

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ВАЛОВИК
Дмитрий Викторович

**Нелинейные одно- и двухпараметрические
задачи сопряжения на собственные значения
для системы уравнений Максвелла в слое**

Специальность 01.01.02 –
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор
Ю.Г. Смирнов

ПЕНЗА – 2014

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	4
I. ТЕМА И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ	4
II. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	6
III. ЦЕЛИ И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ	18
IV. ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ	20
V. ПУБЛИКАЦИИ И АПРОБАЦИЯ	21
ГЛАВА 1. НЕЛИНЕЙНАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН В СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ	23
1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	23
1.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ	27
1.3. СПЕКТР: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ	35
1.4. НЕЛИНЕЙНОСТЬ КЕРРА И НЕЛИНЕЙНОСТЬ С НАСЫЩЕНИЕМ	41
ГЛАВА 2. НЕЛИНЕЙНАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ	57
2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	57
2.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ	62
2.3. СПЕКТР: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ	75

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ТМ-ВОЛН В СЛОЕ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ	81
3.1. Постановка задачи	81
3.2. Переход к интегральным уравнениям	86
3.3. Исследование интегральных операторов	102
3.4. Единственность решения операторного уравнения	105
3.5. Непрерывность по спектральному параметру	108
3.6. Спектр: существование и локализация	110
3.7. Итерационный метод	116
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	122
ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ТЕ- и ТМ-ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ СЛОЕМ	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ	138
Б.1. Постановка задачи	138
Б.2. Дисперсионное уравнение	140
Б.5. Анализ дисперсионного уравнения	141
ПРИЛОЖЕНИЕ В. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ	145
В.1. Постановка задачи	145
В.2. Дисперсионное уравнение	147
В.3. Анализ дисперсионного уравнения	148
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. СВЯЗАННЫЕ ТЕ-ТМ-ВОЛНЫ	151
Г.1. Электромагнитные ТЕ- и ТМ-волны	151
Г.2. Электромагнитные ТЕ-ТМ-волны	152

ВВЕДЕНИЕ

I. ТЕМА И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Задачи сопряжения для системы уравнений Максвелла возникают всякий раз, когда распространение электромагнитных волн в неоднородной области изучается в строгой постановке. Под задачей сопряжения понимается следующая задача: рассматривается ограниченная или неограниченная область, внутри которой существует электромагнитное поле; внутри этой области существуют границы раздела сред (например, линии или поверхности разрыва непрерывности диэлектрической проницаемости), на этих границах раздела ставятся условия сопряжения для компонент электромагнитного поля; на границе рассматриваемой области ставятся граничные условия (которые являются условиями на бесконечности или условиями излучения в случае бесконечной области).

Многие из таких задач являются классическими в математической физике и хорошо изучены [11, 45, 60, 76, 81]. До известных экспериментов с лазерным излучением [95] при решении конкретных задач считалось, что материальные уравнения сред являются линейными, это соответствует линейному отклику среды на электромагнитное поле. После создания лазера оказалось, что отклик среды на интенсивное электромагнитное (лазерное) излучение является, вообще говоря, нелинейным. Таким образом, материальные уравнения стали записываться в виде нелинейных соотношений в общем случае как от напряженности электрического, так и от напряженности магнитного полей (см., например, [48, 60]). Это привело к постановке задач о распространении электро-

магнитных волн в средах с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от интенсивности поля (см., например, [26, 96]).

На протяжении нескольких десятилетий большое внимание уделяется задачам распространения монохроматических электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоских слоистых диэлектрических средах и круглых цилиндрических диэлектрических волноводах с керровской и более общими нелинейностями. Такие задачи приводят к *одно- и двухпараметрическим задачам сопряжения на собственные значения* для системы уравнений Максвелла. Искомыми в таких задачах являются значения одного (для однопараметрических) и пары (для двухпараметрических) спектральных параметров, отвечающих распространяющимся волнам.

С одной стороны, интерес к таким задачам связан с проявлением нелинейных эффектов на практике, необходимостью учитывать и использовать их влияние. С другой стороны, строгие постановки таких задач приводят к новому классу нелинейных задач на собственные значения, для которых не было разработано общих методов исследования.

Задачи распространения монохроматических ТЕ- и ТМ-волн в слое и круглом цилиндрическом волноводе с постоянной диэлектрической проницаемостью полностью изучены (см., например, [3, 11, 32, 35]). В математической формулировке такие задачи представляют собой задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла. Эти задачи сводятся к отысканию тех значений спектрального параметра (по сути, собственных чисел – значений постоянной распространения), при которых волна может распространяться. Собственные значения рассматриваемых задач удовлетворяют некоторому уравнению, которое называется дисперсионным. С математической точки зрения дисперсионное уравнение является уравнением относительно спектрального параметра, анализ которого позволяет делать заключение о существовании решений задачи сопряжения на собственные значения. Именно на на-

хождении дисперсионного уравнения необходимо сосредоточить внимание в рассматриваемых задачах. Простота решения указанных (линейных) задач приводит к тому, что в случае нелинейных задач в некоторых работах (см., например, [99, 100]) исследователи пытаются явно проинтегрировать уравнения, чтобы затем исследовать задачу на собственные значения. Но нелинейное уравнение (систему) не всегда удается (и даже не всегда возможно) проинтегрировать. В этом случае до дисперсионного уравнения дело просто не доходит. Однако во многих случаях дисперсионное уравнение можно найти в явной форме и при этом не обладать решениями дифференциальных уравнений [12, 13, 14, 20, 23].

В настоящей работе предложен общий метод исследования указанного класса задач на основе изучения дисперсионного уравнения.

II. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных средах интенсивно изучаются последние десятилетия (см., например, [4, 5, 8, 26, 77, 86, 89, 95, 108]). К таким задачам относится распространение волн в волноведущих структурах и, в частности, распространение поляризованных волн в плоских диэлектрических слоях и диэлектрических цилиндрических волноводах (интерес привлекают и изучаются в том числе и многослойные структуры, см., например, [98, 101]). Явления распространения электромагнитных волн в нелинейных средах находят широкое применение, например в физике плазмы, в современной микроэлектронике, в оптике, в лазерной технике [4, 5, 8, 86].

С одной стороны, такие задачи являются источником новых математических идей и результатов, поскольку многие проблемы распространения электромагнитных волн в нелинейных средах при строгой формулировке их как задач математической физики представляют собой нелинейные задачи (начально-краевые задачи, краевые задачи, задачи сопря-

жения, задачи на собственные значения см., например, [26, 86, 96, 108]), которые не удастся решать известными методами. С другой стороны, задачи с «простой» геометрией (плоские слои, круглые цилиндрические волноводы) привлекают внимание как широкими практическими приложениями (см., например, [3, 5, 86]), так и возможностью получать точные решения, по крайней мере, для некоторых типов нелинейностей и некоторых типов волн (см., например, [20, 21, 23, 99, 104, 108]).

Изучение рассматриваемых проблем приводит к новым, отличным от классических, постановкам задач. Рассматриваемые в настоящей работе задачи сопряжения на собственные значения не могут быть переформулированы как краевые задачи на собственные значения, даже и нелинейные. Эта специфика определяется в первую очередь условиями сопряжения на границах раздела сред для компонент электромагнитного поля. Оказывается, что на одной из границ граничные значения функций фиксированы (и известны), а на другой границе они неизвестны, но подчиняются некоторым (известным) дополнительным условиям (условиям сопряжения). Другая существенная особенность рассматриваемых задач – это зависимость собственных значений от амплитуды поля в некоторой заданной точке (т.е. зависимость собственного значения от значения собственной функции в некоторой точке), как правило, на одной из границ слоя. Это свойство нелинейных задач на собственные значения отмечено еще в справочнике Э. Камке [51]. Как известно, в линейных задачах такого дополнительного условия нет.

Классическая теория задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений [47, 53, 58, 64, 67, 71, 87] продвинута достаточно сильно¹, богата результатами и имеет обширные приложения [37, 45, 54, 64, 83]. Как в классической теории, так и при ее дальнейшем развитии находят широкое применение методы функционального анали-

¹В Советском Союзе, а затем в России огромный вклад в развитие спектральной теории дифференциальных операторов внесли академик В.А. Ильин и его ученики [47, 46].

за [7, 36, 46, 47, 57, 58, 67, 87]. Естественное желание развивать классическую теорию приводит к необходимости обобщения линейных задач. Дальнейшее развитие пошло несколькими путями. Не претендуя на полноту, перечислим важнейшие, на наш взгляд, направления (в качестве литературных ссылок приведены как работы общего характера, так и работы по приложению таких задач к различным вопросам математической физики).

1. Развитие методов классической теории на нелинейный случай:

- (а) дифференциальные уравнения и/или краевые условия зависят от спектрального параметра нелинейно, при этом от искомых функций уравнения зависят линейно, см., например, [36, 45];
- (б) дифференциальные уравнения и краевые условия зависят от спектрального параметра линейно, при этом от искомых функций уравнения зависят нелинейно, см., например, [44, 65, 87];
- (в) дифференциальные уравнения зависят нелинейно как от спектрального параметра, так и от искомых функций, при этом краевые условия могут зависеть от спектрального параметра нелинейно, см., например, [10, 26, 52, 57, 61, 108].

2. Развитие методов классической теории на случай многопараметрических спектральных задач:

- (а) дифференциальные уравнения линейно зависят как от искомых функций, так и от спектральных параметров, краевые условия линейно зависят от спектральных параметров, см., например, [1, 2, 6, 50, 56, 88];
- (б) дифференциальные уравнения нелинейно зависят как от искомых функций, так и от спектральных параметров, краевые условия нелинейно зависят от спектральных параметров, см., например, [22, 111, 110, 118, 120].

Теория многопараметрических спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в настоящее время является обширным разделом математики (см. [88] и библиографию там). Особенностью этой теории является многомерность спектрального параметра: искомыми выступают уже значения не скалярного, а векторного спектрального параметра.

Во многих работах, посвященных исследованию задач из п. 1(в), изучаются ветвление решений и бифуркации решений [10, 52, 57, 83]. Заметим однако, что существуют классы задач на собственные значения из п. 1(в), в которых не возникает ни точек бифуркации, ни точек ветвления решений. Такими являются, в частности, задачи, исследуемые в этой диссертации. Отсутствие точек бифуркации в рассматриваемых задачах объясняется тем, что, во-первых, собственное значение зависит от значения собственной функции в некоторой точке, и, значит, если существует точка ветвления, то в окрестности этой точки норма собственной функции, вообще говоря, не обязана быть малой. В линейных задачах малость нормы решения достигается за счет того, что собственное значение не зависит от значения собственной функции, по этой причине постоянный множитель перед собственной функцией можно выбрать достаточно малым, что позволяет сделать норму малой. Во-вторых, в точке бифуркации новое решение должно ответвляться от нулевого решения, но тождественно равная нулю функция уже не является решением задачи (сопряжения, краевой и т.д.), при этом она может являться решением уравнений задачи (так, в частности, получается в изучаемых здесь задачах). Таким образом, рассматриваемые здесь задачи на собственные значения в некотором смысле близки к классическим. Близки в том смысле, что в таких задачах существуют дискретные собственные значения. Ясно, что в задачах из пп. 1(б), 1(в) и 2(б) отсутствует принцип (линейной) суперпозиции решений. По этой причине многие вопросы, изучаемые в

классической теории (см., например, [47, 58, 64, 67]), не могут быть перенесены в теорию нелинейных задач.

Несмотря на то, что классическая теория задача на собственные значения возникла из задачи о разделении переменных для уравнения колебаний и развивалась далее в тесном контакте с задачами математической физики, эта теория, как и вообще теория задач из п. 1(а), может развиваться независимо от приложений. Это связано с тем, что линейность уравнений позволяет значительно разработать теорию и получить множество общих результатов, не обращаясь за приложениями. Не так обстоит дело, если уравнения нелинейны относительно искомым функций. В этом случае можно по-разному выбирать нелинейность, однако интересны именно те случаи, когда такое нелинейное обобщение приведет к содержательным математическим результатам. Иными словами, задачи из пп. 1(б), 1(в) и 2(б), по-видимому, нужно получать из рассмотрения нелинейных явлений, например физических. Заметим, что по задачам из пп. 1(б), 1(в) достаточно много работ как претендующих на некоторую полноту, так и связанных с конкретными физическими проблемами. В то же время на настоящий момент автору этой работы известен только один класс задач, относящихся к п. 2(б). Все задачи этого класса связаны с проблемами распространения связанных волн в нелинейных волноведущих структурах [19, 22, 111, 110, 113, 118, 120]. Одна из таких задач изучается в третьей главе настоящей диссертации.

Еще одно обстоятельство, по нашему мнению, является существенным. В линейных многопараметрических спектральных задачах, как уже было сказано, спектральный параметр $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является многомерным [88]. Но компоненты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ этого спектрального параметра λ , как и в случае классической задачи Штурма – Лиувилля, удовлетворяют одному (скалярному уравнению) $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. В частности, для двухпараметрических спектральных задач имеем $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Точки,

являющиеся решениями этого уравнения, уже не являются изолированными, а заполняют некоторые непрерывные кривые (эти кривые могут иметь несколько несвязанных ветвей), называемые *собственными кривыми* (*eigencurve*). В рассматриваемой в этой диссертации нелинейной двухпараметрической задаче (глава 3) зависимость парных собственных значений от значения собственного вектора на одной из границ слоя позволяет доказать существование дискретных пар собственных значений. Фактически это означает, что для каждого собственного вектора (моды волновода) имеется своя пара собственных значений (пара постоянных распространения). Возвращаясь к линейной двухпараметрической задаче и уравнению $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, можно добавить, что для того, чтобы в такой задаче получить дискретное множество пар собственных значений, необходимо накладывать еще одно условие типа $H(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Но при постановке такой линейной задачи уже используется необходимое число краевых условий (4 условия в случае двух уравнений второго порядка). В то же время ясно, что дополнительное условие, позволяющее выделить дискретное множество точек на непрерывной кривой, можно ввести различными способами. В задаче, которая получила самостоятельное математическое развитие, без всякой связи с приложениями, такое условие может попросту отсутствовать.

Задачи на собственные значения возникают в различных областях математической физики, в частности, в электродинамике можно указать, например, работы [9, 26, 37, 38, 39, 45, 49, 108].

Как было сказано выше, интерес привлекают задачи о распространении электромагнитных волн в многослойных структурах. Здесь также исследуются поверхностные волны, распространяющиеся в плоской структуре, состоящей из нескольких слоев, слои могут быть заполнены нелинейными средами. Такие постановки приводят к однопараметрическим задачам сопряжения на собственные значения в нескольких обла-

стях [29, 30, 31, 126]. Задачи из работы [126] уже не удастся свести к задачам в одной области. Точные решения в таких задачах получить весьма трудно (это возможно, например, для ТЕ-волн в структуре с нелинейностью, не сложнее обобщенной керровской), а сложность получаемых в этих задачах явных дисперсионных уравнений делает их исследование чрезвычайно трудным делом. По этой причине также важна разработка эффективных численных методов, позволяющих быстро и с приемлемой точностью находить собственные значения и собственные функции в таких задачах. Для рассматриваемых в диссертации задач разработан численный метод, основанный на методе пристрелки [34]: для однопараметрических задач сопряжения на собственные значения в однослойном волноводе [17, 18] и в многослойных задачах [30, 31, 114, 117, 124, 125, 126].

К основным нелинейным эффектам, возникающим в веществе при распространении в нем электромагнитных волн, относятся явления самофокусировки, дефокусировки и самоканализации лучей и т.д. [4, 5, 8, 40, 62, 77, 86, 89]. В связи с большим количеством нелинейных эффектов и различным их влиянием на распространение электромагнитных волн в веществе важное значение получает аналитическое и численное изучение таких явлений.

Уравнения, описывающие распространение волн в нелинейной среде, с нелинейностью, выраженной законом Керра, были выведены в 1964–1965 гг. в работ [77], в которой представлены расчеты цилиндрических самоподдерживающихся волноводных каналов в изотропном нелинейном диэлектрике с положительным волновым числом и керровской нелинейностью.

Строгие постановки задач о распространении монохроматических поляризованных электромагнитных волн в среде с нелинейностью, выраженной законом Керра, были предложены в работах П.Н. Елеонского, Л.Г. Оганесьянца и В.П. Силина в 1971–1972 гг. (см., например, [96]).

Наиболее изучены явления распространения ТЕ-поляризованных электромагнитных волн. Результаты, связанные с распространением электромагнитных ТЕ-волн в различных волноведущих структурах как в волноводе, так и в слое, представлены в работах [16, 73, 74, 94, 104, 105]. Керровская нелинейность изучалась в работах [26, 73, 89, 104, 105, 108]; она имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2$, где ε – диэлектрическая проницаемость слоя, ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; α – коэффициент нелинейности; \mathbf{E} – комплексная амплитуда электрического поля. Работы Ю.Г. Смирнова, Ю.В. Шестопалова и Н.-W. Schürmann [73, 105] посвящены изучению задачи сопряжения на собственные значения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в круглом цилиндрическом волноводе с нелинейностью, выраженной законом Керра. Для решения задачи применяется метод функций Грина, а решение получающегося нелинейного интегрального уравнения находится итерационным методом. В работе Н.-W. Schürmann, В.С. Серова и Ю.В. Шестопалова [104] изучается распространение ТЕ-волн в диэлектрическом слое, расположенном между двумя полупространствами. Все среды предполагаются нелинейными средами без потерь, а также немагнитными изотропными и однородными. В этом случае получившиеся обыкновенные дифференциальные уравнения интегрируются в терминах эллиптической функции Вейерштрасса.

Случай распространения электромагнитных ТМ-волн в нелинейных средах является более сложным, чем случай ТЕ-волн [90]. Это связано с тем, что наличие двух компонент электрического поля приводит к более сложной зависимости диэлектрической проницаемости от интенсивности электромагнитного поля. В работе [103] рассматривается линейный диэлектрический слой, окруженный с одной или двух сторон нелинейной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Подобная задача для ТЕ-волн решена аналитически [91, 106]. Для случая ТМ-волн получено дисперсионное уравнение для собственных значений задачи [103],

которое представляет собой алгебраическое уравнение. В работе [99] рассматривается распространение электромагнитных ТМ-волн в нелинейном полупространстве с нелинейностью по закону Керра. Приводятся формальные решения получающихся дифференциальных уравнений в квадратурах. В работе [99] также представлены дисперсионные уравнения как для случая изотропной, так и анизотропной среды в нелинейном полупространстве. Дисперсионные уравнения для собственных значений содержат рациональные функции спектрального параметра. Авторы находят первый интеграл системы, описывающей распространение волн (так называемый закон сохранения), и приводят достаточное условие того, чтобы дифференциальное уравнение, связывающее компоненты поля, являлось уравнением в полных дифференциалах и, следовательно, его решение (первый интеграл) можно было выразить явно. Это условие выглядит следующим образом: $\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial (|E_z|^2)} = \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial (|E_x|^2)}$, где ε_{xx} и ε_{zz} – компоненты диагонального тензора диэлектрической проницаемости в направлениях Ox и Oz соответственно. В некоторых случаях более сложной нелинейности уравнение удастся проинтегрировать, найдя подходящий интегрирующий множитель (авторы упомянули об этом в конце указанной работы). В работе К.М. Leung [100] распространение ТМ-волн изучается в терминах магнитной компоненты электромагнитного поля. В этой работе изучается распространение ТМ-волн в нелинейном изотропном полупространстве, причем нелинейность – это произвольная функция квадрата интенсивности электрического поля, в качестве примера найденные результаты применяются к случаю нелинейности типа Керра. Также в работе [100] получен первый интеграл системы и дисперсионное уравнение для собственных значений. Также в указанной работе рассматриваются эффекты самофокусировки и дефокусировки электромагнитных волн. Заметим, что задачи в полупространстве принципиально проще, чем задачи в слое.

При исследовании линейных спектральных задач теории волноводов применяются различные методы (см. [49] и имеющуюся там библиографию). Основными методами являются: вариационный метод [59, 66], метод интегральных уравнений [37], метод операторных пучков [45, 72] и некоторые другие.

Большая часть сделанного обзора посвящена керровской нелинейности. Это сделано по двум причинам:

- в случае зависимости диэлектрической проницаемости от модуля интенсивности электрического поля керровская нелинейность является простейшей (с физической точки зрения при разложении вектора поляризации в ряд по степеням модуля электрического поля симметрия среды налагает ограничения на вид этого разложения, а именно в случае среды с центром инверсии первый нелинейный член в разложении вектора поляризации имеет степень 3, что как раз соответствует эффекту Керра) [40, 62];
- изучение нелинейного распространения ТЕ- и ТМ-волн в среде с керровской нелинейностью приводит к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. В случае ТЕ-волн решение такого уравнения выражается через эллиптические функции, поэтому оно было быстро найдено (см. [104]). В случае ТМ-волн решение выражается через гиперэллиптические функции, которые изучены и используются не так широко, как эллиптические. Трудность получения явных решений при отсутствии других методов исследования таких нелинейных задач не позволяла развивать эту теорию. В связи с этим лишь некоторые авторы (см., например, [100]) уделяли внимание задачам исследования более сложных нелинейностей.

Из предыдущего ясно, что именно задача о распространении ТМ-волн в среде с керровской нелинейностью была препятствием для даль-

нейшего прогресса в этой области. Существенный прогресс при изучении распространения ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью был достигнут в работах [20, 23]. Предложенный в работах [20, 23] метод, получивший название *метода интегральных дисперсионных уравнений* (МИДУ) далее был развит в [12, 13, 14, 26, 108] и применен к широкому классу задач о распространении ТЕ- и ТМ-волн в слоях с произвольными нелинейностями. Первые две главы настоящей диссертации посвящены изложению *метода интегральных дисперсионных уравнений* для ТЕ- и ТМ-волн.

Глубокое изучение указанных нелинейных задач привело к пониманию того, что в нелинейном режиме рассматриваемые по отдельности процессы для ТЕ- и ТМ-волн могут быть объединены. То есть можно изучать распространение связанных ТЕ- и ТМ-волн. Как известно, в линейной среде ТЕ- и ТМ-волны распространяются, не взаимодействуя, наличие нелинейности приводит к новому, принципиально важному результату: существует новый режим распространения ТЕ- и ТМ-волн, так называемый режим распространения связанных ТЕ-ТМ-волн, в котором ТЕ- и ТМ-волны, распространяясь каждая на своей постоянной распространения и на своей частоте, взаимодействуют, но сохраняют структуру поверхностных волн, образуя связанную волну. Насколько известно автору этой диссертации, впервые возможность рассматривать связанные ТЕ-ТМ-волны на двух различных частотах была указана в [118], там же доказано существование парных собственных значений. Задачи о распространении ТЕ- и ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью являются частными случаями задачи о распространении связанной волны. Постоянные распространения в такой задаче существуют дискретными парами, что соответствует парным собственным значениям, или двухпараметрической задаче на собственные значения. Такая постановка задачи приводит не только в возможности изучить новое физическое

явление, но и к разумному обобщению линейной двухпараметрической задачи на собственные значения на нелинейный случай².

