

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Соловьев Алексей Игоревич

**ДЕКОМПОЗИЦИЯ НЕКОТОРЫХ
ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
НА ДИСКРЕТНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ**

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц.

Морозов Владимир Викторович

Москва — 2015

Содержание

Введение.	4
Список основных обозначений	8
Обзор литературы	9
Глава 1. Хеджирование обязательств европейского типа	14
1.1. Хеджирование на дискретном рынке	15
1.1.1. Основные понятия.	15
1.1.2. Метод динамического программирования.	20
1.2. Максимизация доли выполнения обязательства	22
1.2.1. Метод крайних мартингальных мер	26
1.2.2. Использование достижимых выплат.	31
1.3. Минимизация функции потерь	33
1.3.1. Линейная функция потерь	34
1.3.2. Квадратичная функция потерь.	36
1.4. Примеры	38
1.5. Модель с дивидендными выплатами.	41
1.6. Условие неразорения в многопериодной задаче Марковица	44
Глава 2. Хеджирование обязательств американского типа	48
2.1. Описание модели	48
2.2. Частичное хеджирование	51
2.2.1. Задачи на максимин и минимакс	51
2.2.2. Задачи минимизации начального вложения	56
2.2.3. Примеры	58
2.3. Хеджирование с фиксированной вероятностью.	61

Глава 3. Декомпозиция задачи оптимального потребления	66
3.1. Модель рынка с деревьями сценариев без самопересечений .	66
3.1.1. Постановка задачи оптимального потребления.	67
3.1.2. Постоянная норма потребления	77
3.2. Модель рынка с деревьями сценариев с самопересечениями .	81
3.2.1. Описание модели	82
3.2.2. Задача потребления с учетом тренда рынка	84
3.2.3. Постоянная норма потребления	87
Заключение	98
Литература	100

Введение

Диссертация посвящена разработке декомпозиционных подходов к решению оптимизационных задач, возникающих перед инвестором на финансовом рынке. Рассмотрены наиболее распространенные задачи – хеджирование (выполнение) обязательств европейского и американского типов, а также оптимальное потребление при управлении портфелем ценных бумаг.

Актуальность темы. Классические работы Марковица [42], Мертона [44, 46], Блэка и Шоулза [17], А.Н. Ширяева [15] положили начало целому ряду исследований по оценке финансовых активов, снижению риска невыполнения обязательств. При этом в работах полагалось, что торговля активами происходит непрерывно по времени.

Рассмотрение дискретных моделей рынка для решения задач инвестирования позволило применить новые методы, в частности, теорию двойственности и методы математического программирования. В данной работе предполагается, что торги на рынке происходят в известные моменты времени, и число сценариев поведения рынка конечно. Если шаг временного разбиения мал, а число сценариев велико, то мы получаем задачи большой размерности.

Решение указанных задач часто вызывает затруднения по причине неполноты рынков. Рынок называется полным, если любое обязательство может быть реплицировано (воспроизведено). На современных рынках это условие не всегда выполняется. Поэтому в настоящее время исследования неполных рынков являются актуальными. Неполнота рынков порождает большое число ограничений, связанное со сложностью оценки величины обязательства или потребления. В диссертации рассмотрено несколько постановок задач для неполных рынков, демонстрирующих различные подходы к оценке

риска. Автором предложены методы решения задач оптимального потребления для часто используемых функций полезности.

Цель работы. Разработка декомпозиционных методов решения задач управления портфелем ценных бумаг, учитывающих особенности структуры ограничений и специфику предметной области.

Методы исследований. В диссертации применялись методы стохастической финансовой математики, теорий выпуклого и динамического программирования, теории игр, теории двойственности.

Предмет и объект исследования. Предметом исследования являются оптимизационные задачи математического программирования, описывающие различные проблемы выбора оптимальной стратегии инвестором в условиях риска. Объектом исследования являются дискретные по времени безарбитражные неполные финансовые рынки с конечным числом состояний.

Научная новизна.

1. Проблема решения задач хеджирования и потребления на неполных дискретных финансовых рынках является недостаточно изученной в литературе.
2. Во всех задачах, рассматриваемых в работе, дополнительно накладывается условие неразорения инвестора. В ряде постановок это условие значительно усложняет поиск оптимального решения. Например, в дискретном аналоге задачи Марковица такое ограничение прежде в литературе не рассматривалось.
3. Был усовершенствован мартингальный подход для ранее известных методов решения оптимизационных задач инвестирования. Это позволило

разбить решение рассматриваемых задач на два этапа. На первом этапе находится стоимость начального портфеля, необходимого для выполнения обязательства (или для оптимального потребления). На втором этапе определяются соответствующие портфели инвестора.

4. Для каждой рассматриваемой проблемы – хеджирование обязательств европейского и американского типов и потребление с возможностью инвестирования – наряду с известными исследованы и новые постановки задач.

Теоретическая и практическая значимость. Разработаны декомпозиционные методы решения задач большой размерности, основанные на свойствах оптимальных стратегий инвестора на финансовом рынке.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Разработан метод декомпозиции решения ряда задач частичного хеджирования обязательства европейского типа.
2. Задачи хеджирования обязательств американского типа в условиях неопределенности сведены к задачам математического программирования.
3. Разработан метод решения задач оптимального потребления на неполных рынках. Получены аналитические формулы решения задач со степенной и логарифмической функциями полезности.

Степень достоверности. Достоверность изложенных в работе результатов обусловлена строгостью формулировок задач и математических доказательств.

Апробация результатов исследования. Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены на 26-й Европейской конференции по исследованию операций EURO 2013 (Рим, Италия), на 7-й Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2013, на 10-й конференции по сетевой и интернет-экономике WINE 2014 (Пекин, Китай) и на ежегодных научных конференциях в МГУ им. М.В. Ломоносова: «Ломоносовские чтения» (2012, 2014), «Тихоновские чтения» (2013, 2014).

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-91163а.

Публикации. По теме диссертации имеется восемь публикаций [8–12, 47–49]. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех статьях журналов из перечня ВАК: работы [9, 47], а также переиздание статьи [12]. В работах [47–49] Соловьеву А.И. принадлежат разработанные декомпозиционные методы решения задач частичного хеджирования обязательств европейского типа, Морозову В.В. принадлежит метод динамического программирования для решения задачи полного хеджирования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 62 источников. Общий объем рукописи составляет 106 страниц и включает 3 рисунка и 1 таблицу.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Морозову Владимиру Викторовичу.

Список основных обозначений

$\mathbb{R}^n$	евклидово пространство размерности n
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных действительных чисел
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\overline{\mathcal{X}}$	замыкание множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$
$x \cdot y$	скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$
xy	вектор $(x_1y_1, \dots, x_ky_k)$, полученный покомпонентным умножением векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$
$\mathbf{0}$	нулевой вектор
$\mathbf{1}$	вектор, все компоненты которого равны 1
x'	транспонированный вектор x
x^+	$\max\{x, 0\}$, где $x \in \mathbb{R}$
E_p	символ математического ожидания по мере p
$\square$	конец доказательства
$\operatorname{Argmax}_{x \in \mathcal{X}} f(x)$	множество элементов x , максимизирующих функцию f на множестве $\mathcal{X}$
$\operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}} f(x)$	элемент множества $\operatorname{Argmax}_{x \in \mathcal{X}} f(x)$
$I(\cdot)$	индикаторная функция

Обзор литературы

Оценке и хеджированию обязательств в условиях дискретного рынка посвящено много работ. Первые дискретные модели хеджирования были рассмотрены в статьях [31, 32]. Авторами предложена новая концепция дискретного рынка с применением аппарата стохастического программирования. В рамках построенной концепции сформулированы понятия арбитража, мартингальной меры, полноты рынка. Приведены классические результаты, касающиеся условий их существования. В работе [53] анализируются многошаговые модели полного и неполного рынков с конечным числом состояний и дискретным временем. Получены аналитические формулы для величины капитала, необходимого для хеджирования обязательств европейского и американского типов. Фёльмер и Шид в монографии [13] обобщают эти результаты для модели рынка с бесконечным числом состояний. Также авторами решены задачи полного хеджирования обязательств по опционам различных видов для рынка Кокса-Росса-Рубинштейна. Дискретные модели хеджирования обязательств рассмотрены также в обзорных работах [28, 50].

Кинг в статье [34] анализирует наличие на рынке арбитражной возможности и мартингальных мер, применяя теорию двойственности. Формируется задача выявления арбитража: оптимальное значение функционала этой задачи нулевое при наличии арбитража и неограниченное при его отсутствии. Теорема о существовании мартингальной меры на безарбитражном рынке, доказанная ранее в [31, 32, 50, 53], обосновывается условиями разрешимости задачи, двойственной к задаче выявления арбитража. С помощью теории двойственности линейного программирования доказано, что минимальная стоимость начального портфеля хеджирующей стратегии равна верхней безарбитражной цене обязательства. Помимо этого сформулированы задачи линейного и нелинейного программирования, определяющие оптимальные

стратегии покупателя и продавца обязательства. Помимо этого автором доказан критерий существования оптимального решения в задачах максимизации полезности.

Выполнение обязательств в полном объеме может потребовать значительного начального вложения средств. Для решения этой проблемы Фёльмером и Лойкертом была представлена концепция частичного хеджирования [30]. Инвестор использует стратегии двух типов. К первому типу относятся стратегии квантильного хеджирования, позволяющие с максимальной вероятностью хеджировать обязательство полностью. Такие стратегии не учитывают отношение инвестора к риску в отличие от стратегий второго типа, минимизирующих функцию потерь от неполного хеджирования. Показано существование оптимального решения задач для непрерывной модели рынка. Результаты в основном получены с помощью леммы Неймана-Пирсона. Постановки этих задач для модели с дискретным временем и бесконечным числом состояний рассматривались в монографии [13].

Линдбергом предложен подход к рассмотрению задач частичного хеджирования обязательств в виде задач о рюкзаке [38]. Формулируются задачи максимизации ожидаемой вероятности выполнения обязательства и максимизации средней стоимости конечного портфеля. Для некоторых примеров оптимальные решения получены аналитически. В статье [56] рассмотрен байесовский подход к задаче частичного хеджирования обязательств для биномиальной модели Кокса-Росса-Рубинштейна. В работе [55] описаны различные задачи инвестирования при наличии опционов на индексы акций в портфеле инвестора. Анализ оптимальных стратегий проведен с учетом безарбитражных цен обязательств по опционам. Анализ границ безарбитражных цен обязательства проведен в работе [35]. Авторами статьи показано, что в модели, описанной Кингом [34], наличие в портфеле опционов позволяет уменьшить безарбитражный интервал.

Задача минимизации дисперсии будущей стоимости портфеля при фиксированной ожидаемой стоимости была сформулирована Марковицем в работе [42]. В задаче учитываются корреляции стоимостей ценных бумаг. Постановка задачи была дана для однопериодной модели рынка, также исключалась возможность коротких продаж. В книге [6] рассматриваются различные постановки задач управления портфелем в рамках однопериодной модели Марковица. Исследуется решение данной задачи при дополнительных линейных ограничениях.

Постановка задачи Марковица для многопериодной модели рынка была дана в работе [58]. Исследование поведения инвестора проведено на основе результатов, полученных для классической модели с одним периодом времени. В статье [37] найдено оптимальное решение многопериодной задачи без ограничения на короткие продажи и условия неразорения инвестора.

Перес-Эрнандесом сформулированы задачи эффективного хеджирования американских обязательств для рынков с дискретным временем и бесконечным числом состояний [51]. Также поставлены задачи минимизации начальной стоимости портфеля с фиксированным уровнем эффективного хеджирования. Показано существование решения этих задач.

В работе [7] задача минимизации стоимости начального портфеля рассматривалась при ограничении снизу вероятности полного хеджирования в условиях полного рынка с двумя активами: рисковым и безрисковым. При этом предполагалось, что обязательство не предъявляется до момента времени оптимального для покупателя. С учетом этого ограничения, но для более общей модели рынка, оптимальные хеджирующие стратегии найдены в [39].

В статье [52] задача частичного хеджирования обязательства американского типа рассмотрена с позиции покупателя обязательства. Альтернативное описание процесса принятия решения о предъявлении обязательства к оплате позволило переформулировать одну из постановок этой задачи в виде задачи смешанного целочисленного программирования. В статье [21]

доказана теорема об эквивалентности перехода к решению линейной релаксации этой задачи. В [52] также приведены численные результаты решения на реальных данных.

Проблемы оптимального потребления на дискретных рынках рассматривались во многих работах. Аналитические формулы оптимального потребления для модели непрерывных финансовых рынков получены Мертоном в работе [46], а также в статьях [22, 40] для более общей модели.

В монографии Плиски [53] разработан критерий допустимости процесса потребления для моделей дискретных рынков без самопересечений. Предложены три основных метода решения задач оптимального потребления: динамический и мартингальный подходы и метод введения фиктивных бумаг. Авторы работы [33], используя крайние точки множества цен, обеспечивающих отсутствие арбитража, свели основную динамическую задачу к статической. В статье [18] рассмотрены дискретные неполные финансовые рынки с пропорциональными транзакционными издержками. Оптимальные процессы потребления и инвестирования найдены, опираясь на теорию двойственности. Аналитический вид решения задач для моделей потребления с логарифмической, степенной и экспоненциальной функциями полезности найден в работе [29]. Рынок в рассмотренных задачах предполагается полным, а дисконтирующий фактор определяется состоянием рынка. В работе используются марковские процессы принятия решений.

В настоящей работе проблема оптимального потребления исследуется также для моделей изменения рынка с возможными самопересечениями. Наиболее известной среди моделей такого типа является модель Кокса-Росса-Рубинштейна [24]. Ее авторы предложили сравнительно простой метод оценивания опционов. В статьях [19, 20] разработана ее модификация для нахождения цены опциона со случайной волатильностью при наличии нескольких рискованных активов в портфеле инвестора. Для этого вводятся деревья сценариев с более сложной структурой, в частности триномиальное дерево.

Декомпозиционные методы решения задач стохастического линейного программирования общего вида представлены в работах [5, 57, 60].

Примером практического использования дискретных моделей рынка является система SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk), внедренная на Чикагской товарной бирже в 1988 году [23]. Это методология оценки риска портфелей ценных бумаг, определяющая минимальные гарантийные требования для покрытия убытков в течение одного торгового периода. Моделируются 16 сценариев изменения рынка, учитывающих возможные диапазоны процентного изменения стоимости и волатильности базового актива.

Глава 1

Хеджирование обязательств европейского типа

В разделе 1.1 данной работы определены основные термины предметной области, а также метод динамического программирования, используемый для оценки величины обязательства и построения хеджирующей стратегии. В разделе 1.2 исследована проблема максимизации средней доли выполнения обязательства при условии, что стоимость начального портфеля не превосходит заданную величину. Проблема сформулирована в виде двухуровневой задачи линейного программирования. Первый метод ее решения основан на генерации крайних точек множества мартингальных мер, а второй – на использовании достижимых выплат. В разделе 1.3 рассмотрены задачи с линейной и квадратичной функциями потерь от неполного выполнения обязательства. Примеры решения поставленных задач разработанными методами описаны в разделе 1.4. Затем в разделе 1.5 рассмотрена задача хеджирования обязательства, предполагающего выплаты в промежуточные моменты времени. Везде в диссертации на стратегии инвестора накладывается условие невозможности разорения. Анализ оптимального решения многопериодной задачи Марковица при данном ограничении проведен в разделе 1.6.

Результаты разделов 1.1–1.4 данной главы опубликованы в работе [47] в журнале из перечня ВАК.

1.1. Хеджирование на дискретном рынке

1.1.1. Основные понятия

На рынке торгуют ценными бумагами $d + 1$ видов, стоимость которых задается неотрицательным вектором $S_n = (S_n^0, \dots, S_n^d)$, зависящим от состояния рынка $n \in \mathcal{N}$. Будем считать 0-ю бумагу безрисковой, а ее стоимость S_n^0 , принимающую только положительные значения, примем за единицу измерения остальных бумаг. Величину $1/S_n^0$ будем использовать как коэффициент дисконтирования. При любом $n \in \mathcal{N}$ определим вектор $X_n = S_n/S_n^0$ приведенных стоимостей бумаг. Его нулевая компонента X_n^0 равна 1 в любом состоянии $n \in \mathcal{N}$.

Множество состояний $\mathcal{N}$ имеет структуру дерева (см. пример в [14, с. 155]). Оно разбито на попарно непересекающиеся подмножества $\mathcal{N}_t$, содержащие состояния, в которых рынок может находиться в момент времени $t = 0, \dots, T$. Множество $\mathcal{N}_0$ состоит из одного элемента – корневой вершины дерева, обозначаемой 0. Пусть $a(n)$ обозначает единственную вершину из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующую вершине $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$. Положим также $a(0) = 0$, $a^0(n) = n$, $a^{s+1}(n) = a^s(a(n))$, $s = 1, \dots, t$, для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$. Множество вершин дерева, принадлежащих $\mathcal{N}_{t+1}$ и следующих за вершиной $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$, обозначим через $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{N}_{t+1}$, $t = 0, \dots, T-1$. Введем обозначение $\mathcal{D}(n)$ для множества всех следующих за n вершин дерева ($\mathcal{D}(0) = \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{D}(n) = \mathcal{C}(n)$ для всех $n \in \mathcal{N}_{T-1}$).

Каждой концевой вершине (листу) дерева $n \in \mathcal{N}_T$ соответствует единственный путь $\omega = (n_0, \dots, n_T)$, ведущий к ней из корневой вершины, где $n_0 = 0$, $n_{t-1} = a(n_t) \in \mathcal{N}_{t-1}$, $t = 1, \dots, T$, $n_T = n$. Эти пути образуют вероятностное пространство элементарных событий Ω . Множество $\mathcal{N}_t$ определяет разбиение пространства Ω на подмножества (события), каждое из которых определяется вершиной $n \in \mathcal{N}_t$ и состоит из всех содержащих ее путей. Это

разбиение порождает алгебру $\mathcal{F}_t$. При этом $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$. Семейство множеств $\{\mathcal{F}_t\}$ называется фильтрацией.

Вероятностная мера $p = (p_n, n \in \mathcal{N})$ на Ω приписывает листьям дерева вероятности $p_n > 0$, $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n = 1$. Вероятности других вершин определяются рекурсивно: $p_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m$ для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 1, \dots, 0$. При этом $p_0 = 1$. Будем считать, что мера p задает истинные (статистические) вероятности событий. Она однозначно определяется по вероятностному распределению $p_T = (p_n, n \in \mathcal{N}_T)$ на множестве конечных вершин $\mathcal{N}_T$. Для определения меры p удобно сначала задать условные меры $p(\cdot|n) = (p(m|n) = p_m/p_n, m \in \mathcal{C}(n))$ перехода рынка из состояния $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T - 1$, в следующие за ним состояния $m \in \mathcal{C}(n)$, а затем вычислить вероятности p_n по формулам

$$p_n = \prod_{s=0}^{t-1} p(a^s(n)|a^{s+1}(n)). \quad (1.1)$$

Другие далее используемые меры носят вспомогательный характер и служат для расчета стоимости финансовых обязательств.

Будем рассматривать согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$ процессы вида $b = \{b(t)\}$, где случайная величина $b(t)$ принимает значения b_n , $n \in \mathcal{N}_t$, и, следовательно, $\mathcal{F}_t$ -измерима. Но в некоторых задачах случайную величину $b(t)$ мы будем записывать в виде вектора ее значений.

Вероятностная мера $q = (q_n, n \in \mathcal{N})$, эквивалентная p ($q_n > 0$ для всех $n \in \mathcal{N}$), называется мартингальной, если

$$q_n X_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q_m X_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T - 1. \quad (1.2)$$

При этом процесс $\{X^j(t)\}$ приведенной стоимости каждой j -й бумаги является q -мартингалом, т.е.

$$X_n^j = E_q[X^j(t+1)|n] = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} \frac{q_m}{q_n} X_m^j, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T - 1. \quad (1.3)$$

Множество мартингальных мер q обозначим через Q . Каждой мере q соответствует распределение $q_T = (q_n, n \in \mathcal{N}_T)$ на множестве $\mathcal{N}_T$. Множество всех таких распределений обозначим через Q_T , а его замыкание через $\overline{Q}_T$. Для любой меры $q \in Q$ определим условные распределения

$$q(\cdot|n) = (q(m|n) = q_m/q_n, m \in \mathcal{C}(n)), \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \quad (1.4)$$

Множество всех распределений $q(\cdot|n)$ обозначим через $Q(n)$. Его замыкание $\overline{Q}(n)$ представимо в виде многогранника

$$\overline{Q}(n) = \left\{ q(\cdot|n) \in \mathbb{R}_+^{c_n} \mid \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) X_m = X_n \right\},$$

где c_n – число элементов множества $\mathcal{C}(n)$. Так как $X_m^0 = X_n^0 = 1$ для всех $m \in \mathcal{C}(n)$, то среди ограничений, задающих множество $\overline{Q}(n)$, есть равенство

$$\sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) = 1.$$

Количество бумаг j -го вида в портфеле инвестора в состоянии $n \in \mathcal{N}$ обозначим через θ_n^j . Будем рассматривать портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$, где значениями случайной величины $\theta(t)$ являются портфели $\theta_n = (\theta_n^0, \dots, \theta_n^d)$, $n \in \mathcal{N}_t$, формируемые в момент времени t . Таким образом, в нулевой момент инвестор приобретает начальный портфель θ_0 , затем в состоянии $n \in \mathcal{N}_1$ он формирует портфель θ_n , покупая одни бумаги и продавая другие, и т.д. В состоянии $n \in \mathcal{N}_T$ бумаги портфеля $\theta_{a(n)}$ полностью или частично реализуются, а оставшиеся составляют портфель θ_n . Приведенная стоимость портфеля в состоянии n равна скалярному произведению $V_n = X_n \cdot \theta_n = \sum_{j=0}^d X_n^j \theta_n^j$.

