

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



СОЛОВЬЕВ АЛЕКСЕЙ ИГОРЕВИЧ

**ДЕКОМПОЗИЦИЯ НЕКОТОРЫХ
ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
НА ДИСКРЕТНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ**

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Морозов Владимир Викторович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор,
Ерешко Феликс Иванович,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, заведующий отделом

доктор физико-математических наук,
Губко Михаил Владимирович,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

Защита состоится 29 мая 2015 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желаящие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. +7 495 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «__» _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., доцент

Шестаков О.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена разработке декомпозиционных подходов к решению оптимизационных задач, возникающих перед инвестором на финансовом рынке. Рассмотрены наиболее распространенные задачи – хеджирование (выполнение) обязательств европейского и американского типов, а также оптимальное потребление при управлении портфелем ценных бумаг.

Актуальность темы. Классические работы Марковица¹, Мертона^{2,3}, Блэка и Шоулза⁴, А.Н. Ширяева⁵ положили начало целому ряду исследований по оценке финансовых активов, снижению риска невыполнения обязательств. При этом в работах полагалось, что торговля активами происходит непрерывно по времени.

Рассмотрение дискретных моделей рынка для решения задач инвестирования позволило применить новые методы, в частности, теорию двойственности и методы математического программирования. В данной работе предполагается, что торги на рынке происходят в детерминированные моменты времени, и число сценариев поведения рынка конечно. Если шаг временного разбиения мал, а число сценариев велико, то мы получаем задачи большой размерности.

Решение указанных задач часто вызывает затруднения по причине неполноты рынков. Рынок называется полным, если любое обязательство может быть реплицировано (воспроизведено). На современных рынках это условие не всегда выполняется. Поэтому в настоящее время исследования неполных рынков являются актуальными. Неполнота рынков порождает большое число ограничений, связанное со сложностью оценки величины обязательства или потребления. В диссертации рассмотрено несколько постановок задач для неполных рынков, демонстрирующих различные подходы к оценке рис-

¹Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7. — P. 77–91.

²Merton R.C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // Journal of Economic Theory. — 1971. — Vol. 3, № 4. — P. 373–413.

³Merton R.C. A Rational theory of option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. — 1973. — Vol. 4, № 1. — P. 141–183.

⁴Black F., Scholes M. The Pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, № 3. — P. 637–654.

⁵Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2 т. — М.: Фазис, 1998.

ка. Автором предложены схемы решения задач оптимального потребления для часто используемых функций полезности.

Цель диссертационного исследования заключается в разработке декомпозиционных методов решения задач управления портфелем ценных бумаг, учитывающих особенности структуры ограничений и специфику предметной области.

Методы исследований. В диссертации применялись методы стохастической финансовой математики, теорий выпуклого и динамического программирования, теории игр, теории двойственности.

Предмет и объект исследования. Предметом исследования являются оптимизационные задачи математического программирования, описывающие различные проблемы выбора оптимальной стратегии инвестором в условиях риска. Объектом исследования являются дискретные по времени безарбитражные неполные финансовые рынки с конечным числом состояний.

Научная новизна.

1. Проблема решения задач хеджирования и потребления на неполных дискретных финансовых рынках является недостаточно изученной в литературе.
2. Во всех задачах, рассматриваемых в работе, дополнительно накладывается условие неразорения инвестора. В ряде постановок это условие значительно усложняет поиск оптимального решения. Например, в дискретном аналоге задачи Марковица такое ограничение прежде в литературе не рассматривалось.
3. Был усовершенствован мартингальный подход для ранее известных методов решения оптимизационных задач инвестирования. Это позволило разбить решение рассматриваемых задач на два этапа. На первом этапе находится стоимость начального портфеля, необходимого для выполнения обязательства (или для оптимального потребления). На втором этапе определяются соответствующие портфели инвестора.
4. Для каждой рассматриваемой проблемы – хеджирование обязательств европейского и американского типов и потребление с возможностью ин-

вестирования – наряду с известными исследованы и новые постановки задач.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы заключается в разработанных декомпозиционных методах решения задач большой размерности, основанных на свойствах оптимальных стратегий инвестора на финансовом рынке.

Достоверность изложенных в работе результатов обусловлена строгостью формулировок задач и математических доказательств.

Соответствие паспорту научной специальности. В данной работе рассмотрены задачи математического программирования большой размерности, и разработаны методы их решения путем декомпозиции. Это соответствует паспорту специальности 01.01.09.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены на 26-й Европейской конференции по исследованию операций EURO 2013 (Рим, Италия), на 7-й Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2013, на 10-й конференции по сетевой и интернет-экономике WINE 2014 (Пекин, Китай) и на ежегодных научных конференциях в МГУ им. М.В. Ломоносова: «Ломоносовские чтения» (2012, 2014), «Тихоновские чтения» (2013, 2014).