Заметим, что к изучению взаимодействия между ТЕ- и ТМ-волнами в нелинейной волноведущей структуре с керровской нелинейностью обращались В.М. Елеонский, Л.Г. Оганесьянц, В.П. Силин в работах [42, 97] 1972–1973 гг.³ и A.D. Boardman, T. Twardowski в работах [92, 93] 1988–1989 гг. В указанных работах отсутствует строгая постановка рассматриваемой задачи и результаты о разрешимости такой задачи. Кроме того, отсутствует рассмотрение взаимодействия волн на двух частотах. Указанные работы в основном посвящены обсуждению физических принципов и эффектов, а также некоторым численным результатам. Позже, в 1991 г. в 29 томе *Nonlinear surface electromagnetic phenomena* серии *Modern problems in condensed matter sciences* была опубликована большая работа A.D. Boardman и его коллег, в которой были собраны основные известные на тот момент факты о распространении ТЕ- и ТМ-волн в плоских волноведущих системах с керровской нелинейностью [89].

Наконец заметим, что, во-первых, поиск точных решений для задач, рассматриваемых в главах 1–3, по-прежнему актуален. Это особенно касается задачи, изложенной в третьей главе, поскольку проведенные

²Автором настоящей работы однажды было услышано мнение о том, что дифференциальные уравнения в частных производных (в том числе и линейные) необходимо изучать, строго придерживаясь тех конкретных физических задач и процессов, которые эти уравнения описывают. Именно такое постоянное внимание к физической реальности, лежащей в основе изучаемого уравнения в частных производных, является в высшей степени плодотворным и позволяет развивать как новые теории, так и совершенствовать известные методы. По мнению автора этой работы, аналогичная точка зрения должна преобладать и при изучении задач на собственные значения для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Нелинейные задачи, возникающие в разных областях физики и естествознания, должны становиться пробными камнями для разработки новых математических методов. Известно, что многие аспекты линейной теории могут быть развиты достаточно широко без обращения к приложениям. В то же время даже пути обобщения линейных задач на нелинейный случай не являются очевидными (различных обобщений может быть много), и именно здесь физика помогает исследователю выбрать правильный путь (возможно, после нескольких безуспешных попыток). Однако необходимо подчеркнуть, что математические задачи физики должны математически грамотно ставиться еще на этапе их физического изучения.

³Это, вероятно, первые публикации, относящиеся к рассматриваемому вопросу.

исследования и расчеты позволяют предполагать наличие парных собственных значений, которые не могут быть получены на основе теории возмущений. Во-вторых, методы, изложенные в настоящей диссертации, могут найти применение при изучении задач дифракции поляризованных электромагнитных волн на нелинейном слое (здесь можно изучать как однопараметрические, так и двухпараметрические задачи).

III. ЦЕЛЬ И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основной целью диссертации является *разработка общего математического аппарата для исследования нелинейных одно- и двухпараметрических задач сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое.*

Рассматриваемые задачи на собственные значения имеют ясное физическое содержание – это задачи о распространении поляризованных монохроматических электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском диэлектрическом слое, в котором диэлектрическая проницаемость (скалярная для ТЕ-волн и тензорная для ТМ-волн) произвольным образом зависит от модуля интенсивности электрического поля. Другими словами, такие задачи описывают распространение поверхностных электромагнитных ТЕ-, ТМ-волн (однопараметрические задачи) и связанных ТЕ-ТМ-волн (двухпараметрическая задача) в слое с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от интенсивности поля.

Для исследования указанных задач предложен и развит новый математический метод – *метод интегральных дисперсионных уравнений.* Этот метод позволяет свести исходную задачу на собственные значения для дифференциальных уравнений к интегральному дисперсионному уравнению (в случае однопараметрических задач) или системе интегральных дисперсионных уравнений (в случае двухпараметрических задач), исследуя которые, можно получить ответы на вопросы о суще-

ствовании и локализации собственных значений, об изолированности собственных значений.

В первой и второй главах рассматриваются нелинейные однопараметрические задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение монохроматических поляризованных электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в слое с диэлектрической проницаемостью, произвольным образом зависящей от модуля интенсивности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость является скалярной функцией в случае ТЕ-волн (первая глава) и диагональным тензором в случае ТМ-волн (вторая глава).

Третья глава посвящена изучению нелинейной двухпараметрической задачи сопряжения на собственные значения, описывающей распространение на двух различных частотах и с двумя различными постоянными распространения связанных монохроматических ТЕ- и ТМ-поляризованных электромагнитных волн в слое с диэлектрической проницаемостью (скалярной) зависящей от модуля интенсивности электрического поля по закону Керра.

В приложениях приводятся известные результаты о распространении электромагнитных волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью. Как известно [11, 78], в этом случае вместо электромагнитного поля, у которого все координаты отличны от нуля, достаточно рассматривать ТЕ- и ТМ-поляризованные электромагнитные волны. Такой подход в дальнейшем позволит перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Приложение А посвящено строгому обоснованию возможности представления монохроматических поверхностных электромагнитных волн, направляемых слоем в виде суперпозиции монохроматических поверхностных ТЕ- и ТМ-волн. Приложение Б посвящено изучению линейной однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения, описывающей рас-

пространение монохроматических ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в слое с постоянной (скалярной) диэлектрической проницаемостью. Приложение В посвящено изучению линейной однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения, описывающей распространение монохроматических ТМ-поляризованных электромагнитных волн в слое с постоянной (тензорной) диэлектрической проницаемостью. В изложении вопроса о ТЕ- и ТМ-поляризованных волнах, направляемых слоем, мы в основном следовали работам [3, 11, 32].

IV. ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Основные результаты диссертации:

- 1) предложен и развит новый математический аппарат – метод интегральных дисперсионных уравнений, – позволяющий исследовать нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла;
- 2) введены понятия собственного значения и парных (или связанных) собственных значений для некоторых классов нелинейных задач сопряжения на собственные значения;
- 3) доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации собственных значений, о распределении нулей и периодичности собственных функций в однопараметрических задачах, исследованы некоторые конкретные типы нелинейностей, а также связь между решениями нелинейных задач и решениями соответствующих линейных задач;
- 4) доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей двухпараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации парных соб-

ственных значений в двухпараметрической задаче, исследована связь между решениями нелинейной задачи и решениями соответствующей линейной задачи, предложены и обоснованы численные методы нахождения приближенных собственных значений;

- 5) в результате исследования найдены новые типы нелинейных волн (ТЕ-, ТМ-, ТЕ-ТМ-) в изученных волноведущих структурах.

V. ПУБЛИКАЦИИ И АПРОБАЦИЯ

Основные результаты диссертации опубликованы в [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 118, 126] и доложены на международных конференциях *Days on Diffraction* (г. Санкт-Петербург, 2007 [121], 2011 [115, 122] и 2013 [102]); 13-й и 14-й международных конференциях *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory* (Украина, г. Киев, 2010 [120] и г. Харьков, 2012 [124]); международных конференциях *Progress in Electromagnetic Research Symposium* (Китай, г. Suzhou, 2011 [119]; Малайзия, г. Kuala Lumpur, 2012 [116]; г. Москва, 2012 [117, 125]; Швеция, г. Стокгольм, 2013 [127]); *Workshop on Large-Scale Modeling* (Швеция, г. Sunne, 2012 [126]); международной конференции *International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS – 2013)* (Япония, г. Hiroshima, 2013 [123]).

По результатам диссертации были также сделаны доклады на семинаре кафедры физики университета г. Оснабрюк, руководитель – проф. Н.-W. Schürmann (Германия 2010, 2011); семинаре на факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, руководимом проф. Е.В. Захаровым и проф. А.С. Ильинским (г. Москва, 2012) ; семинаре кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета, руководитель – проф. Н.Б. Плещинский (г. Казань, 2013); семинаре кафедры Electrical, Electronic, and Communication Engineering университета Chuo, руководитель – проф. К. Kobayashi (Япония, г. Токио, 2013); семина-

ре кафедры Electrical Engineering университета Nihon, руководитель – проф. Т. Yamasaki (Япония, г. Токио, 2013); семинаре «Computational and Applied Mathematics» университета Chalmers, руководитель – проф. S. Larsson (Швеция, г. Гетеборг, 2013); семинаре «Вычислительная математика и приложения» Института вычислительной математики РАН, руководитель – чл.-корр. РАН, проф. Е.Е. Тыртышников (г. Москва, 2013); научно-методологическом семинаре НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, руководитель – д.ф.-м.н., проф. А.В. Тихонравов (г. Москва, 2013); семинаре на факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, руководимом акад. РАН, проф. В.А. Ильиным и акад. РАН, проф. Е.И. Моисеевым (г. Москва, 2013).

Работа частично была поддержана грантами РФФИ (№ 06-07-89063а, 2008–2009; № 12-07-97010-р_А, 2012; № 11-07-00330-А, 2011–2012), ФЦП («Развитие потенциала высшей школы», № 2.1.1/1647, 2009–2011; «Кадры», № 14.В37.21.1950, 2012–2013), программы Visby (2012-2013, Швеция), грантами Президента РФ для молодых кандидатов наук в области знания «Математика и механика» (МК-2074.2011.1, 2011–2012; МК-90.2014.1, 2014–2015).

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность моему многоуважаемому учителю – профессору Ю.Г. Смирнову за его желание и умение учить, за многочисленные плодотворные беседы, за внимательное отношение к моим работам.

Г Л А В А 1

НЕЛИНЕЙНАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН В СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Результаты главы опубликованы в работах [12, 26, 108, 119]. Частные случаи (нелинейность Керра и нелинейность с насыщением) рассмотренного в этой главе вопроса опубликованы в работах [16, 115].

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим монохроматические ТЕ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\},$$

здесь

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T \quad (1.1)$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные

диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим выражением: $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(|\mathbf{E}|^2)$, где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, свойства функции f будут указаны позднее.

Комплексные амплитуды (1.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1.2)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Считаем, что волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z . Подставляя (1.1) в уравнения Максвелла (1.2), убеждаемся, что компоненты (1.1) не зависят от переменной y . Таким образом, рассматриваемые компоненты имеют представление

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (1.3)$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставим компоненты (1.3) в систему (1.2), получим

$$\begin{cases} i\gamma H_x(x) - H'_z(x) = -i\omega\varepsilon E_y(x), \\ i\gamma E_y(x) = -i\omega\mu H_x(x), \\ E'_y(x) = i\omega\mu H_z(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

После простейших преобразований из системы (1.4) получаем

$$\gamma^2 E_y(x) - E''_y(x) = \omega^2 \mu \varepsilon E_y(x), \quad (1.5)$$

причем $H_x = -\gamma\omega^{-1}\mu^{-1}E_y$, $H_z = -i\omega^{-1}\mu^{-1}E'_y$.

Обозначим $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ и выполним нормировку уравнения (1.5) в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = k_0 x, \quad \frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Обозначим $Y(\tilde{x}) := E_y(\tilde{x})$. Опуская значок тильды, получаем

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x), \quad (1.6)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \quad (1.7)$$

Считаем, что $f \in C^1 [0, +\infty)$, $f(s^2) \geq 0$ и $f(0) = 0$.

Функция Y дифференцируема так, что

$$Y(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \quad (1.8)$$

Под принадлежностью функции указанному пересечению понимается, что сужение функции на выбранный интервал принадлежит соответствующему функциональному классу.

Указанные условия непрерывности и дифференцируемости функции Y соответствуют физическому смыслу задачи и, как будет видно далее, следуют из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля на границах раздела сред и свойств решений при $x < 0$ и $x > h$.

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_y и H_z . Из условий непрерывности этих компонент следуют условия сопряжения:

$$[Y]|_{x=0} = 0, \quad [Y]|_{x=h} = 0, \quad [Y']|_{x=0} = 0, \quad [Y']|_{x=h} = 0, \quad (1.9)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

В дальнейшем, когда это не будет приводить к неправильному толкованию, мы часто будем опускать явную зависимость рассматриваемых функций от аргумента или параметров.

Перейдем к строгой формулировке задачи сопряжения.

Определение 1.1. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $Y(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $Y(0) > 0$) существует не равная тождественно нулю функция $Y(x; \hat{\gamma})$, которая удовлетворяет уравнению (1.6), условиям (1.8), (1.9) и затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственным значением, а функцию $Y(x; \hat{\gamma})$, соответствующую этому собственному значению, – собственной функцией.

Задача P_E : доказать существование собственных значений $\hat{\gamma}$, удовлетворяющих определению 1.1.

Совокупность всех собственных значений задачи P_E будем обозначать через σ_E .

Замечание 1.1. Определение 1.1 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра [36]. Введенное определение является, с одной стороны, распространением классического определения собственного значения на случай нелинейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра; с другой стороны, соответствует физической природе задачи. Введенное понятие не связано с понятием точки бифуркации.

Объясним, почему необходимо рассматривать действительные значения γ . Так как $\mathbf{E} = e^{i\gamma z}(0, E_y, 0)^T$, то $|\mathbf{E}|^2 = |e^{i\gamma z}|^2 \cdot |E_y|^2$. Как известно, $|e^{i\gamma z}| = 1$ при $\text{Im } \gamma = 0$. Пусть $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ и $\text{Im } \gamma \neq 0$. Тогда получаем $|e^{i\gamma z}| = |e^{i\gamma' z}| \cdot |e^{-\gamma'' z}| = |e^{-\gamma'' z}|$. Значит, уравнение (1.6) будет зависеть от z , что противоречит выбору $E_y(x)$. Заметим еще, что $|e^{-\gamma'' z}| \rightarrow +\infty$,

когда $\gamma'' < 0$ и $z \rightarrow +\infty$ или когда $\gamma'' > 0$ и $z \rightarrow -\infty$, а это противоречит предполагаемому типу разыскиваемых волн.

Разыскиваются такие положительные значения γ , что справедливо

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2.$$

Это условие соответствует классической задаче распространения ТЕ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_2 (см. приложение Б), поэтому мы придерживаемся его при выводе дисперсионного уравнения для нелинейного слоя.

Замечание 1.2. В линейной задаче можно считать спектральный параметр γ комплексным числом (см. приложение Б).

1.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1, \quad k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3.$$

При $x < 0$ и $x > h$ уравнение (1.6) является линейным. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения уравнения (1.6) в указанных областях имеют вид

$$Y(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (1.10)$$

Считаем, что $k_1^2 > 0$ и $k_3^2 > 0$, в противном случае удовлетворить условию излучения будет невозможно (см. приложение Б).

Постоянная A в (1.10) отвечает значению $Y(0)$ (см. определение 1.1) и предполагается фиксированной (известной), а постоянная B определяется условиями сопряжения (1.9).

Внутри слоя Σ уравнение (1.6) принимает вид

$$Y'' = -(k_2^2 + f(Y^2)) Y. \quad (1.11)$$

Умножая (1.11) на Y' и интегрируя, находим первый интеграл рассматриваемого уравнения

$$Y'^2 + k_2^2 Y^2 + \varphi(Y^2) \equiv C, \quad (1.12)$$

где $\varphi(Y^2) = \int_0^{Y^2} f(u) du$; C – постоянная.

Вычисляя первый интеграл (1.12) в точке $x = 0 + 0$, используя соответствующее решение (1.10) и условия сопряжения (1.9), находим, что

$$C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \varphi(A^2). \quad (1.13)$$

Вычисляя первый интеграл (1.12) в точке $x = h - 0$, используя соответствующее решение (1.10), условия сопряжения (1.9) и вычисленное значение (1.13), находим уравнение

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)B^2 + \varphi(B^2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \varphi(A^2) \quad (1.14)$$

относительно неизвестной величины B . Легко показать, что уравнение (1.14) имеет два действительных решения $\pm B'$.

Замечание 1.3. Постоянные B и C не зависят ни от точки $x = h$, ни от спектрального параметра γ ; кроме того, $C > 0$.

Умножая уравнение (1.11) на Y и интегрируя от $x = 0$ до $x = h$, получаем

$$-k_3 B^2 - k_1 A^2 - \int_0^h Y'^2 dx = -k_2^2 \int_0^h Y^2 dx - \int_0^h f(Y^2) Y^2 dx. \quad (1.15)$$

Из формулы (1.15) следует:

- (а) если f не равна тождественно нулю и неотрицательна при $x \in [0, h]$, то $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$;
- (б) если $f \equiv 0$ при $x \in [0, h]$, то $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$.

Ниже доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_E имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := T_1 + nT_2 = h, \quad (1.16)$$

где

$$T_1 = \int_{-k_3}^{k_1} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{k_2^2 + f(\tau) + \eta^2};$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения $(\eta^2 + k_2^2)\tau + \varphi(\tau) \equiv C$ (см. формулу (1.20)); C определена формулой (1.13); $n = 0, 1, 2, \dots$

Левая часть дисперсионного уравнения (1.16) не зависит от h .

Формула (1.16) – дисперсионное уравнение, справедливое для любого конечного $h > 0$. Фактически уравнение (1.16) является семейством (но не системой) уравнений для различных n . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_E^D – множество решений дисперсионного уравнения (1.16), тогда

$$\sigma_E^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i, \quad (1.17)$$

где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех возможных $i \neq j$.

Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_E = \sigma_E^D$.

Теорема 1.1 (об эквивалентности). *Значение $\gamma = \hat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_E тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \hat{n} \geq 0$ такое, что $\gamma = \hat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \hat{n}) - h = 0$.*

Кроме того, собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет в точности \hat{n} нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i -м нулем функции $Y(x; \hat{\gamma})$, то

$$x_i = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta + (i - 1)T_2.$$

Доказательство. Введем новые переменные:

$$\tau(x) = Y^2(x), \quad \eta(x) = \frac{Y'(x)}{Y(x)}, \quad (1.18)$$

из (1.18) находим $Y^2 = \tau$, $YY' = \tau\eta$, $Y'^2 = \tau\eta^2$.

Уравнение (1.11) может быть переписано в виде системы в нормальной форме:

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(k_2^2 + f(\tau) + \eta^2). \end{cases} \quad (1.19)$$

Первый интеграл этой системы определяется из (1.19) или из (1.12) и имеет вид

$$(\eta^2 + k_2^2)\tau + \varphi(\tau) \equiv C. \quad (1.20)$$

Необходимо заметить, что функция τ может быть выражена через η из уравнения (1.20) лишь в исключительных случаях (например, если $f(\tau) = \tau^2$).

Используя (1.9) и (1.10), находим

$$\eta(0) = k_1 > 0, \quad \eta(h) = -k_3 < 0. \quad (1.21)$$

При условиях задачи P_E выполняется неравенство $k_2^2 + f(\tau) + \eta^2 > 0$. В этом случае, как видно из второго уравнения системы (1.19), функция $\eta(x)$ монотонно убывает при $x \in [0, h]$.

Из формулы (1.18) следует, что функция η непрерывна если и только если функция $Y(x)$ не обращается в нуль при $x \in (0, h)$. В общем случае функция $Y(x)$ имеет нули в некоторых точках внутри интервала $(0, h)$. Предположим, что функция $Y(x)$ имеет n нулей $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$ (если $n = 0$, то функция Y не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $x \in [0, h]$). В этом случае функция $\eta(x)$ имеет n точек разрыва $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$ (если $n = 0$, то функция $\eta(x)$ непрерывна на отрезке $[0, h]$). Ясно, что $Y'(x_i) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Действительно, если непостоянное решение Y уравнения (1.11) обращается в нуль вместе со своей

производной Y' в некоторой точке, тогда из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1.11) следует, что $Y \equiv 0$. Таким образом, все точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

Из второго уравнения системы (1.19) и формул (1.21) следует, что

$$\eta(x_i - 0) = -\infty, \quad \eta(x_i + 0) = +\infty, \quad \text{где } i = \overline{1, n}. \quad (1.22)$$

Принимая во внимание вышеизложенное, будем разыскивать решение второго уравнения системы (1.19) на каждом из (полу) интервалов $[0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, h]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta = x + c_0, \quad 0 \leq x < x_1; \\ - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + c_i, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + c_n, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1} - 0$, $x = h$ в уравнения (1.23) (в первое, второе и третье соответственно), находим

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \\ c_i = - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ c_n = - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

С учетом найденных постоянных уравнения (1.23) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta = x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \quad 0 \leq x < x_1; \\ - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Подставляя $x = x_1 - 0$, $x = x_i + 0$, $x = x_n + 0$ в уравнения (1.25) (в первое, второе и третье соответственно), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_1 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \\ 0 = x_i - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ 0 = x_n - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Принимая во внимание формулы (1.21) и (1.22), находим из (1.26)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_1 = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta, \\ 0 < x_{i+1} - x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta, \quad i = \overline{1, n-1}, \beta \\ 0 < h - x_n = \int_{-k_3}^{+\infty} w d\eta. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Формулы (1.27) дают явные выражения для расстояний между нулями функции Y . Действительно, из формул (1.27) следует, что если x_i есть i -й нуль функции Y , то

$$x_i = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta + (i - 1)T_2$$

(это доказывает соответствующую часть утверждения теоремы).

Более того, из формул (1.27) следует сходимость всех рассматриваемых несобственных интегралов.

Далее, складывая все соотношения (1.27), получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} + h - x_n = \\ = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta + (n - 1)T_2 + \int_{-k_3}^{+\infty} w d\eta. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Уравнение (1.28) может быть легко преобразовано в дисперсионное уравнение (1.16).

Поскольку уравнение (1.16) является следствием задачи P_E , то всякое собственное значение рассматриваемой задачи является также и корнем этого уравнения. Также ясно, что всякий такой корень удовлетворяет всем условиям, указанным в формулировке задачи P_E . Таким образом, совпадение множеств σ_E и σ_E^D доказано.

Наличие n точек разрыва у функции η имеет следствием то, что собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет n нулей при $x \in (0, h)$. \square

Замечание 1.4. Из теоремы получаем, что собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет \hat{n} нулей, если $\hat{\gamma} \in \sigma_{\hat{n}}$. Таким образом, из формулы (1.17) ясно, что множество всех собственных функций задачи P_E можно естественным образом разбить на множества, каждое из которых содержит собственные функции с одним и тем же числом нулей. В рассматриваемой

нелинейной задаче могут существовать собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, но имеющие одно и то же число нулей. В линейном случае (см. приложение Б), т.е. при $f \equiv 0$, для всякого допустимого целого $n \geq 0$ существует не более одной собственной функции, которая имеет n нулей.

Теорема 1.2. Пусть $\hat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_E . Если собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Y(x; \hat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.

Доказательство. Рассмотрим систему в нормальной форме

$$\begin{cases} Y' = Z, \\ Z' = -(k_2^2 + f(Y^2)) Y, \end{cases} \quad (1.29)$$

эквивалентную уравнению (1.11).

Легко проверить, что если пара $(Y(x), Z(x))$ является решением этой системы, то пара $(-Y(2T_2 + 2x_1 - x), Z(2T_2 + 2x_1 - x))$ также является ее решением.

Пусть пара $(Y(x), Z(x))$ является решением системы (1.29) и функция $Y(x)$ имеет три нуля $x_1, x_2, x_3 \in (0, h)$, причем $x_1 < x_2 < x_3$ и $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = T_2$.

Сначала рассмотрим отрезок $[x_1, x_3]$. Построим пару функций $\tilde{Y}(x)$ и $\tilde{Z}(x)$ следующим образом:

$$(\tilde{Y}(x), \tilde{Z}(x)) = \begin{cases} (Y(x), Z(x)), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ (-Y(2T_2 + 2x_1 - x), Z(2T_2 + 2x_1 - x)), & x_2 \leq x \leq x_3. \end{cases} \quad (1.30)$$

В силу системы (1.29) в точке $x = x_2 (= x_1 + T_2)$ функции $Y(x)$ и $-Y(2T_2 + 2x_1 - x)$ склеены со вторым порядком гладкости.