Замечание 1.1. В диссертационной работе автор следует в основном обозначениям Кинга [34]. Введенная нумерация портфелей отличается от общепринятой. Обычно считается, что портфель θ_n формируется в состоянии $a(n)$, и поэтому случайная величина $\theta(t)$ является $\mathcal{N}_{t-1}$ -измеримой [53].

Стратегией инвестора называется портфельный процесс θ , удовлетворяющий условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_n = X_n \cdot \theta_{a(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.5)$$

Условие самофинансирования означает, что инвестор не тратит деньги и не получает дополнительные суммы извне. Обозначим через

$$Y_n = X_n - X_{a(n)}, \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

приращения вектора стоимостей ценных бумаг. Величина $Y_n \cdot \theta_{a(n)}$ является приведенной прибылью, получаемой инвестором от портфеля $\theta_{a(n)}$ в состоянии n .

Стратегии θ соответствует процесс стоимостей $V = \{V(t)\}$ входящих в нее портфелей. Случайная величина $V(t)$ принимает значения V_n , $n \in \mathcal{N}_t$. При этом величина $V(T)$ называется достижимой выплатой. Нетрудно показать [13, 32, 53], что для произвольной стратегии инвестора θ величина $V(t)$ представима в виде

$$V(t) = V_0 + \sum_{s=1}^t Y(s) \cdot \theta(s-1), \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.6)$$

Из определения дерева сценариев следует, что по любому состоянию рынка $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$, можно установить все предшествующие ему состояния. Это следующие вершины дерева: $a^t(n), a^{t-1}(n), \dots, a(n)$. Для значений V_n , $n \in \mathcal{N}_t$, которые принимает случайная величина $V(t)$, справедливо следующее выражение [13, предложение 5.7]:

$$V_n = V_0 + \sum_{s=1}^t Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)}, \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.7)$$

Говорят, что на рынке имеется арбитражная возможность, если найдется стратегия инвестора θ , для которой $V_0 \leq 0$ и $V_n \geq 0$ для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, причем хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое. Используя стратегию θ , инвестор в любом случае ничего не теряет и может получить прибыль с положительной вероятностью.

Стратегия θ называется допустимой, если $V_n \geq 0$ для всех состояний $n \in \mathcal{N}$. Легко показать [32], что для безарбитражного рынка стратегия θ допустима, если $V_n \geq 0$ для каждого $n \in \mathcal{N}_T$. Действительно, если найдется состояние рынка $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, в котором согласно некоторой стратегии стоимость портфеля отрицательна, и при этом $V_n \geq 0$ для всех конечных состояний, следующих за m ($n \in \mathcal{N}_T \cap \mathcal{D}(m)$), то это значит, что инвестор может гарантировать себе получение прибыли при любом дальнейшем изменении рынка. Так как рассматриваются только те состояния, в которые рынок может перейти с положительной вероятностью, приходим к тому, что на рынке существует арбитражная возможность.

Во всех задачах данной работы рассматриваются только допустимые стратегии инвестора. Условие неотрицательности процесса стоимости портфеля также называется условием неразорения.

Обязательство европейского типа зададим неотрицательной случайной величиной $F(T)$, принимающей значения F_n , $n \in \mathcal{N}_T$, дисконтированные на начальный момент времени. Примером обязательства может служить платеж по опциону, осуществляемый его продавцом. Назовем стратегию θ хеджирующей обязательство $F(T)$, если $V_n \geq F_n$ для любого $n \in \mathcal{N}_T$. Хеджирующая стратегия называется реплицирующей (воспроизводящей), если $V_n = F_n$ для любого $n \in \mathcal{N}_T$. Обязательство называется достижимым, если для него существует реплицирующая стратегия. Рынок называется полным, если любое обязательство достижимо. Согласно фундаментальной теореме формирования цен финансовых активов известно, что для безарбитражных рынков мартингальная мера существует, а для полных рынков она единственна (см., например, [13, 32]).

Будем рассматривать безарбитражные рынки без транзакционных (комиссионных) издержек. Основное исследование проводится для неполных рынков, но также уделяется внимание частному случаю полных рынков.

Введем центральное понятие главы. Верхней безарбитражной ценой обязательства $F(T)$ называется величина

$$X_{F(T)}^{\sup}(0) = \sup_{q_T \in Q_T} E_q[F(T)] = \sup_{q_T \in Q_T} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n F_n.$$

Утверждение 1.1. [34, утверждение 2]. *Величина $X_{F(T)}^{\sup}(0)$ равна минимальной стоимости начального портфеля стратегии, хеджирующей обязательство $F(T)$.*

1.1.2. Метод динамического программирования

Величину $X_{F(T)}^{\sup}(0)$ можно найти методом динамического программирования. Пусть $X_{F(T)}^{\sup}(n) = F_n$ для всех конечных состояний $n \in \mathcal{N}_T$. Следующие задачи линейного программирования необходимо решить последовательно для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 1, \dots, 0$:

$$\begin{cases} \max_{q(\cdot|n)} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) X_{F(T)}^{\sup}(m) \\ \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) X_m = X_n, \\ q(m|n) \geq 0, \forall m \in \mathcal{C}(n), \end{cases} \quad (1.8)$$

где максимум целевой функции обозначен через $X_{F(T)}^{\sup}(n)$. Эта величина означает верхнюю безарбитражную цену обязательства $F(T)$ при условии того, что рынок уже находится в состоянии $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Другими словами, это верхняя безарбитражная цена, определенная на поддереве исходного дерева с корнем n и вершинами $\mathcal{D}(n)$.

Выпишем соответствующие двойственные задачи

$$\begin{aligned} \min_{\theta_n} X_n \cdot \theta_n \\ X_m \cdot \theta_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(m), \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Оптимальные значения задач (1.8) и (1.9) равны $X_{F(T)}^{\sup}(n)$ в каждой вершине $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ согласно теории двойственности. Решая эти задачи последова-

тельно при $t = T - 1, \dots, 0$ находим верхнюю безарбитражную цену $X_{F(T)}^{\sup}(0)$ и портфельный процесс θ , удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} X_n \cdot \theta_n &= X_{F(T)}^{\sup}(n), \quad X_m \cdot \theta_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(m), \quad \forall m \in \mathcal{C}(n), \\ \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t &= 0, \dots, T - 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Условие самофинансирования для процесса θ может нарушаться. Чтобы это исправить, последовательно построим стратегию $\tilde{\theta}$, хеджирующую обязательство $F(T)$, следуя [13, раздел 5.1]:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= \theta_0, \quad \tilde{\theta}_n^0 = \theta_n^0 + X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n, \quad \tilde{\theta}_n = (\tilde{\theta}_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^d), \\ \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t &= 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Согласно формулам (1.11) начальный портфель не меняется. В следующие моменты времени портфель $\tilde{\theta}_n$ определяется по уже сформированному портфелю $\tilde{\theta}_{a(n)}$ за счет изменения безрисковой компоненты. Так как приведенная стоимость безрискового актива равна 1, можно считать, что величина $X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n$ измеряется в количестве безрисковых ценных бумаг.

Теорема 1.1. *Построенный портфельный процесс $\tilde{\theta}$ является стратегией, хеджирующей обязательство $F(T)$.*

Доказательство. Условие самофинансирования (1.5) непосредственно вытекает из равенств (1.11). Методом математической индукции докажем, что она удовлетворяет следующим неравенствам для всех $n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T - 1$:

$$X_n \cdot \tilde{\theta}_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(n), \quad X_m \cdot \tilde{\theta}_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(m), \quad \forall m \in \mathcal{C}(n). \quad (1.12)$$

Для портфеля $\tilde{\theta}_0 = \theta_0$ неравенства (1.12) вытекают из (1.10). Причем первое из них выполнено как равенство. Предположим, что неравенства (1.12) выполнены для всех портфелей $\tilde{\theta}_n$, где $n \in \mathcal{N}_{t_1}, t_1 < t$. Докажем (1.12) для портфелей $\tilde{\theta}_n, n \in \mathcal{N}_t$. Из условия самофинансирования и индуктивного предположения следует неравенство

$$X_n \cdot \tilde{\theta}_n = X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} \geq X_{F(T)}^{\sup}(n).$$

Возьмем любое состояние $m \in \mathcal{C}(n)$. Используя (1.9)–(1.11) и индуктивное предположение, получим

$$\begin{aligned} X_m \cdot \tilde{\theta}_n &= X_m \cdot \theta_n - \theta_n^0 + \tilde{\theta}_n^0 = \\ &= X_m \cdot \theta_n + X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n = \\ &= X_m \cdot \theta_n + X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} - X_{F(T)}^{\sup}(n) \geq \\ &\geq X_m \cdot \theta_n \geq X_{F(T)}^{\sup}(m), \end{aligned}$$

Итак, для процесса $\tilde{\theta}$ выполнены неравенства (1.12) и условия самофинансирования (1.5), поэтому стратегия $\tilde{\theta}$ хеджирует обязательство $F(T)$. $\square$

Из теоремы следует, что допустимую хеджирующую стратегию можно получить, решая задачи (1.8), (1.9) и применяя (1.11).

Предположим, что продавец обязательства располагает суммой v , удовлетворяющей условиям $0 < v < X_{F(T)}^{\sup}(0)$. Тогда согласно утверждению 1.1 не существует стратегии θ с начальной стоимостью портфеля $V_0 \leq v$, хеджирующей обязательство $F(T)$. В этом случае продавец может хеджировать обязательство лишь частично, т.е. он сталкивается с риском невыполнения обязательства. Далее рассматриваются задачи частичного хеджирования.

1.2. Максимизация доли выполнения обязательства

Пусть число $\psi_n \in [0, 1]$, $n \in \mathcal{N}_T$, является долей величины F_n , которую собирается хеджировать продавец. Положим $\psi(T) = (\psi_n, n \in \mathcal{N}_T)$, а через $\psi(T)F(T)$ обозначим случайную величину частичного обязательства, принимающую значения $\psi_n F_n$, $n \in \mathcal{N}_T$, с вероятностями p_n . Верхняя безарбитражная цена частичного обязательства $\psi(T)F(T)$ равна

$$X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) = \sup_{q_T \in Q_T} E_q[\psi(T)F(T)] = \sup_{q_T \in Q_T} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n.$$

Поставим задачу максимизации ожидаемой доли $\psi(T)$ выполнения обязательства $F(T)$:

$$\begin{aligned} & \max_{\psi(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) \leq v, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Задача (1.13) является двухуровневой задачей линейного программирования по переменным $\psi(T)$ и q_T [27]. Для нахождения оптимального вектора $\psi(T)$ на верхнем уровне требуется вычислить верхнюю безарбитражную цену обязательства $\psi(T)F(T)$ для каждого $\psi(T)$.

Ограничения задачи (1.13) можно эквивалентно привести к линейным. Сначала покажем, что

$$X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) = \max_{q_T \in Q_T^{\text{ext}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n,$$

где Q_T^{ext} – множество всех крайних точек многогранника $\overline{Q}_T$. Действительно, пусть

$$q_T^* = \arg \max_{q_T \in Q_T^{\text{ext}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n,$$

и $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – бесконечно малая последовательность положительных чисел.

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [\varepsilon_k \tilde{q}_T + (1 - \varepsilon_k) q_T^*] = q_T^*,$$

где $\tilde{q}_T \in Q_T$. Так как $\varepsilon_k \tilde{q}_T + (1 - \varepsilon_k) q_T^* \in Q_T$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sup_{q_T \in Q_T} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n \geq \max_{q_T \in Q_T^{\text{ext}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n = \max_{q_T \in \overline{Q}_T} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n.$$

Следовательно,

$$X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) = \sup_{q_T \in Q_T} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n = \max_{q_T \in Q_T^{\text{ext}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n.$$

В результате задача (1.13) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \max_{\psi(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n \leq v, & \forall q_T \in Q_T^{\text{ext}} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Замечание 1.2. Если рынок полный, то мартингальная мера q единственна, и задача (1.14) интерпретируется как построение наиболее мощного рандомизированного критерия проверки гипотезы [13, приложение А.4]. При детерминированном критерии переменные ψ_n булевы, и возникает задача о рюкзаке, в которой максимизируется вероятность выполнения обязательства [38].

В условиях неполного рынка для решения задачи (1.14) требуется построить множество Q_T^{ext} . Возьмем любое распределение $q_T = (q_n, n \in \mathcal{N}_T) \in \overline{Q}_T$. Соответствующие ему вероятности $q_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q_m$ последовательно определяются для всех вершин $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 1, \dots, 0$. Условные распределения $q(\cdot|n)$ в состояниях $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, где $q_n > 0$, находятся по формулам (1.4). Некоторые q_n , $n \in \mathcal{N}_T$, могут быть нулевыми, а положительные вероятности $q_n > 0$, $n \in \mathcal{N}_T$, можно записать в виде произведения

$$q_n = \prod_{s=0}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)),$$

где

$$q(a^s(n)|a^{s+1}(n)) \in Q(a^{s+1}(n)), \quad s = 0, \dots, T - 1.$$

Теорема 1.2. Для того чтобы распределение $q_T \in \overline{Q}_T$ принадлежало множеству Q_T^{ext} , необходимо и достаточно, чтобы для каждого состояния $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, для которого $q_m > 0$, нашлось такое условное распределение $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$, что выполнены равенства

$$q_n = \prod_{s=0}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)) \text{ для всех } n \in \mathcal{N}_T \text{ таких, что } q_n > 0. \quad (1.15)$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем любое распределение $q_T \in Q_T^{\text{ext}}$. Тогда однозначно определяются вероятности q_n , $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, по формулам $q_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q_m$, а также условные распределения $q(\cdot|n)$ в состояниях $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, где $q_n > 0$. Покажем, что $q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n)$. Предположим противное, т.е. что для некоторого состояния m найдутся различные векторы $\tilde{q}(\cdot|m)$, $\hat{q}(\cdot|m) \in \overline{Q}(m)$ и число $\lambda \in (0, 1)$ такие, что

$$q(\cdot|m) = \lambda \tilde{q}(\cdot|m) + (1 - \lambda) \hat{q}(\cdot|m).$$

Определим распределения $\tilde{q}_T$, $\hat{q}_T \in \overline{Q}_T$ следующим образом: для всех $n \in \mathcal{N}_T$, если вершина m не принадлежит пути, ведущему из 0 в n , или $q_n = 0$, положим $\tilde{q}_n = \hat{q}_n = q_n$, а в противном случае определим такое s_1 , что $a^{s_1}(n) = m$, и положим

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n &= \prod_{s=0}^{s_1-2} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)) \tilde{q}(a^{s_1-1}(n)|m) \prod_{s=s_1}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)), \\ \hat{q}_n &= \prod_{s=0}^{s_1-2} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)) \hat{q}(a^{s_1-1}(n)|m) \prod_{s=s_1}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)). \end{aligned}$$

Тогда $q_T = \lambda \tilde{q}_T + (1 - \lambda) \hat{q}_T$, что противоречит выбору $q_T \in Q_T^{\text{ext}}$.

Достаточность. Возьмем распределения $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$, $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, и определим q_n по формуле

$$q_n = \prod_{s=0}^{T-1} q(a^s(n)|a^{s+1}(n)), \quad \forall n \in \mathcal{N}_T.$$

Покажем, что $q_T \in Q_T^{\text{ext}}$. Допустим, что вектор q_T можно представить в виде $q_T = \lambda \tilde{q}_T + (1 - \lambda) \hat{q}_T$, где $\tilde{q}_T \neq \hat{q}_T \in \overline{Q}_T$ и $\lambda \in (0, 1)$. Вероятности q_n , $\tilde{q}_n$, $\hat{q}_n$ определим для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ по формулам из (1.2). При этом $q_n = \lambda \tilde{q}_n + (1 - \lambda) \hat{q}_n$. Отсюда

$$q(\cdot|m) = \frac{\lambda \tilde{q}_m \tilde{q}(\cdot|m) + (1 - \lambda) \hat{q}_m \hat{q}(\cdot|m)}{\lambda \tilde{q}_m + (1 - \lambda) \hat{q}_m}, \quad \forall m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \text{ где } q_m > 0.$$

Так как распределения $\tilde{q}_T$ и $\hat{q}_T$ различны, найдется такое событие m , что $\tilde{q}(\cdot|m) \neq \hat{q}(\cdot|m)$. Тогда последнее равенство противоречит выбору $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$. $\square$

В доказательстве теоремы 1.2 фактически дается метод построения множества Q_T^{ext} . Сначала определяются множества $Q^{\text{ext}}(n)$ крайних точек множеств условных мартингальных мер $Q(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Затем, по формулам (1.15) находятся элементы множества Q_T^{ext} . Отметим, что если $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$ и $q(l|m) = 0$, то для всех вершин $n \in \mathcal{N}_T$, следующих за вершиной l , надо задать $q_n = 0$.

Пусть k_n – число элементов множества $Q^{\text{ext}}(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, а K_n – число крайних точек множеств $Q(\mathcal{D}(n))$ условных мартингальных мер

$$q(\cdot|\mathcal{D}(n)) \stackrel{\text{def}}{=} (q(m|\mathcal{D}(n)), m \in \mathcal{D}(n)) = (q_m/q_n, m \in \mathcal{D}(n)) \quad (1.16)$$

на поддереве с корнем n и остальными вершинами $\mathcal{D}(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Тогда K_0 равно числу всех ограничений вида $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n \leq v$ задачи (1.14) и может быть найдено рекурсивно

$$K_n = k_n, \forall n \in \mathcal{N}_{T-1},$$

$$K_n = \sum_{q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n)} \prod_{m \in \mathcal{C}(n): q(m|n) > 0} K_m, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = T-2, \dots, 0. \quad (1.17)$$

Величина K_0 может быть очень большой (см. замечание 1.3 на с. 28). В этом случае процедура вычисления элементов множества Q_T^{ext} может вызвать серьезные затруднения. Ниже будет показано, что при использовании декомпозиции можно ограничиться только построением крайних точек множеств условных мартингальных мер.

Рассмотрим два метода решения задачи (1.14).

1.2.1. Метод крайних мартингальных мер

Задачу (1.14) можно записать в эквивалентной форме с существенно меньшим числом ограничений. Покажем, как это сделать. Наряду с переменными ψ_n , $n \in \mathcal{N}_T$, введем вспомогательные переменные ψ_{n_t} , $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$. Пусть $\psi = (\psi_n, n \in \mathcal{N} \setminus \{0\})$. Из (1.15) следует, что для всех

$$q_T \in Q_T^{\text{ext}}$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n F_n = \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \dots \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n,$$

где $q(\cdot|n_t) \in Q^{\text{ext}}(n_t)$, $t = 0, \dots, T-1$.

Поэтому основные (связывающие) ограничения задачи (1.14) можно переписать в виде одного нелинейного ограничения

$$\begin{aligned} X_{\psi(T)F(T)}^{\text{sup}}(0) = & \max_{q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \max_{q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1)} \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \times \\ & \times \dots \max_{q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1})} \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n \leq v. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тогда задача (1.14) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} & \max_{\psi} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \psi_{n_1} \leq v, & \forall q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0) \\ \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \psi_{n_2} \leq \psi_{n_1}, & \forall q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1) \\ \dots & \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n \leq \psi_{n_{T-1}}, & \forall q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1}) \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$. Здесь число основных ограничений равно

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} k_n,$$

а число переменных увеличилось на

$$\sum_{t=1}^{T-1} |\mathcal{N}_t|.$$

Обратим внимание, что множество Q_T^{ext} строить не надо, достаточно определить только множества $Q^{\text{ext}}(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

Замечание 1.3. Покажем эффективность описанного метода на примере следующей модели финансового рынка. Предположим, что на рынке обращаются два актива: один безрисковый и один рисковый. В любой момент времени дисконтированная стоимость рискового актива может вырасти на 30 %, упасть на 10 % или упасть на 15 %. Иначе говоря, у каждой вершины дерева, описывающего возможное поведение рынка, может быть либо три вершины-потомка, либо ни одной, если эта вершина конечная. Подобное дерево сценариев изображено на рисунке 1.1 на с. 38 для случая $T = 2$. Итак, замыкание множества условных мартингальных мер $\overline{Q}(n)$ не зависит от состояния рынка $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, его элементы определяются из условий

$$\begin{cases} q(l|n) + q(m|n) + q(r|n) = 1, \\ 1,3X_n q(l|n) + 0,9X_n q(m|n) + 0,85X_n q(r|n) = X_n, \\ q(\cdot|n) \geq 0, \end{cases}$$

где $\mathcal{C}(n) = \{l, m, r\}$, вектор $q(\cdot|n) = (q(l|n), q(m|n), q(r|n))$. Множество решений этой системы уравнений представляет собой отрезок в пространстве $\mathbb{R}^3$. Его крайние точки также не зависят от состояния рынка $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$:

$$Q^{\text{ext}}(n) = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right), \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) \right\}, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

Согласно рекурсивной схеме (1.17) имеем

$$K_n = k_n = 2, \quad \forall n \in \mathcal{N}_{T-1}, \quad K_n = K_l(K_m + K_r), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = T-2, \dots, 0.$$

Тогда общее число основных ограничений задачи (1.14) составляет

$$K_0 = 2^{2^T - 1}.$$

В результате введения вспомогательных переменных мы переходим к решению задачи (1.19), и, таким образом, K_0 ограничений заменяется на

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} k_n = 2 \sum_{t=0}^{T-1} |\mathcal{N}_t| = 3^T - 1$$

ограничений задачи (1.19) при увеличении числа переменных на

$$\sum_{t=1}^{T-1} |\mathcal{N}_t| = \frac{3^T - 3}{2}.$$

Матрица ограничений задачи (1.19) имеет блочную структуру (см. раздел 1.4) со связывающими переменными ψ_{n_1} , $n_1 \in \mathcal{N}_1$, что позволяет использовать принцип декомпозиции Данцига-Вулфа [5,26] для решения двойственной задачи. Заметим, что при этом следует полагать $\psi_n = 1$, если $F_n = 0$.

