 1$. Для $y^* \in Y^*$ выполнено $\bar{Y}(y^*) \cap \{y^1, y^3, y^6\} \neq \emptyset$.

Найдем значение ω_1^1. Заметим, что в этом случае для $y^* \in Y^*$ выполнено $\bar{Y}(y^*) \subseteq \{y^1, y^3\}$. Случаи А и Б соответствуют минимизирующим векторам y^1 и y^3. Обозначим $\sigma = 1/(1/\rho_1 + 1/\rho_2 + 1/\rho_3)$.

А) Возьмем такие $y \in Y_1^1$, для которых выполнено $\rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 r_3$. Тогда

$$\max_{\substack{y \in Y_1: \\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2, \\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 r_3}} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r \in R_1: \\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2, \\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 r_3}} (\rho_2 r_2 + \rho_3 r_3).$$

Получаем максимизирующее

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = \begin{cases} (\rho_3/\rho_1, \rho_3/\rho_2, 1 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2), & 1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \\ \Big(\sigma/\rho_1, \sigma/\rho_2, \sigma/\rho_3\Big), & 1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \end{cases}$$

и

$$\rho_2 r_2^* + \rho_3 r_3^* = \begin{cases} \rho_3(2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2), & 1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \\ 2\sigma, & 1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \end{cases}$$

Б) Возьмем такие $y \in Y_1^1$, для которых выполнено $\rho_3 r_3 \geqslant \rho_1 r_1$. Тогда

$$\max_{\substack{y \in Y_1: \\ \rho_3 \geqslant \rho_3 r_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2}} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r \in R_1: \\ \rho_3 \geqslant \rho_3 r_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2}} (\rho_1 r_1 + \rho_2 r_2).$$

Получаем максимизирующее $r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (\sigma/\rho_1, \sigma/\rho_2, \sigma/\rho_3)$ и $\rho_1 r_1^* + \rho_2 r_2^* = 2\sigma$. Отсюда следует, что если $1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то $\omega_1^1 = \max(\rho_3(2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2), 2\sigma)$, иначе $\omega_1^1 = 2\sigma$.

Найдем значение ω_1^3. Поскольку в этом случае для любого $y^* \in Y^*$ выполнено $\bar{Y}(y^*) = \{y^1\}$, то

$$\max_{\substack{y \in Y_1: \\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \rho_2 r_2}} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r \in R_1: \\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \rho_2 r_2}} (\rho_2 r_2 + \rho_3 r_3).$$

Получаем

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = \begin{cases} (\rho_3/\rho_1, \rho_3/\rho_2, 1 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2), & 1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \\ (\rho_3/\rho_1, 1 - \rho_3/\rho_1, 0), & 1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \end{cases}$$

и

$$\rho_2 r_2^* + \rho_3 r_3^* = \begin{cases} \rho_3(2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2), & 1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \\ \rho_2(1 - \rho_3/\rho_1), & 1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \end{cases}$$

Найдем значение ω_1^4. В этом случае для любого $y^* \in Y^*$, такого, что $\lfloor y_3^* \rfloor \geqslant 1$, справедливо $\bar{Y}(y^*) = \{y^6\}$. Если же $\lfloor y_3^* \rfloor = 0$, то $\bar{Y}(y^*) = \{y^1\}$.

Пусть $\lfloor y_3^* \rfloor \geqslant 1$. Тогда

$$\max_{\substack{y \in Y_1: \\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \min_{y' \in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r \in R_1: \\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} (\rho_3 + \rho_3 r_3).$$

При $1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2$ получаем максимизирующее

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (\rho_3/\rho_1, \rho_3/\rho_2, 1 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2),$$

и

$$\rho_3 + \rho_3 r_3^* = \rho_3(2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2).$$

Пусть $\lfloor y_3^* \rfloor = 0$. Тогда

$$\max_{\substack{y\in Y_1:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r\in R_1:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} (\rho_2 r_2 + \rho_3 r_3).$$

При $1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2$ получаем максимизирующее

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = \Big(\frac{1}{\rho_1(1/\rho_1 + 1/\rho_2)}, \frac{1}{\rho_2(1/\rho_1 + 1/\rho_2)}, 0\Big),$$

и

$$\rho_2 r_2^* + \rho_3 r_3^* = \frac{1}{1/\rho_1 + 1/\rho_2}.$$

Если $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то множество $\{r \in R_1^4\} \cup \{\rho_2 r_2 \geqslant \rho_3\}$ пусто.

Рассмотрим случай $q = 2$. Для $y^* \in Y^*$ выполнено $\bar{Y}(y^*) \cap \{y^8, y^9\} \neq \emptyset$.

Найдем значение ω_2^1. Случаи А и Б соответствуют минимизирующим векторам y^8 и y^9 из множества $\bar{Y}(y^*)$.