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14–01–91163а.

Публикации. По теме диссертации имеется восемь публикаций. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех статьях журналов из перечня ВАК: работы [2, 6], а также переиздание статьи [5]. В работах [6–8] Соловьеву А.И. принадлежат разработанные декомпозиционные методы решения задач частичного хеджирования обязательств европейского типа, Морозову В.В. принадлежит метод динамического программирования для решения задачи полного хеджирования.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 62 источников. Общий объём рукописи составляет 106 страниц и включает 3 рисунка и 1 таблицу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертационной работе рассматриваются безарбитражные неполные рынки без транзакционных издержек. Современные рынки являются неполными и безарбитражными практически постоянно. Эти условия могут нарушаться в течение небольших промежутков времени. Но возникающие арбитражные возможности сразу обнаруживаются автоматическими средствами торговли, и в результате совершённых сделок рынок вновь приходит в устойчивое безарбитражное состояние.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проведенных в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы, формулируется цель, описываются методы, предмет и объект исследования, формулируются научная новизна, практическая и теоретическая значимость представляемой работы, а также результаты, выносимые на защиту.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию проблемы частичного хеджирования обязательства европейского типа. Постановка данной задачи была дана в монографии Фёльмера и Шида⁶ для моделей с бесконечным числом состояний. Линдбергом⁷ она рассмотрена как задача о рюкзаке. В **разделе 1.1** диссертации определены основные термины предметной области. Рынок моделируется деревом без самопересечений.

На рынке торгуют ценными бумагами $d + 1$ видов, приведенная стоимость которых задается вектором $X_n = (X_n^0, \dots, X_n^d)$, зависящим от состояния рынка $n \in \mathcal{N}$. Будем считать 0-ю бумагу безрисковой, а ее стоимость, принимающую только положительные значения, примем за единицу измерения стоимостей бумаг.

Множество состояний $\mathcal{N}$ имеет структуру дерева. Оно разбито на попарно непересекающиеся подмножества $\mathcal{N}_t$, содержащие состояния, в которых рынок может находиться в момент времени $t = 0, \dots, T$. Пусть $a(n)$ обозначает единственную вершину из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующую вершине $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$, $a^2(n) = a(a(n))$ и т.д. Множество непосредственных

⁶Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. — Berlin: Walter De Gruyter, 2004.

⁷Lindberg P. Optimal partial hedging in a discrete-time market as a knapsack problem // Mathematical Methods of Operations Research. — 2010. — Vol. 72. — P. 433–451.

потомков вершины n обозначим через $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{N}_{t+1}$, $t = 0, \dots, T - 1$. Каждой концевой вершине (листу) дерева $n \in \mathcal{N}_T$ соответствует единственный путь ω , ведущий к ней из корневой вершины. Эти пути образуют вероятностное пространство элементарных событий Ω . Множество $\mathcal{N}_t$ определяет разбиение пространства Ω на подмножества (события), каждое из которых определяется вершиной $n \in \mathcal{N}_t$ и состоит из всех содержащих ее путей. Это разбиение порождает алгебру $\mathcal{F}_t$.

Вероятностная мера $p = (p_n, n \in \mathcal{N})$ на Ω приписывает листьям дерева вероятности $p_n > 0$, $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n = 1$. Вероятности для других вершин определяются рекурсивно: $p_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m$ для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 1, \dots, 0$. При этом $p_0 = 1$. Считается, что мера p задает истинные (статистические) вероятности событий, и инвестор ее знает. Все остальные меры, используемые в работе, носят вспомогательный характер и служат для оценки величин обязательства и потребления.

Вероятностная мера $q = (q_n, n \in \mathcal{N})$ называется мартингальной, если

$$q_n X_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q_m X_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad q_n > 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Множество мартингальных мер q обозначим через $\mathcal{Q}$. Каждой мере q соответствует распределение $q_T = (q_n, n \in \mathcal{N}_T)$ на множестве $\mathcal{N}_T$. Множество всех таких распределений обозначим через $\mathcal{Q}_T$, а его замыкание через $\overline{\mathcal{Q}}_T$. Для каждого $q_T \in \mathcal{Q}_T$ и $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ определим условную мартингальную меру $q(\cdot|n) = (q(m|n) = q_m/q_n, m \in \mathcal{C}(n))$. Множество условных мер $q(\cdot|n)$ обозначим через $\mathcal{Q}(n)$, а его замыкание – через $\overline{\mathcal{Q}}(n)$.