Рассмотрим общий случай, пусть $k \geq 3$ и $x_1, x_2, \dots, x_k \in (0, h)$ – нули функции $Y(x)$. Тогда для любой точки $x^* \in (0, h)$ существует целое

число $q \geq -1$ такое, что $x^* = x' + qT_2$, где $x' \in [x_1, x_3]$. Теперь положим

$$(\tilde{Y}(x^* + qT_2), \tilde{Z}(x^* + qT_2)) = (\tilde{Y}(x'), \tilde{Z}(x')).$$

Другими словами, мы определили периодическое решение $(\tilde{Y}(x), \tilde{Z}(x))$ системы (1.29) с периодом $2T_2$. В силу теоремы существования и единственности других решений нет.

Этот же результат можно доказать, используя первый интеграл (1.12). Действительно, известно, что $Y(x_i) = 0$. Тогда, используя формулу (1.12), мы видим, что $(Y(x_1), Z(x_1)) = (0, -\sqrt{C})$. Далее, используя первый интеграл (1.12) и простейший анализ функции $Y(x)$ и ее производной в окрестностях точек $x = x_2$ и $x = x_3$, получаем, что

$$(Y(x_2), Z(x_2)) = (0, \sqrt{C}), \quad (Y(x_3), Z(x_3)) = (0, -\sqrt{C}).$$

Таким образом, $(Y(x_1), Z(x_1)) = (Y(x_3), Z(x_3))$. Из теории автономных дифференциальных уравнений известно, что решение, удовлетворяющее такому свойству, является периодическим [68]. В силу теоремы существования и единственности других решений нет. \square

Замечание 1.5. Нахождение условий существования периодического решения у нелинейного автономного уравнения, даже в том случае, когда не удастся определить период, само по себе является сложной задачей, привлекающей внимание исследователей [69].

1.3. СПЕКТР: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ

Теорема 1.1 говорит о совпадении множеств σ_E и σ_E^D , но множество σ_E^D может оказаться пустым. Дальнейшие рассуждения нацелены на выявление условий, при которых множество решений дисперсионного уравнения (1.16) не является пустым.

Рассмотрим левую часть $\Phi(\gamma; k)$ дисперсионного уравнения (1.16). Функция $\Phi(\gamma; k)$ не зависит от h .

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ и

$$h_{\inf}^k = \inf_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k), \quad h_{\sup}^k = \sup_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k), \quad \text{где } k = 0, 1, \dots$$

Указанная \sup существует не всегда, например, \sup не существует, если $f \equiv 0$.

Поскольку $\Phi(\gamma; k) > 0$, то h_{\inf}^k всегда существует. Когда мы пишем h_{\sup}^k , мы предполагаем, что указанный (конечный) \sup существует.

Сформулируем достаточное условие существования по крайней мере одного собственного значения задачи P_E .

Теорема 1.3. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, $f \in C^1[0, +\infty)$ и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Доказательство. Поскольку все интегралы в дисперсионном уравнении (1.16) сходятся, то очевидно, что указанные h_{\inf}^p и h_{\sup}^p существуют. Далее, так как правая часть уравнения (1.11) непрерывна по совокупности переменных Y и γ , ограничена и непрерывно дифференцируема по Y , то (см., например, [53, 68]) решения такого уравнения непрерывны по параметру γ . Но тогда и функция $\Phi(\gamma; k)$ является непрерывной функцией параметра γ . Отсюда с очевидностью следует утверждение о том, что для всякого $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$ существует по крайней мере одно решение дисперсионного уравнения (1.16), которое в силу теоремы 1.1 является собственным значением задачи P_E . \square

Теорема 1.4. Пусть $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1[0, +\infty)$ и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидным образом получается из доказательства предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что в этой теореме не существует \sup функции $\Phi(\gamma; k)$. \square

В двух предыдущих теоремах утверждается существование собственных значений, но не их изолированность.

В двух следующих теоремах утверждается существование дискретных собственных значений.

Теорема 1.5. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в \mathbb{C} (как функция комплексной переменной $u = Y^2$) и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_E .

Доказательство. Поскольку все интегралы в дисперсионном уравнении (1.16) сходятся, то очевидно, что указанные h_{\inf}^p и h_{\sup}^p существуют. Далее, так как правая часть уравнения (1.11) непрерывна по совокупности переменных Y и γ , ограничена и непрерывно дифференцируема по Y , то (см., например, [53, 68]) решения такого уравнения непрерывны по параметру γ . Но тогда и функция $\Phi(\gamma; k)$ является непрерывной функцией параметра γ . Отсюда с очевидностью следует утверждение о том, что для всякого $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$ существует по крайней мере одно решение дисперсионного уравнения (1.16), которое в силу теоремы 1.1 является собственным значением задачи P_E .

Более того, так как правая часть уравнения (1.11) является аналитической функцией Y и γ , то решения такого уравнения будут аналитическими функциями x и параметра γ (см., например, [53, 80]). Отсюда следует, что функция $\Phi(\gamma; n)$ также является аналитической функцией параметра γ . Поскольку условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то отсюда в силу аналитичности функции $\Phi(\gamma; k)$ по γ следует, что функция

$\Phi(\gamma; k)$ не может оставаться постоянной на любом открытом множестве $\gamma^2 \in \Gamma' \subset \Gamma$. Это и означает, что на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_E . \square

Теорема 1.6. Пусть функция $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в \mathbb{C} (как функция комплексного переменного $u = Y^2$) и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_E .

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидным образом получается из доказательства предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что в этой теореме не существует \sup функции $\Phi(\gamma; k)$. \square

Величины h_{\inf}^k и h_{\sup}^k можно находить численно.

Условие $\gamma^2 < \varepsilon_2$ является точным. Действительно, для функции $f \equiv 0$ получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_2$ (см. приложение Б).

Рассмотрим возможности обобщения дисперсионного уравнения (1.16).

Дисперсионное уравнение (1.16) получено из второго уравнения системы (1.19), которое имеет вид

$$\frac{d\eta}{dx} = q(\eta). \quad (1.31)$$

Из классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если правая часть $q(\eta)$ непрерывна и не

обращается в нуль при $\eta \in (a, b)$, то через каждую точку (x_0, η_0) полосы $a < \eta < b$ проходит единственная интегральная кривая – решение уравнения (1.31) (см., например, [68]).

Если же при $\eta \in (a, b)$ существует точка $\eta = c \in (a, b)$ такая, что $q(c) = 0$, то в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\xi}{q(\xi)}$ и поведения функции $q(\eta)$ в точке $\eta = c$, могут реализоваться три случая:

- 1) через каждую точку (x_0, η_0) полосы $a < \eta < b$ проходит единственная интегральная кривая – решение уравнения (1.31). Сразу же поясним, что прямая $\eta = c$ разделяет полосу $a < \eta < b$ на две полосы $a < \eta < c$ и $c < \eta < b$, причем интегральная кривая, полученная по некоторой точке, принадлежит той же полосе, что и начальная точка. При этом функция $\eta = c$ является единственным решением уравнения (1.31);
- 2) через любую точку (x_0, η_0) полосы $a < \eta < b$ проходит бесконечное множество интегральных кривых уравнения (1.31);
- 3) через любую точку (x_0, c) проходит бесконечное множество интегральных кривых.

Таким образом, мы видим, что если существует точка $\eta = c \in (a, b)$ такая, что $q(c) = 0$, то при переходе через эту точку либо мы переходим на другое решение уравнения (1.31), либо по крайней мере в этой точке нарушается единственность решения уравнения (1.31). В силу того, что нас интересует единственное решение уравнения (1.31), то и та, и другая ситуации нам не подходят.

Вышесказанное означает, что подход для вывода дисперсионного уравнения, основанный на знакопостоянстве правой части второго уравнения системы (1.19), полностью обоснован.

При заданной функции нелинейности f дальнейшие результаты о собственных значениях могут быть получены при исследовании дисперсионного уравнения (1.16) совместно с первым интегралом (1.20). Такое исследование позволит не только получить важную дополнительную информацию о собственных значениях (дискретность собственных значений, локализация, структура множества собственных значений), но и, возможно, ослабить ограничение $k_2^2 > 0$ (см. п. 1.4).

При определенных условиях вектор поляризации в материальных уравнениях в системе Максвелла имеет разложение в ряд по степеням $|\mathbf{E}|$ (см., например, [40, 48, 62, 86]). Считая, что f – многочлен, мы просто обрываем соответствующий ряд. Заметим, что активно исследуются нелинейности, отличные от полиномиальных, в частности, нелинейности с насыщением

$$\frac{\alpha|\mathbf{E}|^2}{1 + \beta|\mathbf{E}|^2} \text{ и } \alpha(1 - e^{-\beta|\mathbf{E}|^2})$$

(см., например, [5, 16, 60, 62] и п. 1.4).

Замечание 1.6. Пусть первый интеграл (1.12) (или (1.20)) является алгебраической функцией (см., например, [84]) от каждой из двух своих переменных. Такая ситуация имеет место, например, если нелинейность f представляет собой полином от независимой переменной. В этом случае любое уравнение системы (1.19) совместно с первым интегралом представляет собой абелев интеграл [70, 84]. Его обращением является абелева функция, которая и будет решением выбранного для интегрирования уравнения. В этом случае решение второго уравнения выражается из первого интеграла и найденного только что решения. Таким образом, обе функции – решения системы (1.19) – являются абелевыми функциями. Как известно, абелевы функции – функции мероморфные (см., например, [63]). Это рассуждение объясняет в простейшем случае появление точек разрыва функции η . То есть, если f – полином, то эти разрывы –

полюсы мероморфной функции. Абелевы функции возникают в различных нелинейных задачах математической физики [41].

1.4. НЕЛИНЕЙНОСТЬ КЕРРА И НЕЛИНЕЙНОСТЬ С НАСЫЩЕНИЕМ

В этом пункте будет рассмотрено приложение общей техники, развитой в первых трех параграфах этой главы, к изучению двух типов нелинейностей: нелинейности типа Керра (задача P_{E1}) и нелинейности с насыщением (задача P_{E2}). Для дисперсионных уравнений задач P_{E1} и P_{E2} справедливы теоремы 1.1–1.6, доказанные в пп. 1.1–1.3. Далее будут получены результаты о спектрах этих задач, существенно дополняющие доказанные ранее теоремы.

1.4.1. НЕЛИНЕЙНОСТЬ КЕРРА

Постановка задачи. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость ε внутри слоя Σ имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2,$$

где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ – (положительная) постоянная часть диэлектрической проницаемости; $\alpha > 0$ – коэффициент нелинейности.

Задача P_{E1} : требуется доказать существование собственных значений γ , удовлетворяющих определению 1.1, при условии, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + \alpha Y^2, & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \quad (1.32)$$

Совокупность всех собственных значений задачи P_{E1} будем обозначать через σ_{E1} .

Дисперсионное уравнение. Внутри слоя Σ уравнение (1.6) с учетом формулы (1.32) принимает вид

$$Y'' = -(k_2^2 + \alpha Y^2)Y. \quad (1.33)$$

Первый интеграл уравнения (1.33) имеет вид

$$Y'^2 + k_2^2 Y^2 + 0.5\alpha Y^4 \equiv C, \quad (1.34)$$

где C – постоянная интегрирования. Используя (1.9), (1.10) и (1.34) в точке $x = 0$, получаем

$$C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + 0.5\alpha A^4;$$

C не зависит от γ ; $C > 0$, если $\alpha \geq 0$.

Используя (1.9), (1.10), (1.34) в точке $x = h$ и вычисленное C , получаем уравнение относительно неизвестной постоянной B :

$$\alpha B^4 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)B^2 - [2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \alpha A^4] = 0. \quad (1.35)$$

Это уравнение всегда имеет положительное решение B^2 , а именно

$$B^2 = \frac{\sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \alpha A^2[2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \alpha A^2]} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\alpha}.$$

Дисперсионное уравнение для задачи P_{E1} имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := T_1 + nT_2 = h, \quad (1.36)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – целое число;

$$T_1 = \int_{-k_3}^{k_1} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta, \quad w = \frac{1}{\sqrt{(k_2^2 + \eta^2)^2 + 2\alpha C}}.$$

Замечание 1.7. Вид уравнения (1.36) отличается от (1.16). Это связано с тем, что случай рассматриваемой нелинейности является единственным, известным автору настоящего исследования, когда первый интеграл может быть эффективно разрешен относительно одной из переменных. Действительно, после перехода к переменным (1.18) уравнение

(1.33) в виде нормальной системы записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(k_2^2 + \alpha\tau + \eta^2). \end{cases} \quad (1.37)$$

Первый интеграл этой системы имеет вид

$$0.5\alpha\tau^2 + (\eta^2 + k_2^2)\tau \equiv C. \quad (1.38)$$

Принимая во внимание, что $\tau \geq 0$, находим из (1.38)

$$\tau = -\alpha^{-1}(\eta^2 + k_2^2) + \alpha^{-1}\sqrt{(\eta^2 + k_2^2)^2 + 2\alpha C}.$$

Подставляя этот результат в правую часть второго уравнения системы (1.37), получаем

$$\eta' = -\sqrt{(k_2^2 + \eta^2)^2 + 2\alpha C}, \quad (1.39)$$

где

$$(k_2^2 + \eta^2)^2 + 2\alpha C > 0 \quad (1.40)$$

для всех $\eta \in [0, +\infty)$. Если $\alpha C > 0$, то (1.40) справедливо для всех $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), +\infty)$.

Линейный случай (задача P_E^{lin}). Если $\alpha = 0$, то мы получаем хорошо известную линейную задачу, которая исследована в приложении Б. Здесь мы покажем, что предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в уравнении (1.36) дает известное уравнение линейной задачи (см. формулу (Б.12) на с. 141). Как сказано выше, в этом случае $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ [3, 11]. Очевидно, что при $\alpha = 0$ интегралы T_1, T_2 расходятся, когда $\gamma^2 \rightarrow \varepsilon_2$. Предположим, что $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2 - \delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда w стремится равномерно по γ к $w_0 = (k_2^2 + \eta^2)^{-1}$. Теперь можно перейти к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в дисперсионном уравнении (1.36). Этот переход дает

$$h = \int_{-k_3}^{k_1} \frac{d\eta}{k_2^2 + \eta^2} + n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{k_2^2 + \eta^2}.$$

После вычисления интегралов и перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ получаем формулу

$$h = \frac{1}{k_2} \operatorname{arctg} \frac{k_2(k_1 + k_3)}{k_2^2 - k_1 k_3} + \frac{\pi n}{k_2}, \quad (1.41)$$

взяв тангенс, приходим к известному дисперсионному уравнению [3, 11, 26]:

$$\operatorname{tg} k_2 h = \frac{k_2(k_1 + k_3)}{k_2^2 - k_1 k_3}. \quad (1.42)$$

Результатом исследования уравнения (1.41) (или (1.42)) является

Утверждение 1.1. Пусть $\varepsilon_* \geq \varepsilon_0$, $\varepsilon^* < \varepsilon_2$ и $Y(0) \neq 0$. В этом случае для любого

$$h > h_* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \arctan \frac{\sqrt{\varepsilon^* - \varepsilon_*}}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \geq 0,$$

где $\varepsilon_* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon^* = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, задача P_E^{lin} имеет конечное число (и не менее одного) положительных (кратности 1) собственных значений $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_p$, которые являются корнями уравнения (1.41) и (1.42). Для всякого $i = \overline{1, p}$ справедливо $\tilde{\gamma}_i^2 \in (\varepsilon^*, \varepsilon_2)$.

Замечание 1.8. Поскольку в уравнении (1.41) параметр n сохраняет смысл, приданный ему при доказательстве теоремы 1.1, то, принимая во внимание утверждение 1.1, получаем, что для всякого допустимого n существует единственная собственная функция, имеющая n нулей. Если же явно решить уравнения задачи P_E^{lin} и, используя условия сопряжения (1.9), вывести дисперсионное уравнение, то оно будет иметь форму (1.42) (см. приложение Б). Ясно, что из уравнения (1.42) легко получить уравнение (1.41), однако в этом случае смысл параметра n остается неясным.

Спектр. В дальнейшем мы будем использовать два обозначения для собственных значений $\hat{\gamma}$ задачи P_{E1} : обозначение $\hat{\gamma}_i$ значит, что все собственные значения упорядочены по возрастанию; обозначение $\hat{\gamma}(m)$ значит, что это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (1.36) при $n = m$.

Основным результатом этого пункта является следующая

Теорема 1.7. Пусть $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha > 0$ и $Y(0) \neq 0$. В этом случае для любого $h > 0$ задача P_{E1} имеет бесконечное число положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$ (с точкой накопления на бесконечности).

Собственные значения $\hat{\gamma}_i$ имеют следующие свойства:

1) если $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots$ все решения задачи P_{E1} , то

$$\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), +\infty) \text{ и } \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_j^2 \rightarrow \infty;$$

2) если задача P_E^{lin} имеет p решений $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_p$, то существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $\alpha = \alpha' < \alpha_0$ справедливо

$$\hat{\gamma}_i^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2) \text{ и } \lim_{\alpha' \rightarrow 0} \hat{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i, \quad i = \overline{1, p},$$

где $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p$ – первые p решений задачи P_{E1} при $\alpha = \alpha'$;

2') если $q > p$, то $\lim_{\alpha' \rightarrow +0} \hat{\gamma}_q^2 = +\infty$;

3) для больших значений γ и произвольно малого $\Delta > 0$ справедливо следующее асимптотическое двойное неравенство

$$(1 - \Delta)\gamma_{\bullet}(m) \leq \hat{\gamma}(m) \leq \sqrt{2}(1 + \Delta)\gamma_{\bullet}(m + 1),$$

где $\gamma_{\bullet}^2(m) = \varepsilon_2 + (f^{-1}(\frac{h}{4m}))^2$, f^{-1} есть обращение функции $f(t) = t^{-1} \ln t$;

3') если $\sqrt{2\alpha C} < 1$, то для больших значений γ справедливо более простое асимптотическое неравенство

$$\hat{\gamma}(m) \geq \gamma_{\circ}(m),$$

где $\gamma_{\circ}^2(m) = \varepsilon_2 + (\frac{m}{h} \ln(2\alpha C))^2$;

4) если собственное значение $\hat{\gamma}_i \rightarrow \infty$, то $\max_{x \in (0, h)} |Y(x; \hat{\gamma}_i)| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на оценки интегралов в дисперсионном уравнении.

Очевидно, что

$$nT_2 < T_1 + nT_2 < (n+1)T_2, \quad (1.43)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, необходимо оценить T_2 . Для дальнейшего анализа понадобятся следующие легко проверяемые неравенства:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{a+b},$$

где $a \geq 0, b > 0$. Из этих неравенств следует, что

$$T^* \leq T_2 \leq \sqrt{2}T^* \quad (1.44)$$

и, поскольку $T_2 = 2 \int_0^{+\infty} w d\eta$ (см. (1.36)), то $T^* = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{|k_2^2 + \eta^2| + \sqrt{2\alpha C}}$.

Тогда из (1.43), (1.44) следует, что

$$nT^* \leq nT_2 < T_1 + nT_2 < (n+1)T_2 \leq \sqrt{2}(n+1)T^*.$$

Для интеграла T^* имеется три случая:

(а) если $\gamma^2 < \varepsilon_2$, то

$$T^* = \pi\theta^{-1};$$

(б) если $\varepsilon_2 \leq \gamma^2 < \varepsilon_2 + \sqrt{2\alpha C}$, то

$$T^* = -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|k_2| + \theta)^2} + \frac{2}{\theta_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{|k_2|}{\theta_1} \right);$$

(с) если $\gamma^2 \geq \varepsilon_2 + \sqrt{2\alpha C}$, то

$$T^* = -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|k_2| + \theta)^2} - \frac{1}{\theta_2} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|k_2| + \theta_2)^2},$$

где

$$\theta = (|k_2^2| + \sqrt{2\alpha C})^{1/2}, \quad \theta_1 = (-|k_2^2| + \sqrt{2\alpha C})^{1/2}, \quad \theta_2 = (|k_2^2| - \sqrt{2\alpha C})^{1/2}.$$

Легко проверяется, что интеграл T^* непрерывно зависит от γ^2 для всех $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), +\infty)$.

Из случая (с) следует, что $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T^* = 0$. Эта формула гарантирует, что для любого заданного $h > 0$ существует бесконечное число положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$. Таким образом, случаи (а), (b) и (с) доказывают первое утверждение теоремы.

Утверждение 2 теоремы следует из (а), (b).

Утверждение 2' теоремы следует из (с).

Утверждение 3 теоремы следует из (с). Действительно, имеет место следующая асимптотическая формула $T^* \sim 4|k_2|^{-1} \ln |k_2|$. Из этой формулы легко следует утверждение 3 теоремы.

Если $\sqrt{2\alpha C} < 1$, то из (с) получаем следующую асимптотическую формулу $T^* \sim -|k_2|^{-1} \ln 2\alpha C$. Из этой формулы следует утверждение 3' теоремы.

Умножая уравнение (1.33) на Y и интегрируя от $x = 0$ до $x = h$, получаем

$$-k_3 B^2 - k_1 A^2 - \int_0^h Y'^2 dx = -k_2^2 \int_0^h Y^2 dx - \alpha \int_0^h Y^4 dx,$$

откуда следует, что $\int_0^h Y^4 dx \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Это доказывает утверждение 4 теоремы. \square

Замечание 1.9. Очевидно, что собственные значения $\hat{\gamma}_i$ задачи P_{E1} такие, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \hat{\gamma}_i^2 = +\infty$, не могут быть получены на основе теории возмущений из решений задачи P_E^{lin} . Такие собственные значения могут отвечать новому типу поверхностных волн.

Дисперсионные кривые. На рисунке 1.1 представлены (дисперсионные) кривые (см. теорему 1.7), характеризующие зависимость $\gamma = \gamma(h)$.

Как видно из рис. 1.1, для $h = 10$ первая дисперсионная кривая не пересекает линию $h = 10$, т.е. $\sigma_0 = \emptyset$, множества $\sigma_k = \{\hat{\gamma}(k), \hat{\gamma}'(k)\}$ при $k = \overline{1, 6}$ содержат по два элемента (они все отмечены черными точками

на рисунке), множества $\sigma_k = \{\hat{\gamma}(k)\}$ при $k = 7, 8, \dots$ содержат по одному элементу (эти элементы на рисунке не видны, все они находятся выше точки $\hat{\gamma}'(5)$). Множество σ_k – это множество решений дисперсионного уравнения (1.36).