А) Возьмем такие $y \in Y_2^1$, для которых выполнено $\rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3$. Тогда

$$\max_{\substack{y\in Y_2:\\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \max_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \rho_3 r_3.$$

Получаем если $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то $r_i^* = 2\sigma/\rho_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\rho_3 r_3^* = 2\sigma$, иначе множество $\{r \in R_2^1\} \cup \{\rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3\}$ пусто.

Б) Аналогично показывается, что если $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то справедливо

$$\max_{\substack{y\in Y_2:\\ \rho_3 \geqslant \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2,\\ \rho_3 \geqslant \rho_3 r_3 \geqslant \rho_2 r_2}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = 2\sigma.$$

Найдем значение ω_2^3. Получаем

$$\sup_{\substack{y\in Y_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \sup_{\substack{y\in Y_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_3 r_3 \geqslant \rho_2 r_2}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ =$$

$$= \sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \rho_3 r_3 = \sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_3 r_3 \geqslant \rho_2 r_2}} \rho_2 r_2.$$

Если $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то

$$r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = \Big(\frac{\rho_3}{\rho_1}, \frac{2 - \rho_3/\rho_1}{\rho_2(1/\rho_2 + 1/\rho_3)}, \frac{2 - \rho_3/\rho_1}{\rho_3(1/\rho_2 + 1/\rho_3)}\Big)$$

и

$$\sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \rho_3 r_3 = \rho_3 r_3^* = \rho_2 r_2^* = \frac{2 - \rho_3/\rho_1}{1/\rho_2 + 1/\rho_3}.$$

Иначе $\lim\limits_{l\to\infty} r_1^l = 1 - \rho_3/\rho_2$, $\lim\limits_{l\to\infty} r_2^l = \rho_3/\rho_2$, $\lim\limits_{l\to\infty} r_3^l = 1$, и

$$\sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_3 \geqslant \\ \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3 r_3}} \rho_3 r_3 = \lim_{l\to\infty} \rho_3 r_3^l = \rho_3.$$

Найдем значение ω_2^4. В этом случае для любого $y^* \in Y^*$ выполнено $\bar{Y}(y^*) = \{y^9\}$. Тогда

$$\sup_{\substack{y\in Y_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \min_{y'\in Y'} \sum_{i=1}^{3} \rho_i (y_i - y_i')^+ = \sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \rho_3 r_3.$$

Если $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то $r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (\rho_3/\rho_1, \rho_3/\rho_2, 2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2)$ и

$$\sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \rho_3 r_3 = \rho_3 r_3^* = \rho_3(2 - \rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2).$$

Иначе $\lim\limits_{l\to\infty} r_1^l = \rho_3/\rho_1$, $\lim\limits_{l\to\infty} r_2^l = 1 - \rho_3/\rho_1$, $\lim\limits_{l\to\infty} r_3^l = 1$, и

$$\sup_{\substack{r\in R_2:\\ \rho_1 r_1 \geqslant \rho_2 r_2 \geqslant \rho_3}} \rho_3 r_3 = \lim_{l\to\infty} \rho_3 r_3^l = \rho_3.$$

Таким образом, получим значения ω_q^1, ω_q^3 и ω_q^4 для $q = 1, 2$. Обозначим

$$\chi_1 = \frac{1}{1/\rho_1 + 1/\rho_2},\ \chi_2 = \frac{2}{1/\rho_1 + 1/\rho_2 + 1/\rho_3},\ \chi_3 = \rho_3(2 - \rho_3/\rho_2 - \rho_3/\rho_1),$$

$$\chi_4 = \frac{2 - \rho_3/\rho_1}{1/\rho_2 + 1/\rho_3},\ \chi_5 = \rho_2(1 - \rho_3/\rho_1).$$

Пусть $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$. Тогда получаем

$$\chi_2 = \omega_1^1 = \omega_2^1 > \chi_4 = \omega_2^3 > \chi_3 = \omega_2^4 > \chi_5 = \omega_1^3.$$

Отсюда

$$\omega = \max(\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5) = \chi_2.$$

Если $1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2$, то $\chi_1 = \omega_1^4 \geqslant \chi_3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 \geqslant \chi_2 = \omega_1^1$. Тогда

$$\omega = \max(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \rho_3) = \chi_1.$$

Поскольку при $1/\rho_3 \geqslant 1/\rho_1 + 1/\rho_2$ и $1/\rho_3 < 1/\rho_1 + 1/\rho_2$ верны соответственно неравенства $\chi_1 \geqslant \chi_2$ и $\chi_1 < \chi_2$, то, объединяя эти два случая, получаем

$$\omega = \max(\chi_1, \chi_2).$$

■