Количество бумаг j -го вида в портфеле инвестора в состоянии $n \in \mathcal{N}$ обозначим через θ_n^j . В работе будем рассматривать портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$, где значениями случайной величины $\theta(t)$ являются портфели $\theta_n = (\theta_n^0, \dots, \theta_n^d)$, $n \in \mathcal{N}_t$, формируемые в момент времени t . Таким образом, в нулевой момент инвестор приобретает начальный портфель θ_0 , затем в состоянии $n \in \mathcal{N}_1$ он формирует портфель θ_n , покупая одни ценные бумаги и продавая другие, и т.д. В состоянии $n \in \mathcal{N}_T$ бумаги портфеля $\theta_{a(n)}$ полностью или частично реализуются, а оставшиеся составляют портфель θ_n . Приведенная стоимость портфеля θ_n в состоянии $n \in \mathcal{N}$ равна скалярному произведению $V_n = X_n \cdot \theta_n = \sum_{j=0}^d X_n^j \theta_n^j$.

Стратегией инвестора называется портфельный процесс θ , удовлетворяющий условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_n = X_n \cdot \theta_{a(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

т.е. инвестор не тратит деньги и не получает дополнительных сумм извне.

Обязательство европейского типа зададим неотрицательной случайной величиной $F(T)$, принимающей значения F_n , $n \in \mathcal{N}_T$, дисконтированные на начальный момент времени. Назовем стратегию θ хеджирующей обязательство $F(T)$, если $V_n \geq F_n$ для любого $n \in \mathcal{N}_T$.

В **подразделе 1.1.2** описан разработанный метод динамического программирования для нахождения безарбитражной цены обязательства $X_{F(T)}^{\sup}(0)$ – объема начальных средств, необходимых для полного хеджирования заданного обязательства $F(T)$ европейского типа. Также метод определяет портфели активов, хеджирующих это обязательство. Алгоритм основан на решении ряда взаимодвойственных однопериодных задач линейного программирования.

Сначала для всех конечных состояний $n \in \mathcal{N}_T$ полагается $X_{F(T)}^{\sup}(n) = F_n$. Затем, последовательно для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T-1, \dots, 0$, решаются следующие прямые задачи

$$\begin{aligned} & \max_{q(\cdot|n)} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) X_{F(T)}^{\sup}(m) \\ & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) X_m = X_n, \\ & q(m|n) \geq 0, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n), \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

где максимум целевой функции обозначен через $X_{F(T)}^{\sup}(n)$. Эта величина означает верхнюю безарбитражную цену обязательства $F(T)$ при условии того, что рынок уже находится в состоянии $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Выпишем соответствующие двойственные задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\theta_n} X_n \cdot \theta_n \\ & X_m \cdot \theta_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(m), \quad \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{aligned}$$

Чтобы хеджировать обязательство в полном объеме, инвестору как правило надо иметь большой капитал. Вкладывая меньшую сумму, инвестор принимает на себя риск неполного (или частичного) хеджирования.

К первому типу задач частичного хеджирования относится задача максимизации ожидаемой доли выполнения обязательства, рассмотренная в **разделе 1.2**. Вводится доля $\psi_n \in [0, 1]$, $n \in \mathcal{N}_T$, величины обязательства F_n , которую собирается хеджировать инвестор. Стоимость начального портфеля не должна превосходить заданную величину v . Итак, задача выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max_{\psi(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) \leq v, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где $X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) = \sup_{q_T \in Q_T} E_q[\psi(T)F(T)]$ – безарбитражная цена частичного обязательства $\psi(T)F(T) = (\psi_n F_n, n \in \mathcal{N}_T)$. Близкая постановка рассматривается в работе Линдберга⁷. Доказывается, что ограничения задачи (2) можно представить в следующей линейной форме:

$$\begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n \leq v, & \forall q_T \in Q_T^{\text{ext}} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases}$$

где Q_T^{ext} – все крайние точки множества $\overline{Q}_T$. Пусть $Q^{\text{ext}}(n)$ – множество крайних точек множеств $\overline{Q}(n)$ для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Следующая теорема связывает крайние точки Q_T^{ext} с крайними точками $Q^{\text{ext}}(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, множеств условных мартингальных мер.