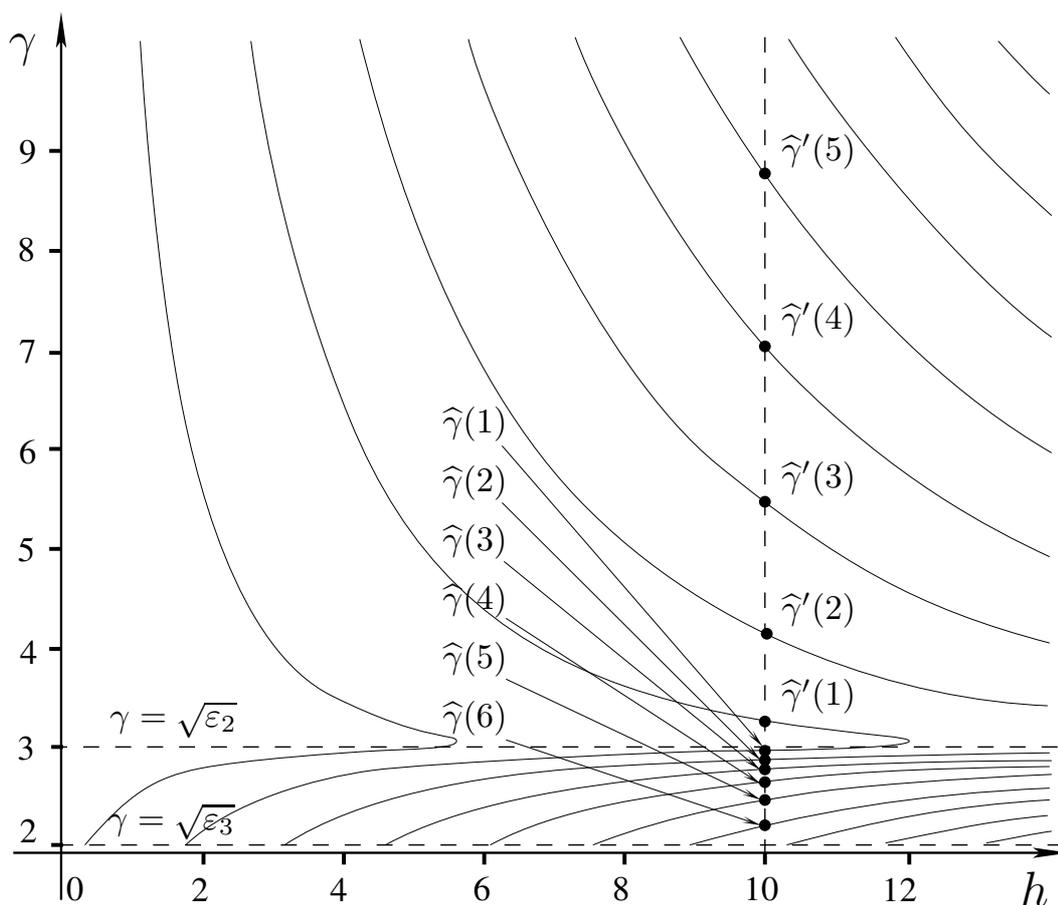


Рис. 1.1. Дисперсионные кривые.

Значения параметров: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 4$, $\alpha = 0.01$, $Y(0-0) = 1$.

Внутри слоя $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha Y^2$

Линейный случай представлен на рис. 1.2. Здесь горизонтальная прямая $\gamma = 3$ является асимптотой. Все дисперсионные кривые лежат ниже этой прямой. Вертикальная прямая $h = 10$ соответствует толщине слоя, отмеченной на рис. 1.1. В линейном случае при $h = 10$ имеется 7 собственных значений.

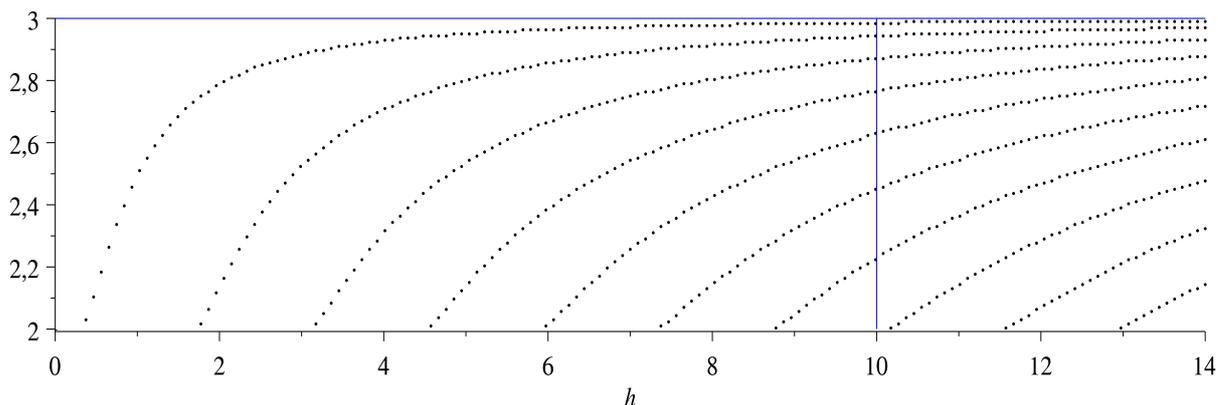


Рис 1.2. Дисперсионные кривые.
 Значения параметров: $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 4, \alpha = 0$

1.4.2. НЕЛИНЕЙНОСТЬ С НАСЫЩЕНИЕМ

Постановка задачи. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость ε внутри слоя Σ имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \frac{\alpha|\mathbf{E}|^2}{1 + \beta|\mathbf{E}|^2},$$

где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ – (положительная) постоянная часть диэлектрической проницаемости; $\alpha, \beta > 0$ – коэффициенты нелинейности.

Задача P_{E2} : требуется доказать существование собственных значений γ , удовлетворяющих определению 1.1, при условии, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2}, & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \quad (1.45)$$

Совокупность всех собственных значений задачи P_{E2} будем обозначать через σ_{E2} .

Дисперсионное уравнение. Внутри слоя Σ уравнение (1.6) с учетом формулы (1.45) принимает вид

$$Y'' = - \left(k_2^2 + \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2} \right) Y. \quad (1.46)$$

Первый интеграл уравнения (1.46) имеет вид

$$Y'^2 + (k_2^2 + \alpha\beta^{-1})Y^2 - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta Y^2) \equiv C, \quad (1.47)$$

где C – постоянная интегрирования. Используя (1.9), (1.10) и (1.47) в точке $x = 0$, получаем

$$C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \alpha\beta^{-1})B^2 - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta B^2); \quad (1.48)$$

C не зависит от γ ; $C > 0$, если $\alpha \geq 0$.

Используя (1.9), (1.10), (1.47) в точке $x = h$ и вычисленное C , получаем уравнение относительно неизвестной постоянной B :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \alpha\beta^{-1}A^2 - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta A^2) = \\ = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)B^2 + \alpha\beta^{-1}B^2 - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta B^2). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Это уравнение всегда имеет положительное решение B^2 .

Дисперсионное уравнение для задачи P_{E2} имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := T_1 + nT_2 = h, \quad (1.50)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$;

$$T_1 = \int_{-k_3}^{k_1} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta, \quad w = \frac{1}{k_2^2 + \frac{\alpha\tau}{1+\beta\tau} + \eta^2};$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения

$$\tau\eta^2 + (k_2^2 + \alpha\beta^{-1})\tau - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta\tau) \equiv C$$

(которое является первым интегралом (1.47) в переменных (1.18)); C определена формулой (1.48).

Спектр. В дальнейшем мы будем использовать два обозначения для собственных значений $\hat{\gamma}$ задачи P_{E2} : обозначение $\hat{\gamma}_i$ значит, что все собственные значения упорядочены по возрастанию; обозначение $\hat{\gamma}(m)$ значит, что это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (1.50) при $n = m$.

Основным результатом этого пункта является следующая

Теорема 1.8. Пусть $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha, \beta > 0$ и $Y(0) \neq 0$. Тогда существует $h_{\min} > 0$ такое, что для любого $h > h_{\min}$ задача P_{E2} имеет конечное число (и не менее одного) положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$.

Для всякого собственного значения $\hat{\gamma}_i$ задачи P_{E2} справедливо, что

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \hat{\gamma}_i^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1},$$

кроме того, для всяких допустимых m и $m + 1$ справедливо, что

$$\max \hat{\gamma}(m + 1) < \max \hat{\gamma}(m),$$

где \max берется среди всех положительных решений уравнения (1.50) с заданным n .

Доказательство. Уравнение (1.50) выведено в предположении, что правая часть второго уравнения системы

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(k_2^2 + \frac{\alpha\tau}{1+\beta\tau} + \eta^2) \end{cases} \quad (1.51)$$

отрицательна. Очевидно, что при $k_2^2 > 0$ и $\alpha, \beta > 0$ это условие наверняка выполняется.

Система в нормальной форме (1.51) получена из уравнения (1.46) с использованием переменных (1.18). Первый интеграл (1.47) в переменных (1.18) имеет вид

$$\tau\eta^2 + (k_2^2 + \alpha\beta^{-1})\tau - \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta\tau) \equiv C. \quad (1.52)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1.51) совместно с первым интегралом (1.52). При $k_2^2 < 0$, т.е. при $\gamma^2 > \varepsilon_2$, правая часть второго уравнения (1.51) уже не обязательно является знакоопределенной. В то же время очевидно, если знак указанной правой части меняется, то существует стационарное решение $\tilde{\eta} \equiv \text{const}$ этого уравнения и этому решению $\tilde{\eta}$ отвечает $\tilde{\tau} = \tau(\tilde{\eta})$ определяемое из первого интеграла (1.52).

Для того чтобы выяснить, возникает ли в рассматриваемом случае указанное стационарное решение, необходимо провести исследование первого интеграла (1.52). Запишем его в такой форме:

$$\eta^2 + (k_2^2 + \alpha\beta^{-1}) = \frac{C}{\tau} + \alpha\beta^{-2} \frac{\ln(1 + \beta\tau)}{\tau}.$$

Пусть $g(\tau) := \frac{C}{\tau} + \alpha\beta^{-2} \frac{\ln(1 + \beta\tau)}{\tau}$. Ясно, что $g(\tau) > 0$ при $\tau > 0$, более того $\lim_{\tau \rightarrow +0} g(\tau) = +\infty$ и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} g(\tau) = +0$. Кроме того, при $\tau > 0$ функция g монотонно убывает по τ (как сумма двух монотонно убывающих функций). Прямая $f(\tau, \eta; \gamma) := \eta^2 + (k_2^2 + \alpha\beta^{-1})$ при заданном $\eta = \hat{\eta}$ проходит через точку $(0, \hat{\eta}^2 + k_2^2 + \alpha\beta^{-1})$ параллельно оси τ (см. рис. 1.3). Ясно, что $\lim_{\eta \rightarrow +0} f(\tau, \eta; \gamma) = k_2^2 + \alpha\beta^{-1}$. Отсюда следует, что для того, чтобы для всякого значения $\hat{\eta}$ существовало решение $\hat{\tau}(\hat{\eta})$, необходимо и достаточно выполнение условия $k_2^2 + \alpha\beta^{-1} > 0$, откуда получаем

$$\gamma^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}. \quad (1.53)$$

Заметим, что при $\alpha \rightarrow 0$ это неравенство переходит в $\gamma^2 < \varepsilon_2$ (что соответствует линейному случаю, см. приложение Б), а при $\beta \rightarrow 0$ получаем $\gamma^2 < \infty$ (что справедливо как раз для случая керровской нелинейности, см. п. 1.4.1).

Геометрически сказанное представлено на рис. 1.3

Ясно, что при возрастании γ^2 от $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ до $\varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}$ функция $\hat{\tau} \equiv \hat{\tau}(\eta; \gamma^2)$, найденная из первого интеграла, остается положительной и при фиксированном η монотонно возрастает при возрастании γ^2 .

Пусть существует указанное выше стационарное решение $\tilde{\eta}$. Этому решению отвечает некоторое значение $\tilde{\tau} \equiv \tau(\tilde{\eta})$. Поскольку решение $\hat{\tau}$ изменяется монотонно и непрерывно при возрастании γ , то либо а) $\hat{\tau}$ никогда не примет значения $\tilde{\tau}$, либо б) при каком-то значении γ^2 будет $\hat{\tau} = \tilde{\tau}$.

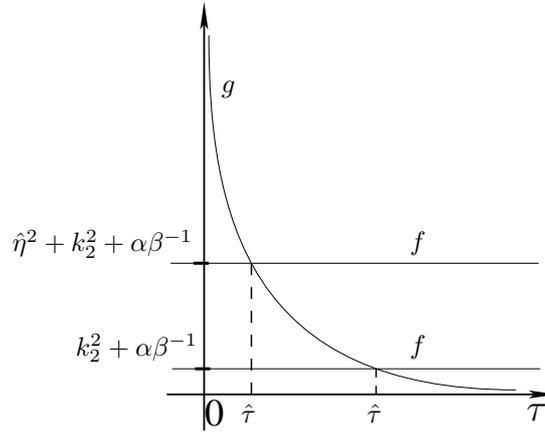


Рис. 1.3

В случае (а) правая часть второго уравнения (1.51) будет положительной для всех γ^2 , удовлетворяющих неравенству (1.53).

Случай (б) не может реализоваться, поскольку при непрерывной и дифференцируемой правой части фазовые траектории автономной системы $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ либо не пересекаются, либо совпадают в ее фазовом пространстве [68].

Выясним, что дает предельный переход в дисперсионном уравнении (1.50) при $\gamma^2 \rightarrow \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}$. Пусть $\Delta > 0$ – достаточно малое число, возьмем $\gamma^2 = \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1} - \Delta$: второе уравнение (1.51) принимает вид

$$\eta' = - \left(\eta^2 + \Delta - \frac{1}{1 + \beta\tau} \right);$$

первый интеграл (1.52) принимает вид

$$\eta^2 = \frac{C + \alpha\beta^{-2} \ln(1 + \beta\tau) - \Delta\tau}{\tau}.$$

Нам известно, что при $\Delta \rightarrow 0$ корень $\hat{\tau} \rightarrow +\infty$ при $\eta \rightarrow +0$. Это значит, что $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\Delta - \frac{1}{1 + \beta\tau} \right) = +0$.

Из этого следует, что в дисперсионном уравнении (1.50)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h(\gamma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} T_1 = +\infty, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} h(\gamma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} T_2 = +\infty.$$

Значение h_{\min} определяется как

$$h_{\min} = \inf_{\gamma^2 \in \Gamma} T_1,$$

где $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1})$.

Поскольку правые части системы являются аналитическими функциями при действительных значениях $\tau \geq 0$, η и γ , получаем, что собственных значений задачи P_{E_2} не более конечного числа. Известно [53, 80], что решения такой системы являются (вещественно) аналитическими функциями независимой переменной и параметра γ . В этом случае дисперсионное уравнение (1.50) на всяком конечном отрезке Γ' имеет не более конечного числа решений $\gamma' \in \Gamma'$. \square

Замечание 1.10. Собственные значения $\hat{\gamma}_i$ задачи P_{E_2} , для которых справедливо $\varepsilon_2 < \hat{\gamma}_i^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}$, могут отвечать новому типу поверхностных волн.

О предельных переходах $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$. Поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_2$ (это линейная задача и она исчерпывающе исследована, см. приложение Б), а при $\beta \rightarrow 0$ имеем керровскую нелинейность, то возникает вопрос: возможен ли переход к пределу в каждом из указанных случаев (отдельно при $\alpha \rightarrow 0$ и отдельно при $\beta \rightarrow 0$) в дисперсионном уравнении (1.50) и если возможен, то дает ли такой переход дисперсионное уравнение для линейной задачи и дисперсионное уравнение для керровской среды?

Используя первый интеграл (1.52), легко видеть, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha\tau = 0$. Пусть $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2\alpha\beta^{-1} - \delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда w стремится равномерно по γ к $w_0 = (k_2^2 + \eta^2)^{-1}$. Теперь можно перейти к

пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в дисперсионное уравнение (1.50). Этот переход дает

$$h = \int_{-k_3}^{k_1} \frac{d\eta}{k_2^2 + \eta^2} + n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{k_2^2 + \eta^2}.$$

После вычисления интегралов и перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ получаем формулу (1.41), взяв тангенс, приходим к известному дисперсионному уравнению (1.42) [3, 11, 26] (см. п. 1.4.1 и приложение Б).

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в первом интеграле (1.52) получаем линейный случай, а именно

$$\tau\eta^2 + k_2^2\tau \equiv C \quad \text{или} \quad Z^2 + k_2^2Y^2 \equiv C.$$

Предельный переход при $\beta \rightarrow 0$ в первом интеграле (1.52) дает

$$\tau\eta^2 + k_2^2\tau + \frac{\alpha}{2}\tau^2 \equiv C,$$

что отвечает случаю керровской нелинейности (см. формулу ((1.38)).

Дисперсионные кривые. На рисунке 1.4 представлены (дисперсионные) кривые (см. теорему 1.8), характеризующие зависимость $\gamma = \gamma(h)$.

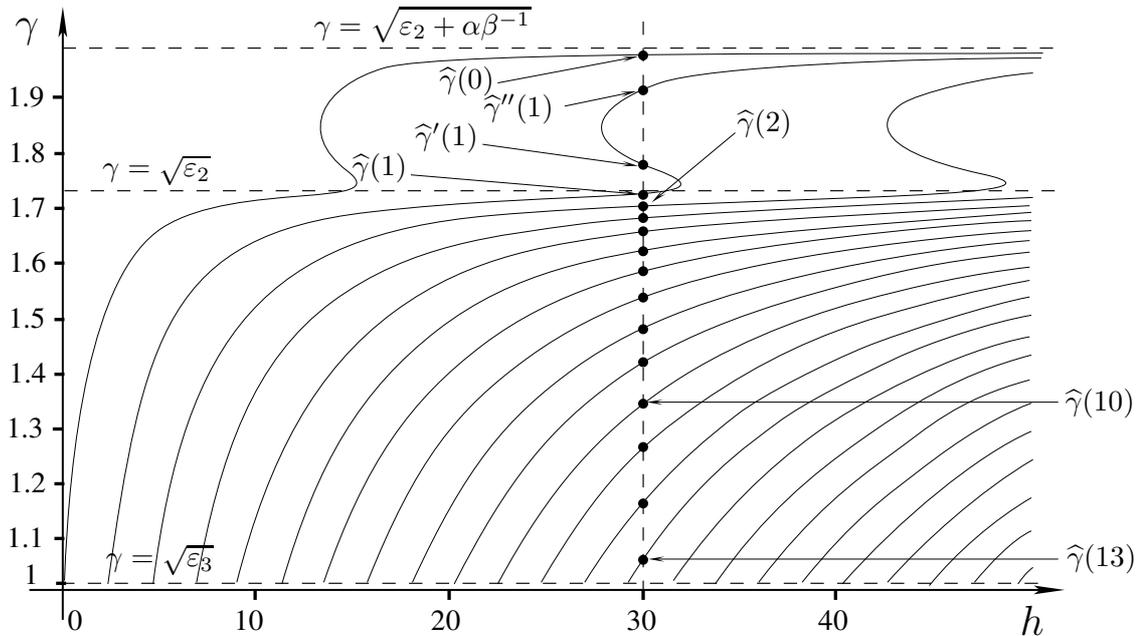


Рис. 1.4. Дисперсионные кривые.

Значения параметров: $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$, $\epsilon_3 = 1$, $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.001$, $Y(0-0) = 1$.

Внутри слоя $\epsilon = \epsilon_2 + \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2}$

Как видно из рис. 1.4, прямая $h = 30$ пересекает 14 дисперсионных кривых, таким образом, имеем $\sigma_0 = \{\hat{\gamma}(0)\}$, $\sigma_1 = \{\hat{\gamma}(1), \hat{\gamma}'(1), \hat{\gamma}''(1)\}$, множества $\sigma_k = \{\hat{\gamma}(k)\}$ при $k = \overline{2, 13}$ содержат по одному элементу (все собственные значения отмечены черными точками), множества $\sigma_k = \emptyset$ при $k = 14, 15, \dots$. Множество σ_k – это множество решений дисперсионного уравнения (1.50).

Прямая $\gamma = \sqrt{\varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}}$ является асимптотой в рассматриваемом нелинейном случае. Интересным фактом является существование новых собственных значений именно в полосе $\sqrt{\varepsilon_2} < \gamma < \sqrt{\varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1}}$.

Линейный случай представлен на рис. 1.5. Здесь горизонтальная прямая линия $\gamma = \sqrt{3}$ является асимптотой. Все дисперсионные кривые лежат ниже этой прямой. Вертикальная прямая $h = 30$ соответствует толщине слоя, отмеченной на рис. 1.4. В линейном случае при $h = 30$ имеется 14 собственных значений.

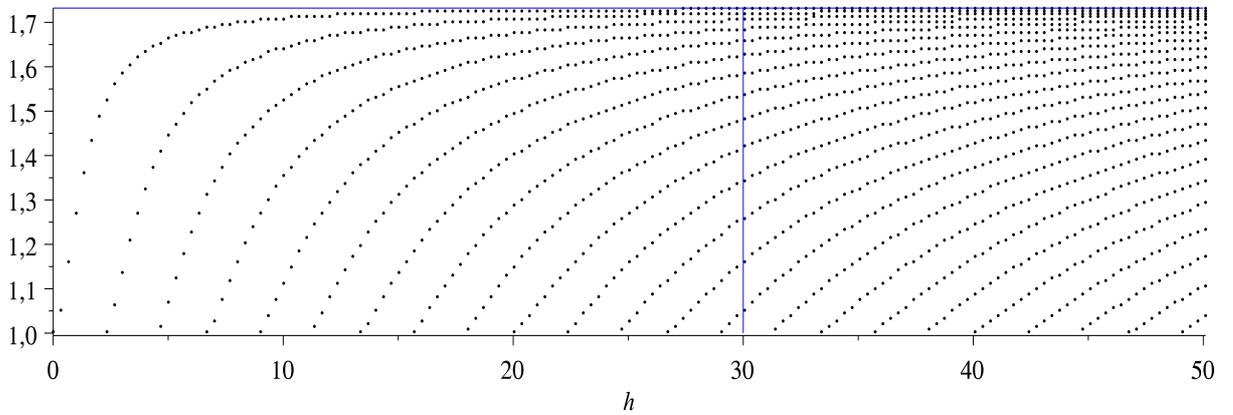


Рис. 1.5. Дисперсионные кривые.
Значения параметров: $\alpha = 0$

Г Л А В А 2

НЕЛИНЕЙНАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Результаты главы опубликованы в работах [13, 14, 17, 26, 108]. Частные случаи рассмотренного в этой главе вопроса опубликованы в работах [15, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 108, 109, 112, 116, 121, 122].

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим монохроматические ТМ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\},$$

здесь

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)^T \quad (2.1)$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные

диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим диагональным тензором 3×3 :

$$\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}), \quad (2.2)$$

элементы ε_{xx} , ε_{zz} имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_f + \varepsilon_0 f(a|E_x|^2 + b|E_z|^2), \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_g + \varepsilon_0 g(c|E_x|^2 + d|E_z|^2), \quad (2.3)$$

где ε_f , ε_g – постоянные (вещественные) составляющие диэлектрических проницаемостей ε_{xx} , ε_{zz} ; a, b, c, d – неотрицательные постоянные, не все равные нулю; свойства функций f , g будут указаны позднее¹. Элемент ε_{yy} не оказывает влияния на распространение ТМ-волн.

Комплексные амплитуды (2.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (2.4)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Считаем, что волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z . Подставляя комплексные амплитуды (2.1) в уравнения Максвелла, (2.4) убеждаемся, что их компоненты не зависят от y . Значит, компоненты векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} имеют представление

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad (2.5)$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

¹Произвольная диэлектрическая проницаемость рассматривалась, например, в [96, 99, 100].

Подставим компоненты (2.5) в систему (2.4), получим

$$\begin{cases} i\gamma E_x(x) - E'_z(x) = i\omega\mu H_y(x), \\ i\gamma H_y(x) = i\omega\varepsilon_{xx}E_x(x), \\ H'_y(x) = -i\omega\varepsilon_{zz}E_z(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

Систему (2.6) можно привести к виду

$$\begin{cases} \gamma(iE_x(x))' - E''_z(x) = \omega^2\mu\varepsilon_{zz}E_z(x), \\ \gamma^2(iE_x(x)) - \gamma E'_z(x) = \omega^2\mu\varepsilon_{xx}(iE_x(x)) \end{cases} \quad (2.7)$$

и $H_y(x) = \gamma^{-1}\omega\varepsilon_{xx}E_x(x)$.