Пусть $\psi^* = (\psi_n^*, n \in \mathcal{N} \setminus \{0\})$ – оптимальное решение задачи (1.19). Тогда стратегия, хеджирующая частичное обязательство $\psi^*(T)F(T)$, может быть найдена методом динамического программирования, описанном в подразделе 1.1.2. Задачи (1.8) решать уже не требуется. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.3.

- (а) Пусть $\psi^*(T)$ – оптимальное решение задачи (1.13), тогда $X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(0) = v$.
- (б) Пусть ψ^* – оптимальное решение задачи (1.19) и $q^*(\cdot|n)$ – оптимальное решение задачи (1.8) при любом фиксированном $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} \sum_{n_1 \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_1|n) \psi_{n_1}^* = v, & \text{если } n = 0 \\ \sum_{n_t \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_t|n) \psi_{n_t}^* = \psi_n^*, & \text{если } n \in \mathcal{N}_{t-1}, t = 2, \dots, T-1 \\ \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n)} q^*(n_T|n) \psi_{n_T}^* F_{n_T} = \psi_n^*, & \text{если } n \in \mathcal{N}_{T-1}. \end{cases}$$

Доказательство.

- (а) Пусть $\psi^*(T)$ – оптимальное решение задачи (1.13). Предположим, что $X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(0) < v$, откуда получаем

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n \psi_n^* F_n < v, \quad \forall q_T \in Q_T^{\text{ext}}.$$

Итак, все основные ограничения можно исключить из задачи (1.14) без изменения оптимального решения. Это следует из теории двойственности. Таким образом, оптимальным решением является $\psi_n^* = 1$, $n \in \mathcal{N}_T$, т.е. обязательство $F(T)$ хеджируется полностью, что противоречит условию $v < X_{F(T)}^{\sup}(0)$. Пункт (а) доказан.

(б) Сначала покажем, что оптимальное решение ψ^* задачи (1.19) обращает в равенство по меньшей мере одно неравенство в каждой группе ограничений

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0)\psi_{n_1} &\leq v, \quad \forall q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0) \\ \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1)\psi_{n_2} &\leq \psi_{n_1}, \quad \forall q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1) \\ &\dots \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1})\psi_n F_n &\leq \psi_{n_{T-1}}, \quad \forall q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

которые соответствуют $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$. Из этой системы неравенств следует, что

$$\begin{aligned} \max_{q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0)\psi_{n_1}^* &\leq v, \\ \max_{q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1)} \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1)\psi_{n_2}^* &\leq \psi_{n_1}^*, \quad \forall n_1 \in \mathcal{N}_1 \\ &\dots \\ \max_{q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1})} \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1})\psi_n^* F_n &\leq \psi_{n_{T-1}}^*, \quad \forall n_{T-1} \in \mathcal{N}_{T-1}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Тогда верхнюю безарбитражную цену $X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(0)$ можно записать в виде

$$\max_{q(\cdot|0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \max_{q(\cdot|n_1)} \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \dots \max_{q(\cdot|n_{T-1})} \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1})\psi_n^* F_n.$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(0) &\leq \max_{q(\cdot|0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \dots \max_{q(\cdot|n_{T-2})} \sum_{n_{T-1} \in \mathcal{C}(n_{T-2})} q(n_{T-1}|n_{T-2})\psi_{n_{T-1}}^* \leq \\ &\leq \dots \leq \max_{q(\cdot|0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \max_{q(\cdot|n_1)} \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1)\psi_{n_2}^* \leq \max_{q(\cdot|0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0)\psi_{n_1}^* \leq v. \end{aligned}$$

Если часть этих неравенств являются строгими, то $X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(0) < v$, но это противоречит пункту (а). Таким образом, показано, что все неравенства (1.21) выполнены как равенства.

Перейдем к доказательству пункта (б). Покажем, что оптимальные решения $q^*(\cdot|n)$ задач (1.8) соответствуют активным ограничениям в задаче (1.19) и

$$X_{\psi^*(T)F(T)}^{\sup}(n) = \psi_n^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (1.22)$$

Действительно, максимумы задач (1.8) являются левыми частями неравенств (1.21), поэтому выполнены равенства (1.22). Тогда равенства системы (1.21) выполнены на оптимальных решениях задачи (1.8). $\square$

Оптимальные решения θ_n^* двойственных задач (1.9) могут быть получены из условий дополняющей нежесткости, справедливых для решений $q^*(\cdot|n)$ и θ_n^* .

1.2.2. Использование достижимых выплат

Если стратегия θ хеджирует частичное обязательство $\psi(T)F(T)$, то ее достижимая выплата $V(T) = (V_n, n \in \mathcal{N}_T)$ по определению хеджирования удовлетворяет неравенству $V(T) \geq \psi(T)F(T)$. Используя разложение (1.6), последние неравенства запишем в виде

$$V_0 + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T)F(T),$$

где $V_0 = X_0 \cdot \theta_0$. По утверждению 1.1 верхняя безарбитражная цена обязательства равна минимальной стоимости начального портфеля, для которого найдется стратегия, хеджирующая это обязательство. Отсюда вытекает, что

задача (1.13) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} X_0 \cdot \theta_0 \leq v, \\ X_0 \cdot \theta_0 + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T) F(T), \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Заметим, что найдется оптимальное решение $(\psi^*(T), \theta^*)$ задачи (1.23), для которого выполнено равенство $X_0 \cdot \theta_0^* = v$. Действительно, предположим противное. Пусть $(\psi^*(T), \theta^*)$ – оптимальное решение задачи (1.23) и $X_0 \cdot \theta_0^* < v$. Если увеличить компоненту θ_0^{*0} на $v - X_0 \cdot \theta_0^*$, то первое ограничение будет выполнено как равенство, не нарушая остальных.

В результате приходим к задаче

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T) F(T), \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Так как $Y_n^0 = 0$ для состояний $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, то ограничения задачи (1.24) не зависят от нулевых компонент θ_n^0 портфелей θ_n . Поэтому в оптимальном решении этой задачи компоненты θ_n^0 можно изменить так, чтобы стоимость начального портфеля равнялась v и были выполнены условия самофинансирования. Отсюда вытекает равенство максимумов задач (1.13) и (1.24).

Аналогично задаче (1.19) матрица ограничений задачи (1.24) имеет блочную структуру со связывающими переменными $\theta_0^1, \dots, \theta_0^d$ (см. раздел 1.4). Это вытекает из того, что с помощью выражения (1.7) первую группу ограничений задачи (1.24) можно записать в виде

$$v + \sum_{s=1}^T Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)} \geq \psi_n F_n, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T.$$

Поэтому метод декомпозиции Данцига-Вулфа здесь также применим. Кроме того, при решении задач (1.24) определяется оптимальная стратегия инвестора, что является ее преимуществом в сравнении с формой (1.19). Однако при числе рисков активов d , значительно превышающем число крайних точек k_n в состояниях $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, применение метода крайних мартингальных мер предпочтительнее метода, использующего достижимые выплаты.

1.3. Минимизация функции потерь

Перейдем к вопросу минимизации средних потерь от невыполнения обязательства [13]. Пусть $l(x)$ – выпуклая неубывающая функция потерь, определенная при $x \geq 0$, и $l(0) = 0$. Для заданной стратегии θ случайная величина потерь $(F(T) - V(T))^+$ принимает значения $(F_n - V_n)^+$, $n \in \mathcal{N}_T$, где $a^+ = \max\{a, 0\}$ для любого действительного числа a . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \min_{(V(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n l((F_n - V_n)^+) \\ V(T) = v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Напомним, что V_n , $n \in \mathcal{N}_T$, является компонентой вектора $V(T)$ и определяется по формуле (1.7). Неравенства $V(T) \geq \mathbf{0}$ необходимы для выполнения условия неразорения.

Фёльмер и Шид установили, что процесс $V = \{V(t)\}$, определяемый стратегией θ , является q -мартингалом при любой мартингальной мере $q \in Q$ [13, теорема 5.15]. С другой стороны, если для некоторой случайной величины $V(T)$, принимающей неотрицательные значения, выполнены равенства

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n V_n = v, \quad \forall q_T \in Q_T, \quad (1.26)$$

то найдется стратегия θ , реплицирующая величину $V(T)$ как обязательство европейского типа, т.е. для пары $(V(T), \theta)$ будут выполнены ограничения за-

дачи (1.25) [13, теорема 5.33]. Поэтому стоимость портфеля в конечный момент времени принято называть достижимой выплатой. Согласно этим утверждениям мы можем эквивалентно заменить ограничения-равенства задачи (1.25) мартингальным условием (1.26). Учитывая линейность этого ограничения по мере q , приходим к задаче

$$\begin{aligned} & \min_{V(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n l((F_n - V_n)^+) \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n V_n = v, \forall q_T \in Q_T^{\text{ext}} \\ V(T) \geq \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Замечание 1.4. Для случая полных рынков задача (1.27) имеет единственное ограничение, связывающее переменные V_n , $n \in \mathcal{N}_T$, так как мартингальная мера единственна. При степенной функции потерь $l(x) = x^k$, $k \geq 2$, для решения этой задачи можно применить лемму Гиббса [25, с. 10].

1.3.1. Линейная функция потерь

Если $l(x) = x$, запишем (1.25) как задачу линейного программирования, вводя вектор вспомогательных переменных $\xi(T) = (\xi_n, n \in \mathcal{N}_T)$

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi(T), V(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} V(T) = v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \mathbf{0}, \\ \xi(T) \geq F(T) - V(T), \\ \xi(T) \geq \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Чтобы для решения этой задачи применить методы раздела 1.2, приведем ее к эквивалентному виду

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) + \xi(T) \geq F(T), \\ 0 \leq \xi_n \leq F_n, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Действительно, так как $p_n > 0$ для всех $n \in \mathcal{N}_T$ и $V(T) \geq 0$, то для любого оптимального решения $(\xi^*(T), V^*(T), \theta^*)$ задачи (1.28) выполнено

$$\xi^*(T) = (F(T) - V^*(T))^+ \leq F(T).$$

С другой стороны, для любого допустимого решения задачи (1.29) условие неразорения следует из следующих отношений

$$V(T) = v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq F(T) - \xi(T) \geq 0.$$

Определим $\psi(T) = (\psi_n, n \in \mathcal{N}_T)$ по вектору $\xi(T)$:

$$\psi_n = \begin{cases} 1, & F_n = 0 \\ 1 - \xi_n / F_n, & F_n > 0. \end{cases}$$

Используя равенство $\xi(T) = (\mathbf{1} - \psi(T))F(T)$, запишем задачу (1.29) как задачу максимизации средней величины частичного обязательства $\psi(T)F(T)$.

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n F_n \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T)F(T), \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.30)$$

В этой задаче ограничения $v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \psi(T)F(T)$ можно заменить одним неравенством $X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) \leq v$. Это приводит к задаче

$$\begin{aligned} & \max_{\psi(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n F_n \\ & \begin{cases} X_{\psi(T)F(T)}^{\sup}(0) \leq v, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases} \end{aligned}$$

которую можно решать методом крайних мартингалов, описанном в подразделе 1.2.1.

1.3.2. Квадратичная функция потерь

Если $l(x) = x^2$, то получаем следующую задачу квадратичного программирования с линейными ограничениями:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi(T), \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n^2 \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) + \xi(T) \geq F(T), \\ 0 \leq \xi_n \leq F_n, \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Существование оптимального решения в этой задаче вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1.2. [54, следствие 27.3.1]. Пусть h – квадратичная выпуклая функция. Тогда h достигает нижней грани на всяком полиэдральном множестве S , на котором она ограничена снизу.

Целевая функция задачи (1.31) ограничена снизу нулем на множестве допустимых решений, которое, в свою очередь, задано линейными ограничениями, поэтому полиэдрально.

Заметим, что условие $\xi(T) \geq 0$ может быть опущено в задаче (1.31). Действительно, если предположить наличие отрицательной компоненты ξ_n^*

в оптимальном решении задачи (1.31) без ограничений неотрицательности, то ее можно заменить на нулевую с сохранением ограничений и уменьшением значения целевой функции, а это будет противоречить оптимальности решения.

Если число ценных бумаг в портфеле велико, можно исключить переменные θ из ограничений задачи, используя условие мартингальности (1.26) процесса стоимости портфеля V . Тогда задача (1.31) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi(T), V(T))} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n^2 \\ & \begin{cases} V(T) + \xi(T) \geq F(T), \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n V_n = v, & \forall q_T \in Q_T^{\text{ext}} \\ \xi_n \leq F_n, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned}$$

В общем случае условие мартингальности $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n V_n = v$ порождает большое число ограничений. Метод подраздела 1.2.1 позволяет упростить решение и в этом случае. Введем вспомогательные переменные V_{n_t} , $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$, и представим задачу в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi(T), V)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n^2 \\ & \begin{cases} V(T) + \xi(T) \geq F(T), \\ \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) V_{n_1} = v, & \forall q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0) \\ \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) V_{n_2} = V_{n_1}, & \forall q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1) \\ \dots \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) V_n = V_{n_{T-1}}, & \forall q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1}) \\ \xi_n \leq F_n, & \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases} \quad (1.32) \end{aligned}$$

где $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$.

Пусть (V^*, ξ^*) – оптимальное решение задачи (1.32). Реплицирующий портфельный процесс θ для случайной величины $V^*(T)$ можно найти последовательно по $t = 1, \dots, T$ с помощью выражений (1.6). Затем безрисковые компоненты θ_n^0 можно определить по схеме (1.11).

Для решения задач квадратичного программирования обычно выбирают конечные методы. Один из них, предложенный Вулфом [61], использует модифицированный симплекс-метод. Еще один метод описан в [62, раздел 9.1].

Если решить задачу (1.32) приближенно, системы (1.6) могут быть несовместны. В этом случае можно установить решения задачи (1.6) методом наименьших квадратов [36]. Заметим, что системы (1.6) всегда совместны для полного рынка.

1.4. Примеры

В данном разделе приведены решения задач частичного хеджирования вышеописанными методами. Рассмотрим простейшую дискретную модель неполного рынка на примере двухуровневого дерева, изображенного на рисунке 1.1.

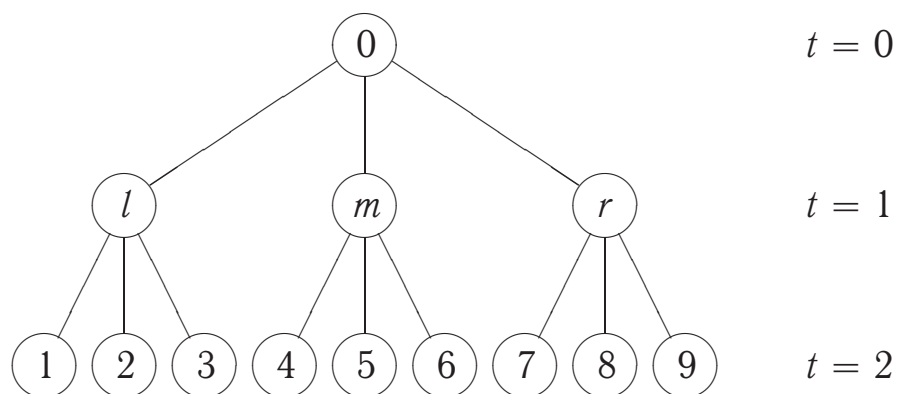


Рисунок 1.1. Дерево сценариев поведения рынка

В портфеле инвестора только один рисковый актив. Зададим его приведенные стоимости.

$$X_0^1 = 10, (X_l^1, X_m^1, X_r^1) = (6, 8, 13)$$

$$(X_1^1, X_2^1, X_3^1, X_4^1, X_5^1, X_6^1, X_7^1, X_8^1, X_9^1) = (4, 8, 10, 5, 9, 11, 8, 10, 17).$$

Пусть $F_n = (X_n^1 - K)^+$, $n \in \mathcal{N}_T$ – платежное обязательство по колл-опциону на акцию с приведенной ценой исполнения $K = 3$. Находим $F(T) = (1, 5, 7, 2, 6, 8, 5, 7, 14)$. Определим вектор истинных вероятностей достижения конечных состояний $p_T = (1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 6, 16)/32$.

Выпишем множества крайних точек

$$Q^{\text{ext}}(0) = \{(3/7, 0, 4/7), (0, 3/5, 2/5)\},$$

$$Q^{\text{ext}}(l) = \{(2/3, 0, 1/3), (1/2, 1/2, 0)\},$$

$$Q^{\text{ext}}(m) = \{(1/2, 0, 1/2), (1/4, 3/4, 0)\},$$

$$Q^{\text{ext}}(r) = \{(4/9, 0, 5/9), (0, 4/7, 3/7)\}.$$

Элементы множества Q_T^{ext} построим по формулам (1.15):

$$\begin{aligned} &(2/7, 0, 1/7, 0, 0, 0, 16/63, 0, 20/63), (2/7, 0, 1/7, 0, 0, 0, 0, 16/49, 12/49), \\ &(3/14, 3/14, 0, 0, 0, 0, 16/63, 0, 20/63), (3/14, 3/14, 0, 0, 0, 0, 0, 16/49, 12/49), \\ &(0, 0, 0, 3/10, 0, 3/10, 8/45, 0, 2/9), (0, 0, 0, 3/10, 0, 3/10, 0, 8/35, 6/35), \\ &(0, 0, 0, 3/20, 9/20, 0, 8/45, 0, 2/9), (0, 0, 0, 3/20, 9/20, 0, 0, 8/35, 6/35). \end{aligned}$$

Верхнюю безарбитражную цену обязательства $X_{F(T)}^{\text{sup}}(0)$ вычислим методом динамического программирования (подраздел 1.1.2), используя найденные крайние точки. В результате получим $X_{F(T)}^{\text{sup}}(l) = 3$, $X_{F(T)}^{\text{sup}}(m) = 5$, $X_{F(T)}^{\text{sup}}(r) = 10$, $X_{F(T)}^{\text{sup}}(0) = 7$. Пусть начальный капитал продавца обязательства равен $v = 6$.

В задаче (1.19) матрица ограничений имеет блочно-диагональный вид со связывающими переменными ψ_l, ψ_m, ψ_r . Расширенная матрица всех ограничений, кроме неравенств $\mathbf{0} \leq \psi(T) \leq \mathbf{1}$, имеет вид

ψ_l	ψ_m	ψ_r	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	
3/7	0	4/7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	3/5	2/5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
-1	0	0	2/3	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	1/2	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	1/4	3/4	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	4/9	0	5/9	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	4/7	3/7	0

Оптимальное решение равно $\psi^*(T) = (1, 1/15, 0, 1, 17/27, 7/12, 1, 1, 1)$, а выполняемая средняя доля обязательства – $p_T \cdot \psi^*(T) \approx 0,87$.

В задаче (1.24) матрица основных ограничений соответствует паре векторов $\zeta = ((\theta_0^1, \theta_l^1, \theta_m^1, \theta_r^1), (\psi_1, \dots, \psi_9))$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{0l} & \tilde{Y}_l & 0 & 0 & D_l & 0 & 0 \\ \tilde{Y}_{0m} & 0 & \tilde{Y}_m & 0 & 0 & D_m & 0 \\ \tilde{Y}_{0r} & 0 & 0 & \tilde{Y}_r & 0 & 0 & D_r \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{Y}_{0k} = (Y_k^1, Y_k^1, Y_k^1)', \quad \forall k \in \mathcal{N}_1 = \{l, m, r\},$$

$$Y^1(1) = (Y_l^1, Y_m^1, Y_r^1) = (X_l^1 - X_0^1, X_m^1 - X_0^1, X_r^1 - X_0^1) = (-4, -2, 3),$$

$$\tilde{Y}_l = (Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1)', \quad \tilde{Y}_m = (Y_4^1, Y_5^1, Y_6^1)', \quad \tilde{Y}_r = (Y_7^1, Y_8^1, Y_9^1)',$$

$$Y^1(2) = (Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1, Y_4^1, Y_5^1, Y_6^1, Y_7^1, Y_8^1, Y_9^1) = (-2, 2, 4, -3, 1, 3, -5, -3, 4),$$

$$D_l = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad D_m = \begin{bmatrix} F_4 & 0 & 0 \\ 0 & F_5 & 0 \\ 0 & 0 & F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$D_r = \begin{bmatrix} F_7 & 0 & 0 \\ 0 & F_8 & 0 \\ 0 & 0 & F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Оптимальным решением задачи является пара

$$\zeta^* = ((4/3, -1/6, 4/9, 1), (1, 1/15, 0, 1, 17/27, 7/12, 1, 1, 1)).$$

Задача (1.30) имеет оптимальное решение

$$\zeta^* = ((4/3, 1/3, 10/9, 1), (0, 4/15, 2/7, 0, 20/27, 5/6, 1, 1, 1)),$$

$$\xi^*(T) = (1 - \psi^*(T))F(T) = (1, 11/3, 5, 2, 14/9, 4/3, 0, 0, 0).$$

Средняя величина потерь $p_T \cdot \xi^*(T) \approx 0,65$.