Теорема 1. *Для того чтобы распределение $q_T \in \overline{Q}_T$ принадлежало множеству Q_T^{ext} , необходимо и достаточно, чтобы для каждого состояния $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, для которого $q_m > 0$, нашлось такое условное распределение $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$, что выполнены равенства*

$$q_n = \prod_{s=0}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)) \text{ для всех } n \in \mathcal{N}_T \text{ таких, что } q_n > 0.$$

В **подразделе 1.2.1** приведен декомпозиционный метод решения задачи (2), основанный на **теореме 1**. Введем вспомогательные переменные ψ_{n_t} ,

$n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T - 1$, и эквивалентно сведем задачу (2) к следующей

$$\begin{aligned} & \max_{\psi} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \psi_{n_1} \leq v, & \forall q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0) \\ \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \psi_{n_2} \leq \psi_{n_1}, & \forall q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1) \\ \dots & \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n \leq \psi_{n_{T-1}}, & \forall q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1}) \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{array} \right. \quad (3) \end{aligned}$$

где $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T - 1$. Таким образом, оптимальная доля устанавливается при решении задачи (3), а оптимальный портфельный процесс – с помощью метода динамического программирования **подраздела 1.1.2**. Следующая теорема описывает свойства оптимального решения задачи (3).

Теорема 2.

- (а) Пусть $\psi^*(T)$ – оптимальное решение задачи (2), тогда $X_{\psi^*(T)F(T)}^{\text{sup}}(0) = v$.
- (б) Пусть ψ^* – оптимальное решение задачи (3) и $q^*(\cdot|n)$ – оптимальное решение задачи (1) при любом фиксированном $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Тогда справедливы равенства

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n_1 \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_1|n) \psi_{n_1}^* = v, & \text{если } n = 0 \\ \sum_{n_t \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_t|n) \psi_{n_t}^* = \psi_n^*, & \text{если } n \in \mathcal{N}_{t-1}, t = 2, \dots, T - 1 \\ \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_T|n) \psi_{n_T}^* F_{n_T} = \psi_n^*, & \text{если } n \in \mathcal{N}_{T-1}. \end{array} \right.$$

В **подразделе 1.2.2** формулируется принцип решения задачи (2), основанный на понятии достижимых выплат. Применяя фундаментальную теорему оценки финансовых активов (см. монографию Фёльмера и Шида⁶) и соображения об оптимальности решения, можно эквивалентно перейти от задачи

(2) к следующей

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T) F(T), \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

где $Y(t) = X(t) - X(t-1)$, $t = 1, \dots, T$. При решении задачи (4) определяется оптимальная стратегия инвестора, что является ее преимуществом в сравнении с формой (3).

В **разделе 1.3** исследуется задача минимизации ожидаемых потерь от невыполнения обязательства.

$$\begin{aligned} & \min_{(V(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n l((F_n - V_n)^+) \\ & V(T) = v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где l – функция потерь, $a^+ = \max\{a, 0\}$ для любого $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор. В **подразделах 1.3.1 и 1.3.2** приводятся постановки задач с линейной и квадратичной функциями потерь соответственно. Помимо этого для решения данного типа задач обобщаются методы **раздела 1.2**.

В **разделе 1.4** приводится простейший пример дискретной модели неполного рынка. С применением методов данной главы решены задачи хеджирования платежного обязательства по европейскому колл-опциону.

В **разделе 1.5** описанные методы обобщаются для решения задач хеджирования обязательств, предполагающих выплаты в промежуточные моменты времени.

В **разделе 1.6** рассматривается многопериодная задача Марковица. Она заключается в минимизации дисперсии конечной стоимости $V(T)$ портфеля d рискованных ценных бумаг:

$$\begin{aligned} & \min_{(V, y)} \text{Var}_p V(T) \\ & \begin{cases} E_p V(T) = \alpha, \\ V(t+1) = V(t) + \sum_{j=1}^d R^j(t+1) y^j(t), \forall t = 0, \dots, T-1 \\ V_0 = v, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь y_n^j – объем средств, инвестируемых в рисковый актив j в состоянии $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Стратегия инвестора – это случайный процесс $y = \{y(t)\}$, где случайная величина $y(t) = (y^1(t), \dots, y^d(t))$ принимает значения $y_n = (y_n^1, \dots, y_n^d)$, $n \in \mathcal{N}_t$. Ожидаемая доходность портфеля α устанавливается инвестором в начальный момент времени. $R^j(t)$ – случайная величина доходности j -го актива в момент времени t , одинаково распределенная при всех $t = 1, \dots, T$ и принимающая значения из конечного множества $\mathcal{R}^j$. Вектор доходностей бумаг в момент времени t обозначим через $R(t) = (R^j(t), j = 1, \dots, d)$.

Аналитический вид оптимального решения y^* задачи (6) установлен в работе Лоренца⁸

$$y^*(t) = (\alpha - v) \frac{\delta^{T-t-1}}{\delta^T - 1} \prod_{s=1}^t (\delta - \mu' \Sigma^{-1} R(s)) \Sigma^{-1} \mu, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (7)$$

Здесь $\mu = (E_p R^j(t), j = 1, \dots, d)'$, Σ – ковариационная матрица доходностей бумаг, $\delta = \mu' \Sigma^{-1} \mu + 1$. На основании этой формулы доказана теорема о верхней границе значений параметра α , при которых найденная оптимальная портфельная стратегия не приведет инвестора к разорению.