Обозначим $k_0^2 := \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ и выполним нормировку системы (2.7) в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = k_0x, \quad \frac{d}{dx} = k_0\frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{\varepsilon}_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_g = \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_0}.$$

Обозначим $Z(\tilde{x}) := E_z$, $X(\tilde{x}) := iE_x$. Опуская значок тильды, получаем из системы (2.7)

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon_{zz}Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}\varepsilon_{xx}X, \end{cases} \quad (2.8)$$

где с учетом предыдущего

$$\varepsilon_{xx} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0, \\ \varepsilon_f + f(aX^2 + bZ^2), & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x > h; \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{zz} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0, \\ \varepsilon_g + g(cX^2 + dZ^2), & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x > h, \end{cases}$$

$\varepsilon_f > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_g \geq 0$. Функции f и g являются таковыми, что выполняется соотношение $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$ (в дальнейшем это условие приведет к уравнению в полных дифференциалах).

Условие $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$ на компоненты тензора (2.2) указано в [99], где утверждается, что многие типы нелинейностей удовлетворяют такому условию. В пункте 2.3 будет показано, что без этого условия можно обойтись.

Считаем, что $f \in C^1 [0, +\infty)$, $g \in C^1 [0, +\infty)$, $f(s^2) \geq 0$, $g(s^2) \geq 0$ и $f(0) = g(0) = 0$.

Функции X , Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty), \\ Z(x) &\in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty) \cap \\ &\quad \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Под принадлежностью функции указанному пересечению понимается, что сужение функции на выбранный интервал (полуинтервал, отрезок) принадлежит соответствующему функциональному классу.

Указанные условия непрерывности и дифференцируемости функций X и Z соответствуют физическому смыслу задачи и, как будет видно далее, следуют из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля на границах раздела сред и свойств решений при $x < 0$ и $x > h$.

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты H_y и E_z . Из условий непрерывности касательных составляющих полей \mathbf{E} и \mathbf{H} получаем, что выражение $\partial_z E_x - \partial_x E_z$ непрерывно на границах раздела сред (см. первую формулу (2.6)). Учитывая выбор компонент полей, получаем условия сопряжения в следующей форме:

$$[\gamma X - Z']|_{x=0} = 0, \quad [\gamma X - Z']|_{x=h} = 0, \quad [Z]|_{x=0} = 0, \quad [Z]|_{x=h} = 0, \tag{2.11}$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

В дальнейшем, когда это не будет приводить к неправильному толкованию, мы часто будем опускать явную зависимость рассматриваемых функций от аргумента или параметров.

Перейдем к строгой формулировке задачи сопряжения.

Определение 2.1. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $X(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $X(0) > 0$) существуют не равные тождественно нулю функции $X(x; \hat{\gamma})$, $Z(x; \hat{\gamma})$, которые удовлетворяют системе уравнений (2.8), условиям (2.10), (2.11) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственным значением, а функции $X(x; \hat{\gamma})$, $Z(x; \hat{\gamma})$, соответствующие этому собственному значению, – собственными функциями.

Задача P_M : доказать существование собственных значений $\hat{\gamma}$, удовлетворяющих определению 2.1.

Совокупность всех собственных значений задачи P_M будем обозначать через σ_M .

Замечание 2.1. Определение 2.1 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра [36]. Введенное определение является, с одной стороны, распространением классического определения собственного значения на случай нелинейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра; с другой стороны, соответствует физической природе задачи. Введенное понятие не связано с понятием точки бифуркации.

Объясним, почему необходимо рассматривать действительные значения γ . Так как $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_x(x)e^{i\gamma z}, 0, \mathbf{E}_z(x)e^{i\gamma z})^T = e^{i\gamma z} (\mathbf{E}_x(x), 0, \mathbf{E}_z(x))^T$, то

$$|\mathbf{E}|^2 = |e^{i\gamma z}|^2 (|\mathbf{E}_x|^2 + |\mathbf{E}_z|^2).$$

Как известно, $|e^{i\gamma z}| = 1$ при $\text{Im } \gamma = 0$. Пусть $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ и $\text{Im } \gamma \neq 0$. Тогда получаем $|e^{i\gamma z}| = |e^{i\gamma' z}| \cdot |e^{-\gamma'' z}| = |e^{-\gamma'' z}|$. Значит, система (2.8)

будет зависеть от z , что противоречит выбору $E_x(x)$ и $E_z(x)$. Заметим еще, что $|e^{-\gamma''z}| \rightarrow +\infty$, когда $\gamma'' < 0$ и $z \rightarrow +\infty$ или когда $\gamma'' > 0$ и $z \rightarrow -\infty$, а это противоречит предполагаемому типу разыскиваемых волн.

Разыскиваются такие положительные γ , что

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_f.$$

Это условие соответствует классической задаче распространения ТМ-волн в линейном слое с постоянной диэлектрической проницаемостью (см. приложение В), поэтому мы придерживаемся его при выводе дисперсионного уравнения для нелинейного слоя.

Замечание 2.2. В линейной задаче можно считать спектральный параметр комплексным числом (см. приложение В).

2.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3.$$

При $x < 0$ и $x > h$ система (2.8) является линейной. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения системы (2.8) в указанных областях имеют вид

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{k_1x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h; \end{cases} \quad Z(x) = \begin{cases} A\gamma^{-1}k_1e^{k_1x}, & x < 0, \\ -B\gamma^{-1}k_3e^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (2.12)$$

Считаем, что $k_1^2 > 0$ и $k_3^2 > 0$, в противном случае удовлетворить условию излучения будет невозможно (см. приложение В).

Постоянная A в (2.12) отвечает значению $X(0)$ (см. определение 2.1) и предполагается фиксированной (известной), а постоянная B определяется условиями сопряжения (2.11).

Внутри слоя Σ система (2.8) принимает вид

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = (\varepsilon_g + g)Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}(\varepsilon_f + f)X. \end{cases} \quad (2.13)$$

Приведем систему (2.13) к нормальной форме. Дифференцируем по x второе уравнение системы (2.13), получаем

$$-Z'' + \gamma X' = \gamma^{-1} (2XX'f'_u + 2ZZ'f'_v) X + \gamma^{-1}(\varepsilon_f + f)X',$$

где $f'_u = f'_{X^2}$, $f'_v = f'_{Z^2}$ (далее эти производные понимаются в указанном смысле, пока явно не будет оговорено иное).

Используя последнее уравнение, систему (2.13) перепишем в виде

$$\begin{cases} X' = \frac{\gamma^2 (\varepsilon_g + g) + 2 (\varepsilon_f - \gamma^2 + f) X^2 f'_v}{\gamma (2X^2 f'_u + \varepsilon_f + f)} Z, \\ Z' = \frac{1}{\gamma} (\gamma^2 - \varepsilon_f - f) X. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из системы (2.14) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$MdX + NdZ = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} M &= (\gamma^2 - \varepsilon_f - f) (2X^2 f'_u + \varepsilon_f + f) X, \\ N &= (2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)X^2 f'_v - \gamma^2(\varepsilon_g + g)) Z. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$, то выполняется соотношение $\frac{\partial M}{\partial Z} = \frac{\partial N}{\partial X}$. Таким образом, уравнение (2.15) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем его решение – $U(X, Z)$.

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial x} = M$, то находим

$$\begin{aligned} U &= \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f) (2X^2 f'_u + \varepsilon_f + f) X dX + \varphi(Z) = \\ &= \int X^2 (\gamma^2 - \varepsilon_f - f) f'_u 2X dX + \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f) (\varepsilon_f + f) X dX + \varphi(Z). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{2}X^2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 + \int X(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 dX + \\
 &\quad + \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f)(\varepsilon_f + f)XdX + \varphi(Z) = \\
 &= -\frac{1}{2}X^2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 + \int X(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 dX + \\
 &\quad + \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f)(-\gamma^2 + \varepsilon_f + f + \gamma^2)XdX + \varphi(Z) = \\
 &= -\frac{1}{2}X^2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 + \gamma^2 \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f)XdX + \varphi(Z).
 \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial Z} = N$, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial Z} &= 2X^2Z(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)f'_v - 2\gamma^2 \int XZf'_v dX + \varphi'(Z) = \\
 &= (2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)X^2f'_v - \gamma^2(\varepsilon_g + g))Z,
 \end{aligned}$$

отсюда

$$\varphi'(Z) = 2\gamma^2 \int XZf'_v dX - \gamma^2(\varepsilon_g + g)Z.$$

Далее интегрируем по Z , получаем

$$\begin{aligned}
 \varphi(Z) &= 2\gamma^2 \int \int XZf'_v dXdZ - \gamma^2 \int (\varepsilon_g + g)ZdZ = \\
 &= \gamma^2 \int X \left(\int 2Zf'_v dZ \right) dX - \gamma^2 \int (\varepsilon_g + g)ZdZ = \\
 &= \gamma^2 \int XfdX - \gamma^2 \int (\varepsilon_g + g)ZdZ.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{2}X^2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 + \gamma^2 \int (\gamma^2 - \varepsilon_f - f)XdX + \\
 &\quad + \gamma^2 \int XfdX - \gamma^2 \int (\varepsilon_g + g)ZdZ,
 \end{aligned}$$

приводя подобные слагаемые и интегрируя, имеем

$$U = -\frac{1}{2}X^2(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)^2 + \frac{\gamma^2}{2}((\gamma^2 - \varepsilon_f)X^2 - \varepsilon_g Z^2) - \gamma^2 \int ZgdZ.$$

Из последней формулы получаем окончательно

$$U = X^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2 ((\varepsilon_f - \gamma^2)X^2 + \varepsilon_g Z^2) + \frac{\gamma^2}{2d} \int_{cX^2}^{cX^2+dZ^2} g(s)ds \equiv C.$$

Функция $U(X, Z)$ является первым интегралом системы (2.14), мы будем использовать первый интеграл в следующей форме:

$$X^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2 ((\varepsilon_f - \gamma^2)X^2 + \varepsilon_g Z^2) + \gamma^2 G \equiv C, \quad (2.16)$$

где $G \equiv G(X^2, Z^2) \equiv \frac{1}{2d} \int_{cX^2}^{cX^2+dZ^2} g(s)ds$; C – постоянная.

Введем обозначения предельных значений функций X и Z на границах слоя изнутри

$$X_0 := X(0+0), \quad X_h := X(h-0), \quad Z_0 := Z(0+0), \quad Z_h := Z(h-0).$$

Поскольку решения в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ нам известны, то мы можем сразу вычислить

$$\begin{aligned} \gamma X(0-0) - Z'(0-0) &= \gamma^{-1} \varepsilon_1 X(0-0) = \gamma^{-1} \varepsilon_1 A, \\ \gamma X(h+0) - Z'(h+0) &= \gamma^{-1} \varepsilon_3 X(h+0) = \gamma^{-1} \varepsilon_3 B. \end{aligned}$$

Внутри слоя при $x = 0+0$ и $x = h-0$ выражение $\gamma X(x) - Z'(x)$ может быть заменено правой частью второго уравнения (2.6).

Из всего сказанного получаем следующие условия сопряжения для функций X и Z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 X(0-0) &= (\varepsilon_f + f(aX_0^2 + bZ_0^2))X_0, \quad Z(0-0) = Z_0, \\ \varepsilon_3 X(h+0) &= (\varepsilon_f + f(aX_h^2 + bZ_h^2))X_h, \quad Z(h+0) = Z_h. \end{aligned}$$

Используя решения в полупространствах, предыдущие формулы можно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 A &= (\varepsilon_f + f(aX_0^2 + bk_1^2 \gamma^{-2} A^2))X_0, \quad Z_0 = \gamma^{-1} k_1 A, \\ \varepsilon_3 B &= (\varepsilon_f + f(aX_h^2 + bk_3^2 \gamma^{-2} B^2))X_h, \quad Z_h = -\gamma^{-1} k_3 B. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Выведем уравнения для неизвестных величин B и X_h .

Поскольку постоянная A предполагается известной, то X_0 определяется из первого уравнения (2.17)

$$\varepsilon_1 A = (\varepsilon_f + f(aX_0^2 + bk_1^2 \gamma^{-2} A^2))X_0.$$

Обозначим $f_0 := f(aX_0^2 + bZ_0^2)$ и $G_0 := G(X_0^2, Z_0^2)$. Тогда, используя первый интеграл (2.16), подставляя $x = 0$, найдем

$$C = X_0^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f_0)^2 + \gamma^2((\varepsilon_f - \gamma^2)X_0^2 + \varepsilon_g Z_0^2) + G_0. \quad (2.18)$$

Мы используем обозначения X_0, X_h, Z_0, Z_h , однако обращаем внимание читателя, что это лишь обозначения. Значения этих величин не зависят от точек $x = 0, h$.

Для того чтобы определить неизвестную величину B , поступим следующим образом: на границе $x = h$ имеем $\varepsilon_3 B = (\varepsilon_f + f_h)X_h$. Используя первый интеграл (2.16) в точке $x = h$ и пользуясь уже найденным значением постоянной C , окончательно получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} -\gamma \varepsilon_3 k_3^{-1} Z_h = (\varepsilon_f + f_h)X_h; \\ (\varepsilon_f - \gamma^2 + f_h)^2 X_h^2 + \gamma^2((\varepsilon_f - \gamma^2)X_h^2 + \varepsilon_g Z_h^2) + G_h = C, \end{cases} \quad (2.19)$$

где $f_h := f(aX_h^2 + bZ_h^2)$ и $G_h := G(X_h^2, Z_h^2)$.

Из второго уравнения системы (2.19) видно, что величины X_h и Z_h могут входить в это уравнение с произвольными знаками. В то же время при условии $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_f + f > 0$ из первого уравнения системы (2.19) видно, что X_h и Z_h должны быть различных знаков.

Решив систему (2.19) относительно X_h, Z_h , легко найти постоянную $B = -\gamma k_3^{-1} Z_h$.

Ниже доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_M имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := -T_1 + nT_2 = h, \quad (2.20)$$

где

$$T_1 = \int_{\eta(h)}^{\eta(0)} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta,$$

величины $\eta(0)$, $\eta(h)$ определяются формулами

$$\eta(0) = \frac{\gamma\varepsilon_1}{k_1} > 0 \quad \text{и} \quad \eta(h) = -\frac{\gamma\varepsilon_3}{k_3} < 0;$$

а функция w имеет следующий вид:

$$w = \frac{\gamma(\varepsilon_f + f)}{\gamma^2(\varepsilon_f + f)(\varepsilon_g + g) + (\varepsilon_f - \gamma^2 + f)\eta^2},$$

где

$$f \equiv f(\tau), \quad g \equiv g\left(\tau \frac{c\eta^2 + d(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}\right);$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения (см. формулу (2.24))

$$\tau \frac{\eta^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2(\varepsilon_f - \gamma^2)\eta^2 + \gamma^2\varepsilon_g(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2} + \gamma^2 G(s, t) \equiv C,$$

где $s = \frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, $t = \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, а функции f и g имеют тот же смысл, что и выше; постоянная C определяется формулой (2.18); $n = 1, 2, 3, \dots$

Левая часть дисперсионного уравнения (2.20) не зависит от h .

Формула (2.20) – дисперсионное уравнение справедливое для любого конечного $h > 0$. Фактически уравнение (2.20) является семейством (но не системой) уравнений для различных n . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_M^D – множество решений дисперсионного уравнения (2.20), тогда

$$\sigma_M^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i, \quad (2.21)$$

где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех возможных $i \neq j$.

Дисперсионное уравнение (2.20) получено при условиях:

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_f \quad \text{и} \quad w > 0.$$

Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_M = \sigma_M^D$.

Теорема 2.1 (об эквивалентности). Значение $\gamma = \hat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_M тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \hat{n} \geq 0$ такое, что $\gamma = \hat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \hat{n}) - h = 0$.

Кроме того, собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет в точности \hat{n} нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i -м нулем функции $Z(x; \hat{\gamma})$, то

$$x_i = \int_{\eta(0)}^{+\infty} w d\eta + (i-1)T_2.$$

Доказательство. Введем новые переменные:

$$\tau = aX^2 + bZ^2, \quad \eta(x) = \frac{(\varepsilon_f + f(\tau))X(x)}{Z(x)}, \quad (2.22)$$

тогда

$$X^2 = \frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}, \quad Z^2 = \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}, \quad XZ = \frac{\tau\eta(\varepsilon_f + f)}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}.$$

После перехода к новым переменным мы, естественно, считаем, что

$$f \equiv f(\tau), \quad g \equiv g\left(\tau \frac{c\eta^2 + d(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}\right).$$

Система (2.14) в новых переменных принимает вид

$$\begin{cases} \tau' = \frac{2}{\gamma} \cdot \frac{\tau\eta(\varepsilon_f + f)[a\gamma^2(\varepsilon_g + g) + b(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)(\varepsilon_f + f)]}{2a\tau\eta^2 f' + (\varepsilon_f + f)[a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2]}, \\ \eta' = \frac{\gamma^2(\varepsilon_f + f)(\varepsilon_g + g) + (\varepsilon_f - \gamma^2 + f)\eta^2}{\gamma(\varepsilon_f + f)}, \end{cases} \quad (2.23)$$

здесь $f' = \frac{df(\tau)}{d\tau}$. При выводе мы использовали то, что $f'_{X^2} = af'(\tau)$, $f'_{Z^2} = bf'(\tau)$.

Первый интеграл (2.16) примет вид

$$\tau \frac{\eta^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2(\varepsilon_f - \gamma^2)\eta^2 + \gamma^2\varepsilon_g(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2} + \gamma^2 G(s, t) \equiv C, \quad (2.24)$$

где $s = \frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, $t = \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$.

Замечание 2.3. Функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ может быть явно выражена из первого интеграла (2.24) лишь в исключительных случаях.

Мы предполагаем функции f и g таковыми, что правая часть второго уравнения системы (2.23) положительна. На первый взгляд это условие может показаться достаточно жестким, однако это не так. Например, если f и g – многочлены от двух переменных с положительными коэффициентами, то этого достаточно для выполнения требования о положительности. При определенных условиях вектор поляризации в материальных уравнениях в системе Максвелла имеет разложение в ряд по степеням $|\mathbf{E}|$ (см., например, [40, 48, 62, 86]), значит, многочлены в качестве f и g являются достаточно общим типом нелинейности. Нужно учитывать, что условие $\frac{\partial f}{\partial(|E_z|^2)} = \frac{\partial g}{\partial(|E_x|^2)}$ накладывает дополнительные ограничения на вид многочленов f и g . Заметим, что активно исследуются нелинейности, отличные от полиномиальных, в частности, нелинейности с насыщением (см. с. 40, а также [5]).

Для дальнейшего необходимо определить $\eta(0)$ и $\eta(h)$. Учитывая непрерывность $(\varepsilon_f + f)X$ и Z на границах $x = 0$ и $x = h$ и используя (2.17), получаем

$$\eta(0) = \frac{\gamma\varepsilon_1}{k_1} > 0 \quad \text{и} \quad \eta(h) = -\frac{\gamma\varepsilon_3}{k_3} < 0. \quad (2.25)$$

Нетрудно видеть, что правая часть второго уравнения системы (2.23) строго положительна, значит, функция $\eta(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0, h)$. Учитывая знаки выражений (2.25), получаем, что функция $\eta(x)$ не может быть дифференцируемой на всем интервале $(0, h)$, а необходимо имеет точку разрыва.

Ясно, что точками разрыва являются нули функции Z . Не равные тождественно постоянным функции X и Z не могут обращаться в нуль одновременно, так как $X \equiv 0$, $Z \equiv 0$ являются стационарным решением системы (2.14) и поэтому не могут пересекаться с непостоянными реше-

ниями X и Z (см., например, [68]). Предположим, что имеется n точек разрыва x_1, \dots, x_n на интервале $x \in (0, h)$.

Из второго уравнения системы (2.23) и формул (2.26) следует, что

$$\eta(x_i - 0) = +\infty, \quad \eta(x_i + 0) = -\infty, \quad \text{где } i = \overline{1, n}. \quad (2.26)$$

Обозначим

$$w = \frac{\gamma(\varepsilon_f + f)}{\gamma^2(\varepsilon_f + f)(\varepsilon_g + g) + (\varepsilon_f - \gamma^2 + f)\eta^2},$$

где $\tau \equiv \tau(\eta)$ выражается из первого интеграла (2.24).

Учитывая сказанное, будем разыскивать решения второго уравнения (2.23) на каждом из (полу)интервалов $[0, x_1)$, (x_1, x_2) , ..., $(x_n, h]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta = x + c_0, \quad 0 \leq x < x_1; \\ \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + c_i, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + c_n, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1} - 0$, $x = h$ в уравнения (2.27) (в первое, второе и третье соответственно), находим

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = - \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \\ c_i = \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ c_n = \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

С учетом найденных постоянных уравнения (2.27) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta = -x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \quad 0 \leq x < x_1; \\ \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} w d\eta = x + \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Подставляя $x = x_1 - 0$, $x = x_i + 0$, $x = x_n + 0$ в уравнения (2.29) (в первое, второе и третье соответственно), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -x_1 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} w d\eta, \\ 0 = x_i + \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} w d\eta - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ 0 = x_n + \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} w d\eta - h. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Принимая во внимание формулы (2.25) и (2.26), находим из (2.30)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_1 = \int_{\eta(0)}^{+\infty} w d\eta, \\ 0 < x_{i+1} - x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ 0 < h - x_n = \int_{-\infty}^{\eta(h)} w d\eta. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Формулы (2.31) дают явные выражения для расстояний между нулями функции Z . Действительно, из формул (2.31) следует, что если x_i есть i -й нуль функции Z , то

$$x_i = \int_{\eta(0)}^{+\infty} w d\eta + (i - 1)T_2$$

(это доказывает соответствующую часть утверждения теоремы).

Более того, из формул (2.31) следует сходимость всех рассматриваемых несобственных интегралов.

Далее, складывая все соотношения (2.31), получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} + h - x_n = \\ = \int_{\eta(0)}^{+\infty} w d\eta + (n - 1)T_2 + \int_{-\infty}^{\eta(h)} w d\eta. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) может быть легко преобразовано в дисперсионное уравнение (2.20).

Поскольку (2.20) является следствием задачи P_M , то всякое собственное значение рассматриваемой задачи является также и корнем уравнения (2.20). Также ясно, что всякий корень уравнения (2.20) удовлетворяет всем условиям, указанным в формулировке задачи P_M . Таким образом, совпадение множеств σ_M и σ_M^D доказано.

Наличие n точек разрыва у функции η имеет следствием то, что собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет n нулей при $x \in (0, h)$. \square

Замечание 2.4. Из теоремы получаем, что собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет \hat{n} нулей, если $\hat{\gamma} \in \sigma_{\hat{n}}$. Таким образом, из формулы (2.21) ясно, что множество всех собственных функций задачи P_M можно естественным образом разбить на множества, каждое из которых содержит собственные функции с одним и тем же числом нулей. В рассматриваемой

нелинейной задаче могут существовать собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, но имеющие одно и то же число нулей. Можно показать, что в линейном случае (см. приложение В), т.е. при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, для любого целого $n > 1$ существует не более одной собственной функции, которая имеет n нулей.

Теорема 2.2. Пусть $\hat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_M . Если собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Z(x; \hat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.