Оптимальное решение задачи (1.31) –

$$\zeta^* \approx ((1,04; 0,92; 1,15; 1,09), (0; 0,74; 0,79; 0,23; 0,85; 0,92; 0,74; 0,84; 0,96)),$$

$$\xi^*(T) = (1 - \psi^*(T))F(T) \approx (1; 0,27; 0,43; 0,77; 0,15; 0,15; 0,53; 0,98; 0,61).$$

Средняя величина потерь $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n (\xi_n^*)^2 \approx 0,84$.

1.5. Модель с дивидендными выплатами

Определим обязательство, которое состоит в выплатах в моменты времени $t = 1, \dots, T$, задаваемых случайным процессом $F = \{F(t)\}$. В состоянии рынка $n \in \mathcal{N}_t$ инвестор должен хеджировать величину F_n – реализацию случайной величины $F(t)$.

На самом деле такое обязательство можно рассматривать как комбинацию T обязательств европейского типа, наступающих в моменты времени $t = 1, \dots, T$. Решение вопроса полного хеджирования сводится к определению портфелей, хеджирующих каждое из этих обязательств, применяя метод динамического программирования подраздела 1.1.2. Затем необходимо покомпонентно сложить найденные портфели. Однако решение задачи частичного хеджирования подобным образом упростить нельзя, так как оно заключается также в определении оптимальной средней доли хеджируемого обязательства или оптимального уровня потерь от неполного хеджирования. В данном разделе обобщим разработанные выше методы для решения задачи максимизации средней доли обязательства с дивидендными выплатами. Постановка

задачи и применение методов для решения задачи минимизации потерь проводятся аналогично.

Верхняя безарбитражная цена описанного обязательства равна $X_F^{\sup}(0) = \max_{q \in Q^{\text{ext}}} \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n F_n$. Соответственно будем предполагать, что инвестор обладает суммой v , недостаточной для полного хеджирования обязательства F . Исходная задача данного раздела имеет вид

$$\begin{aligned} & \max_{\psi} \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} X_{\psi F}^{\sup}(0) \leq v, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Преобразуем вид $X_{\psi F}^{\sup}(0)$ аналогично выражению (1.18).

$$\begin{aligned} X_{\psi F}^{\sup}(0) = & \max_{q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0)} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \left[\psi_{n_1} F_{n_1} + \max_{q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1)} \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \times \right. \\ & \left. \times \dots \left[\psi_{n_{T-1}} F_{n_{T-1}} + \max_{q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1})} \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n \right] \dots \right]. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные переменные ϕ_n , $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$, и приведем задачу (1.33) к эквивалентному виду.

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi, \phi)} \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) (\psi_{n_1} F_{n_1} + \phi_{n_1}) \leq v, & \forall q(\cdot|0) \in Q^{\text{ext}}(0) \\ \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) (\psi_{n_2} F_{n_2} + \phi_{n_2}) \leq \phi_{n_1}, & \forall q(\cdot|n_1) \in Q^{\text{ext}}(n_1) \\ \dots \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n|n_{T-1}) \psi_n F_n \leq \phi_{n_{T-1}}, & \forall q(\cdot|n_{T-1}) \in Q^{\text{ext}}(n_{T-1}) \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$. Этот прием использовался при переходе к задаче (1.19). В данном случае учитываются промежуточные выплаты $\psi_{n_t} F_{n_t}$ в состояниях рынка $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$.

Аналог метода подраздела 1.2.2 приводит к следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} v + \sum_{t=1}^T Y(t) \cdot \theta(t-1) \geq \sum_{t=1}^T \psi(t) F(t), \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Метод декомпозиции Данцига-Вулфа также применим для задач (1.34) и (1.35). Отметим, что если в данном подразделе принять $F(t) = 0$ для каждого $t = 1, \dots, T-1$, то мы получим в точности методы решения задачи максимизации ожидаемой доли выполнения обязательства $F(T)$, описанные в разделе 1.2.

Далее приводятся отличия в применении метода динамического программирования для поиска стратегии, хеджирующей рассматриваемое обязательство. Для всех конечных состояний $n \in \mathcal{N}_T$ полагается $X_F^{\sup}(n) = F_n$. Затем последовательно по $t = T-1, \dots, 0$ для каждого $n \in \mathcal{N}_t$ решаются задачи (1.8). Верхней безарбитражной ценой обязательства F на поддереве с корнем n и множеством вершин $n \cup \mathcal{D}(n)$ в данном случае является величина

$$X_F^{\sup}(n) = \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q^*(m|n) X_F^{\sup}(m) + F_n, & n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T-1 \\ \sum_{m \in \mathcal{N}_1} q^*(m|0) X_F^{\sup}(m), & n = 0, \end{cases}$$

где $q^*(\cdot|n)$ – решения соответствующих задач (1.8). Двойственные задачи совпадают с (1.9). Хеджирующая стратегия $\tilde{\theta}$ определяется по рекурсивной схеме аналогично (1.11)

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= \theta_0, \quad \tilde{\theta}_n^0 = \theta_n^0 + X_n \cdot \tilde{\theta}_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n - F_n, \quad \tilde{\theta}_n = (\tilde{\theta}_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^d), \\ & \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Замечание 1.5. Одним из примеров промежуточных выплат, рассматриваемых в литературе, является погашение купонных облигаций [6, 45, 59].

Компания-эмитент в каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ в полном объеме выплачивает проценты от текущей стоимости облигаций их владельцам. Выплаты по облигациям задаются случайным процессом $H = \{H(t)\}$, причем $H(T)$ является детерминированной величиной. Разработанные выше методы можно обобщить для решения задачи частичного хеджирования комбинации обязательств по дивидендным выплатам и погашению купонных облигаций. Величина суммарной выплаты в таком случае будет описываться процессом $\psi F + H = \{\psi(t)F(t) + H(t)\}$.

1.6. Условие неразорения в многопериодной задаче Марковица

На финансовом рынке обращаются d рискованных активов. Торги проводятся в течение T периодов времени. Доходность ценной бумаги j в момент времени $t = 1, \dots, T$ описывается случайной величиной

$$R^j(t) = \frac{X^j(t) - X^j(t-1)}{X^j(t-1)}.$$

Будем предполагать, что случайные величины $R^j(t)$ независимы, одинаково распределены и принимают с положительными вероятностями конечное число значений из множества $\mathcal{R}^j$. Обозначим через $R(t) = (R^1(t), \dots, R^d(t))'$ вектор доходностей в момент времени $t = 1, \dots, T$. Рассматриваются только безарбитражные рынки, поэтому $R^j(t)$ принимает хотя бы по одному положительному и отрицательному значению. В данном разделе используются стандартные операции с матрицами и векторами. Введем следующие обозначения:

$$\mu = (\mu^j, j = 1, \dots, d)' = (E_p R^j(t), j = 1, \dots, d)', \quad \delta = \mu' \Sigma^{-1} \mu + 1.$$

Опишем стратегию инвестора. Положим $y_n = (y_n^1, \dots, y_n^d)$, где y_n^j – объем средств, инвестируемых в рискованный актив j в состоянии $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Страте-

гия инвестора – это случайный процесс $y = \{y(t)\}$, где случайная величина $y(t) = (y^1(t), \dots, y^d(t))$ принимает значения y_n , $n \in \mathcal{N}_t$. Стоимость портфеля изменяется по следующему закону:

$$V(t+1) = V(t) + \sum_{j=1}^d R^j(t+1)y^j(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad V_0 = v,$$

т.е. она складывается из стоимости портфеля в предыдущий момент времени и его суммарного дохода по всем составляющим активам. Ковариационная матрица доходностей бумаг считается известной и обозначена через Σ .

Сформулируем многопериодную задачу Марковица [37, 58]:

$$\begin{cases} \min_{(V, y)} \text{Var}_p V(T) \\ E_p V(T) = \alpha, \\ V(t+1) = V(t) + \sum_{j=1}^d R^j(t+1)y^j(t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1 \\ V_0 = v, \end{cases}$$

где $\text{Var}_p V(T) = E_p (V(T) - E_p V(T))^2$ – дисперсия конечной стоимости портфеля, α – ожидаемая конечная стоимость портфеля, которая устанавливается инвестором в начальный момент времени.

Замечание 1.6. Задача содержательна при $\alpha > v$. При остальных значениях α инвестору не имеет смысла вкладывать средства в рискованные бумаги.

Оптимальное решение задачи равно [41, теорема 5.3]

$$y^*(t) = (\alpha - v) \frac{\delta^{T-t-1}}{\delta^T - 1} \prod_{s=1}^t (\delta - \mu' \Sigma^{-1} R(s)) \Sigma^{-1} \mu, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.36)$$

Представляет интерес анализ тех значений параметра α , при которых оптимальная портфельная стратегия (1.36) не приведет инвестора к разорению. Предварительно докажем лемму.

Лемма 1.1. При любых $c \in \mathbb{R}$ и $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$B_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n c^{n-k} x_k \prod_{i=1}^{k-1} (c - x_i) = c^n - \prod_{i=1}^n (c - x_i).$$

Доказательство. Лемму докажем индукцией по n . При $n = 1$

$$B_1(x) = x_1 = c - (c - x_1),$$

поэтому формула верна. Предположим истинность для n , докажем утверждение для $n + 1$:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} c^{n+1-k} x_k \prod_{i=1}^{k-1} (c - x_i) = c \sum_{k=1}^n c^{n-k} x_k \prod_{i=1}^{k-1} (c - x_i) + x_{n+1} \prod_{i=1}^n (c - x_i) = \\ &= c \left(c^n - \prod_{i=1}^n (c - x_i) \right) + x_{n+1} \prod_{i=1}^n (c - x_i) = c^{n+1} - \prod_{i=1}^{n+1} (c - x_i). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4. Стратегия (1.36) не приводит к разорению при

$$\alpha \leq v \frac{\kappa - 1}{\kappa - \delta^T},$$

где

$$\kappa = \max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r)^T.$$

Доказательство. Инвестор становится банкротом, если $V_n < 0$ в некотором состоянии рынка $n \in \mathcal{N}$. Необходимо определить значения параметра α , при которых $V_n \geq 0$ для всех состояний $n \in \mathcal{N}$, причем по условию отсутствия арбитража достаточно потребовать $V(T) \geq 0$. Из закона изменения стоимости портфеля и формулы (1.36) вытекает

$$\begin{aligned} V(T) &= v + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j=1}^d R^j(t+1) y^{*j}(t) = v + \frac{\alpha - v}{\delta^T - 1} \times \\ &\times \sum_{t=0}^{T-1} \left[\delta^{T-t-1} \prod_{s=1}^t (\delta - \mu' \Sigma^{-1} R(s)) \sum_{j=1}^d (\Sigma^{-1} \mu)_j R^j(t+1) \right]. \end{aligned}$$

Из симметричности матрицы Σ^{-1} следует

$$\sum_{j=1}^d (\Sigma^{-1}\mu)_j R^j(t+1) = (\Sigma^{-1}\mu)' R(t+1) = \mu' \Sigma^{-1} R(t+1).$$

Тогда по лемме 1.1

$$V(T) = v + \frac{\alpha - v}{\delta^T - 1} \left[\delta^T - \prod_{s=1}^T (\delta - \mu' \Sigma^{-1} R(s)) \right].$$

Условие неразорения $V(T) \geq 0$ эквивалентно неравенству $\min_{n \in \mathcal{N}_T} V_n \geq 0$.

Далее, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^T (\delta - \mu' \Sigma^{-1} R(s)) &\leq \prod_{s=1}^T \max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r) = \\ &= \max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r)^T = \kappa, \end{aligned}$$

причем найдется вектор доходностей бумаг, при котором данное неравенство обращается в равенство, так как случайная величина доходности $R(t)$ принимает конечное число значений с положительными вероятностями. Таким образом, имеем

$$V(T) \geq 0 \Leftrightarrow v + (\alpha - v) \frac{\delta^T - \kappa}{\delta^T - 1} \geq 0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\alpha \leq v \frac{\kappa - 1}{\kappa - \delta^T}.$$

□

Нахождение величины κ не представляет сложности. При нечетном T

$$\left(\arg \max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r)^T \right)_j = \arg \max_{r^j \in \mathcal{R}^j} |r^j|$$

среди $r^j : (\Sigma^{-1}\mu)_j r^j < 0$. При четном T для каждого $j = 1, \dots, d$ определим

$$r_-^j = \arg \max |r^j|, \text{ среди всех } r^j \in \mathcal{R}^j \text{ таких, что } (\Sigma^{-1}\mu)_j r^j < 0,$$

$$r_+^j = \arg \max |r^j|, \text{ среди всех } r^j \in \mathcal{R}^j \text{ таких, что } (\Sigma^{-1}\mu)_j r^j > 0.$$

Тогда

$$\max_{r \in \mathcal{R}^1 \times \dots \times \mathcal{R}^d} (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r)^T = \max \{ (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r_-)^T, (\delta - \mu' \Sigma^{-1} r_+)^T \}.$$

Глава 2

Хеджирование обязательств американского типа

Особенность обязательства американского типа состоит в том, что оно может быть предъявлено в любой момент времени $t = \{0, \dots, T\}$. В связи с этим в задачах хеджирования американского обязательства момент предъявления часто рассматривается как неопределенный фактор. В результате возникает антагонистическая игра между продавцом обязательства и его покупателем.

В разделе 2.2 все поставленные задачи частичного хеджирования сведены к задачам линейного программирования. Приведены примеры, в которых целевые функции задач не имеют седловых точек.

Задача минимизации стоимости начального портфеля при ограничении снизу вероятности полного хеджирования изучается в разделе 2.3. Приведены эквивалентные формы задачи для неполного и полного рынков, удобные для поиска оптимальных стратегий. Показано, что применение смешанных стратегий продавцом сводится к решению рассмотренной в разделе 2.2 задачи поиска максимина.

Результаты данной главы опубликованы в работе [12], перевод журнала включен в перечень ВАК.

2.1. Описание модели

Будем рассматривать антагонистическую игру с двумя участниками: продавцом обязательства (или инвестором) и его покупателем. Опишем их стратегии.

Стратегией продавца при полном хеджировании обязательства является портфельный процесс θ , удовлетворяющий условию самофинансирования (1.5). Напомним формулу для значения случайной величины стоимости портфеля в момент времени t :

$$V_n = V_0 + \sum_{s=1}^t Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Эти равенства будут использоваться в задачах для описания зависимости стоимости портфеля от стратегии. Для удобства записи введем обозначение для величины изменения стоимости портфеля к моменту перехода рынка в состояние n

$$(Y\theta)_n = \sum_{s=1}^t Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

и примем $(Y\theta)_0 = 0$. В данном разделе также рассматриваются только стратегии продавца, гарантирующие неотрицательность процесса V .

Обязательство американского типа задается неотрицательным процессом $F = \{F(t)\}$, в котором случайная величина $F(t)$ принимает дисконтированные значения F_n с вероятностью p_n , $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$.

Стратегией покупателя является момент остановки – случайная величина

$$\tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T\},$$

для которой $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, где $\mathcal{F}_t$ – алгебра событий, которые могут наблюдаться вплоть до момента t . Остановка заключается в предъявлении обязательства. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех стратегий покупателя.

Для каждого события $\omega = (n_0, \dots, n_T) \in \Omega$ момент τ сопоставляет единственную вершину $n_{\tau(\omega)} \in \mathcal{N}$, где происходит остановка. Множество таких состояний обозначим за $\mathcal{N}_\tau$. Можно заметить, что множество $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ соответствует определенному моменту остановки τ (в том смысле, что $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_\tau$), если в каждой цепочке последовательных состояний $(n_0, \dots, n_T)$ существует ровно один элемент этого множества.

Множество стратегий покупателя очень быстро растет с увеличением T . Число моментов остановки можно определить рекурсивно. Пусть K_n – число моментов остановки для поддерева исходного дерева с корнем n и остальными вершинами $\mathcal{D}(n)$. Тогда

$$K_n = 1, \forall n \in \mathcal{N}_T, \quad K_n = 1 + \prod_{m \in \mathcal{C}(n)} K_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = T - 1, \dots, 0.$$

Для случаев, когда число вершин-потомков из множества $\mathcal{C}(n)$ постоянно для всех состояний $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ и равно двум или трем, есть точная формула вычисления числа стратегий во множестве $\mathcal{T}$ в зависимости от T . Это число равно

$$|\mathcal{T}| = \left[k^{c^T} \right],$$

где $[x]$ – целая часть числа x , а $k \approx 1,5028$ при $c = |\mathcal{C}(n)| = 2$ [16], и $k \approx 1,2766$ при $c = |\mathcal{C}(n)| = 3$ [43]. Число стратегий покупателя (моментов остановки) для таких деревьев приведено для разных значений T в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

T	0	1	2	3	4	5
$ \mathcal{T} $ при $c = 2$	1	2	5	26	677	458330
$ \mathcal{T} $ при $c = 3$	1	2	9	730	389017001	$\approx 5,9 \times 10^{25}$

Стратегия продавца θ называется хеджирующей обязательство F американского типа в момент предъявления τ , если соответствующий процесс V удовлетворяет условию $V_n \geq F_n$ для каждого состояния $n \in \mathcal{N}_\tau$.

Согласно [13, следствие 7.9] для хеджирования обязательства F при любом поведении покупателя достаточно иметь начальный портфель стоимости

$$X_F^{\sup}(0) = \sup_{q \in Q} \max_{\tau \in \mathcal{T}} E_q F(\tau) = \sup_{q \in Q} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} q_n F_n.$$

Это наименьшая сумма, необходимая для полного хеджирования обязательства. Предположим, что продавец принимает решение вложить меньшую сум-

му, принимая на себя риск неполного хеджирования обязательства. Далее будем считать, что начальный капитал продавца $v < X_F^{\sup}(0)$.

2.2. Частичное хеджирование

2.2.1. Задачи на максимин и минимакс

Пусть $\psi = \{\psi(t)\}$ – процесс, в котором случайная величина $\psi(t)$ принимает значения $\psi_n \in [0, 1]$, равные долям обязательства F , хеджируемого в вершинах $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$. При частичном хеджировании стратегией продавца является пара (ψ, θ) , где θ – портфельный процесс, удовлетворяющий условию самофинансирования и обеспечивающий неразорение продавца. Положим $\psi F = \{\psi(t)F(t)\}$ и рассмотрим задачу максимизации гарантированной величины ожидаемой доли хеджируемого обязательства [51]

$$\begin{cases} \max_{\psi} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_{\tau}} p_n \psi_n \\ X_{\psi F}^{\sup}(0) = \sup_{q \in Q} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_{\tau}} q_n \psi_n F_n \leq v, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Согласно рассуждениям в конце раздела 2.1 условие $X_{\psi F}^{\sup}(0) \leq v$ равносильно существованию такой стратегии θ , что $V_n = v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n$ для всех состояний $n \in \mathcal{N}$. Поэтому задачу можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} \max_{(\psi, \theta)} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_{\tau}} p_n \psi_n \\ v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Стратегию (ψ^*, θ^*) , реализующую в задаче (2.1) максимум функции $\min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_{\tau}} p_n \psi_n$, будем называть максиминной. Стратегию (ψ, θ) , допустимую

в задаче (2.1), будем называть выравнивающей [4], если $\sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \psi_0$ при всех $\tau \in \mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество допустимых стратегий (ψ, θ) продавца в задаче (2.1). Сформулируем теорему, позволяющую эквивалентно свести эту задачу к задаче линейного программирования.

Теорема 2.1. *В задаче (2.1) существует максиминная выравнивающая стратегия.*

Доказательство. Для любой стратегии $(\psi, \theta) \in \mathcal{X}$ определим рекурсивно по $t = T, \dots, 0$ процесс $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}(t)\}$:

$$\tilde{\psi}_n = \psi_n, \forall n \in \mathcal{N}_T, \tilde{\psi}_n = \min \left\{ \psi_n, \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{\psi}_m \right\}, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = T-1, \dots, 0.$$

Процесс $\tilde{\psi}$ аналогичен огибающей Снелла [13, с. 305] и является субмартингалом, т.е.

$$\tilde{\psi}_n \leq \sum_{k \in \mathcal{C}(n)} p(k|n) \tilde{\psi}_k, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T-1.$$

Кроме того, из определения процесса $\tilde{\psi}$ следует, что

$$0 \leq \tilde{\psi}_n \leq \psi_n, \forall n \in \mathcal{N},$$

$$\min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_0.$$

Запишем разложение Дуба [13, с. 297] процесса $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\tilde{\psi}} + \varphi,$$

где процесс $\tilde{\tilde{\psi}}$ – p -мартингал, а процесс φ определяется рекурсивно:

$$\varphi_0 = 0, \varphi_k = \varphi_n + \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{\psi}_m - \tilde{\psi}_n, \forall k \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T-1.$$

Из субмартингалности $\tilde{\tilde{\psi}}$ следует неубывание процесса φ , тогда

$$0 \leq \tilde{\tilde{\psi}}_n \leq \tilde{\psi}_n \leq \psi_n, \forall n \in \mathcal{N}.$$

Отсюда следует, что $(\tilde{\tilde{\psi}}, \theta) \in \mathcal{X}$. Далее, $\varphi_0 = 0$ влечет

$$\tilde{\tilde{\psi}}_0 = \tilde{\psi}_0 = \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n,$$

а для мартингала $\tilde{\psi}$ для всех моментов остановки $\tau \in \mathcal{T}$ выполнены равенства

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \tilde{\psi}_n.$$

Таким образом, нахождение $\max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n$ сводится к решению задачи

$$\begin{aligned} & \max_{(\psi, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \\ & \begin{cases} v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ p_n \psi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \psi_m, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Оптимальное решение (ψ^*, θ^*) задачи (2.2) является максиминной выравнивающей стратегией в задаче (2.1). $\square$

Утверждение теоремы 2.1 верно также для задачи минимизации потерь от неполного хеджирования обязательства американского типа:

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n (F_n - V_n)^+ \\ & V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем вспомогательные переменные ξ_n , $n \in \mathcal{N}$, и сведем задачу (2.3) к следующей:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \quad \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Стратегию (ξ^*, V^*, θ^*) , реализующую минимум функции $\max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n$ в задаче (2.4), назовем минимаксной. А допустимую в задаче (2.4) стратегию (ξ, V, θ) будем называть выравнивающей, если $\sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n = \xi_0$ при всех $\tau \in \mathcal{T}$.