Теорема 3. *Стратегия (7) не приводит к разорению при*

$$\alpha \leq v \frac{\kappa - 1}{\kappa - \delta^T}, \quad \text{где } \kappa = \max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r)^T.$$

Результаты **разделов 1.1–1.4 первой главы** опубликованы в работе [6].

Во **второй главе** проблема оптимального управления портфелем ценных бумаг рассматривается в рамках частичного хеджирования обязательства американского типа. Постановки задач этой главы были сделаны в работах Перес-Эрнандеса⁹ и А.А. Новикова¹⁰. Оптимизационные задачи в данном случае имеют вид антагонистических игр с двумя участниками: продавцом обязательства (или инвестором) и его покупателем. Особенность обязательства американского типа состоит в том, что оно может быть предъявлено в любой момент времени $t = \{0, \dots, T\}$.

⁸Lorenz J.M. Optimal Trading Algorithms: Portfolio Transactions, Multiperiod Portfolio Selection, and Competitive Online Search. Doctoral dissertation. — Switzerland, ETH Zürich, 2008.

⁹Perez-Hernandez L. On the existence of an efficient hedge for an American contingent claim within a discrete time market // Quantitative Finance. — 2007. — Vol. 7, № 5. — P. 547–551.

¹⁰Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее приложения. — 1998. — Т. 43, № 1. — С. 152–161.

В **разделе 2.1** введены новые термины и обозначения. Обязательство американского типа задается неотрицательным процессом $F = \{F(t)\}$, в котором случайная величина $F(t)$ принимает дисконтированные значения F_n с вероятностью p_n , $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$.

Стратегией покупателя является момент остановки – случайная величина $\tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T\}$, для которой $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Остановка заключается в предъявлении обязательства. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех стратегий покупателя. Для каждого события $\omega = (n_0, \dots, n_T) \in \Omega$ момент τ сопоставляет единственную вершину $n_{\tau(\omega)} \in \mathcal{N}$, где происходит остановка. Множество таких состояний обозначим за $\mathcal{N}_\tau$. В работе показан экспоненциальный рост $\mathcal{T}$ с увеличением T .

Стратегия продавца θ называется хеджирующей обязательство F американского типа в момент предъявления τ , если соответствующий процесс V удовлетворяет условию $V_n \geq F_n$ для каждого $n \in \mathcal{N}_\tau$.

В **разделе 2.2** проведен анализ оптимальных стратегий в различных постановках задачи частичного хеджирования обязательства американского типа. В **подразделе 2.2.1** рассмотрены аналоги задач (2) и (5). Для случая американских обязательств они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi, \theta)} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n (F_n - V_n)^+ \\ & V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$(Y\theta)_n = \sum_{s=1}^t Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad \text{и} \quad (Y\theta)_0 = 0.$$

Основной результат раздела состоит в следующей теореме.

Теорема 4. В задаче (8) существует максиминная выравнивающая стратегия – такая пара (ψ^*, θ^*) , что $\sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n^* = \psi_0^*$ для каждого $\tau \in \mathcal{T}$.

Утверждение теоремы также верно для задачи (9). Для этого ее сначала надо привести к более простому виду. Введем вспомогательные переменные $\xi_n = (F_n - V_n)^+$, $n \in \mathcal{N}$, и сведем задачу к следующей:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 1. В задаче (10) существует минимаксная выравнивающая стратегия, эта стратегия – оптимальное решение задачи (11) :

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ p_n \xi_n = \sum_{k \in \mathcal{C}(n)} p_k \xi_k, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

В подразделе 2.2.2 рассмотрены две постановки задачи минимизации начального вложения при дополнительных условиях. В первой ожидаемая доля хеджируемого обязательства ограничена снизу константой $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \min_{(\psi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n \geq \alpha, & \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Во второй задаче константой $\beta \geq 0$ ограничен сверху допустимый уровень потерь от неполного хеджирования:

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n (F_n - V_n)^+ \leq \beta, & \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

В работе Перес-Эрнандеса⁹ было показано существование решения этих задач для модели неполного рынка с дискретным временем и счетным числом состояний. Из **теоремы 4** вытекает

Следствие 2. Задачи (12) и (13) соответственно эквивалентны задачам

$$\begin{aligned} & \min_{(\psi, V, \theta)} V_0 & \min_{(\xi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \psi_0 = \alpha, \\ p_n \psi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \psi_m, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \end{cases} & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \quad \xi_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_0 = \beta, \\ p_n \xi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \xi_m, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned}$$

В подразделе 2.2.3 приведены примеры значений параметров, при которых целевые функции задач (8) и (10) не имеют седловых точек.