Доказательство. Рассмотрим систему (2.14). Легко проверить, что если пара $(X(x), Z(x))$ является решением этой системы, то пара функций $(-X(2T_2 + 2x_1 - x), Z(2T_2 + 2x_1 - x))$ также является ее решением.

Пусть пара $(Y(x), Z(x))$ является решением системы (2.14) и функция $Z(x)$ имеет три нуля $x_1, x_2, x_3 \in (0, h)$, причем $x_1 < x_2 < x_3$ и $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = T_2$.

Сначала рассмотрим отрезок $[x_1, x_3]$. Построим пару функций $\tilde{X}(x)$ и $\tilde{Z}(x)$ следующим образом:

$$(\tilde{X}(x), \tilde{Z}(x)) = \begin{cases} (X(x), Z(x)), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ (-X(2T_2 + 2x_1 - x), Z(2T_2 + 2x_1 - x)), & x_2 \leq x \leq x_3. \end{cases} \quad (2.33)$$

В силу системы (2.14) в точке $x = x_2 (= x_1 + T_2)$ функции $X(x)$ и $-X(2T_2 + 2x_1 - x)$, также $Z(x)$ и $Z(2T_2 + 2x_1 - x)$ склеены с первым порядком гладкости. Учитывая полученный результат, из системы (2.13) видим, что функции $Z(x)$ и $Z(2T_2 + 2x_1 - x)$ склеены со вторым порядком гладкости.

Рассмотрим общий случай, пусть $k \geq 3$ и $x_1, x_2, \dots, x_k \in (0, h)$ – нули функции $Z(x)$. Тогда для любой точки $x^* \in (0, h)$ существует целое число $q \geq -1$ такое, что $x^* = x' + qT_2$, где $x' \in [x_1, x_3]$. Теперь положим

$$(\tilde{X}(x^* + qT_2), \tilde{Z}(x^* + qT_2)) = (\tilde{X}(x'), \tilde{Z}(x')).$$

Другими словами, мы определили периодическое решение $(\tilde{X}(x), \tilde{Z}(x))$ системы (2.14) с периодом $2T_2$. В силу теоремы существования и единственности других решений рассматриваемой системы нет. \square

Замечание 2.5. Нахождение условий существования периодического решения у нелинейного автономного уравнения даже в том случае, когда не удастся определить период, само по себе является сложной задачей, привлекающей внимание исследователей [69].

Кратко укажем одну конструкцию, которая позволит применять предложенный метод в случае, если первый интеграл не может быть получен явно.

Рассмотрим случай, когда условие $\frac{\partial f}{\partial(|E_z|^2)} = \frac{\partial g}{\partial(|E_x|^2)}$ не выполняется. Более того, будем считать, что уравнение (2.15) не удастся проинтегрировать. Покажем, что и в этом случае можно вывести дисперсионное уравнение, аналогичное (2.20).

Уравнение (2.15) можно привести к виду

$$\frac{dX^2}{dZ^2} = \frac{\gamma^2(\varepsilon_g + g) + 2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)X^2 f'_v}{(2X^2 f'_u + \varepsilon_f + f)(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)}. \quad (*)$$

Используя известное значение $X(0 - 0)$, находим начальное значение

$$X(0) = X(Z(0)), \quad (**)$$

где $X(0) \equiv X_0$ и $Z(0) \equiv Z_0$.

Таким образом, имеем задачу Коши для уравнения (*) с начальным значением (**). Решение этой задачи Коши (когда оно существует и единственно) может быть записано в виде

$$F(X^2, Z^2) = 0.$$

В новых переменных τ, η (см. формулы (2.23)) получаем

$$F\left(\frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}, \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}\right) = 0.$$

При условиях теоремы о неявной функции в окрестности некоторой точки $(\tilde{X}, \tilde{\eta})$ эта зависимость может быть разрешена:

$$\tau = \tilde{F}(\eta).$$

Сказанное значит, что в рассматриваемых условиях дисперсионное уравнение получается так же, как и раньше и имеет вид (2.20). Нужно только помнить, что первый интеграл определяется как решение задачи Коши для уравнения (*) с начальным условием (**).

2.3. СПЕКТР: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ

Теорема 2.1 говорит о совпадении множеств σ_M и σ_M^D , но множество σ_M^D может оказаться пустым. Дальнейшие рассуждения нацелены на выявление условий, при которых множество решений дисперсионного уравнения (2.20) не является пустым.

Рассмотрим левую часть $\Phi(\gamma; k)$ дисперсионного уравнения (2.20). Функция $\Phi(\gamma; k)$ не зависит от h .

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_f)$ и

$$h_{\inf}^k = \inf_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k), \quad h_{\sup}^k = \sup_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots$$

Указанная \sup существует не всегда, например, \sup не существует, если $f \equiv 0, g \equiv 0$.

Поскольку $\Phi(\gamma; k) > 0$, то h_{\inf}^k всегда существует. Когда мы пишем h_{\sup}^k , мы предполагаем, что указанный (конечный) \sup существует.

Сформулируем достаточное условие существования по крайней мере одного собственного значения задачи P_M .

Теорема 2.3. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, $f \in C^1 [0, +\infty)$, $g \in C^1 [0, +\infty)$, система (2.19) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Доказательство. Поскольку интегралы в дисперсионном уравнении (2.20) сходятся, то очевидно, что указанные h_{\inf}^p и h_{\sup}^p существуют. Далее, так как правые части системы (2.14) непрерывны по совокупности переменных X , Z и γ , ограничены и непрерывно дифференцируемы по X и Z , то (см., например, [53, 68]) решения такой системы непрерывны по параметру γ . Но тогда и функция $\Phi(\gamma, k)$ является непрерывной функцией параметра γ . Отсюда с очевидностью следует утверждение о том, что для всякого $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$ существует по крайней мере одно решение дисперсионного уравнения (2.20), которое в силу теоремы 2.1 является собственным значением задачи P_M . \square

Теорема 2.4. Пусть $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1 [0, +\infty)$, $g \in C^1 [0, +\infty)$, система (2.19) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидным образом получается из доказательства предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что в этой теореме не существует \sup функции $\Phi(\gamma, k)$. \square

В двух предыдущих теоремах утверждается существование собственных значений, но не их изолированность.

В двух следующих теоремах утверждается существование дискретных собственных значений.

Допустим, что правые части системы (2.14) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$ с центром в нуле и радиусом $R > 0$ (см. [85]). Шар выбран таким образом, что

$$|2X^2 f'_u + f| < \varepsilon_f - \Delta,$$

где $\Delta > 0$ фиксированное достаточно малое число.

Замечание 2.6. В силу непрерывности функции f такое число R всегда существует, поскольку $f(0) = 0$ и f'_u ограничена на $B(0, R)$.

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{I})$$

(в нормальной форме), где f_1, \dots, f_n – аналитические функции от $n + 1$ комплексных переменных x, y_1, \dots, y_n , регулярные в окрестности точки

$$x = x_0, y_1 = y_1^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)},$$

т.е. каждую из этих функций можно разложить в кратный степенной ряд по (целым неотрицательным) степеням $x - x_0, y_1 - y_1^{(0)}, \dots, y_n - y_n^{(0)}$ с невырожденной областью сходимости. Тогда существует одна и только одна система аналитических функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, регулярных в некоторой окрестности точки $x = x_0$ (причем размеры этой окрестности можно указать явно), тождественно удовлетворяющих системе (I) и принимающих при $x = x_0$ соответственно значения $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ [80].

Причем, если функции $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$, являющиеся правыми частями системы (I), регулярны в области $|x| \leq a$, $|y_i| \leq b$, $i = \overline{1, n}$, тогда существует такая положительная постоянная M , что в этой области

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M, \quad i = \overline{1, n}.$$

При этом существует положительное число

$$r = a \left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)aM}} \right) \quad (\text{I}')$$

такое, что каждая функция y_i единственной системы решений y_1, \dots, y_n аналитична в круге радиуса не менее числа r , задаваемого формулой (I').

Можно показать, что для автономной системы уравнений вида (I) формула (I') принимает вид $r = \frac{b}{(n+1)M}$. Если система (I) состоит из двух автономных уравнений, то $r = \frac{b}{3M}$.

Теорема 2.5. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\text{inf}}^p < h_{\text{sup}}^p$, система (2.19) имеет действительное решение (X_h, Z_h) , правые части системы (2.14) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.14) и $h \leq \frac{R}{3M}$ таково, что $h_{\text{inf}}^p < h < h_{\text{sup}}^p$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\text{inf}}^p < h_{\text{sup}}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_M .

Доказательство. Поскольку интегралы в дисперсионном уравнении (2.20) сходятся, то очевидно, что указанные h_{inf}^p и h_{sup}^p существуют. Далее, так как правые части системы (2.14) непрерывны по совокупности переменных X, Z и γ , ограничены и непрерывно дифференцируемы по X и Z в шаре $B(0, R)$, то (см., например, [53, 68]) решения такой системы непрерывны по параметру γ . Но тогда и функция $\Phi(\gamma, k)$ является непрерывной функцией параметра γ . Отсюда с очевидностью следует утверждение о том, что для всякого $h_{\text{inf}}^p < h < h_{\text{sup}}^p$ существует по крайней мере одно решение дисперсионного уравнения (2.20), которое в силу теоремы 2.1 является собственным значением задачи P_M .

Более того, так как правые части системы (2.14) являются аналитическими функциями X, Z в шаре $B(0, R)$ и γ при $\gamma^2 \in \Gamma$, то решения такой системы будут аналитическими функциями x и параметра γ (см., например, [53, 80]). Отсюда следует, что функция $\Phi(\gamma, k)$ также является аналитической функцией параметра γ для всех $x \leq \frac{R}{3M}$. Поскольку $h_{\text{inf}}^p < h_{\text{sup}}^p$ справедливо для всех p , то отсюда в силу аналитичности

функции $\Phi(\gamma, k)$ по γ следует, что функция $\Phi(\gamma, k)$ не может оставаться постоянной на любом открытом множестве $\gamma^2 \in \Gamma' \subset \Gamma$. Это и означает, что на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_M . \square

Теорема 2.6. Пусть функция $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, система (2.19) имеет действительное решение (X_h, Z_h) , правые части системы (2.14) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.14) и $h \leq \frac{R}{3M}$ таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений задачи P_M .

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидным образом получается из доказательства предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что в этой теореме не существует \sup функции $\Phi(\gamma, k)$. \square

Замечание 2.7. Система (2.19) является системой двух уравнений с двумя неизвестными, ее решениями являются пары чисел (X_h, Z_h) . Для конкретных нелинейностей (например, керровской или нелинейности с насыщением) разрешимость этой системы может быть установлена.

Величины h_{\inf}^k и h_{\sup}^k можно находить численно.

Заметим, что условие $\gamma^2 < \varepsilon_f$ является точным. Действительно, возьмем функции $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_f$ (см. приложение В).

При заданных функциях нелинейности f и g дальнейшие результаты о собственных значениях могут быть получены при исследовании дисперсионного уравнения (2.20) совместно с первым интегралом (2.24). Такое исследование позволит не только получить важную дополнительную информацию о собственных значениях (дискретность собственных значений, локализация, структура множества собственных значений), но и, возможно, ослабить ограничение $\varepsilon_f - \gamma^2 > 0$ (см. п. 2.5).

Замечание 2.8. Пусть первый интеграл является алгебраической функцией (см., например, [84]) от каждой из двух своих переменных, такая ситуация наступает, например, если функции нелинейностей f и g представляют собой полиномы от независимой переменной. В этом случае любое уравнение системы (2.23) совместно с первым интегралом представляет собой абелев интеграл [70, 84]. Его обращением является абелева функция, которая и будет решением выбранного для интегрирования уравнения. В этом случае решение второго уравнения выражается из первого интеграла и найденного только что решения. Таким образом, обе функции – решения системы (2.23) – являются абелевыми функциями. Как известно, абелевы функции – функции мероморфные (см., например, [63]). Это рассуждение объясняет в простейшем случае появление точек разрыва функции η . То есть если первый интеграл есть алгебраическая функция и от τ , и от η , то эти разрывы – полюсы мероморфной функции (см. также замечание 1.6 на с. 40).

Г Л А В А 3

НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ТМ-ВОЛН В СЛОЕ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Результаты главы опубликованы в работах [19, 22, 110, 111, 113, 118, 123].

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим электромагнитные волны

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega_E \omega_M} &:= \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \mathbf{H}_{\omega_E \omega_M} &:= \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t},\end{aligned}\tag{3.1}$$

распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq x \leq h\},$$

здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_E &= (0, E_y, 0)^T, & \mathbf{E}_M &= (E_x, 0, E_z)^T, \\ \mathbf{H}_E &= \underbrace{(H_x, 0, H_z)^T}_{\text{ТЕ-волны}}, & \mathbf{H}_M &= \underbrace{(0, H_y, 0)^T}_{\text{ТМ-волны}} -\end{aligned}\tag{3.2}$$

комплексные амплитуды; ω_E, ω_M – круговые частоты; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума¹. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается законом Керра (см., например, [40, 60, 86]), который имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{E}_{\omega_E \omega_M}|^2,$$

где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\alpha > 0$.

Запишем уравнения Максвелла в следующей форме [76]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t(\mu \tilde{\mathbf{H}}), \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t(\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$. В первом уравнении (3.3) ток проводимости $\tilde{\mathbf{j}}$ отсутствует, так как $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ являются полными полями.

Подставляя поля (3.1) в уравнения (3.3) получаем, что комплексные амплитуды (3.3) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot} (\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}) = i\mu\omega_E \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + i\mu\omega_M \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \operatorname{rot} (\mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}) = -i\varepsilon\omega_E \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} - i\varepsilon\omega_M \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \end{cases} \quad (3.4)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = -h$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Считаем, что волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z , причем с различным показателем по различным поляризациям (см. приложение Г). Как показано в приложении Г,

¹Вообще говоря, условия $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ необязательны. Можно рассматривать в качестве ε_1 и ε_3 произвольные действительные числа.

компоненты комплексных амплитуд (3.2) можно считать не зависящими от координаты y . Таким образом, получаем, что рассматриваемые компоненты имеют представление

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x)e^{i\gamma_M z}, & E_y &= E_y(x)e^{i\gamma_E z}, & E_z &= E_z(x)e^{i\gamma_M z}, \\ H_x &= H_x(x)e^{i\gamma_E z}, & H_y &= H_y(x)e^{i\gamma_M z}, & H_z &= H_z(x)e^{i\gamma_E z}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где γ_E, γ_M – пара неизвестных (действительных) спектральных параметров (пара постоянных распространения связанной ТЕ-ТМ-волны).

Подставляя поля (3.2) в систему (3.4) и учитывая зависимость (3.5), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma_E E_y = -i\mu\omega_E H_x, \\ E'_y = i\mu\omega_E H_z, \\ i\gamma_E H_x - H'_z = -i\varepsilon\omega_E E_y, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i\gamma_M H_y = i\varepsilon\omega_M E_x, \\ H'_y = -i\varepsilon\omega_M E_z, \\ i\gamma_M E_x - E'_z = i\mu\omega_M H_y. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

После простых преобразований получаем из (3.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma_M^2 E_x - \gamma_M E'_z = i\varepsilon\mu\omega_M^2 E_x, \\ \gamma_E^2 E_y - E''_y = \varepsilon\mu\omega_E^2 E_y, \\ i\gamma_M E'_x - E''_z = \varepsilon\mu\omega_M^2 E_z, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} H_x &= -\gamma_E(\mu\omega_E)^{-1}E_y, & H_z &= (i\mu\omega_E)^{-1}E'_y, \\ H_y &= \gamma_M^{-1}\varepsilon\omega_M E_x, & H'_y &= -i\varepsilon\omega_M E_z. \end{aligned}$$

Нормируем систему (3.7) в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = k_0 x, \quad \frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma}_E = \frac{\gamma_E}{k_0}, \quad \tilde{\gamma}_M = \frac{\gamma_M}{k_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0},$$

где $k_0^2 = \omega_M^2 \varepsilon_0 \mu_0$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_M k_0^2 (\tilde{\gamma}_M (iE_x) - E'_z) = \omega_M^2 \mu \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} (iE_x), \\ \tilde{\gamma}_E^2 k_0^2 E_y - k_0^2 E''_y = \omega_E^2 \mu \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_y, \\ \tilde{\gamma}_M k_0^2 (iE_x)' - k_0^2 E''_z = \omega_M^2 \mu \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_z. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Введем обозначения $X := iE_x$, $Y := E_y$, $Z := E_z$, $\tau := \omega_E^2 \omega_M^{-2}$ и, опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} \gamma_M(\gamma_M X - Z') = \varepsilon X, \\ \gamma_E^2 Y - Y'' = \tau \varepsilon Y, \\ \gamma_M X' - Z'' = \varepsilon Z, \end{cases} \quad (3.9)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < -h; \\ \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2), & -h \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Система (3.9) – основная система, которую мы изучаем в этой главе.

Функции X, Y, Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty), \\ Y(x) &\in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty), \\ Z(x) &\in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty) \cap \\ &\quad \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Под принадлежностью функции указанному пересечению понимается, что сужение функции на выбранный интервал принадлежит соответствующему функциональному классу.

Указанные условия непрерывности и дифференцируемости функций X, Y, Z соответствуют физическому смыслу задачи и, как будет видно далее, следуют из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля на границах раздела сред и свойств решений при $x < 0$ и $x > h$.

Как известно, касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. Нормальные компоненты электромагнитного поля на границе раздела сред испытывают конечный скачок. В рассматриваемом случае касательные компоненты – это E_y, E_z, H_y, H_z , а интересующая нас нормальная компонента есть E_x .

Хорошо известно, что произведение εE_x непрерывно на границе раздела сред. Легко видеть из системы (3.14), что непрерывность εE_x на границе раздела на самом деле следует из непрерывности H_y , откуда (см. формулу (3.6)) получаем, что выражение $(Z' - \gamma_M X)$ также непрерывно на границе раздела. Из всего сказанного следуют условия сопряжения для функций X, Y, Y', Z :

$$[Z' - \gamma_M X]|_{x=\pm h} = 0, \quad [Y]|_{x=\pm h} = 0, \quad [Y']|_{x=\pm h} = 0, \quad [Z]|_{x=\pm h} = 0, \quad (3.11)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Определение 3.1. Пару чисел $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ такую, что при заданных значениях $X(0), Y(0)$ существует не равный тождественно нулю вектор $W = (X, Y, Z)^T$ такой, что функции X, Y, Z удовлетворяют системе уравнений (3.9), условиям (3.10), (3.11) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть парным собственным значением. Вектор W , который соответствует парному собственному значению, будем называть собственным вектором, а компоненты $X(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M), Y(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M), Z(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ вектора W – собственными функциями.

Задача P: доказать существование парных собственных значений $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$, удовлетворяющих определению 3.1.

Случай $\omega_E = \omega_M$ был исследован в работах [22, 110].

Объясним, почему мы требуем, чтобы $\text{Im } \gamma_E = 0$ и $\text{Im } \gamma_M = 0$. Предположим противное, пусть $\gamma_E = \gamma'_E + i\gamma''_E, \gamma_M = \gamma'_M + i\gamma''_M$, тогда получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= |\mathbf{E}_x(x)e^{i\gamma_M z}|^2 + |\mathbf{E}_y(x)e^{i\gamma_E z}|^2 + |\mathbf{E}_z(x)e^{i\gamma_M z}|^2 = \\ &= |\mathbf{E}_x(x)|^2 \cdot |e^{i(\gamma'_M + i\gamma''_M)z}|^2 + |\mathbf{E}_y(x)|^2 \cdot |e^{i(\gamma'_E + i\gamma''_E)z}|^2 + |\mathbf{E}_z(x)|^2 \cdot |e^{i(\gamma'_M + i\gamma''_M)z}|^2 = \\ &= |\mathbf{E}_x(x)|^2 \cdot |e^{-\gamma''_M z}|^2 + |\mathbf{E}_y(x)|^2 \cdot |e^{-\gamma''_E z}|^2 + |\mathbf{E}_z(x)|^2 \cdot |e^{-\gamma''_M z}|^2. \end{aligned}$$

В этом случае $|\mathbf{E}|$ зависит от z . Поскольку функции $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ от z не зависят, то ясно, что переменная z будет входить в систему (3.8) в

качестве параметра и, следовательно, решения E_x , E_y , E_z этой системы будут зависеть от z , что противоречит выбору функций E_x , E_y , E_z . Если же мы полагаем, что $\text{Im } \gamma_E = 0$ и $\text{Im } \gamma_M = 0$, то из последней формулы получаем

$$|\mathbf{E}|^2 = |E_x(x)|^2 + |E_y(x)|^2 + |E_z(x)|^2.$$

Разыскиваются такие положительные значения γ_E , γ_M , что

$$\max(\tau\varepsilon_1, \tau\varepsilon_3) < \gamma_E^2 < \tau\varepsilon_2,$$

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma_M^2 < \varepsilon_2.$$

Эти условия соответствуют классическим задачам распространения ТЕ- и ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_2 (см. приложения Б и В), поэтому мы придерживаемся их при выводе системы дисперсионных уравнений для нелинейного слоя.

Замечание 3.1. В линейной задаче связанных волн не существует.

3.2. ПЕРЕХОД К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Введем обозначения

$$k_{E1}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_1, \quad k_{E3}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_3, \quad k_{M1}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_1, \quad k_{M3}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_3.$$

Система (3.9) в полупространствах $x < -h$ и $x > h$ линейная.

Для $x < -h$ получаем

$$\begin{cases} X''(x) - (\gamma_M^2 - \varepsilon_1)X(x) = 0, \\ Y''(x) - (\gamma_E^2 - \varepsilon_1)Y(x) = 0, \\ Z(x) = \gamma_M^{-1}X'(x); \end{cases}$$

решение этой системы имеет вид (в соответствии с условиями излучения)

$$\begin{cases} X(x) = C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}, \\ Y(x) = C_E^{(-h)} e^{(x+h)k_{E1}}, \\ Z(x) = \gamma_M^{-1} k_{M1} C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Для $x > h$ получаем

$$\begin{cases} X''(x) - (\gamma_M^2 - \varepsilon_3)X(x) = 0, \\ Y''(x) - (\gamma_E^2 - \varepsilon_3)Y(x) = 0, \\ Z(x) = \gamma_M^{-1}X'(x); \end{cases}$$

решение этой системы имеет вид (в соответствии с условиями излучения)

$$\begin{cases} X(x) = C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \\ Y(x) = C_E^{(h)} e^{-(x-h)k_{E3}}, \\ Z(x) = -\gamma_M^{-1}k_{M3}C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \end{cases} \quad (3.13)$$

где $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$, $C_M^{(h)}$ и $C_E^{(h)}$ – постоянные интегрирования.

Постоянные $C_M^{(h)}$ и $C_E^{(h)}$ отвечают значениям $X(0)$ и $Y(0)$ в определении 3.1.

Внутри слоя Σ система (3.9) принимает вид

$$\begin{cases} \gamma_M(\gamma_M X - Z') = (\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2))X, \\ \gamma_E^2 Y - Y'' = \tau(\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2))Y, \\ \gamma_M X' - Z'' = (\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2))Z. \end{cases} \quad (3.14)$$

Система (3.14) имеет первый интеграл (см. [89]).

Необходимо заметить, что постоянные $C_M^{(h)}$, $C_E^{(h)}$ предполагаются заданными (амплитуды полей на одной из границ слоя). Таким образом, мы имеем 8 неизвестных: 2 постоянные $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$ в полупространстве $x < -h$; 4 постоянные внутри слоя (постоянные интегрирования в (3.14)); 2 постоянные распространения γ_E , γ_M . Условия сопряжения (3.11) также содержат 8 уравнений.