Следствие 2.1. В задаче (2.4) существует минимаксная выравнивающая стратегия. Эта стратегия – оптимальное решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \xi_n \\ & \begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ p_n \xi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \xi_m, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство. Последовательно по $t = T, \dots, 0$ построим процесс $\tilde{\xi}$ для любой допустимой в задаче (2.4) стратегии (ξ, V, θ) :

$$\tilde{\xi}_n = \xi_n, \forall n \in \mathcal{N}_T, \quad \tilde{\xi}_n = \max \left\{ \xi_n, \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{\xi}_m \right\}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = T-1, \dots, 0.$$

Процесс $\tilde{\xi}$ является супермартингалом, так как

$$\tilde{\xi}_n \geq \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{\xi}_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Из определения процесса $\tilde{\xi}$ также следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \tilde{\xi}_n \geq \xi_n \geq (F_n - V_n)^+, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \\ & \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_0. \end{aligned}$$

Разложение Дуба [13, с. 297] процесса $\tilde{\xi}$ имеет вид

$$\tilde{\xi} = \tilde{\tilde{\xi}} - \varphi,$$

где процесс $\tilde{\tilde{\xi}}$ – p -мартингал, а процесс φ определяется рекурсивно:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_k = \varphi_n + \tilde{\xi}_n - \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{\xi}_m, \quad \forall k \in \mathcal{C}(n), \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Также как при доказательстве теоремы 2.1 процесс φ является неубывающим, поэтому

$$\tilde{\tilde{\xi}}_n \geq \tilde{\xi}_n \geq \xi_n \geq (F_n - V_n)^+, \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Отсюда вытекает, что тройка $(\tilde{\xi}, V, \theta)$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.4). Равенство $\varphi_0 = 0$ влечет

$$\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_0 = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n,$$

а для мартингала $\tilde{\xi}$ для всех $\tau \in \mathcal{T}$ выполнены равенства

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \tilde{\xi}_n.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи (2.5) является минимаксной выравнивающей стратегией в задаче (2.4). $\square$

Замечание 2.1. Для решения задач (2.2) и (2.5) можно воспользоваться принципом декомпозиции Данцига-Вулфа [5, 26]. Непосредственно применить его к задачам нельзя из-за наличия связывающих ограничений. На примере задачи (2.2) покажем как можно преобразовать ее для декомпозиции. По теореме 2.1 найдется оптимальное решение (ψ^*, θ^*) задачи (2.1) такое, что процесс ψ^* является p -мартингалом. Поэтому из задачи (2.2) можно исключить переменные ψ_n , $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, используя следующее эквивалентное определение мартингала: для каждого $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$,

$$\begin{aligned} \psi_{n_t} &= \sum_{n_{t+1} \in \mathcal{C}(n_t)} \frac{p_{n_{t+1}}}{p_{n_t}} \psi_{n_{t+1}} = \sum_{n_{t+1} \in \mathcal{C}(n_t)} \dots \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n_{t+1})} \frac{p_{n_T}}{p_{n_t}} \psi_{n_T} = \\ &= \sum_{n_T \in \mathcal{N}_T \cap \mathcal{D}(n_t)} \frac{p_{n_T}}{p_{n_t}} \psi_{n_T} = E_p[\psi(T) | n_t], \end{aligned}$$

где $\mathcal{N}_T \cap \mathcal{D}(n_t)$ – множество конечных состояний рынка, следующих за состоянием n_t . В результате ограничения задачи (2.2) примут вид

$$\begin{cases} v + (Y\theta)_n \geq E_p[\psi(T) | n] F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{X}_1$ множество пар $(\psi(T), \theta)$, удовлетворяющих этим ограничениям, а через $\mathcal{X}_2$ – множество пар $(\psi(T), \theta)$, удовлетворяющих всем этим

ограничениям за исключением следующего условия:

$$v \geq F_0 \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n.$$

Тогда выполнены равенства

$$\max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \max_{(\psi(T), \theta) \in \mathcal{X}_1} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n = \min \left\{ \frac{v}{F_0}, \max_{(\psi(T), \theta) \in \mathcal{X}_2} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n \right\}.$$

Декомпозиция применима к задаче $\max_{(\psi(T), \theta) \in \mathcal{X}_2} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n$, так как ограничения, связывающие все переменные ψ_n , $n \in \mathcal{N}_T$, теперь отсутствуют. Связывающими переменными в данном случае являются компоненты вектора θ_0 . На практике наиболее удобно решать задачу в виде записанного выше минимума, так как в такой форме задача имеет меньшее число переменных и ограничений.

2.2.2. Задачи минимизации начального вложения

Сформулируем две задачи минимизации величины начального вложения капитала: одна – с фиксированным уровнем доли хеджируемого обязательства, а другая – с фиксированным уровнем потерь [51]. Пусть константа $\alpha \in [0, 1]$ обозначает минимально допустимую ожидаемую долю хеджируемого обязательства, а константа $\beta \geq 0$ – максимально допустимый уровень потерь от неполного хеджирования. Тогда эти задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \min_{(\psi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n \geq \alpha, & \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n (F_n - V_n)^+ \leq \beta, & \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \quad \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n \leq \beta, & \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Следствие 2.2. Задачи (2.6) и (2.7) соответственно эквивалентны задачам (2.8) и (2.9).

$$\begin{aligned} & \min_{(\psi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \psi_0 = \alpha, \\ p_n \psi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \psi_m, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \min_{(\xi, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_n \geq F_n - V_n, \quad \xi_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \xi_0 = \beta, \\ p_n \xi_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \xi_m, & \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Доказательство следствий аналогично доказательству теоремы 2.1.

2.2.3. Примеры

В данном подразделе приведем примеры решения задач (2.1) и (2.4), а также исследуем вопрос существования у целевых функций этих задач седловых точек. Рассмотрим двухпериодную бинарную модель рынка с деревом сценариев, изображенным на рисунке 2.1. Состояния обозначены следующим образом:

$$\mathcal{C}(0) = \{l, r\}, \mathcal{C}(l) = \{1, 2\}, \mathcal{C}(r) = \{3, 4\}.$$

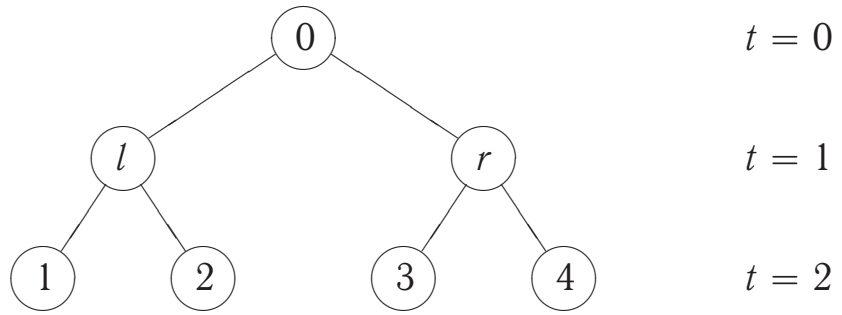


Рисунок 2.1. Дерево сценариев поведения рынка

В портфеле инвестора один рисковый актив. Приведенное обязательство американского типа равно

$$F = (F_0, F_l, F_r, F_1, F_2, F_3, F_4) = (2, 2, 8, 2, 2, 8, 10).$$

Для задачи (2.1) положим $v = 3$,

$$X^1 = (X_0^1, X_l^1, X_r^1, X_1^1, X_2^1, X_3^1, X_4^1) = (3, 2, 6, 1, 4, 4, 7),$$

$$p_T = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

По теореме 2.1

$$\max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_{\text{eq}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \psi_n = \frac{47}{54},$$

где $\mathcal{X}$ – множество допустимых решений задачи (2.1), а $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_{\text{eq}}$ – множество допустимых решений задачи (2.2). В данном случае

$$\mathcal{X}_{\text{eq}} = \{(\psi, \theta) \mid \psi_0 = p_l \psi_l + p_r \psi_r, p_l \psi_l = p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2, p_r \psi_r = p_3 \psi_3 + p_4 \psi_4, \theta \in \mathbb{R}^3\}.$$

Оптимальное решение задачи (2.2) – следующая стратегия:

$$(\psi^*, \theta^*) = ((47/54, 22/27, 8/9, 22/27, 22/27, 1, 2/3), (37/27, 0, -4/9)).$$

Для нахождения величины

$$\min_{\tau \in \mathcal{T}} \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n$$

необходимо решить пять задач (по числу моментов остановки), которые заключаются в максимизации следующих целевых функций на множестве $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} Z_1(\psi, \theta) &= \psi_0, & Z_4(\psi, \theta) &= p_r \psi_r + p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2, \\ Z_2(\psi, \theta) &= p_l \psi_l + p_r \psi_r, & Z_5(\psi, \theta) &= p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 + p_3 \psi_3 + p_4 \psi_4. \\ Z_3(\psi, \theta) &= p_l \psi_l + p_3 \psi_3 + p_4 \psi_4, \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\min_{\tau \in \mathcal{T}} \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \min \left\{ 1, \frac{11}{12}, \frac{7}{8}, \frac{23}{24}, \frac{67}{72} \right\} = \frac{7}{8}.$$

Оптимальной стратегией τ^* для покупателя является предъявление обязательства в состояниях $\mathcal{N}_{\tau^*} = \{l, 3, 4\}$. Оптимальным ответом продавца на эту стратегию является пара

$$(\psi^*(\tau^*), \theta^*(\tau^*)) = ((0, 1, 0, 0, 0, 1, 1/2), (1, 0, -1)).$$

Таким образом, показано неравенство

$$\min_{\tau \in \mathcal{T}} \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n = \frac{7}{8} > \frac{47}{54} = \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n,$$

поэтому данный пример иллюстрирует, что седловая точка в задаче максимизации доли выполняемого обязательства не всегда существует. В работе [51] параметры примера, иллюстрирующего существование седловой точки в модели рынка Кокса-Росса-Рубинштейна, были заданы некорректно.

Для задачи (2.4) при следующем наборе параметров: $v = 4$, $X^1 = (3, 2, 4, 1, 3, 2, 5)$, $p_T = (1/6, 1/6, 1/2, 1/6)$

$$\min_{(\xi, V, \theta) \in \tilde{\mathcal{X}}} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n = \frac{14}{15} > \frac{5}{6} = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \min_{(\xi, V, \theta) \in \tilde{\mathcal{X}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n,$$

где $\tilde{\mathcal{X}}$ – множество допустимых троек (ξ, V, θ) в задаче (2.4).

Решения в смешанных стратегиях антагонистических игр

$$\Gamma^{(1)} = \left\langle \mathcal{X}, \mathcal{T}, \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n \right\rangle, \quad \Gamma^{(2)} = \left\langle \tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{T}, \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n \right\rangle$$

существуют всегда. При этом значения игр соответственно равны

$$v^{(1)} = \max_{(\psi, \theta) \in \mathcal{X}} \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \psi_n, \quad v^{(2)} = \min_{(\xi, V, \theta) \in \tilde{\mathcal{X}}} \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \xi_n.$$

Это утверждение следует из [1, теоремы 5.3, 5.4]. Действительно, целевые функции задач линейны соответственно по ψ и ξ при фиксированном τ . Множество стратегий покупателя конечно. Множество таких ψ , для которых найдется стратегия θ , что $(\psi, \theta) \in \mathcal{X}$, выпукло и является компактом евклидова пространства. Аналогичное множество всех ξ , для которых найдется такая пара (V, θ) , что $(\xi, V, \theta) \in \tilde{\mathcal{X}}$, выпукло, но не компактно. Но без ограничения общности можно считать это множество компактным, так как задача (2.4) – это задача на минимум и $\xi_n \geq 0$ для всех $n \in \mathcal{N}$.

Оптимальными смешанными стратегиями покупателя обязательства будут следующие. В задаче (2.1) – при переходе рынка в состояние l немедленно предъявлять обязательство, при переходе рынка в состояние r предъявлять сразу с вероятностью $2/27$ и в следующий момент времени с вероятностью $25/27$. В задаче (2.4) поведение то же, только вероятности соответственно равны $1/5$ и $4/5$.

В качестве примера существования решения игр $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ в чистых стратегиях можно привести следующий. В рассмотренных примерах все параметры оставим неизменными, кроме объема начального вложения, и зададим $v = 1$. Тогда, аналогично решая рассмотренные выше задачи, для каждой из них можно показать, что значение максимина равно значению минимакса, т.е. у целевых функций существуют седловые точки.

2.3. Хеджирование с фиксированной вероятностью

В задаче (2.1) имеется следующий недостаток: в большинстве случаев оптимальной стратегией продавца является хеджирование неполного обязательства, т.е. вероятность хеджировать обязательство целиком, действуя оптимально, невелика. В данном разделе рассматривается постановка задачи частичного хеджирования, устраняющая этот недочет [7, 39]. Она выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \min_{(V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ p(V(\tau) \geq F(\tau)) \geq 1 - \varepsilon, & \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее ограничение показывает, что каким бы ни был момент остановки, обязательство должно быть хеджировано полностью с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0, 1]$ – заданный уровень значимости.

Таким образом, при определении своей стратегии продавец решает, в каких состояниях рынка он хеджирует обязательство целиком, а в каких – нет. При этом во всех состояниях $n \in \mathcal{N}$, где намечено неполное хеджирование, достаточно потребовать только выполнения условия неразорения $V_n \geq 0$. Введем булевы переменные $x_n \in \{0, 1\}$, $n \in \mathcal{N}$, описывающие выбор продавца. Тогда задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, V, \theta)} V_0 \\ & \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n \geq 1 - \varepsilon, & \forall \tau \in \mathcal{T} \\ x_n \in \{0, 1\}, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решение задачи (2.10) затрудняет большое число ограничений, соответствующих всевозможным моментам остановки $\tau \in \mathcal{T}$, и наличие булевых

переменных. В следующей теореме доказывается свойство монотонности по времени компоненты x^* оптимального решения задачи (2.10), а именно показывается, что

$$x_n^* \geq x_m^*, \forall m \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \quad (2.11)$$

Это условие интерпретируется так. Для каждого события $\omega = (n_0, \dots, n_T)$, т.е. для каждой цепочки последовательных состояний дерева сценариев, ведущей от корня к конечной вершине, верно следующее: если $x_{n_t}^* = 0$, то $x_{n_s}^* = 0$ для всех $s = t + 1, \dots, T$, и обязательство хеджируется не полностью вплоть до конечного момента времени.

Теорема 2.2. *Всегда найдется такое оптимальное решение (x^*, V^*, θ^*) задачи (2.10), что x^* удовлетворяет условию монотонности (2.11).*

Доказательство. Зафиксируем оптимальное решение (x^*, V^*, θ^*) и определим процесс $\tilde{x} = \{\tilde{x}(t)\}$ по следующей рекурсивной схеме по $t = T, \dots, 0$:

$$\tilde{x}_n = x_n^*, \forall n \in \mathcal{N}_T, \tilde{x}_n = \min \left\{ x_n^*, \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{x}_m \right\}, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = T - 1, \dots, 0.$$

Аналогично процессу $\tilde{\psi}$ в доказательстве теоремы 2.1 процесс $\tilde{x}$ является субмартингалом, так как

$$\tilde{x}_n \leq \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \tilde{x}_m, \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T - 1.$$

и выполнены равенства

$$\min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n^* = \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n \tilde{x}_n = \tilde{x}_0.$$

Далее определим правило остановки $\tilde{\tau} \in \mathcal{T}$ для каждого события $\omega = (n_0, \dots, n_T) \in \Omega$, где $n_t \in \mathcal{N}_t$:

$$\tilde{\tau}(\omega) = \begin{cases} T, & \text{если } x_{n_t}^* \geq \sum_{m \in \mathcal{C}(n_t)} p(m|n_t) \tilde{x}_m, \forall n_t \in \omega, t = 0, \dots, T - 1, \\ \min \left\{ t \mid \tilde{x}_{n_t} = x_{n_t}^* < \sum_{m \in \mathcal{C}(n_t)} p(m|n_t) \tilde{x}_m \right\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Согласно определению $\tilde{\tau}$ остановка происходит до момента времени T , если $\tilde{x}_{n_t} = x_{n_t}^* = 0$, поэтому данное определение эквивалентно следующему:

$$\tilde{\tau}(\omega) = \begin{cases} T, & \text{если } x_{n_t}^* = 1, \forall n_t \in \omega, t = 0, \dots, T-1, \\ \min \{t \mid x_{n_t}^* = 0\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами, мы останавливаемся в первом состоянии, в котором $x_n^* = 0$, или в последнем состоянии пути, если остановка не произошла ранее.

Заметим, что

$$\tilde{\tau} \in \operatorname{Argmin}_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n^*.$$

Для всех состояний $m \in \mathcal{D}(n)$, следующих за $n \in \mathcal{N}_{\tilde{\tau}}$, можно положить $x_m^* = 0$. Действительно, $V_n^* \geq F_n x_n^* \geq 0$, и значение $\min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n^*$ не меняется. Оптимальное значение целевой функции V_0^* также остается неизменным. Таким образом, оптимальный процесс x^* удовлетворяет условию (2.11). $\square$

Используя данную теорему, можно упростить задачу (2.10), исключив из нее моменты остановки:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, V, \theta)} V_0 \\ & \left\{ \begin{array}{ll} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n x_n \geq 1 - \varepsilon, & \\ x_n \geq x_m, & \forall m \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ x_n \in \{0, 1\}, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следствие 2.3. Любое оптимальное решение задачи (2.12) является оптимальным решением задачи (2.10).

Доказательство. По теореме 2.2 множество допустимых решений задачи (2.10) можно сузить, добавив условие монотонности по x . Покажем, что снимая ограничение $x_n \in \{0, 1\}$ для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, оптимальное значение

целевой функции не меняется. Условие неотрицательности $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathcal{N}$ следует из системы неравенств

$$x_{a^T(n)} \geq \dots \geq x_{a(n)} \geq x_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T.$$

Если найдется состояние $\tilde{n} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ такое, что $x_{\tilde{n}} > \max_{m \in \mathcal{C}(\tilde{n})} x_m$, то можно положить $x_{\tilde{n}} = \max_{m \in \mathcal{C}(\tilde{n})} x_m$, уменьшая $x_{\tilde{n}}$. Действительно,

$$V_{\tilde{n}} \geq F_{\tilde{n}} x_{\tilde{n}} > F_{\tilde{n}} \max_{m \in \mathcal{C}(\tilde{n})} x_m, \quad x_{a(\tilde{n})} \geq x_{\tilde{n}} > \max_{m \in \mathcal{C}(\tilde{n})} x_m.$$

Итак, $x_n = \max_{m \in \mathcal{C}(n)} x_m$ для каждого $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, поэтому $x_n \in \{0, 1\}$ для всех $n \in \mathcal{N}$. Уменьшение x не затронуло x_T . Из условия монотонности (2.11)

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n x_n$$

для всех моментов остановки $\tau \in \mathcal{T}$, поэтому

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n x_n = \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{n \in \mathcal{N}_\tau} p_n x_n \geq 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, переход к задаче (2.12) обоснован. $\square$

Для полного рынка можно определить упрощенную форму задачи. Согласно [13, теорема 5.15] процесс стоимости портфеля V является q -мартингалом, т.е.

$$V_n = E_q[V(t+1)|n] = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} \frac{q_m}{q_n} V_m, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где q – единственная мартингальная мера. Поэтому стоимость портфелей в состояниях $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ однозначно определяется из равенств

$$V_n = E_q[V(T)|n], \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

Тогда задачу (2.12) можно переписать без компонент θ в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, V(T))} E_q V(T) \\ & \left\{ \begin{array}{ll} E_q [V(T)|n] \geq F_n x_n, & \forall n \in \mathcal{N} \\ E_p x_T \geq 1 - \varepsilon, \\ x_n \geq x_m, & \forall m \in \mathcal{C}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ x_n \in \{0, 1\}, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Были проведены численные эксперименты решения задачи в данной форме с использованием системы моделирования GAMS 23.9 и оптимизационной библиотеки SCIP. Для бинарной модели рынка с одним рисковым активом и числом периодов времени $T = 5$ время расчета решения с погрешностью 4 % составляет менее 0,5 секунды.