В задаче (8) имеется следующий недостаток. Оптимальной стратегией продавца как правило является хеджирование неполного обязательства, т.е. вероятность хеджировать обязательство целиком, действуя оптимально, невелика. В разделе 2.3 рассматривается постановка задачи частичного хеджирования, устраняющая этот недочет. Она была введена А.А. Новиковым¹⁰ для полных рынков и выглядит так:

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ p(V(\tau) \geq F(\tau)) \geq 1 - \varepsilon, & \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее условие означает, что обязательство должно быть хеджировано в полном объеме с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0, 1]$ – заданный уровень значимости. Показано, что задача является задачей смешанного целочисленного программирования и может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n \geq 1 - \varepsilon, & \forall \tau \in \mathcal{T} \\ x_n \in \{0, 1\}, & \forall n \in \mathcal{N}, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

где $x_n = 1$, если в состоянии $n \in \mathcal{N}$ продавец хеджирует обязательство целиком, и $x_n = 0$ иначе.

В следующей теореме доказано свойство монотонности по времени оптимального значения переменной x при каждом сценарии поведения рынка.

Теорема 5. *Всегда найдется такое оптимальное решение (x^*, V^*, θ^*) задачи (14), что x^* удовлетворяет условию монотонности:*

$$x_n^* \geq x_m^*, \forall m \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

Это позволяет существенно упростить задачу (14), исключив из нее моменты остановки:

$$\begin{cases} \min_{(x, V, \theta)} V_0 \\ V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n x_n \geq 1 - \varepsilon, \\ x_n \geq x_m, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ x_n \in \{0, 1\}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases}$$

Результаты **главы 2** опубликованы в работе [5].

В **третьей главе** для двух моделей финансового рынка исследуется задача оптимального потребления с возможностью инвестирования. Методы решения этой задачи описаны в монографии Плиски¹¹. Однако при большой размерности матрицы ограничений прямое применение этих методов затруднительно.

В **разделе 3.1** рассматриваются деревья сценариев без самопересечений, аналогичные моделям предыдущих глав. Обозначим через $\mathcal{D}(n)$ множество всех следующих за n вершин дерева. Пусть $c_n \geq 0$ – объем средств, потребляемых инвестором в состоянии $n \in \mathcal{N}$. Стратегией инвестора назовем пару (c, θ) , где процесс потребления $c = \{c(t)\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T.$$

Инвестор выбирает стратегию, максимизирующую суммарную ожидаемую полезность потребления в течение T периодов торгов. Функция полезности u предполагается возрастающей и строго вогнутой.

¹¹Pliska S.R. Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. — Massachusetts: Blackwell Publishers, Malden, 1997.

В подразделе 3.1.1 формулируется исходная задача

$$\begin{aligned} & \max_{(c, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, & \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T \\ v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0, \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 6. Задача (15) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} & \max_c \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, & \forall q \in Q \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Далее описан метод динамического программирования решения задачи (16), основанный на последовательном решении однопериодных задач.

Введем обозначения

$$Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) u(c_m), & n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) [u(c_m) + Z_m], & n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T-2, \end{cases}$$

тогда целевая функция задачи (16) равна $Z = u(c_0) + Z_0$.

Сначала для всех $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ и любого $V_n \geq 0$ необходимо решить задачи

$$\begin{aligned} & Z_n^*(V_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) u(c_m) \\ & \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Затем, последовательно решаем следующие задачи:

$$\begin{aligned} & Z_n^*(V_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_m, V_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) [u(c_m) + Z_m^*(V_m)] \\ & \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) (V_m + c_m) = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, V_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n), \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 2, \dots, 0$, $V_n \geq 0$. Далее остается решить задачу

$$Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_0, V_0)} [u(c_0) + Z_0^*(V_0)]$$

$$V_0 + c_0 = v, \quad c_0 \geq 0, \quad V_0 \geq 0.$$

Описанным методом решается задача оптимального потребления со степенной функцией полезности $u(x) = x^\alpha / \alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$.

Теорема 7. Для степенной функции полезности $u(x) = x^\alpha / \alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, оптимальное потребление в задаче (16) определяется по формулам

$$c_0^* = \frac{v}{1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)}},$$

$$V_n^* = c_n^* (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)}, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

$$c_m^* = \bar{c}_m^* V_n^*, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

где $(\bar{c}_m^*, m \in \mathcal{C}(n))$ при $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ и $(\bar{c}_m^*, V_m^*, m \in \mathcal{C}(n))$, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-2$, – соответственно оптимальные решения задач (17) и (18) при $V_n = 1$. Максимум в задаче (16) равен

$$Z^* = \frac{v^\alpha}{\alpha} \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}.$$

Для логарифмической функции полезности доказана следующая

Теорема 8. Оптимальный процесс потребления в задаче (16) с логарифмической функцией полезности является q -мартингалом при $q \in Q$.