Введем обозначение для предельных значений функций X , Y , Z на границах слоя изнутри:

$$\begin{aligned} X_{-h} &:= X(-h + 0), & X_h &:= X(h - 0), \\ Y_{-h} &:= Y(-h + 0), & Y_h &:= Y(h - 0), \\ Z_{-h} &:= Z(-h + 0), & Z_h &:= Z(h - 0). \end{aligned}$$

Для предельных значений функций X, Y, Y', Z, Z' в полупространствах $x < -h, x > h$ мы получаем

$$\begin{aligned} X(-h-0) &= C_M^{(-h)}, & X(h+0) &= C_M^{(h)}, \\ Y(-h-0) &= C_E^{(-h)}, & Y(h+0) &= C_E^{(h)}, \\ Y'(-h-0) &= k_{E1}C_E^{(-h)}, & Y'(h+0) &= -k_{E3}C_E^{(h)}, \\ Z(-h-0) &= \gamma_M^{-1}k_{M1}C_M^{(-h)}, & Z(h+0) &= -\gamma_M^{-1}k_{M3}C_M^{(h)}, \\ Z'(-h-0) &= \gamma_M^{-1}k_{M1}^2C_M^{(-h)}, & Z'(h+0) &= \gamma_M^{-1}k_{M3}^2C_M^{(h)}. \end{aligned}$$

Из условий сопряжения (3.11) и предыдущих формул находим

$$\begin{aligned} Z_{-h} - \gamma_M X_{-h} &= -\gamma_M^{-1}\varepsilon_1 C_M^{(-h)}, & Z_h - \gamma_M X_h &= -\gamma_M^{-1}\varepsilon_3 C_M^{(h)}, \\ Y_{-h} &= C_E^{(-h)}, & Y_h &= C_E^{(h)}, \\ Y'_{-h} &= k_{E1}C_E^{(-h)}, & Y'_h &= -k_{E3}C_E^{(h)}, \\ Z_{-h} &= \gamma_M^{-1}k_{M1}C_M^{(-h)}, & Z_h &= -\gamma_M^{-1}k_{M3}C_M^{(h)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Замечание 3.2. В рассматриваемой нелинейной задаче парные собственные значения зависят от начальных условий (постоянных $C_M^{(h)}, C_E^{(h)}$).

Из системы (3.9) мы получаем

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -\gamma_M k_M^{-2} Z' - \alpha k_M^{-2} (X^2 + Y^2 + Z^2) X, \\ Y'' + k_E^2 Y &= -\alpha (X^2 + Y^2 + Z^2) Y, \\ Z'' + k_M^2 Z &= -\alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) Z - \\ &\quad - \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M ((X^2 + Y^2 + Z^2) X)', \end{aligned} \right.$$

где $k_E^2 = \tau \varepsilon_2 - \gamma_E^2$, $k_M^2 = \varepsilon_2 - \gamma_M^2$.

Пусть

$$f_X = (X^2 + Y^2 + Z^2)X, \quad f_Y = (X^2 + Y^2 + Z^2)Y, \quad f_Z = (X^2 + Y^2 + Z^2)Z,$$

тогда

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -\gamma_M k_M^{-2} Z' - \alpha k_M^{-2} f_X, \\ Y'' + k_E^2 Y &= -\alpha \tau f_Y, \\ Z'' + k_M^2 Z &= -\alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 f_Z - \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M f'_X. \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

Мы собираемся обратить линейные части второго и третьего уравнений в (3.16) и, таким образом, перейти к интегральным уравнениям.

Пусть

$$L_E = \frac{d^2}{dx^2} + k_E^2, \quad L_M = \frac{d^2}{dx^2} + k_M^2.$$

Построим функции Грина для следующих краевых задач:

$$\begin{cases} L_E G_E = -\delta(x-s), \\ \partial_x G_E|_{x=-h} = \partial_x G_E|_{x=h} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} L_M G_M = -\delta(x-s), \\ G_M|_{x=-h} = G_M|_{x=h} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

При построении функции Грина G_E в качестве линейно независимых решений уравнения $u'' + k_E^2 u = 0$ мы брали решения $u_1 = -\cos k_E(x+h)$, $u_2 = \cos k_E(x-h)$, а при построении функции Грина G_M в качестве линейно независимых решений уравнения $u'' + k_M^2 u = 0$ мы брали решения $u_1 = \sin k_M(x+h)$, $u_2 = \sin k_M(x-h)$.

Легко показать, что функции Грина имеют вид

$$G_E(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos k_E(x+h) \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos k_E(x-h) \cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, & s < x \leq h; \end{cases} \quad (3.18)$$

$$G_M(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin k_M(x+h) \sin k_M(s-h)}{k_M \sin 2k_M h}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\sin k_M(x-h) \sin k_M(s+h)}{k_M \sin 2k_M h}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (3.19)$$

Используя вторую формулу Грина, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (vLu - uLv) dx &= \int_{-h}^h (v(u'' + k^2 u) - u(v'' + k^2 v)) dx = \\ &= \int_{-h}^h (vu'' - uv'') dx = (u'v - uv')|_{-h}^h. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Полагая в (3.20), что $L = L_E$, $v = G_E$, получаем

$$\int_{-h}^h (G_E L_E u - u L_E G_E) dx = u'(x) G_E(x, s)|_{x=-h}^{x=h}. \quad (3.21)$$

Полагая в (3.20), что $L = L_M$, $v = G_M$, получаем

$$\int_{-h}^h (G_M L_M u - u L_M G_M) dx = -u(x) \partial_x G_M(x, s) \Big|_{x=-h}^{x=h}. \quad (3.22)$$

Тогда из (3.16), используя условия (3.11), находим

$$Y(s) = \alpha\tau \int_{-h}^h G_E(x, s) f_Y(x) dx + Y'(h) G_E(h, s) - Y'(-h) G_E(-h, s) \quad (3.23)$$

и

$$\begin{aligned} Z(s) = \alpha\varepsilon_2^{-1} \int_{-h}^h G_M(x, s) (k_M^2 f_z + \gamma_M f'_X) dx - \\ - Z(h) \partial_x G_M(x, s) \Big|_{x=h} + Z(-h) \partial_x G_M(x, s) \Big|_{x=-h}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ясно, что здесь под $x = -h$ понимается $x = -h + 0$, а под $x = h$ — точка $x = h - 0$. Поскольку функции Y' и Z непрерывны на границе раздела сред, то здесь можно сразу воспользоваться формулами (3.15).

Вычислим все необходимые значения функций в правых частях уравнений (3.23), (3.24):

$$\begin{aligned} Y'(-h) &= k_{E1} C_E^{(-h)}, & Y'(h) &= -k_{E3} C_E^{(h)}, \\ Z(-h) &= \gamma_M^{-1} k_{M1} C_M^{(-h)}, & Z(h) &= -\gamma_M^{-1} k_{M3} C_M^{(h)}, \\ G_E(-h, s) &= -\frac{\cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h}, & G_E(h, s) &= -\frac{\cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, \\ \partial_x G_M(x, s) \Big|_{x=-h} &= -\frac{\sin k_M(s-h)}{\sin 2k_M h}, & \partial_x G_M(x, s) \Big|_{x=h} &= -\frac{\sin k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}. \end{aligned}$$

Теперь из (3.23), (3.24) получаем

$$\begin{aligned} Y(s) = \alpha\tau \int_{-h}^h G_E(x, s) f_Y(x) dx + \\ + C_E^{(-h)} \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h} + C_E^{(h)} \frac{k_{E3} \cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 Z(s) = & \alpha \varepsilon_2^{-1} \int_{-h}^h G_M(x, s) (k_M^2 f_Z + \gamma_M f'_X) dx - \\
 & - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\gamma_M \sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \sin k_M(s+h)}{\gamma_M \sin 2k_M h}. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Вычислим отдельно второе слагаемое в полученной для $Z(s)$ формуле. Интегрируя по частям и учитывая (3.17), получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{-h}^h G_M(x, s) f'_X dx = \\
 & = G_M(x, s) f_X \Big|_{x=-h}^{x=h} - \int_{-h}^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx = - \int_{-h}^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx.
 \end{aligned}$$

Окончательно интегральное представление решения $Z(s)$ примет вид

$$\begin{aligned}
 Z(s) = & \alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 \int_{-h}^h G_M(x, s) f_Z dx - \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M \int_{-h}^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx - \\
 & - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\gamma_M \sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \sin k_M(s+h)}{\gamma_M \sin 2k_M h}. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Из системы (3.16) известно, что

$$X(s) = -k_M^{-2} (\gamma_M Z'(s) + \alpha f_X(s)).$$

Значит, необходимо вычислить $Z'(s)$. Воспользуемся формулой (3.27) и запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 Z(s) = & \alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 \left[\int_{-h}^s G_M(x, s) f_Z dx + \int_s^h G_M(x, s) f_Z dx \right] - \\
 & - \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M \left[\int_{-h}^s \partial_x G_M(x, s) f_X dx + \int_s^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx \right] - \\
 & - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\gamma_M \sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \sin k_M(s+h)}{\gamma_M \sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

Теперь легко найти производную по s от последнего выражения:

$$\begin{aligned}
 Z'(s) &= \\
 &= \alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 \left[G_M(x, s) f_Z |_{x=s-0} + \int_{-h}^s \partial_s G_M(x, s) f_Z dx \right] + \\
 &+ \alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 \left[-G_M(x, s) f_Z |_{x=s+0} + \int_s^h \partial_s G_M(x, s) f_Z dx \right] - \\
 &- \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M \left[\partial_x G_M(x, s) f_X |_{x=s-0} + \int_{-h}^s \partial_{sx}^2 G_M(x, s) f_X dx \right] - \\
 &- \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M \left[-\partial_x G_M(x, s) f_X |_{x=s+0} + \int_s^h \partial_{sx}^2 G_M(x, s) f_X dx \right] - \\
 &\quad - C_M^{(-h)} \frac{k_M k_{M1}}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_M k_{M3}}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

Теперь, когда значок производной внесен под интеграл, интегралы по смежным интервалам можно объединить. Кроме того, объединим и слагаемые, которые не входят под знак интеграла. Получаем

$$\begin{aligned}
 Z'(s) &= \\
 &= \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left[k_M^2 \int_{-h}^h \partial_s G_M(x, s) f_Z dx - \gamma_M \int_{-h}^h \partial_{sx}^2 G_M(x, s) f_X dx \right] + \\
 &+ \frac{\alpha}{\varepsilon_2} k_M^2 [G_M(x, s) f_Z |_{x=s-0} - G_M(x, s) f_Z |_{x=s+0}] - \\
 &- \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \gamma_M [\partial_x G_M(x, s) f_X |_{x=s-0} - \partial_x G_M(x, s) f_X |_{x=s+0}] - \\
 &\quad - C_M^{(-h)} \frac{k_M k_{M1}}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_M k_{M3}}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

Как известно, функция Грина $G(x, s)$ непрерывна в точке $x = s$, значит, второе слагаемое в квадратных скобках обращается в нуль. Производная $\partial_x G(x, s)$ функции Грина $G(x, s)$ имеет скачок в точке $x = s$,

в данном случае этот скачок равен 1, т.е. выражение в третьей квадратной скобке равно $-f_X(s)$. Функции $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ непрерывны в точке $x = s$. Учитывая сказанное, получаем из последней формулы

$$\begin{aligned} Z'(s) &= \\ &= \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left[k_M^2 \int_{-h}^h \partial_s G_M(x, s) f_Z dx - \gamma_M \int_{-h}^h \partial_{sx}^2 G_M(x, s) f_X dx \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \gamma_M f_X(s) - C_M^{(-h)} \frac{k_M k_{M1} \cos k_M(s-h)}{\gamma_M \sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_M k_{M3} \cos k_M(s+h)}{\gamma_M \sin 2k_M h}. \end{aligned}$$

Теперь, используя полученные формулы, найдем выражение для $X(s)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \\ &= -\alpha \frac{\gamma_M}{\varepsilon_2} \int_{-h}^h \left[\partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M}{k_M^2} \partial_{sx}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx - \alpha \frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} f_X(s) + \\ &+ C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \cos k_M(s-h)}{k_M \sin 2k_M h} + C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \cos k_M(s+h)}{k_M \sin 2k_M h}. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Объединяя, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} X(s) &= \alpha \frac{\gamma_M}{\varepsilon_2} \int_{-h}^h \left[\frac{\gamma_M}{k_M^2} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X - \partial_s G_M(x, s) f_Z \right] dx - \\ &- \alpha \frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} f_X(s) + C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \cos k_M(s-h)}{k_M \sin 2k_M h} + C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \cos k_M(s+h)}{k_M \sin 2k_M h}, \\ Y(s) &= \alpha \tau \int_{-h}^h G_E(x, s) f_Y(x) dx + \\ &+ C_E^{(-h)} \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h} + C_E^{(h)} \frac{k_{E3} \cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, \\ Z(s) &= -\alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M \int_{-h}^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx + \alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 \int_{-h}^h G_M(x, s) f_Z dx - \\ &- C_M^{(-h)} \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\gamma_M \sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3} \sin k_M(s+h)}{\gamma_M \sin 2k_M h}, \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

где

$$\partial_s G_M(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin k_M(x+h) \cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\sin k_M(x-h) \cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}, & s < x \leq h; \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\partial_{xs}^2 G_M(x, s) = \begin{cases} -k_M \frac{\cos k_M(x+h) \cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h}, & x < s \leq h, \\ -k_M \frac{\cos k_M(x-h) \cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (3.31)$$

Преобразуем систему (3.29) следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} X(s) &= -\alpha \frac{\gamma_M}{\varepsilon_2} \int_{-h}^h \partial_s G_M(x, s) f_Z dx + \alpha \frac{\gamma_M^2}{\varepsilon_2 k_M^2} \int_{-h}^h \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X dx - \\ &\quad - \alpha \frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} f_X(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2k_M} \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} + C_M^{(h)} k_{M3}}{\sin k_M h} \cos k_M s + \\ &\quad + \frac{1}{2k_M} \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} - C_M^{(h)} k_{M3}}{\cos k_M h} \sin k_M s, \\ Y(s) &= \alpha \tau \int_{-h}^h G_E(x, s) f_Y dx + \\ &\quad + \frac{1}{2k_E} \frac{C_E^{(-h)} k_{E1} + C_E^{(h)} k_{E3}}{\sin k_E h} \cos k_E s + \\ &\quad + \frac{1}{2k_E} \frac{C_E^{(-h)} k_{E1} - C_E^{(h)} k_{E3}}{\cos k_E h} \sin k_E s, \\ Z(s) &= \alpha \frac{k_M^2}{\varepsilon_2} \int_{-h}^h G_M(x, s) f_Z dx - \alpha \frac{\gamma_M}{\varepsilon_2} \int_{-h}^h \partial_x G_M(x, s) f_X dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma_M} \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} - C_M^{(h)} k_{M3}}{\cos k_M h} \cos k_M s - \\ &\quad - \frac{1}{2\gamma_M} \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} + C_M^{(h)} k_{M3}}{\sin k_M h} \sin k_M s. \end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

Полагая в (3.32) $\alpha = 0$, получаем решения для линейного слоя (слоя, где диэлектрическая проницаемость постоянна):

$$\begin{cases} X(s) = \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} + C_M^{(h)} k_{M3}}{2k_M \sin k_M h} \cos k_M s + \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} - C_M^{(h)} k_{M3}}{2k_M \cos k_M h} \sin k_M s, \\ Y(s) = \frac{C_E^{(-h)} k_{E1} + C_E^{(h)} k_{E3}}{2k_E \sin k_E h} \cos k_E s + \frac{C_E^{(-h)} k_{E1} - C_E^{(h)} k_{E3}}{2k_E \cos k_E h} \sin k_E s, \\ Z(s) = \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} - C_M^{(h)} k_{M3}}{2\gamma_M \cos k_M h} \cos k_M s - \frac{C_M^{(-h)} k_{M1} + C_M^{(h)} k_{M3}}{2\gamma_M \sin k_M h} \sin k_M s. \end{cases}$$

Далее находим, что

$$\begin{aligned} Z'(s) - \gamma_M X(s) &= \\ &= \alpha \int_{-h}^h \left[\partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M}{k_M^2} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + 2\alpha \frac{\gamma_M}{k_M^2} f_X(s) - \\ &\quad - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{\cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}. \end{aligned}$$

Используя непрерывность функции $Y(x)$ при $x = \pm h$ (см. условия сопряжения (3.11)), получаем

$$\begin{aligned} C_E^{(-h)} &= \alpha \tau \int_{-h}^h G_E(x, -h) f_Y(x) dx + C_E^{(-h)} \frac{k_{E1} \cos 2k_E h}{k_E \sin 2k_E h} + C_E^{(h)} \frac{k_{E3}}{k_E} \frac{1}{\sin 2k_E h}, \\ C_E^{(h)} &= \alpha \tau \int_{-h}^h G_E(x, h) f_Y(x) dx + C_E^{(-h)} \frac{k_{E1}}{k_E} \frac{1}{\sin 2k_E h} + C_E^{(h)} \frac{k_{E3} \cos 2k_E h}{k_E \sin 2k_E h}. \end{aligned}$$

Из двух последних формул находим

$$\begin{aligned} C_E^{(-h)} &= \alpha \tau \left(1 - \frac{k_{E1} \cos 2k_E h}{k_E \sin 2k_E h} \right)^{-1} \int_{-h}^h G_E(x, -h) f_Y(x) dx + \\ &\quad + C_E^{(h)} \frac{k_{E3}}{k_E} \frac{1}{\sin 2k_E h} \left(1 - \frac{k_{E1} \cos 2k_E h}{k_E \sin 2k_E h} \right)^{-1}; \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_E^{(h)} \left(\frac{k_E^2 - k_{E1}k_{E3}}{k_E} - (k_{E1} + k_{E3}) \frac{\cos 2k_E h}{\sin 2k_E h} \right) = \\
 = \alpha \tau \left(k_E - k_{E1} \frac{\cos 2k_E h}{\sin 2k_E h} \right) \int_{-h}^h G_E(x, h) f_Y(x) dx + \\
 + \alpha \tau \frac{k_{E1}}{\sin 2k_E h} \int_{-h}^h G_1(x, -h) f_Y(x) dx. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Формула (3.34) есть первое дисперсионное уравнение.

Далее, используя непрерывность функции $Z' - \gamma_M X$ при $x = \pm h$ (см. условия сопряжения (3.11)), получаем

$$\begin{aligned}
 Z'(-h - 0) - \gamma_M X(-h - 0) = \\
 = \alpha \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[\partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M}{k_M^2} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 + 2\alpha \frac{\gamma_M}{k_M^2} f_X(-h + 0) - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{1}{\sin 2k_M h}, \\
 Z'(h + 0) - \gamma_M X(h + 0) = \\
 = \alpha \lim_{s \rightarrow h-0} \int_{-h}^h \left[\partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M}{k_M^2} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 + 2\alpha \frac{\gamma_M}{k_M^2} f_X(h - 0) - C_M^{(-h)} \frac{k_{M1}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{1}{\sin 2k_M h} - C_M^{(h)} \frac{k_{M3}}{k_M} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_M} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

Из двух последних формул находим

$$\begin{aligned}
 C_M^{(-h)} \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right) = \\
 = \alpha \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[k_M \gamma_M \partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M^2}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 + 2\alpha \frac{\gamma_M^2}{k_M} f_X(-h + 0) - C_M^{(h)} \varepsilon_2 k_{M3} \frac{1}{\sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_M^{(h)} \left(-\varepsilon_3 k_M + \varepsilon_2 k_{M3} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right) &= \\
 &= \alpha \lim_{s \rightarrow h-0} \int_{-h}^h \left[\gamma_M k_M \partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M^2}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 &\quad + 2\alpha \frac{\gamma_M^2}{k_M} f_X(h-0) - C_M^{(-h)} \varepsilon_2 k_{M1} \frac{1}{\sin 2k_M h}.
 \end{aligned}$$

Для постоянных $C_M^{(h)}$, $C_M^{(-h)}$ получаем

$$\begin{aligned}
 C_M^{(h)} \left((\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_M^2 - \varepsilon_2^2 k_{M1} k_{M3}) - \varepsilon_2 k_M (\varepsilon_1 k_{M3} + \varepsilon_3 k_{M1}) \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right) &= \\
 = \alpha \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right) \times \\
 \times \lim_{s \rightarrow h-0} \int_{-h}^h \left[\gamma_M k_M \partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M^2}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx - \\
 - \frac{\alpha \varepsilon_2 k_{M1}}{\sin 2k_M h} \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[k_M \gamma_M \partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M^2}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 + 2\alpha \frac{\gamma_M^2}{k_M} \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right) f_X(h-0) - \\
 - 2\alpha \frac{\gamma_M^2}{k_M} \cdot \frac{\varepsilon_2 k_{M1}}{\sin 2k_M h} f_X(-h+0); \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_M^{(-h)} &= \\
 = \alpha \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right)^{-1} \times \\
 \times \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[k_M \gamma_M \partial_s G_M(x, s) f_Z - \frac{\gamma_M^2}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X \right] dx + \\
 + 2\alpha \frac{\gamma_M^2}{k_M} \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right)^{-1} f_X(-h+0) - \\
 - C_M^{(h)} \varepsilon_2 k_{M3} \left(-\varepsilon_1 k_M + \varepsilon_2 k_{M1} \frac{\cos 2k_M h}{\sin 2k_M h} \right)^{-1} \frac{1}{\sin 2k_M h}. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Формула (3.35) есть второе дисперсионное уравнение.

Система дисперсионных уравнений записывается в форме

$$\begin{cases} \Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) := C_E^{(h)} g_E(h, \gamma_E) - \alpha \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M)}{\sin 2k_E h} = 0, \\ \Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) := C_M^{(h)} k_M g_M(h, \gamma_M) - \alpha \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M)}{\sin 2k_M h} = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

где

$$g_E(h, \gamma_E) = (k_E^2 - k_{E1}k_{E3}) \sin 2k_E h - k_E (k_{E1} + k_{E3}) \cos 2k_E h; \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} g_M(h, \gamma_M) = & (\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_M^2 - \varepsilon_2^2 k_{M1} k_{M3}) \sin 2k_M h - \\ & - \varepsilon_2 k_M (\varepsilon_1 k_{M3} + \varepsilon_3 k_{M1}) \cos 2k_M h; \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M) =$$

$$\begin{aligned} = & \tau (k_{E1} \cos 2k_E h - k_E \sin 2k_E h) \int_{-h}^h \cos k_E(x+h) f_Y dx - \\ & - \tau k_{E1} \int_{-h}^h \cos k_E(x-h) f_Y dx; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M) =$$

$$\begin{aligned} = & -2\gamma_M^2 (\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h) f_X(h-0) \sin 2k_M h + \\ & + k_M (\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h) \times \\ & \times \int_{-h}^h [\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x+h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x+h)] dx - \\ & - 2\gamma_M^2 \varepsilon_2 k_{M1} f_X(-h+0) \sin 2k_M h + \\ & + \varepsilon_2 k_{M1} k_M \int_{-h}^h [\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x-h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x-h)] dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Нули $(\widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$ системы (3.37) являются парными собственными значениями задачи P .