В завершении отметим важное замечание о применении смешанных стратегий. Предполагается, что выбирая значение переменной $x_n \in \{0, 1\}$, продавец решает: хеджирует ли он обязательство в этом состоянии рынка целиком или нет. Данную задачу можно рассматривать в форме игры в условиях неопределенности. Применить смешанную стратегию в этой игре – означает выбрать значение $x_n \in \{0, 1\}$ как реализацию случайной величины, где $x_n = 1$ с некоторой вероятностью. Пусть $x_n \in [0, 1]$ для всех $n \in \mathcal{N}$, тогда переменная x_n задает вероятность полного хеджирования обязательства в состоянии n при условии перехода рынка в это состояние. Но, изменив условие бинарности, в результате получаем задачу (2.6) при $\alpha = 1 - \varepsilon$. Итак, решение игровой задачи (2.10) в смешанных стратегиях есть решение задачи (2.6). Отметим, что использование здесь смешанных стратегий согласуется с подходом Гермейера [3]: если в модели операции есть случайные факторы, то использование смешанных стратегий оправдано, поскольку рандомизация выбора не меняет принципиально модель.

Глава 3

Декомпозиция задачи оптимального потребления

Задача оптимального потребления исследуется для двух моделей финансового рынка. В разделе 3.1 рассматриваются деревья сценариев без самопересечений, аналогичные моделям предыдущих разделов. В подразделе 3.1.1 формулируется основная задача, и устанавливаются ее эквивалентные формы. Описан метод динамического программирования для решения задач со степенной и логарифмической функциями полезности. В разделе 3.2 рассмотрена модель, в которой предполагается, что у деревьев, описывающих поведение рынка, допускаются самопересечения.

Результаты раздела 3.1 данной главы опубликованы в работе [9] в журнале из перечня ВАК.

3.1. Модель рынка с деревьями сценариев без самопересечений

В данном разделе поставим и исследуем задачи оптимального потребления для модели финансового рынка, взятой за основу в предыдущих главах. Множество состояний рынка имеет структуру дерева. Причем каждая вершина дерева, кроме корня, имеет единственную вершину-родителя. В разделе 3.2 это требование снимается.

В каждом состоянии рынка $n \in \mathcal{N}$ инвестор формирует портфель $\theta_n = (\theta_n^0, \dots, \theta_n^d)$, где θ_n^j – количество бумаг j -го вида, $j = 0, 1, \dots, d$. Приведенная стоимость портфеля θ_n в состоянии рынка $n \in \mathcal{N}$ обозначается через V_n

и равна $V_n = X_n \cdot \theta_n$ – скалярному произведению векторов дисконтированной стоимости активов X_n и портфеля θ_n . Пусть $c_n \geq 0$ – объем средств, потребляемых инвестором в состоянии $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$. Будем рассматривать случайный процесс потребления $c = \{c(t)\}$, в котором случайная величина $c(t)$ принимает значения c_n , $n \in \mathcal{N}_t$. Стратегией инвестора назовем пару (c, θ) , где процесс потребления $c = \{c(t)\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.1)$$

Пусть v – начальный капитал инвестора. Предположим, что его функция полезности $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает и строго вогнута. В этом случае инвестору следует тратить весь свой начальный капитал и использовать все конечные сбережения. Поэтому можно ограничиться стратегиями, удовлетворяющими условиям $v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0$ и $X_n \cdot \theta_n = 0$ при всех $n \in \mathcal{N}_T$.

3.1.1. Постановка задачи оптимального потребления

Инвестор выбирает стратегию, максимизирующую суммарную ожидаемую полезность потребления в течение T периодов торгов. Сформулируем исходную задачу

$$\begin{aligned} & \max_{(c, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \left\{ \begin{array}{ll} X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, & \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T \\ v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0, \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{array} \right. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Следующая теорема доказана в монографии [53] для полных рынков. Докажем ее аналог для неполных рынков.

Теорема 3.1. *Ограничения задачи (3.2) эквивалентны следующим:*

$$\begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, & \forall q \in Q \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Доказательство. Возьмем произвольную мартингальную меру $q \in Q$. Учитывая мартингальность процесса X стоимостей активов (1.3), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n &= c_0 + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n c_n = c_0 + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n (X_n \cdot \theta_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n) = \\ &= c_0 + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T} q_n X_n \cdot \theta_n - \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n X_n \cdot \theta_n = \\ &= c_0 + X_0 \cdot \theta_0 - \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n X_n \cdot \theta_n = v. \end{aligned}$$

Обратно, пусть процесс c удовлетворяет условиям (3.3). Покажем, что найдется процесс θ , удовлетворяющий ограничениям задачи (3.2). Система уравнений

$$\begin{cases} -X_0 \cdot \theta_0 = c_0 - v, \\ X_n \cdot \theta_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n = c_n, & \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (3.4)$$

разрешима относительно θ по теореме Фредгольма [2]. Действительно, любая мартингальная мера $q \in Q$ является решением сопряженной к (3.4) однородной системы

$$\sum_{m \in \mathcal{C}(n)} X_m q_m = X_n q_n, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \quad (3.5)$$

и ортогональна правой части системы (3.4), так как

$$(c_0 - v) + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n c_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n - v = 0.$$

С другой стороны, при малых α вектор

$$\tilde{q} = \alpha \beta \bar{q} + (1 - \alpha) q \in Q,$$

где $\bar{q} \neq \mathbf{0}$ – произвольное решение системы (3.5), $\alpha \in (0, 1)$, $\beta = 1 / \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{q}_n$ – коэффициент нормировки. Поэтому любое решение системы принадлежит линейной оболочке множества мартингальных мер и также ортогонально правой части системы (3.4). $\square$

Таким образом, задача (3.2) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} & \max_c \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, & \forall q \in Q \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для того чтобы разработать динамическую схему решения этой задачи, необходимо представить мартингальную меру в виде произведения условных мартингальных мер. Так как мартингальная мера q определена на том же вероятностном пространстве, что и мера p , то для нее также справедливо представление (1.1), поэтому сумму $\sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n$ можно записать в виде

$$c_0 + \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} q(n_1|0) \left[c_{n_1} + \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} q(n_2|n_1) \left[c_{n_2} + \dots + \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n_{T-1})} q(n_T|n_{T-1}) c_{n_T} \right] \dots \right].$$

Обозначая суммы через V_{n_t} , $n_t \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$, преобразуем задачу (3.6) в следующую:

$$\begin{aligned} & \max_{(c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) (V_m + c_m) = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ V_0 + c_0 = v, \\ V_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Переменные V_n действительно можно интерпретировать как дисконтированные стоимости портфеля инвестора в состояниях $n \in \mathcal{N}$ после изъятия части

этой стоимости на потребление. Покажем это. Из условия самофинансирования (3.1) следует, что

$$V_m + c_m = X_m \cdot \theta_m + c_m = X_m \cdot \theta_n = (X_m - X_n) \cdot \theta_n + V_n, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n).$$

Домножая на $q(m|n)$ левые и правые части равенств и суммируя по всем $m \in \mathcal{C}(n)$, получаем первую группу ограничений задачи (3.7) – закон изменения стоимости портфеля в записи через условные мартингальные меры.

Для дальнейших результатов понадобится установить зависимость между стоимостью портфеля в любом состоянии рынка и объемами будущего потребления. Из ограничений задачи (3.7) следуют равенства

$$V_n = \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} q(m|\mathcal{D}(n)) c_m, \quad \forall q(\cdot|\mathcal{D}(n)) \in Q(\mathcal{D}(n)), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \quad (3.8)$$

где $Q(\mathcal{D}(n))$ – множество условных мартингальных мер $q(\cdot|\mathcal{D}(n))$, определяемых по формуле (1.16).

Равенства системы ограничений (3.6) эквивалентны системе

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, \quad \forall q \in Q^{\text{ext}}.$$

Здесь Q^{ext} – множество крайних точек замыкания $\overline{Q}$. Учитывая теорему 1.2, приходим к выводу, что первая группа ограничений задачи (3.7) выполнена для всех $q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n)$.

Замечание 3.1. Метод динамического программирования, описанный далее, позволяет найти оптимальное решение задачи (3.6). Таким образом, для нахождения оптимального портфельного процесса θ^* необходимо решить систему уравнений (3.4). Причем, определив стоимости портфелей V_n по формуле (3.8), решения θ_n^* можно найти отдельно для каждого состояния $n \in \mathcal{N}$.

Степенная функция полезности

В этом подразделе приведена динамическая схема решения задачи оптимального потребления для следующей функции полезности:

$$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \alpha \neq 0.$$

Целевая функция задачи (3.7) с учетом записи меры p через условные меры

$$p_n = \prod_{s=0}^{t-1} p(a^s(n) | a^{s+1}(n)), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

принимает вид

$$\begin{aligned} Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) &= u(c_0) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m u(c_m) = u(c_0) + \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} p(n_1 | 0) \times \\ &\times \left[u(c_{n_1}) + \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} p(n_2 | n_1) \left[u(c_{n_2}) + \dots + \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n_{T-1})} p(n_T | n_{T-1}) u(c_{n_T}) \right] \dots \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m | n) u(c_m), & n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m | n) [u(c_m) + Z_m], & n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-2, \end{cases} \quad (3.9)$$

тогда $Z = u(c_0) + Z_0$.

Итак, метод динамического программирования для решения задачи (3.7) состоит в последовательном решении следующих задач для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T-1, \dots, 0$.

Сначала для всех $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ и любого $V_n \geq 0$ необходимо решить задачи

$$\begin{aligned} Z_n^*(V_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m | n) u(c_m) \\ &\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m | n) c_m = V_n, & \forall q(\cdot | n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далее последовательно решаем следующие задачи:

$$Z_n^*(V_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_m, V_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) [u(c_m) + Z_m^*(V_m)]$$

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) (V_m + c_m) = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ V_m \geq 0, c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n), \end{cases} \quad (3.11)$$

где $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 2, \dots, 0$, $V_n \geq 0$. Затем остается решить задачу

$$Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_0, V_0)} [u(c_0) + Z_0^*(V_0)]$$

$$\begin{cases} V_0 + c_0 = v, \\ V_0 \geq 0, c_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Данную схему можно значительно упростить, если воспользоваться однородностью максимумов $Z_n^*(V_n)$ по V_n при всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Действительно, имеет место

Теорема 3.2. Для степенной функции полезности $u(x) = x^\alpha / \alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, оптимальное потребление в задаче (3.6) определяется по формулам

$$c_0^* = \frac{v}{1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)}},$$

$$V_n^* = c_n^* (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)}, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

$$c_m^* = \bar{c}_m^* V_n^*, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

где $(\bar{c}_m^*, m \in \mathcal{C}(n))$ при $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ и $(\bar{c}_m^*, V_m^*, m \in \mathcal{C}(n))$, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T - 2$,

– соответственно оптимальные решения задач (3.10) и (3.11) при $V_n = 1$.

Максимум в задаче (3.6) равен

$$Z^* = \frac{v^\alpha}{\alpha} \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathcal{N}_{T-1}$. Сделаем замену переменных

$$\bar{c}_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_m}{V_n}, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n). \quad (3.13)$$

Легко видеть, что $u(c_m) = V_n^\alpha u(\bar{c}_m)$ для любого $m \in \mathcal{C}(n)$, поэтому

$$Z_n^*(V_n) = V_n^\alpha Z_n^*(1), \quad (3.14)$$

где $Z_n^*(1)$ обозначает максимум в задаче (3.10) при $V_n = 1$.

Пусть $n \in \mathcal{N}_t$, где $t = T - 2, \dots, 0$. Решение задачи (3.11) можно упростить, исключив из ограничений переменные V_m с помощью необходимых условий оптимальности. Введем переменные $W_m \stackrel{\text{def}}{=} V_m + c_m$, $m \in \mathcal{N}$, которые можно интерпретировать как дисконтированные стоимости портфелей в состояниях m до потребления в этих состояниях. С учетом замены и однородности (3.14) имеем

$$Z_n^*(V_n) = \max_{(c_m, W_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) [u(c_m) + (W_m - c_m)^\alpha Z_m^*(1)]$$

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) W_m = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ W_m \geq c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \quad (3.15)$$

Таким образом, $c_m \in [0, W_m]$ – единственное ограничение на величину потребления в состоянии $m \in \mathcal{C}(n)$. Точка максимума целевой функции задачи (3.15) по c_m при фиксированных W_m , $m \in \mathcal{C}(n)$, равна

$$c_m = \frac{W_m}{1 + (\alpha Z_m^*(1))^{1/(1-\alpha)}} \in [0, W_m],$$

так как $\alpha Z_m^*(1) \geq 0$. Данное выражение связывает оптимальные величины потребления и стоимости портфеля в задаче (3.15). Пусть

$$s_m \stackrel{\text{def}}{=} 1 + (\alpha Z_m^*(1))^{1/(1-\alpha)}.$$

Тогда $W_m = s_m c_m$,

$$u(c_m) + (W_m - c_m)^\alpha Z_m^*(1) = u(c_m) (1 + (s_m - 1)^\alpha \alpha Z_m^*(1)) = s_m u(c_m).$$

Поэтому при любом $n \in \mathcal{N}_t$, исключая переменные W_m , $m \in \mathcal{C}(n)$, задача (3.15) эквивалентно сводится к следующей задаче:

$$\begin{cases} Z_n^*(V_n) = \max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) s_m u(c_m) \\ \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) s_m c_m = V_n, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \quad (3.16)$$

Используя замену (3.13) при $n \in \mathcal{N}_t$, находим, что $Z_n^*(V_n) = V_n^\alpha Z_n^*(1)$, где $Z_n^*(1)$ – максимум в задаче (3.16) с $V_n = 1$.

Определяем оптимальное значение $Z_0^*(V_0) = V_0^\alpha Z_0^*(1)$ и переходим к решению задачи (3.12). С учетом условия $V_0 + c_0 = v$ максимум целевой функции

$$Z = u(c_0) + (v - c_0)^\alpha Z_0^*(1)$$

по $c_0 \in [0, v]$ достигается при $c_0^* = v/s_0$.

Так как стоимость портфеля в состоянии $n \in \mathcal{N}$ можно представить в виде $V_n = W_n - c_n = c_n(s_n - 1)$, то оптимальное решение задачи (3.6) можно определить последовательно следующим способом:

$$c_0^* = \frac{v}{s_0}, \quad c_n^* = \bar{c}_n^* c_{a(n)}^* (s_{a(n)} - 1), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где $s_n = 1 + (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)}$, $\bar{c}_n^*$ – оптимальное решение задач (3.10) и (3.16) при $V_{a(n)} = 1$. Максимум целевой функции исходной задачи равен

$$Z^* = u(c_0^*) + (v - c_0^*)^\alpha Z_0^*(1) = s_0 u(c_0^*) = \frac{v^\alpha}{\alpha} \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}.$$

□

Логарифмическая функция полезности

Теорема 3.3. *Оптимальный процесс потребления в задаче (3.6) с логарифмической функцией полезности является q -мартингалом при $q \in Q$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t = 0, \dots, T - 1$. Равенство (3.8) позволяет выразить стоимость портфеля в момент времени t через объемы потребления в следующие за ним моменты времени $t + 1, \dots, T$. По определению (1.16) условной мартингальной меры $q(\cdot|\mathcal{D}(n))$ при каждом фиксированном $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ для всех $m \in \mathcal{D}(n)$ выполнено

$$q_m = q_n q(m|\mathcal{D}(n))$$

Тогда при $t > 0$ получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} q_n \left(c_n + \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} q(m|\mathcal{D}(n)) c_m \right) = \\ &= \sum_{s=0}^t \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} q_n V_n. \end{aligned}$$

С помощью этого выражения и равенства (3.8) задачу (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z^* &= \max_{(c, V_n, n \in \mathcal{N}_t)} \left[\sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} p_n \ln c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} \left(p_n \ln c_n + \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} p_m \ln c_m \right) \right] \\ &\left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=0}^t \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} q_n V_n = v, \quad \forall q \in Q^{\text{ext}} \\ &\sum_{m \in \mathcal{D}(n)} q(m|\mathcal{D}(n)) c_m = V_n, \quad \forall q(\cdot|\mathcal{D}(n)) \in Q^{\text{ext}}(\mathcal{D}(n)), n \in \mathcal{N}_t \\ &c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В частности, при $t = 0$ получаем задачу, эквивалентную (3.6),

$$\begin{aligned} Z^* &= \max_{(c, V_0)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n \ln c_n \\ &\left\{ \begin{aligned} &c_0 + V_0 = v, \\ &\sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n c_n = V_0, \quad \forall q \in Q^{\text{ext}} \\ &c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Делаем замены переменных

$$W_n = V_n + c_n, \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

$$\bar{c}_m = \frac{c_m}{V_n} = \frac{c_m}{W_n - c_n}, \quad m \in \mathcal{D}(n), \quad n \in \mathcal{N}_t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} p_m \ln c_m &= \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} p_m [\ln \bar{c}_m + \ln (W_n - c_n)] = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} p_m \ln \bar{c}_m + p_n (T - t) \ln (W_n - c_n). \end{aligned}$$

Таким образом, целевая функция записывается так:

$$Z = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} p_n \ln c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} \left(p_n (\ln c_n + (T - t) \ln (W_n - c_n)) + \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} p_m \ln \bar{c}_m \right).$$

Для случая $t = 0$ выполнено равенство $W_0 = v$, поэтому целевая функция равна

$$Z = \ln c_0 + T \ln (v - c_0) + \sum_{m \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_m \ln \bar{c}_m.$$

Система ограничений задачи (3.17) выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum_{n \in \mathcal{N}_t} q_n W_n = v, & \forall q \in Q^{\text{ext}} \\ \sum_{m \in \mathcal{D}(n)} q(m|\mathcal{D}(n)) \bar{c}_m = 1, & \forall q(\cdot|\mathcal{D}(n)) \in Q^{\text{ext}}(\mathcal{D}(n)), \quad n \in \mathcal{N}_t \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}_s, \quad s = 0, \dots, t-1 \\ W_n \geq c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}_t \\ \bar{c}_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{N}_s, \quad s = t+1, \dots, T. \end{array} \right.$$

При фиксированной величине W_n максимум целевой функции Z по c_n , $n \in \mathcal{N}_t$, достигается при

$$c_n = \frac{W_n}{T - t + 1}.$$

Преобразуем с учетом этих равенств первую группу ограничений задачи (3.7). Для всех $q(\cdot|n) \in Q(n)$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$

$$\sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) W_m = W_n - c_n \Leftrightarrow \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m = c_n.$$

В результате, приходим к определению мартингального процесса (1.2). Таким образом, оптимальный процесс потребления c^* является q -мартингалом. $\square$

Теорема 3.3 позволяет провести декомпозицию исходной задачи на несколько однопериодных задач. Для этого надо положить

$$c_0^* = \frac{v}{T+1}$$

и последовательно по $t = 1, \dots, T$ определить оптимальный процесс потребления c^* , решая задачи

$$\begin{aligned} & \max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m \ln c_m \\ & \begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m = c_n^*, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.2. Постоянная норма потребления

В данном разделе рассматривается следующая постановка задачи оптимального потребления. Будем считать, что отношение величины потребления к стоимости портфеля зависит только от момента времени. Это отношение определяется инвестором и обозначается через

$$\gamma_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_n}{V_n + c_n}, \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T.$$

Итак, запишем исходную задачу

$$\begin{aligned}
 Z^* &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\gamma, c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(V_m + c_m) = V_n, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ V_0 + c_0 = v, \\ V_n = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n = \gamma_t(V_n + c_n) \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T. \end{array} \right. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Задача (3.18) соответствует задаче (3.7) с добавленными нелинейными ограничениями $c_n = \gamma_t(V_n + c_n)$, $\forall n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$.

Замечание 3.2. Оптимальное решение задачи (3.18) для логарифмической функции полезности совпадает с оптимальным решением исходной задачи (3.7) без ограничения на долю потребления. Действительно, при доказательстве теоремы 3.3 показано, что

$$V_n^* = (T - t)c_n^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T,$$

т.е. оптимальная доля потребления равна $\gamma_t^* = 1/(T - t + 1)$ и не зависит от состояния рынка $n \in \mathcal{N}_t$.