Данная теорема позволяет провести декомпозицию исходной задачи на несколько однопериодных задач. Для этого надо положить $c_0^* = v / (T + 1)$ и последовательно по $t = 1, \dots, T$ определить оптимальный процесс потребления c^* , решая задачи

$$\max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \ln c_m$$

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m = c_n^*, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases}$$

В подразделе 3.1.2 вводится понятие постоянной нормы потребления $\gamma_t \stackrel{\text{def}}{=} c_n / (V_n + c_n)$, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$, $\gamma_t \in [0, 1]$. Считается, что данное отношение зависит только от момента времени и определяется инвестором.

Рассматривается исходная задача оптимального потребления (15) с введенным нелинейным условием на долю потребления. Далее описан разработанный для решения этой задачи метод динамического программирования, аналогичный методу **подраздела 3.1.1**. Показано, что для оптимального решения задачи оптимального потребления (15) с логарифмической функцией полезности, рассматриваемая доля потребления равна $c_n^*/(V_n^* + c_n^*) = 1/(T - t + 1)$ для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$, т.е. зависит только от момента времени.

В **разделе 3.2** рассмотрена модель, в которой предполагается, что у деревьев, описывающих поведение рынка, допускаются самопересечения. В **подразделе 3.2.1** основные обозначения переопределены с учетом особенностей рассматриваемой модели. Обозначим через $\mathcal{A}(n)$ вершины из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, непосредственно предшествующие $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$. Положим $\mathcal{A}(0) = \emptyset$.

Будем считать, что величина потребляемых средств в каждом состоянии рынка зависит от состояний, в которых рынок находится сейчас и находился в предыдущий момент времени (т.е. потребление является функцией от текущей стоимости рискового актива и последнего изменения стоимости). Поэтому для величины потребления введем обозначение c_{mn} , где $m \in \mathcal{A}(n)$. Потребление в начальный момент времени обозначим за c_0 . Стратегией инвестора назовем пару (c, θ) , где процесс потребления $c = \{c(t)\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_m = X_n \cdot \theta_n + c_{mn}, \quad \forall m \in \mathcal{A}(n), \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

В **подразделе 3.2.2** вводится новая постановка задачи оптимального потребления для модели рынка с самопересечениями. Вероятность перехода рынка из состояния m к следующему за ним n равна $p_m p(n|m)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{(c, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} p_m p(n|m) u(c_{mn}) \\ & \begin{cases} X_n \cdot \theta_m = c_{mn} + X_n \cdot \theta_n, & \forall m \in \mathcal{A}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \{0\} \\ v = c_0 + X_0 \cdot \theta_0, \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_{mn} \geq 0, & \forall m \in \mathcal{A}(n), \quad n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Переходя к следующей задаче, мы разбиваем на два этапа определение оптимального потребления и портфелей, которые позволяют его реализовать.

$$\begin{aligned} & \max_{(c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} p_m p(n|m) u(c_{mn}) \\ & \left\{ \begin{aligned} & V_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)(c_{mn} + V_n), \quad \forall q(\cdot|m) \in Q(m), m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ & v = c_0 + V_0, \\ & V_n = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \\ & c_{mn} \geq 0, \quad \forall m \in \mathcal{A}(n), n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 9. Задачи (19) и (20) эквивалентны.

Теорема является аналогом **теоремы 6** для модели рынков с самопересечениями и также позволяет применить для решения основной задачи мартингальный подход. Заметим, что множества условных мартингальных мер $Q(m)$ можно заменить множествами $Q^{\text{ext}}(m)$ в ограничениях задачи (20) за счет линейности ограничений по условной мере $q(\cdot|m) \in Q(m)$. В результате решаемая задача имеет конечное число линейных ограничений, а число переменных значительно сокращается.

В **подразделе 3.2.3** разработаны декомпозиционные подходы решения задач с логарифмической и степенной функцией полезности.

На дерево сценариев накладываются следующие условия:

1. Каждая вершина-родитель имеет одинаковое число потомков.
2. Для каждого актива $j = 0, \dots, d$ множество значений, которые может принимать случайная величина доходности $(X^j(t) - X^j(t-1))/X^j(t-1)$ не зависит от момента времени $t = 1, \dots, T$ и состояния, в котором рынок находится в момент времени $t-1$.

3. Каждая вершина-родитель, кроме конечных, имеет вершину-потомка с нулевым вектором доходностей. Для каждого состояния $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ обозначим эту вершину через $e(n)$ ($e^{-1}(m) = n \Leftrightarrow e(n) = m$, $e^k(n) = e^{k-1}(e(n))$).

Доля потребления, введенная в **подразделе 3.1.2**, также определяется только моментом времени t . Тогда величина потребления зависит только от состояния рынка $n \in \mathcal{N}$. Показано, что задача оптимального потребления примет следующий вид:

$$\begin{cases} \max_{(\gamma, c)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ v = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}, \quad c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \gamma_t = c_n / \sum_{s=0}^{T-t} c_{e^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T. \end{cases} \quad (21)$$

Следующая теорема показывает, что так же как в модели рынка без самопересечений оптимальное потребление является q -мартингалом.

Теорема 10. Для оптимального решения (γ^*, c^*) задачи (21) при логарифмической функции полезности справедливы равенства $c_n^* = c_{e(n)}^*$ для любого $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, $\gamma_t^* = 1/(T - t + 1)$ для всех $t = 0, \dots, T$.

В результате задача (21) сводится к задаче

$$\begin{cases} \max_{c(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln c_n \\ c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ c_{e^T(0)} = v/(T + 1), \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases}$$

где

$$k(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} | e^{-k}(n) \in \mathcal{N}\}, \quad \bar{p}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{k(n)} p_{e^{-s}(n)}, \quad n \in \mathcal{N}_T.$$

Затем, рассматривается степенная функция полезности. Вводится в рассмотрение следующая вспомогательная задача:

$$\begin{cases} \max_{c(T)} \left[\left(\frac{v}{c_{e^T(0)}} - 1 \right)^\alpha \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_t(c(T)) \right)^{1-\alpha} + h_T^{1-\alpha}(c(T)) \right] \\ c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$h_t(c(T)) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n c_{e^{T-t}(n)}^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad t = 0, \dots, T.$$

Теорема 11. При степенной функции полезности максимум задачи (21) равен максимуму задачи (22), а ее оптимальное решение (γ^*, c^*) равно

$$c_0^* = v - c_{e^T(0)}^* \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t^*, \quad c_n^* = \bar{\gamma}_t^* c_{e^{T-t}(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$\gamma_t^* = \bar{\gamma}_t^* / \sum_{s=t}^T \bar{\gamma}_s^*, \quad \forall t = 1, \dots, T-1, \quad \gamma_0^* = c_0^*/v, \quad \gamma_T^* = 1, \quad \text{где}$$

$$\bar{\gamma}_t^* = \frac{(v - c_{e^T(0)}^*) h_t(c^*(T))}{c_{e^T(0)}^* \sum_{s=0}^{T-1} h_s(c^*(T))}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1, \quad \bar{\gamma}_T^* = 1.$$

Результаты **раздела 3.1 главы 3** опубликованы в работе [2].

В **заключении** формулируются основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработан метод декомпозиции решения ряда задач частичного хеджирования обязательства европейского типа.
2. Задачи хеджирования обязательств американского типа в условиях неопределенности сведены к задачам математического программирования.
3. Разработан метод решения задач оптимального потребления на неполных рынках. Получены аналитические формулы решения задач со степенной и логарифмической функциями полезности.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Морозову Владимиру Викторовичу.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Соловьев А.И. Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 27–31 октября 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 65–66.

2. Соловьев А.И. Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН, 2015. — № 53. — С. 45–57.
 3. Соловьев А.И. Оценка деривативов на дискретном рынке // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 14–23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 33–34.
 4. Соловьев А.И. Частичное хеджирование американских обязательств на дискретном рынке // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 октября – 1 ноября 2013.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2013. — С. 36–37.
 5. Соловьев А.И. Частичное хеджирование платежных обязательств американского типа на дискретном рынке // Прикладная Математика и Информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова / Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева. — М.: МАКС Пресс, 2013. — № 44. — С. 114–124.
- Переиздание:** Soloviev A.I. Partial hedging of American claims in a discrete market // Computational Mathematics and Modeling. — 2014. — Vol. 25, № 4. — P. 592–601.
6. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in discrete markets // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. — 2013. — Vol. 62, № 11. — P. 1403–1418.
 7. Morozov V.V., Soloviev A.I.: On optimal partial hedging in incomplete discrete markets // EURO/INFORMS 26th European Conference on Operational Research. Rome 1-4 July, 2013. — Sapienza University of Rome. — 2013. — P. 54.
 8. Morozov V.V., Soloviev A.I.: On optimal partial hedging in incomplete discrete markets // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15–19 октября 2013 г.: Труды. — М.: МАКС Пресс, 2013. — Т. 1. — С. 151–152.