Перейдем к решению задачи со степенной функцией полезности. Пусть $u(x) = x^\alpha/\alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. Схема метода динамического программирования аналогична решению задачи оптимального потребления без условия на долю потребляемых средств. Вводя обозначения (3.9) для целевых функций, переходим к последовательному решению задач (3.10), (3.11), (3.12) с дополнительным ограничением. Так как конечные сбережения следует потратить полностью, имеем $\gamma_T^* = 1$. С помощью зависимости

$$c_n = \frac{\gamma_t V_n}{1 - \gamma_t}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

исключим все переменные c_n из решаемых задач, кроме c_0 и $c(T)$. Таким образом, для решения задачи (3.18) необходимо последовательно решить следующие задачи для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 1, \dots, 0$:

Сначала для всех $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ и любого $V_n \geq 0$ необходимо решить задачи

$$Z_n^*(V_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) u(c_m) \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m = V_n, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ c_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases}$$

Далее, для всех $n \in \mathcal{N}_{t-1}$, $t = T - 1, \dots, 1$, $V_n \geq 0$:

$$Z_n^*(V_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\gamma_t, V_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \left[u\left(\frac{\gamma_t V_m}{1 - \gamma_t}\right) + Z_m^*(V_m) \right] \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) V_m = V_n(1 - \gamma_t), & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ 1 \geq \gamma_t \geq 0, \\ V_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases}$$

Затем остается решить задачу

$$Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_0, V_0)} [u(c_0) + Z_0^*(V_0)]$$

$$\begin{cases} V_0 + c_0 = v, \\ V_0 \geq 0, c_0 \geq 0. \end{cases}$$

Теорема 3.4. *Оптимальное решение (γ^*, c^*, V^*) задачи (3.18) при степенной функции полезности определяется по формулам*

$$c_0^* = \frac{v}{1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)}}, \quad \gamma_0^* = \frac{c_0^*}{v},$$

$$c_n^* = \frac{\gamma_t^*}{\gamma_{t-1}^*} (1 - \gamma_{t-1}^*) \bar{V}_n^* c_{a(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T - 1,$$

$$c_n^* = \frac{1 - \gamma_{T-1}^*}{\gamma_{T-1}^*} \bar{c}_n^* c_{a(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T, \quad \gamma_T^* = 1,$$

$$V_n^* = \frac{1 - \gamma_t^*}{\gamma_t^*} c_n^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T - 1,$$

где $(\gamma_t^*, \bar{V}_n^*)$ – оптимальное решение задачи (3.20) при $V_{a(n)} = 1$ для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$, $\bar{c}_n^*$ – оптимальное решение задачи (3.19) при $V_{a(n)} = 1$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathcal{N}_{T-1}$. Как и при доказательстве теоремы 3.2 имеем $u(c_m) = V_n^\alpha u(\bar{c}_m)$ для всех $m \in \mathcal{C}(n)$, где $\bar{c}_m$ определяется заменой (3.13). Тогда $Z_n^*(V_n) = V_n^\alpha Z_n^*(1)$.

Пусть $n \in \mathcal{N}_{t-1}$, $t = T-1, \dots, 1$. Введем переменные

$$\bar{V}_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_m}{V_n(1 - \gamma_t)}, \quad \forall m \in \mathcal{C}(n).$$

Преобразуем целевую функцию задачи (3.20) с учетом замены:

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) \left[u\left(\frac{\gamma_t V_m}{1 - \gamma_t}\right) + V_m^\alpha Z_m^*(1) \right] = \\ &= V_n^\alpha \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) u(\bar{V}_m) [\gamma_t^\alpha + \alpha Z_m^*(1)(1 - \gamma_t)^\alpha]. \end{aligned}$$

Итак, на данном шаге решается задача

$$\begin{aligned} Z_n^*(1) &= \max_{(\gamma_t, \bar{V}_m, m \in \mathcal{C}(n))} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p(m|n) u(\bar{V}_m) [\gamma_t^\alpha + \alpha Z_m^*(1)(1 - \gamma_t)^\alpha] \\ &\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) \bar{V}_m = 1, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n) \\ 1 \geq \gamma_t \geq 0, \\ \bar{V}_m \geq 0, & \forall m \in \mathcal{C}(n). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для окончания решения задачи заметим, что

$$Z^* = \max_{c_0 \in [0, v]} [u(c_0) + (v - c_0)^\alpha Z_0^*(1)],$$

тогда

$$c_0^* = \frac{v}{1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)}}, \quad Z^* = \frac{v^\alpha}{\alpha} \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}.$$

Оптимальное решение задачи (3.18) можно определить последовательно следующим способом:

$$\begin{aligned} c_0^* &= \frac{v}{1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)}}, \quad \gamma_0^* = \frac{c_0^*}{v}, \\ c_n^* &= \frac{\gamma_t^* V_n^*}{1 - \gamma_t^*} = \gamma_t^* \bar{V}_n^* V_{a(n)}^* = \frac{\gamma_t^*}{\gamma_{t-1}^*} (1 - \gamma_{t-1}^*) \bar{V}_n^* c_{a(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ c_n^* &= \frac{1 - \gamma_{T-1}^*}{\gamma_{T-1}^*} \bar{c}_n^* c_{a(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{aligned}$$

где пара $(\gamma_t^*, \bar{V}_n^*)$ – оптимальное решение задачи (3.21) для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T-1$, $\bar{c}_n^*$ – оптимальное решение задачи (3.19) при $V_{a(n)} = 1$. $\square$

3.2. Модель рынка с деревьями сценариев с самопересечениями

Ранее в работе предполагалось, что каждая вершина дерева, моделирующего финансовый рынок, имеет единственного родителя. В данном разделе это условие снимается. Таким образом, в дереве сценариев могут существовать две различные цепочки последовательных состояний, ведущие из одного состояния в другое. Например, в стандартной триномиальной модели рынка, изображенной на рисунке 3.1, считается, что дисконтированная стоимость единственного рискованного актива не меняется, если в процессе изменения стоимости число моментов роста равно числу падений. Поэтому число состояний рынка полиномиально растет с увеличением числа периодов времени [19], а именно равно

$$\sum_{t=0}^T |\mathcal{N}_t| = \sum_{t=0}^T (2t + 1) = (T + 1)^2.$$

При тех же моделируемых сценариях изменения рынка в модели без самопересечений имеем следующее число состояний:

$$\sum_{t=0}^T 3^t = \frac{3^{T+1} - 1}{2},$$

так как $|\mathcal{C}(n)| = 3$ для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

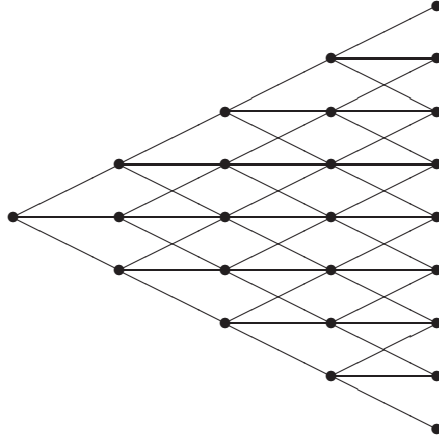


Рисунок 3.1. Триномиальная модель рынка

3.2.1. Описание модели

Обозначим через $\mathcal{A}(n)$ вершины из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующие вершине $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$. Положим $\mathcal{A}(0) = 0$.

Вероятностная мера $p = (p_n, n \in \mathcal{N})$ на Ω приписывает сценариям поведения рынка вероятности $p(\omega) > 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Причем для каждой цепочки последовательных состояний $\omega = (n_0, \dots, n_T)$ выполнено

$$p(\omega) = \prod_{t=1}^T p(n_t | n_{t-1}).$$

Вероятности p_n перехода рынка в состояние $n \in \mathcal{N}$ определяются по рекурсивной схеме

$$p_0 = 1, \quad p_n = \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} p_m p(n|m), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Как и раньше будем считать, что мера p задает истинные (статистические) вероятности событий. Она однозначно определяется по условным вероятностным распределениям $p(\cdot|m) = (p(n|m), n \in \mathcal{C}(m))$, $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

Вероятностная мера $q = (q_n, n \in \mathcal{N})$, эквивалентная p ($q_n > 0$ для всех $n \in \mathcal{N}$), называется мартингальной, если она определяется подобно мере p по

следующей рекурсивной схеме:

$$q_0 = 1, \quad q_n = \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} q_m q(n|m), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

а условные меры $q(\cdot|m) = (q(n|m), \quad n \in \mathcal{C}(m))$ определяются для каждого состояния $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ из условий

$$X_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) X_n, \quad q(n|m) > 0, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m). \quad (3.22)$$

Множества условных мер, удовлетворяющих условиям (3.22), обозначим через $Q(m)$. Пусть $Q^{\text{ext}}(m)$ – множество крайних точек замыкания $\overline{Q}(m)$.

Будем считать, что величина потребляемых средств в каждом состоянии рынка зависит от состояний, в которых рынок находится сейчас и находился в предыдущий момент времени, т.е. потребление является функцией от текущей стоимости рискованного актива и последнего изменения стоимости (кратковременного тренда рынка). Поэтому для величины потребления введем обозначение c_{mn} , где $m \in \mathcal{A}(n)$. Потребление в начальный момент времени обозначим за c_0 . Стратегией инвестора назовем пару (c, θ) , где процесс потребления $c = \{c(t)\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta(t)\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

$$X_n \cdot \theta_m = X_n \cdot \theta_n + c_{mn}, \quad \forall m \in \mathcal{A}(n), \quad n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Пусть v – начальный капитал инвестора. Так как функция полезности $u(x)$ считается возрастающей и строго вогнутой, инвестору следует тратить весь свой начальный капитал и использовать все конечные сбережения. Поэтому в данном разделе также можно ограничиться стратегиями, удовлетворяющими условиям $v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0$ и $X_n \cdot \theta_n = 0$ для всех конечных состояний $n \in \mathcal{N}_T$.

Рынки по-прежнему предполагаются безарбитражными и неполными.

3.2.2. Задача потребления с учетом тренда рынка

Определим исходную задачу оптимального потребления для описанной модели рынка. Вероятность того, что рынок перейдет из состояния m к следующему за ним n , равна $p_m p(n|m)$. Основные ограничения образованы условиями самофинансирования, начальными и конечными условиями и неотрицательностью величины потребления. Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{(c, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} p_m p(n|m) u(c_{mn}) \\ & \begin{cases} X_n \cdot \theta_m = c_{mn} + X_n \cdot \theta_n, & \forall m \in \mathcal{A}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \{0\} \\ v = c_0 + X_0 \cdot \theta_0, \\ X_n \cdot \theta_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_{mn} \geq 0, & \forall m \in \mathcal{A}(n), n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Переходя к следующей задаче, мы разбиваем на два этапа определение оптимального потребления и портфелей, которые позволяют его реализовать.

$$\begin{aligned} & \max_{(c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} p_m p(n|m) u(c_{mn}) \\ & \begin{cases} V_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)(c_{mn} + V_n), & \forall q(\cdot|m) \in Q(m), m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ v = c_0 + V_0, \\ V_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_{mn} \geq 0, & \forall m \in \mathcal{A}(n), n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теорема 3.5. *Задачи (3.23) и (3.24) эквивалентны.*

Доказательство. Целевые функции задач одинаковы, поэтому достаточно показать, что пара (c, θ) является допустимым решением задачи (3.23) тогда и только тогда, когда пара (c, V) допустима в задаче (3.24).

Необходимость. Пусть (c, θ) удовлетворяет ограничениям задачи (3.23). Покажем, что найдется процесс V такой, что пара (c, V) является допустимой

в задаче (3.24). Определим V в каждом состоянии $n \in \mathcal{N}$ по формулам $V_n = X_n \cdot \theta_n$. Для произвольного фиксированного $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ домножим на $q(n|m)$ равенства $X_n \cdot \theta_m = c_{mn} + X_n \cdot \theta_n$, $n \in \mathcal{C}(m)$. В результате для всех $q(\cdot|m) \in Q(m)$ имеем:

$$\sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)(c_{mn} + V_n) = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)X_n \cdot \theta_m = X_m \cdot \theta_m = V_m.$$

Поэтому пара (c, V) удовлетворяет ограничениям задачи (3.24).

Достаточность. Пусть пара (c, V) допустима в задаче (3.24). Покажем, что найдется процесс θ , удовлетворяющий ограничениям задачи (3.23). Воспользуемся теоремой Фредгольма [2]. Перепишем равенства системы ограничений задачи (3.23).

$$\begin{cases} -X_0 \cdot \theta_0 = c_0 - v, \\ X_n \cdot \theta_m - X_n \cdot \theta_n = c_{mn}, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m), m \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_{T-1} \cup \mathcal{N}_T) \\ X_n \cdot \theta_m = c_{mn}, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m), m \in \mathcal{N}_{T-1}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Так как конечные остатки $X_n \cdot \theta_n = 0$, можно считать, что $\theta_n = 0$ для любого $n \in \mathcal{N}_T$, поэтому эти переменные можно исключить. Однородная система, сопряженная к (3.25), выглядит так:

$$\sum_{n \in \mathcal{C}(m)} X_n q_{mn} - X_m \sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm} = 0, \quad \forall m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \quad (3.26)$$

Переменная q_{mn} соответствует равенству системы (3.25), содержащему переменную c_{mn} . Проверим, что любое решение системы (3.26) ортогонально правой части системы (3.25). Будем использовать следующие обозначения:

$$q(n|m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_{mn}}{\sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm}} I \left(\sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm} \neq 0 \right), \quad \forall n \in \mathcal{C}(m), m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

Из доказательства теоремы 3.1 следует, что $q(n|m)$ справедливо считать условной мартингальной мерой, т.е. $q(\cdot|m) \in Q(m)$ для любого $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

Сначала покажем, что

$$\sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} (c_{mn} + V_n) = \sum_{k \in \mathcal{N}_{t-1}} \sum_{m \in \mathcal{C}(k)} q_{km} V_m, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} [c_{mn} + V_n] &= \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \left(\frac{\sum_{k \in \mathcal{A}(m)} q_{km}}{\sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm}} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} [c_{mn} + V_n] \right) = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{t-1}} \sum_{m \in \mathcal{C}(k)} \left(\frac{q_{km}}{\sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm}} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} [c_{mn} + V_n] \right) = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{t-1}} \sum_{m \in \mathcal{C}(k)} q_{km} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} \frac{q_{mn}}{\sum_{l \in \mathcal{A}(m)} q_{lm}} [c_{mn} + V_n] = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{t-1}} \sum_{m \in \mathcal{C}(k)} q_{km} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) [c_{mn} + V_n] = \sum_{k \in \mathcal{N}_{t-1}} \sum_{m \in \mathcal{C}(k)} q_{km} V_m \end{aligned}$$

Учитывая доказанное равенство и условия $V_n = 0$ для всех состояний $n \in \mathcal{N}_T$, запишем скалярное произведение правой части системы (3.25) и вектора q решений системы (3.26).

$$\begin{aligned} -vq_0 + c \cdot q &= (c_0 - v)q_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} c_{mn} = \\ &= (c_0 - v)q_0 + \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} c_{mn} + \sum_{m \in \mathcal{N}_{T-1}} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} [c_{mn} + V_n] = \\ &= (c_0 - v)q_0 + \sum_{t=0}^{T-3} \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} c_{mn} + \sum_{m \in \mathcal{N}_{T-2}} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_{mn} [c_{mn} + V_n] = \\ &= \dots = (c_0 - v)q_0 + \sum_{n \in \mathcal{C}(0)} q_{0n} [c_{0n} + V_n] = (c_0 - v)q_0 + q_0 V_0 = 0 \end{aligned}$$

Итак, любое решение системы (3.26) ортогонально правой части системы (3.25), поэтому найдется допустимый портфельный процесс θ , реализующий потребление c , такой, что $V_n = X_n \cdot \theta_n$, $n \in \mathcal{N}$. $\square$

Следующим шагом является замена множеств условных мартингальных мер $Q(m)$ множествами $Q^{\text{ext}}(m)$ в ограничениях задачи (3.24). При каждом

состоянии $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ ограничение

$$V_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m)(c_{mn} + V_n)$$

линейно по условной мере $q(\cdot|m) \in Q(m)$, поэтому в системе ограничений достаточно оставить только условия, где $q(\cdot|m) \in Q^{\text{ext}}(m)$. В результате решаемая задача имеет конечное число линейных ограничений, а число переменных значительно сокращается.

Оптимальный портфельный процесс определяется из условий самофинансирования аналогично теореме 1.1.

3.2.3. Постоянная норма потребления

В данном разделе будем рассматривать такие деревья сценариев, для которых выполнены следующие условия:

1. Каждая вершина-родитель имеет одинаковое число потомков.
2. Для каждого актива $j = 0, \dots, d$ множество значений $\mathcal{R}^j$, которые может принимать случайная величина доходности

$$R^j(t) = \frac{X^j(t) - X^j(t-1)}{X^j(t-1)},$$

не зависит от момента времени $t = 1, \dots, T$ и состояния, в котором рынок находится в момент времени $t-1$. Кроме того, все значения из множества $\mathcal{R}^j$ принимаются с положительными вероятностями.

3. Каждая вершина-родитель, за исключением конечных, имеет вершину-потомка с нулевым вектором доходностей. Переход рынка к этому состоянию не приводит к изменению дисконтированных стоимостей бумаг. Для аппроксимации произвольных рынков можно считать вероятность такого перехода близкой к нулю. Для каждого состояния $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ обозначим эту вершину через $e(n)$ ($e^{-1}(m) = n \Leftrightarrow e(n) = m$, $e^0(n) = n$, $e^2(n) = e(e(n))$ и т.д.).

При данных требованиях множества крайних точек $Q^{\text{ext}}(m)$ не зависят от $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, и среди них существует вектор $q(\cdot|m) = (q(n|m), n \in \mathcal{C}(m))$ с компонентами

$$q(n|m) = \begin{cases} 1, & n = e(m) \\ 0, & n \neq e(m). \end{cases}$$

Простейшим примером дерева, удовлетворяющего данным условиям, является триномиальная модель рынка, изображенная на рисунке 3.1 на с. 82. Другой пример – дерево сценариев с пятью потомками у каждой вершины-родителя – рассматривается в работе [19].

Будем считать постоянной долю потребления

$$\gamma_t = \frac{c_{mn}}{c_{mn} + V_n}, \quad \forall m \in \mathcal{A}(n), n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T.$$

В таком случае при любом фиксированном $n \in \mathcal{N}$

$$\frac{c_{m_1 n}}{c_{m_1 n} + V_n} = \frac{c_{m_2 n}}{c_{m_2 n} + V_n}, \quad \forall m_1, m_2 \in \mathcal{A}(n).$$

Отсюда следуют равенства $c_{m_1 n} = c_{m_2 n}$. Поэтому можно считать, что величина потребления c_n определяется только состоянием $n \in \mathcal{N}$, в котором рынок находится в данный момент времени. С учетом теоремы 3.5 и новых обозначений исходная задача с ограничением на долю потребления примет вид

$$\begin{aligned} & \max_{(\gamma, c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \left\{ \begin{array}{ll} V_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(c_m + V_m), & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ v = c_0 + V_0, & \\ V_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N} \\ \gamma_t = c_n / (c_n + V_n), & \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Опустим последние ограничения на долю потребления и докажем эквивалентность следующих задач.

$$\begin{aligned} & \max_{(c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \left\{ \begin{aligned} & V_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(c_m + V_m), \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ & v = c_0 + V_0, \\ & V_n = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \\ & c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \max_c \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ & v = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}, \\ & c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Теорема 3.6. *Задачи (3.28) и (3.29) эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что для любой допустимой в задаче (3.28) пары (c, V) потребление c допустимо в задаче (3.29). Сначала докажем методом индукции по $t = T - 1, \dots, 0$, что для всех $q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n)$, $n \in \mathcal{N}_t$, выполнены равенства

$$V_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)V_m, \quad c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)c_m.$$

Для любого $n \in \mathcal{N}_{T-1}$ величина $V_m = 0$ для всех $m \in \mathcal{C}(n)$. Тогда из ограничений задачи (3.28) следует, что

$$V_n = c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)c_m,$$

т.е. утверждение верно. Предположим его истинность для любого $n \in \mathcal{N}_{t+1}$, докажем утверждение при любом $n \in \mathcal{N}_t$. Имеем

$$\begin{aligned} V_{e(n)} &= c_{e(n)} + V_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(e(n))} q(m|e(n))(c_m + V_m) = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(e(m)|e(n))(c_{e(m)} + V_{e(m)}) = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(c_{e(m)} + V_{e(m)}) = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)V_m. \end{aligned}$$

Далее, учитывая

$$V_n = c_{e(n)} + V_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(c_m + V_m),$$

окончательно получаем, что $c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)c_m$ для всех $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

Затем из условия $V_n = c_{e(n)} + V_{e(n)}$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, следует, что

$$v = c_0 + V_0 = c_0 + c_{e(0)} + V_{e(0)} = \dots = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Обратно, докажем, что для любого вектора c , допустимого в задаче (3.29), найдется такой процесс $V = \{V(t)\}$, что пара (c, V) будет допустимой в задаче (3.28). Действительно, определим процесс V последовательно при всех $t = T, \dots, 0$ по формуле

$$V_n = \begin{cases} 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_{e(n)} + V_{e(n)}, & \forall n \in \mathcal{N}_t, t = T-1, \dots, 0, \end{cases}$$

при этом будут выполняться равенства

$$V_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n)(c_m + V_m), \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

По построению процесса V выполнено равенство $v = c_0 + V_0$. Теорема полностью доказана. $\square$

Заметим, что в состояниях $e^t(0)$, $t = 0, \dots, T$, вектор дисконтированных стоимостей активов не меняется: $X_{e^t(0)} = X_0$.

Рассмотрим декомпозицию задачи (3.29) для логарифмической и степенной функций. Введем следующее обозначение:

$$\bar{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_n}{c_{e^t(0)}}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T. \quad (3.30)$$

При $u(x) = \ln x$ задача (3.29) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \max_{(\bar{c}, c_{e^t(0)}, t=0, \dots, T)} \left[\sum_{n \in \mathcal{N}} p_n \ln \bar{c}_n + \sum_{t=0}^T \ln c_{e^t(0)} \right] \\ \bar{c}_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) \bar{c}_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \\ \bar{c}_{e^t(0)} = 1, \quad \forall t = 0, \dots, T \\ \bar{c}_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ v = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}, \\ c_{e^t(0)} \geq 0, \quad \forall t = 0, \dots, T. \end{cases}$$

В системе ограничений выделяются независимые блоки с переменными $\bar{c}_n$ по $t = 1, \dots, T$ и блок, соответствующий единственному ограничению $v = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}$. По лемме Гиббса [25, с. 10] оптимальное решение задачи при фиксированном $\bar{c}$ равно

$$c_{e^t(0)}^* = \frac{v}{T+1}, \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

Итак, вместо решения задачи (3.29) можно независимо для каждого момента времени $t = 1, \dots, T$ решить следующие задачи:

$$\begin{cases} \max_{\bar{c}(t)} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n u(\bar{c}_n) \\ \bar{c}_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) \bar{c}_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N}_{t-1} \\ \bar{c}_{e^t(0)} = 1, \\ \bar{c}_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t. \end{cases} \quad (3.31)$$

Оптимальное решение c^* задачи (3.29) в результате определяется с помощью обратной замены

$$c_n^* = \bar{c}_n^* c_{e^t(0)}^* = \frac{v \bar{c}_n^*}{T+1}, \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}.$$

При степенной функции полезности $u(x) = x^\alpha / \alpha$ ($\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$) с учетом замены (3.30) максимум Z^* целевой функции задачи (3.29) при фиксированных $c_{e^t(0)}$, $t = 0, \dots, T$, равен

$$\frac{c_0^\alpha}{\alpha} + \sum_{t=1}^T c_{e^t(0)}^\alpha Z_t^*,$$

где Z_t^* – максимумы задач (3.31), $t = 1, \dots, T$. В результате применения леммы Гиббса имеем

$$c_0^* = \frac{v}{1 + \sum_{t=1}^T (\alpha Z_t^*)^{1/(1-\alpha)}}, \quad c_{e^t(0)}^* = \frac{v (\alpha Z_t^*)^{1/(1-\alpha)}}{1 + \sum_{t=1}^T (\alpha Z_t^*)^{1/(1-\alpha)}}, \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

$$Z^* = \frac{v^\alpha}{\alpha} \left(1 + \sum_{t=1}^T (\alpha Z_t^*)^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha}.$$

Вернемся к ограничению на долю потребления.

$$V_n = \sum_{s=1}^{T-t} c_{e^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

поэтому, опираясь на теорему 3.6, можно преобразовать задачу (3.28)

$$\begin{cases} \max_{(\gamma, c)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ v = \sum_{t=0}^T c_{e^t(0)}, \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \gamma_t = c_n / \sum_{s=0}^{T-t} c_{e^s(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T. \end{cases} \quad (3.32)$$

Логарифмическая функция полезности

Следующая теорема показывает, что так же как в модели рынка без самопересечений оптимальное потребление является q -мартингалом.

Теорема 3.7. *Для оптимального решения (γ^*, c^*) задачи (3.32) при логарифмической функции полезности справедливы равенства $c_n^* = c_{e(n)}^*$ для любого $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.*

Доказательство. Из ограничения на долю потребления для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$, получаем:

$$\gamma_{t+1} = \frac{c_{e(n)}}{\sum_{s=1}^{T-t} c_{e^s(n)}}, \text{ тогда } \gamma_t = \frac{c_n}{c_n + \sum_{s=1}^{T-t} c_{e^s(n)}} = \frac{c_n}{c_n + c_{e(n)}\gamma_{t+1}^{-1}}, \text{ поэтому}$$

$$c_n = \frac{\gamma_t}{(1 - \gamma_t)\gamma_{t+1}} c_{e(n)}.$$

Для упрощения выкладок введем обозначение

$$\beta_t = \frac{1}{\prod_{s=t}^{T-1} (1 - \gamma_s)}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Тогда

$$c_n = \beta_t \gamma_t c_{e^{T-t}(n)}, \quad c_{e^T(0)} = \frac{c_0}{\beta_0 \gamma_0} = \frac{v}{\beta_0}.$$

Запишем целевую функцию Z задачи (3.32) через переменные γ и c_n , $n \in \mathcal{N}_T$. Для этого введем следующие обозначения для всех $n \in \mathcal{N}_T$:

$$k(n) = \max \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid e^{-k}(n) \in \mathcal{N}\}, \quad \bar{p}_n = \sum_{s=0}^{k(n)} p_{e^{-s}(n)}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{t=0}^T \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n \ln c_n = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n \ln (\beta_t \gamma_t c_{e^{T-t}(n)}) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n \ln c_n = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n \ln (\beta_t \gamma_t) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln c_n = \sum_{t=0}^{T-1} \ln (\beta_t \gamma_t) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln c_n. \end{aligned}$$

Сделаем замену $\bar{c}_n = c_n / c_{e^T(0)}$, $n \in \mathcal{N}_T$. Тогда

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{t=0}^{T-1} \ln(\beta_t \gamma_t) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln \bar{c}_n + \ln c_{e^T(0)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n = \\
 &= \ln \left(\frac{\prod_{s=0}^{T-1} \gamma_s}{\prod_{s=0}^{T-1} (1 - \gamma_s)^{s+1}} \right) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln \bar{c}_n + (T+1) \ln \left(v \prod_{s=0}^{T-1} (1 - \gamma_s) \right) = \\
 &= \ln \left(\prod_{s=0}^{T-1} \gamma_s \prod_{s=0}^{T-1} (1 - \gamma_s)^{T-s} \right) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln \bar{c}_n + (T+1) \ln v.
 \end{aligned}$$

Система ограничений выглядит так:

$$\begin{cases} \bar{c}_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) \bar{c}_m, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ \bar{c}_{e^T(0)} = 1, \\ \bar{c}_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ 1 \geq \gamma_t \geq 0, & \forall t = 0, \dots, T-1. \end{cases}$$

$$\gamma_t^* = \arg \max_{1 \geq \gamma_t \geq 0} \ln(\gamma_t (1 - \gamma_t)^{T-t}) = \frac{1}{T-t+1}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

и совпадает с оптимальной долей потребления в задаче для модели рынка без самопересечений (см. замечание 3.2). Тогда для всех $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T-1$,

$$\frac{c_n^*}{c_{e(n)}^*} = \frac{\gamma_t^*}{(1 - \gamma_t^*) \gamma_{t+1}^*} = 1.$$

□

В результате задача (3.27) сводится к следующей:

$$\begin{aligned}
 &\max_{c(T)} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \bar{p}_n \ln c_n \\
 &\begin{cases} c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ c_{e^T(0)} = v/(T+1), \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Остальные компоненты оптимального решения определяются для всех $t = 0, \dots, T$ по следующим формулам:

$$c_n^* = c_{e^{T-t}(n)}^*, \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad \gamma_t^* = \frac{1}{T-t+1}.$$

Итак, по теоремам 3.6 и 3.7 для процесса потребления c^* , оптимального в задаче (3.27), выполнены равенства

$$c_n^* = c_{e(n)}^* = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m^*, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

поэтому он является q -мартингалом при $q \in Q$.

Степенная функция полезности

Аналогично упростим задачу для функции полезности $u(x) = x^\alpha/\alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. Введем в рассмотрение следующую вспомогательную задачу:

$$\max_{c(T)} \left[\left(\frac{v}{c_{e^T(0)}} - 1 \right)^\alpha \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_t(c(T)) \right)^{1-\alpha} + h_T^{1-\alpha}(c(T)) \right] \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, & \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T, \end{cases}$$

где

$$h_t(c(T)) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n c_{e^{T-t}(n)}^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad t = 0, \dots, T.$$

Теорема 3.8. При степенной функции полезности максимум задачи (3.32) равен максимуму задачи (3.33), а ее оптимальное решение (γ^*, c^*) равно

$$\begin{aligned} c_0^* &= v - c_{e^T(0)}^* \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t^*, \quad c_n^* = \bar{\gamma}_t^* c_{e^{T-t}(n)}^*, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ \gamma_t^* &= \frac{\bar{\gamma}_t^*}{T}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1, \quad \gamma_0^* = \frac{c_0^*}{v}, \quad \gamma_T^* = 1, \quad \text{где} \\ &\quad \sum_{s=t}^T \bar{\gamma}_s^* \\ \bar{\gamma}_t^* &= \frac{(v - c_{e^T(0)}^*) h_t(c^*(T))}{c_{e^T(0)}^* \sum_{s=0}^{T-1} h_s(c^*(T))}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1, \quad \bar{\gamma}_T^* = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.7 было показано, что

$$\bar{\gamma}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_n}{c_{e^{T-t}(n)}} = \frac{\gamma_t}{\prod_{s=t}^{T-1} (1 - \gamma_s)}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1.$$

Доопределим $\bar{\gamma}_T = 1$ и докажем индукцией по $t = T, \dots, 1$, что

$$\gamma_t = \frac{\bar{\gamma}_t}{\sum_{s=t}^T \bar{\gamma}_s}. \quad (3.34)$$

При $t = T$ $\gamma_T = 1$, выражение верно. Предположим его истинность для момента времени $t+1$ и докажем для момента времени t .

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\gamma_t}{\prod_{s=t}^{T-1} (1 - \gamma_s)} = \frac{\gamma_t \bar{\gamma}_{t+1}}{(1 - \gamma_t) \gamma_{t+1}} = \frac{\gamma_t}{1 - \gamma_t} \sum_{s=t+1}^T \bar{\gamma}_s,$$

отсюда получаем равенство (3.34). Следовательно, оно доказано для всех $t = T, \dots, 1$.

Воспользуемся теоремой 3.6 и подставим в целевую функцию Z задачи (3.32) следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_0 &= v - \sum_{t=1}^T c_{e^t(0)} = v - c_{e^T(0)} \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t, \\ c_n &= \bar{\gamma}_t c_{e^{T-t}(n)}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n \frac{c_n^\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[c_0^\alpha + \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t^\alpha \sum_{n \in \mathcal{N}_t} p_n c_{e^{T-t}(n)}^\alpha \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(v - c_{e^T(0)} \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t \right)^\alpha + \sum_{t=1}^T \bar{\gamma}_t^\alpha h_t^{1-\alpha} (c(T)) \right]. \end{aligned}$$

Тогда задача (3.32) принимает вид

$$\begin{cases} \max_{(\bar{\gamma}, c(T))} Z(\bar{\gamma}, c(T)) \\ c_{e(n)} = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} q(m|n) c_m, \quad \forall q(\cdot|n) \in Q^{\text{ext}}(n), \quad n \in \mathcal{N}_{T-1} \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \\ \bar{\gamma}_t \geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T-1 \\ \bar{\gamma}_T = 1. \end{cases}$$

Определим максимум функции $Z(\bar{\gamma}, c(T))$ по $\bar{\gamma}_t$, $t = 1, \dots, T-1$.

$$Z'_{\bar{\gamma}_t} = 0 \Leftrightarrow (c_{e^T(0)})^{1/(\alpha-1)} \left(v - c_{e^T(0)} \sum_{s=1}^T \bar{\gamma}_s \right) = \frac{\bar{\gamma}_t}{h_t(c(T))}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1.$$

Отсюда

$$\bar{\gamma}_t = \frac{(v - c_{e^T(0)}) h_t(c(T))}{c_{e^T(0)} \sum_{s=0}^{T-1} h_s(c(T))}, \quad \forall t = 1, \dots, T-1.$$

Подставим эти выражения в $Z(\bar{\gamma}, c(T))$.

$$\begin{aligned} Z(c(T)) &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(v - (v - c_{e^T(0)}) \frac{\sum_{t=1}^T h_t(c(T))}{\sum_{t=0}^{T-1} h_t(c(T))} \right)^\alpha + \sum_{t=0}^T \frac{(v - c_{e^T(0)})^\alpha h_t(c(T))}{c_{e^T(0)}^\alpha \left(\sum_{s=0}^{T-1} h_s(c(T)) \right)^\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{v}{c_{e^T(0)}} - 1 \right)^\alpha \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_t(c(T)) \right)^{1-\alpha} + h_T^{1-\alpha}(c(T)) \right]. \end{aligned}$$

В результате решение задачи (3.27) сводится к решению задачи (3.33).

□

Заключение

Основные результаты и выводы работы заключаются в следующем:

1. Предложен метод динамического программирования для решения задачи полного хеджирования обязательства европейского типа. Метод состоит в последовательном решении однопериодных взаимодвойственных задач линейного программирования. Для решения ряда задач частичного хеджирования разработаны декомпозиционные методы. Исследовано обобщение данных методов для решения задачи управления портфелем при наличии дивидендных выплат.
2. Проведен анализ оптимального решения многопериодной задачи Марковица при дополнительном требовании на стратегию инвестора. Описываются допустимые значения параметров модели, при которых процесс покупки и продажи ценных бумаг не приводит инвестора к техническому банкротству. В работах, изучающих решение задачи Марковица в различных постановках, вопрос разорения не ставился, что с практической точки зрения некорректно.
3. Игровые задачи, связанные с неопределенностью поведения продавца обязательства, относятся к задачам большой размерности, так как число стратегий покупателя обязательства растет сверхэкспоненциально. Поэтому вопрос декомпозиции таких задач является принципиальным. Доказано существование оптимальных выравнивающих стратегий в задачах частичного хеджирования обязательств американского типа в условиях неопределенности. Это позволило эквивалентно перейти к решению задач линейного программирования приемлемой размерности. В задаче хеджирования с фиксированной вероятностью также существенно снижено число ограничений.

4. Разработаны методы решения задач оптимального потребления для двух наиболее популярных типов дискретных моделей финансового рынка, в частности описан метод динамического программирования. На основе однородности функции Беллмана получены аналитические формулы для решения данных задач со степенной и логарифмической функциями полезности. Такие формулы для дискретных постановок задач оптимального потребления найдены впервые.

Полученные в диссертационной работе результаты позволяют сократить размерность оптимизационных задач, получить решения более оперативно. Поэтому они могут быть использованы для создания программных систем для финансовых учреждений, которые занимаются оценкой и хеджированием обязательств, построением торговых стратегий.

Литература

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005. — 278 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
3. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с.
4. Давыдов Э.Г. Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990. — 383 с.
5. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
6. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. — М.: Анкил, 2006. — 440 с.
7. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее приложения. — 1998. — Т. 43, № 1. — С. 152–161.
8. Соловьев А.И. Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 27–31 октября 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 65–66.
9. Соловьев А.И. Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН, 2015. — № 53. — С. 45–57.
10. Соловьев А.И. Оценка деривативов на дискретном рынке // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ

- имени М.В. Ломоносова, 14–23 апреля 2014 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 33–34.
11. Соловьев А.И. Частичное хеджирование американских обязательств на дискретном рынке // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 октября – 1 ноября 2013.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2013. — С. 36–37.
 12. Соловьев А.И. Частичное хеджирование платежных обязательств американского типа на дискретном рынке // Прикладная Математика и Информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова / Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева. — М.: МАКС Пресс, 2013. — № 44. — С. 114–124. (Soloviev A.I. Partial hedging of American claims in a discrete market // Computational Mathematics and Modeling. — 2014. — Vol. 25, № 4. — P. 592–601.)
 13. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. — М.: МЦНМО, 2008. — 496 с.
 14. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. — М.: ИНФРА-М, 2001. — 1028 с.
 15. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2 т. — М.: Фазис, 1998.
 16. Aho A.V., Sloane N.J.A. Some doubly exponential sequences // The Fibonacci Quarterly. — 1973. — Vol. 11. — P. 429–437.
 17. Black F., Scholes M. The Pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, № 3. — P. 637–654.

18. Bouchard B., Pham H. Optimal consumption in discrete-time financial models with industrial investment opportunities and nonlinear returns // The Annals of Applied Probability. — 2005. — Vol. 15, № 4. — P. 2393–2421.
19. Boyle P.P. A lattice framework for option pricing with two state variables // Journal of Financial and Quantitative Analysis. — 1988. — Vol. 23. — P. 1–12.
20. Boyle P.P., Evnine J., Gibbs S. Numerical evaluation of multivariate contingent claims // The Review of Financial Studies. — 1989. — Vol. 2, № 2. — P. 241–250.
21. Camci A., Pinar M.Ç. Pricing American contingent claims by stochastic linear programming // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. — 2009. — Vol. 58, № 6. — P. 627–640.
22. Chang H., Rong X.-M. An investment and consumption problem with CIR interest rate and stochastic volatility // Abstract and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1–12.
23. Chicago Mercantile Exchange. The Standart Portfolio Analysis of Risk (SPAN) performance bond system at the Chicago Mercantile Exchange. — Technical specification. — 1999.
24. Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7, № 3. — P. 229–263.
25. Danskin J.M. The Theory of Max-Min and Its Applications to Weapons Allocation Problems. — N.Y.: Springer-Verlag, 1967.
26. Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions. — N.J.: Princeton University Press, 1963.

27. Dempe S. Foundation of Bilevel Programming. — Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002.
28. Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory. — N.J.: Princeton University Press, 2001.
29. Ehrenfried S. Consumption-Investment Problems With State Dependent Discounting: Doctoral dissertation. — University of Ulm, Germany, 2012.
30. Föllmer H., Leukert P. Quantile hedging // Finance and Stochastics. — 1999. — Vol. 3, № 3. — P. 251–273.
31. Harrison J.M., Kreps D.M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. — 1979. — Vol. 20. — P. 381–408.
32. Harrison J.M., Pliska S.R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Applications. — 1981. — Vol. 11. — P. 215–260.
33. He H., Pearson N.D. Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the finite-dimensional case // Mathematical Finance. — 1991. — Vol. 1, № 3. — P. 1–10.
34. King A.J. Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims // Mathematical Programming Ser. B. — 2002. — Vol. 91. — P. 543–562.
35. King A.J., Koivu M., Pennanen T. Calibrated option bounds // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 2005. — Vol. 8. — P. 141–160.
36. Lawson C.L., Hanson R.J. Solving least squares problems. — N.J.: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.

37. Li D., Ng W. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation // *Mathematical Finance*. — 2000. — Vol. 10, № 3. — P. 387–406.
38. Lindberg P. Optimal partial hedging in a discrete-time market as a knapsack problem // *Mathematical Methods of Operations Research*. — 2010. — Vol. 72. — P. 433–451.
39. Lindberg P. Optimal partial hedging of an American option: shifting the focus to the expiration date // *Mathematical Methods of Operations Research*. — 2012. — Vol. 75, № 3. — P. 221–243.
40. Liu J. Portfolio selection in stochastic environments // *The Review of Financial Studies*. — 2007. — Vol. 20, № 1. — P. 1–39.
41. Lorenz J.M. Optimal Trading Algorithms: Portfolio Transactions, Multiperiod Portfolio Selection and Competitive Online Search. Doctoral dissertation. — Switzerland, ETH Zürich, 2008.
42. Markowitz H.M. Portfolio selection // *Journal of Finance*. — 1952. — Vol. 7. — P. 77–91.
43. McGarvey G. Sequence A135361. — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2007. — URL: <http://oeis.org/A135361>.
44. Merton R.C. A Rational theory of option pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. — 1973. — Vol. 4, № 1. — P. 141–183.
45. Merton R.C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates // *The Journal of Finance*. — 1974. — Vol. 29, № 2. — P. 449–470.
46. Merton R.C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // *Journal of Economic Theory*. — 1971. — Vol. 3, № 4. — P. 373–413.

47. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in discrete markets // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. — 2013. — Vol. 62, № 11. — P. 1403–1418.
48. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in incomplete discrete markets // EURO/INFORMS 26th European Conference on Operational Research. Rome 1-4 July, 2013. — Sapienza University of Rome. — 2013. — P. 54.
49. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in incomplete discrete markets // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15–19 октября 2013 г.: Труды. — М.: МАКС Пресс, 2013. — Т. 1. — С. 151–152.
50. Naik V. Finite state securities market models and arbitrage // Handbooks in Operations Research and Management Sciences, R.A. Jarrow and V. Maksimovic and W.T. Ziemba, eds. — North-Holland, Amsterdam. — 1995. — Vol. 9. — P. 31–64.
51. Perez-Hernandez L. On the existence of an efficient hedge for an American contingent claim within a discrete time market // Quantitative Finance. — 2007. — Vol. 7, № 5. — P. 547–551.
52. Pinar M.Ç. Buyer's quantile hedge portfolios in discrete-time trading // Quantitative Finance. — 2011. — Vol. 13, № 5. — P. 729–738.
53. Pliska S.R. Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. — Massachusetts: Blackwell Publishers, Malden, 1997.
54. Rockafellar R.J. Convex Analysis. — N.J.: Princeton University Press, 1970.

55. Rodriguez-Mancilla J.R., Ziemba W.T. The duality of option investment strategies for hedge funds // *Mathematical Programming Ser. A.* — 2008. — Vol. 113. — P. 95–131.
56. Runggaldier W.J., Trivellato B., Vargiolu T. A Bayesian adaptive control approach to risk management in a binomial model // *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, III*, R.C. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, eds. — Birkhäuser, Basel. — 2002. — Vol. 52. — P. 243–258.
57. Ruszczyński A. Some advances in decomposition methods for stochastic linear programming // *Annals of Operations Research.* — 1999. — Vol. 85. — P. 153–172.
58. Steinbach M.C. Markowitz revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis // *SIAM Review.* — 2001. — Vol. 43, № 1. — P. 31–85.
59. Tian S., Wets R. Pricing contingent claims: a computational compatible approach: Tech. Rep. — C.A.: University of California, Davis, 2006.
60. Wets R. Large scale linear programming techniques in stochastic programming. — IIASA Working Paper WP-84-090. — 1984. — URL: <http://webarchive.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/WP-84-090.pdf>.
61. Wolfe P. The simplex method for quadratic programming // *Econometrica.* — 1959. — Vol. 27. — P. 382–398.
62. Zangwill W.I. *Nonlinear Programming: A Unified Approach.* — N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.