Принимая во внимание формулы (3.33), (3.36), мы получаем из (3.29)

$$\left\{ \begin{aligned}
 X(s) &= \alpha \int_{-h}^h \left[\frac{\gamma_M^2}{\varepsilon_2 k_M^2} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X - \frac{\gamma_M}{\varepsilon_2} \partial_s G_M(x, s) f_Z \right] dx - \\
 &- \alpha \frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} f_X(s) + \alpha \gamma_M \frac{k_{M1}}{k_M^2} \frac{\cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} \times \\
 &\times \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[\gamma_M \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X - k_M^2 \partial_s G_M(x, s) f_Z \right] dx - \\
 &- 2\alpha \gamma_M^2 \frac{k_{M1}}{k_M^2} \frac{\cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} f_X(-h+0) + \\
 &+ C_M^{(h)} \frac{k_{M3}}{k_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \cos k_M(s+h) \right], \\
 Y(s) &= \alpha \tau \int_{-h}^h G_E(x, s) f_Y(x) dx + \\
 &+ \alpha \tau \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h} \int_{-h}^h G_1(x, -h) f_Y(x) dx + \\
 &+ C_E^{(h)} \frac{k_{E3}}{k_E \sin 2k_E h} \left[\frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h} + \cos k_E(s+h) \right], \\
 Z(s) &= \alpha \int_{-h}^h \left[-\varepsilon_2^{-1} \gamma_M \partial_x G_M(x, s) f_X + \varepsilon_2^{-1} k_M^2 G_M(x, s) f_Z \right] dx + \\
 &+ \alpha \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} \times \\
 &\times \lim_{s \rightarrow -h+0} \int_{-h}^h \left[-\frac{\gamma_M}{k_M} \partial_{xs}^2 G_M(x, s) f_X + k_M \partial_s G_M(x, s) f_Z \right] dx + \\
 &+ 2\alpha \gamma_M \frac{k_{M1}}{k_M} \frac{\sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} f_X(-h+0) - \\
 &- C_M^{(h)} \frac{k_{M3}}{\gamma_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \sin k_M(s+h) \right].
 \end{aligned} \right. \quad (3.42)$$

Для дальнейшего исследования необходимо переписать систему (3.42) в операторной форме.

Пусть $K(x, s)$ – матрица ядер:

$$K(x, s) = \{K_{nm}(x, s)\}_{n,m=1}^3 = \begin{pmatrix} q_{11}\partial_{xs}^2 G_M & 0 & q_{13}\partial_s G_M \\ 0 & q_{22}G_E & 0 \\ q_{31}\partial_x G_M & 0 & q_{33}G_M \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

где $q_{11} = \gamma_M^2 \varepsilon_2^{-1} k_M^{-2}$, $q_{13} = -\gamma_M \varepsilon_2^{-1}$, $q_{22} = \tau$, $q_{31} = -\gamma_M \varepsilon_2^{-1}$, $q_{33} = \varepsilon_2^{-1} k_M^2$.

Введем матричный интегральный оператор

$$\mathbf{K}\mathbf{g} = \int_{-h}^h K(x, s)\mathbf{g}(x)dx, \quad (3.44)$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$.

Далее пусть

$$\mathbf{J} = -\frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, s) &= \{\tilde{K}_{nm}(x, s)\}_{n,m=1}^3 = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_{xs}^2 G_M & 0 & \tilde{q}_{13} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_s G_M \\ 0 & \tilde{q}_{22} G_E|_{s \rightarrow -h+0} & 0 \\ \tilde{q}_{31} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_x G_M & 0 & \tilde{q}_{33} \lim_{s \rightarrow -h+0} G_M \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $\tilde{q}_{11} = \gamma_M p_1(s)$, $\tilde{q}_{13} = -k_M^2 p_1(s)$, $\tilde{q}_{22} = q(s)$, $\tilde{q}_{31} = -\gamma_M k_M^{-1} p_2(s)$, $\tilde{q}_{33} = k_M p_2(s)$ и

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \gamma_M \frac{k_{M1}}{k_M^2} \frac{\cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}, \\ p_2(s) &= \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}, \\ q(s) &= \tau \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h}. \end{aligned}$$

Определим еще один матричный интегральный оператор:

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{g} = \int_{-h}^h \tilde{\mathbf{K}}(x, s)\mathbf{g}(x)dx, \quad (3.47)$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^\top$.

Пусть

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -2\gamma_M p_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma_M k_M^{-1} p_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

и

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^\top, \quad (3.49)$$

где

$$h_1 = \frac{C_M^{(h)} k_{M3}}{k_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \cos k_M(s+h) \right],$$

$$h_2 = \frac{C_E^{(h)} k_{E3}}{k_E \sin 2k_E h} \left[\frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h} + \cos k_E(s+h) \right],$$

$$h_3 = \frac{-C_M^{(h)} k_{M3}}{\gamma_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \sin k_M(s+h) \right].$$

Отметим, что \mathbf{K} , $\tilde{\mathbf{K}}$, \mathbf{J} , $\tilde{\mathbf{J}}$ являются линейными операторами.

Определим еще два линейных оператора:

$$\mathbf{N} := \alpha(\mathbf{K} + \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{J}}) \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_1 := \mathbf{K} + \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{J}}, \quad (3.50)$$

где матрицы ядер

$$\mathbf{N}(x, s) := \alpha(\mathbf{K}(x, s) + \mathbf{J}(x, s) + \tilde{\mathbf{K}}(x, s) + \tilde{\mathbf{J}}(x, s)),$$

$$\mathbf{N}_1(x, s) := \mathbf{K}(x, s) + \mathbf{J}(x, s) + \tilde{\mathbf{K}}(x, s) + \tilde{\mathbf{J}}(x, s)$$

определены формулами (3.44), (3.45), (3.47), (3.48).

Пусть $\mathbf{u} = (X, Y, Z)^\top$ и $|\mathbf{u}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, тогда система (3.42) принимает форму

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}. \quad (3.51)$$

Мы изучаем уравнение (3.51) в

$$\mathbf{C}[-h, h] = C[-h, h] \times C[-h, h] \times C[-h, h]$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|X\|_C^2 + \|Y\|_C^2 + \|Z\|_C^2,$$

где $\|u\|_C = \max_{x \in [-h, h]} |u(x)|$.

3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для того чтобы выяснить свойства операторов (3.44), (3.47), рассмотрим соответствующие им ядра.

Пусть $\Pi = (-h, h) \times (-h, h)$. Легко видеть, что функции $K_{11}(x, s)$, $K_{22}(x, s)$, $K_{33}(x, s)$, $\tilde{K}_{11}(x, s)$, $\tilde{K}_{22}(x, s)$, $\tilde{K}_{33}(x, s)$ непрерывны в (замкнутом) квадрате $\bar{\Pi} = [-h, h] \times [-h, h]$.

Функции $K_{13}(x, s)$, $K_{31}(x, s)$, $\tilde{K}_{13}(x, s)$, $\tilde{K}_{31}(x, s)$ ограничены в $\bar{\Pi}$ и непрерывны в \bar{T}^+ и \bar{T}^- , где

$$\bar{T}^+ = \{(x, s) \in \bar{\Pi}, x \geq s\}, \quad \bar{T}^- = \{(x, s) \in \bar{\Pi}, x \leq s\}.$$

По определению функция $f(x, s)$ непрерывна в \bar{T}^+ (в \bar{T}^-), если для любой точки $(x_0, s_0) \in \bar{T}^+$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \rightarrow s_0}} f(x, s) = f(x_0, s_0), \quad \text{где } (x_0, s_0) \in \bar{T}^+, \quad (x, s) \in \bar{T}^+,$$

или для любой точки $(x_0, s_0) \in \bar{T}^-$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \rightarrow s_0}} f(x, s) = f(x_0, s_0), \quad \text{где } (x_0, s_0) \in \bar{T}^-, \quad (x, s) \in \bar{T}^-.$$

Свойства функций $K_{22}(x, s)$, $K_{33}(x, s)$, $\tilde{K}_{22}(x, s)$, $\tilde{K}_{33}(x, s)$, $K_{13}(x, s)$, $K_{31}(x, s)$, $\tilde{K}_{13}(x, s)$, $\tilde{K}_{31}(x, s)$, сформулированные выше, легко следуют из непрерывности функций \sin , \cos и из свойств функций Грина.

Докажем, что функции $K_{11}(x, s)$, $\tilde{K}_{11}(x, s)$ непрерывны в $\bar{\Pi}$. Ясно, что непрерывность необходимо проверить только при $x = s$. Из формулы (3.19) получаем

$$\partial_{xs}^2 G_M = \begin{cases} -k_M \frac{\cos k_M(x+h) \cos k_M(s-h)}{\sin 2k_M h}, & x < s \leq h; \\ -k_M \frac{\cos k_M(x-h) \cos k_M(s+h)}{\sin 2k_M h}, & s < x \leq h. \end{cases}$$

Из последней формулы легко видеть, что

$$\partial_{xs}^2 G_M(x, s)|_{x \rightarrow s+0} = \partial_{xs}^2 G_M(x, s)|_{x \rightarrow s-0}.$$

Это доказывает непрерывность функций $K_{11}(x, s)$, $\tilde{K}_{11}(x, s)$ в $\bar{\Pi}$.

Итак, мы доказали

Утверждение 3.2. *Функции $K_{11}(x, s)$, $K_{22}(x, s)$, $K_{33}(x, s)$, $\tilde{K}_{11}(x, s)$, $\tilde{K}_{22}(x, s)$, $\tilde{K}_{33}(x, s)$ непрерывны в (замкнутом) квадрате $\bar{\Pi} = [-h, h] \times [-h, h]$. Функции $K_{13}(x, s)$, $K_{31}(x, s)$, $\tilde{K}_{13}(x, s)$, $\tilde{K}_{31}(x, s)$ ограничены в $\bar{\Pi}$ и непрерывны в \bar{T}^+ и \bar{T}^- .*

Ограниченность операторов

$$\mathbf{K} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h] \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{K}} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h]$$

следует из свойств ядер. Очевидно, что операторы

$$\mathbf{J} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h] \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{J}} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h]$$

ограничены.

Оценим нормы интегральных операторов в

$$\mathbf{C}[-h, h] = C[-h, h] \times C[-h, h] \times C[-h, h].$$

Пусть матричный линейный интегральный оператор \mathbf{K} определяется формулой

$$\mathbf{K}\phi = \int_{-h}^h \mathbf{K}(x, y)\phi(y)dy, \quad (3.52)$$

где

$$\mathbf{K}(x, y) = \{K_{nm}(x, y)\}_{n,m=1}^3 = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{pmatrix},$$

с ограниченными ядрами $K_{nm}(x, y)$. Пусть ядра обладают свойствами, сформулированными в утверждении 3.1.

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}\phi\|_{\mathbf{C}}^2 &= \|K_{11}\phi_1 + K_{13}\phi_3\|_{\mathbf{C}}^2 + \|K_{22}\phi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + \|K_{31}\phi_1 + K_{33}\phi_3\|_{\mathbf{C}}^2 \leq \\ &\leq (\|K_{11}\phi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{13}\phi_3\|_{\mathbf{C}})^2 + \|K_{22}\phi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + (\|K_{31}\phi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{33}\phi_3\|_{\mathbf{C}})^2 \leq \\ &\leq (\|K_{11}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}\|\phi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{13}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}\|\phi_3\|_{\mathbf{C}})^2 + \|K_{22}\|_{\mathbf{C}}^2\|\phi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + \\ &\quad + (\|K_{31}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}\|\phi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{33}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}\|\phi_3\|_{\mathbf{C}})^2 \leq \\ &\leq 2\|K_{11}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\|\phi_1\|_{\mathbf{C}}^2 + 2\|K_{13}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\|\phi_3\|_{\mathbf{C}}^2 + \|K_{22}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\|\phi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + \\ &\quad + 2\|K_{31}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\|\phi_1\|_{\mathbf{C}}^2 + 2\|K_{33}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\|\phi_3\|_{\mathbf{C}}^2 \leq M^2\|\phi\|_{\mathbf{C}}^2, \end{aligned}$$

где

$$M^2 = \max(2\|K_{11}\|^2 + 2\|K_{31}\|^2, \|K_{22}\|^2, 2\|K_{13}\|^2 + 2\|K_{33}\|^2).$$

Тогда $\|\mathbf{K}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \leq M$.

Утверждение 3.3. Пусть $\mathbf{K} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h]$ и $\tilde{\mathbf{K}} : \mathbf{C}[-h, h] \rightarrow \mathbf{C}[-h, h]$ – интегральные операторы, определенные формулами (3.44), (3.47) с ограниченными ядрами $K_{nm}(x, y)$, $\tilde{K}_{nm}(x, y)$ в $[-h, h] \times [-h, h]$, которые определены формулами (3.43), (3.46). Тогда операторы \mathbf{K} , $\tilde{\mathbf{K}}$ ограничены и справедливы оценки для их норм

$$\|\mathbf{K}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \leq M, \quad \|\tilde{\mathbf{K}}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \leq \tilde{M},$$

где

$$\begin{aligned} M^2 &= \max(2\|K_{11}\|^2 + 2\|K_{31}\|^2, \|K_{22}\|^2, 2\|K_{13}\|^2 + 2\|K_{33}\|^2), \\ \tilde{M}^2 &= \max(2\|\tilde{K}_{11}\|^2 + 2\|\tilde{K}_{31}\|^2, \|\tilde{K}_{22}\|^2, 2\|\tilde{K}_{13}\|^2 + 2\|\tilde{K}_{33}\|^2). \end{aligned}$$

3.4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 3.1. Пусть $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0\}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле. Также пусть выполняются два условия:

$$q := 3\alpha r_0^2 \|\mathbf{N}_1\| < 1, \quad (3.53)$$

$$\alpha r_0^3 \|\mathbf{N}_1\| + \|\mathbf{h}\| \leq r_0. \quad (3.54)$$

Тогда существует единственное решение $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ уравнения (3.51).

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$ с нелинейным оператором

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}$$

в $\mathbf{C}[-h, h]$, где \mathbf{h} определено формулой (3.49).

Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_0}$; $\|\mathbf{u}\| \leq r_0$, $\|\mathbf{v}\| \leq r_0$, тогда

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v})\| = \alpha \left\| \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \right\| \leq 3\alpha \|\mathbf{N}_1\| r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (3.55)$$

Докажем оценку (3.55). Действительно,

$$\begin{aligned} \||\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}\| &= \||\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u}\| + \||\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq \||\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u}\| + \||\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq \||\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\| \cdot \|\mathbf{u}\| + \||\mathbf{v}|^2\| \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \\ &= \||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \||\mathbf{v}|^2\| \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq (\|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\|) \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание $|\mathbf{u}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| + |\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ и таким же образом $|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| + |\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}| - |\mathbf{u}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, получаем $\||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, следовательно $\||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Тогда

$$\begin{aligned} \||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &\leq \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq (2r_0^2 + r_0) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 3r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Мы получаем

$$\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \| \leq 3r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (3.56)$$

Оценка (3.55) следует из оценки выше. Можно видеть, что

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u})\| = \|\alpha \mathbf{N}_1 (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}\| \leq \|\alpha \mathbf{N}_1 (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\| + \|\mathbf{h}\| \leq \alpha r_0^3 \|\mathbf{N}_1\| + \|\mathbf{h}\|.$$

Если имеет место условие (3.54), тогда оператор A отображает шар B_{r_0} в себя. Из оценок (3.53), (3.54) следует, что оператор A является сжимающим в шаре B_{r_0} . Принцип сжимающих отображений [55] влечет утверждение теоремы. \square

Выбирая достаточно большой радиус r_0 шара B_{r_0} , для того чтобы имела место оценка $\|\mathbf{h}\| < r_0$, затем выбирая достаточно малое α , можно видеть, что оценки (3.53), (3.54) выполняются.

Рассмотрим подробнее условие (3.54). Изучим вспомогательное числовое кубическое уравнение

$$\|\mathbf{N}\| r_0^3 + \|\mathbf{h}\| = r_0. \quad (3.57)$$

Такое уравнение возникло в работе [73] и было там же изучено. Однако полезно привести эти результаты здесь.

Рассмотрим уравнение

$$r_0 - \|\mathbf{N}\| r_0^3 = \|\mathbf{h}\| \quad (3.58)$$

и функцию $y(r_0) := r_0 - \|\mathbf{N}\| r_0^3$.

Легко показать, что функция $y(r_0)$ имеет только одну положительную точку максимума $r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$. Значение функции в этой точке $y_{\max} = y(r_{\max}) = \frac{2}{3\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$.

Тогда при условии $0 \leq \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$ уравнение (3.58) имеет два неотрицательных корня r_* и r^* , $r_* \leq r^*$. Эти корни удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq r_* \leq \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}; \quad \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \leq r^* \leq \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{N}\|}}.$$

Эти корни могут быть выписаны как решения следующего кубического уравнения $r_0^3 - \frac{1}{\|\mathbf{N}\|}r_0 + \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{N}\|} = 0$.

Мы имеем

$$r_* = -\frac{2}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2}\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right), \quad (3.59)$$

$$r^* = -\frac{2}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2}\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}\right) + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (3.60)$$

Если $\|\mathbf{h}\| = 0$, тогда $r_* = 0$ и $r^* = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{N}\|}}$.

Если $0 < \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$, тогда

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}. \quad (3.61)$$

Если $\|\mathbf{h}\| = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$, тогда $r_* = r^* = \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}$.

Таким образом, имеет место следующая лемма [73].

Лемма 3.1. *Если выполняется неравенство*

$$0 \leq \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}}, \quad (3.62)$$

тогда уравнение (3.57) имеет два неотрицательных корня r_* и r^* ; и $r_* < r^*$.

Докажем, что если выполняется условие (3.62), то уравнение (3.51) имеет единственное решение в шаре $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_*\}$.

Теорема 3.2. *Если $\alpha \leq A^2$, где*

$$A = \frac{2}{3\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}_1\|}}$$

и $\|\mathbf{N}_1\| = \|\mathbf{K} + \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{J}}\|$, тогда уравнение (3.51) имеет единственное решение \mathbf{u} в шаре $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_*\}$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[-h, h]$, $\|\mathbf{u}\| \leq r_*$.

Доказательство. Если $\mathbf{u} \in B_{r_*}$, тогда

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u})\| = \|\alpha\mathbf{N}_1(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) + \mathbf{h}\| \leq \alpha r_*^3\|\mathbf{N}_1\| + \|\mathbf{h}\| = r_*.$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_*}$, тогда

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v})\| = \alpha \|\mathbf{N}_1 (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v})\| \leq 3\alpha r_*^2 \|\mathbf{N}_1\| \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Так как $\alpha \leq A^2$, то вектор \mathbf{h} удовлетворяет условию (3.62). Таким образом, имеет место неравенство (3.61). И мы получаем, что

$$q = 3\alpha r_*^2 \|\mathbf{N}_1\| = 3\|\mathbf{N}\|r_*^2 < 1.$$

Следовательно, имеют место оба неравенства (3.53) и (3.54).

Таким образом, \mathbf{A} отображает B_{r_*} в себя и является сжимающим оператором в B_{r_*} . Следовательно, уравнение (3.51) имеет единственное решение в шаре B_{r_*} . \square

Отметим, что $A > 0$ не зависит от α .

В следующем пункте будут получены результаты о свойствах решений операторного уравнения (3.51). Далее будут получены результаты о свойствах решений задачи на собственные значения при выполнении некоторых условий на параметры задачи. В частности, будет доказано утверждение о существовании парных собственных значений задачи P . Для доказательства используется метод малого параметра. В рассматриваемой задаче коэффициент нелинейности α является малым параметром. Это естественный подход, так как известно [5], что закон Керра (который мы здесь рассматриваем) имеет место для малых значений α .

3.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ

Теорема 3.3. Пусть ядра матричного оператора \mathbf{N} и правые части \mathbf{h} уравнения (3.51) непрерывно зависят от параметра $\gamma \in \Gamma_0$ на некотором действительном отрезке Γ_0 . Пусть также

$$\|\mathbf{h}\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}(\gamma)\|}}. \quad (3.63)$$

Тогда решение $\mathbf{u}(\gamma)$ уравнения (3.51) для $\gamma \in \Gamma_0$ существует, единственно и непрерывно зависит от параметра γ при $\gamma \in \Gamma_0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.51). При условии теоремы существование и единственность решения $\mathbf{u}(\gamma)$ следуют из теоремы 3.2. Докажем, что это решение непрерывно зависит от спектрального параметра γ .

Легко видеть из формулы (3.59), что $r_*(\gamma)$ непрерывно зависит от $\gamma \in \Gamma_0$. Пусть $r_{**} = \max_{\gamma \in \Gamma_0} r_*(\gamma)$ и максимум достигается в точке γ_* , $r_*(\gamma_*) = r_{**}$. Выберем $\gamma + \Delta\gamma \in \Gamma_0$, тогда $r_*(\gamma) \leq r_{**}$ и $r_*(\gamma + \Delta\gamma) \leq r_{**}$.

Более того, пусть

$$Q_0 = \max_{\gamma \in \Gamma_0} \{3r_*^2(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma)\|\}$$

и максимум достигается в точке $\hat{\gamma} \in \Gamma_0$, $Q_0 = 3r_*^2(\hat{\gamma}) \|\mathbf{N}(\hat{\gamma})\|$. Тогда в силу предположения (3.63) теоремы $Q_0 < 1$.

Сначала предположим, что

$$\|\mathbf{u}(\gamma)\| \geq \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma)\|. \quad (3.64)$$

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(s, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(s, \gamma)| &= \\ &= \left| \int_{-h}^h \mathbf{N}(x, s, \gamma + \Delta\gamma) |\mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-h}^h \mathbf{N}(x, s, \gamma) |\mathbf{u}(x, \gamma)|^2 \mathbf{u}(x, \gamma) dx + \mathbf{h}(s, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(s, \gamma) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-h}^h (\mathbf{N}(x, s, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(x, s, \gamma)) |\mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-h}^h \mathbf{N}(x, s, \gamma) \left(|\mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(x, \gamma + \Delta\gamma) - |\mathbf{u}(x, \gamma)|^2 \mathbf{u}(x, \gamma) \right) dx \right| + \\ &\quad + |\mathbf{h}(s, \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(s, \gamma)|, \end{aligned}$$

следовательно (см. доказательство теоремы 3.2),

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| \leq \\ & \leq r_*^3(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\gamma)\| + 3r_*^2(\gamma) \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| \cdot \|\mathbf{N}(\gamma)\| + \\ & \quad + \|\mathbf{h}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(\gamma)\|. \end{aligned}$$

Выше было использовано условие (3.64). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| & \leq \\ & \leq \frac{r_*^3(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\gamma)\| + \|\mathbf{h}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(\gamma)\|}{1 - 3r_*^2(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma)\|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| & \leq \\ & \leq \frac{r_{**}^3(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\gamma)\| + \|\mathbf{h}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(\gamma)\|}{1 - Q_0}, \quad (3.65) \end{aligned}$$

где Q_0 и r_{**} не зависят от γ .

Теперь пусть $\|\mathbf{u}(\gamma)\| \leq \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma)\|$. Тогда все предыдущие оценки останутся в силе, если мы заменим γ на $\gamma + \Delta\gamma$ и $\gamma + \Delta\gamma$ на γ . Таким образом, оценка (3.65) также остается в силе. \square

3.6. СПЕКТР: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ

В случае $\alpha = 0$ мы получаем известные ранее задачи о распространении ТЕ- и ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью. Дисперсионные уравнения, определяющие собственные значения, для этих задач хорошо известны [3, 11, 26, 32, 35]. Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в системе дисперсионных уравнений (3.37) для нелинейного слоя, мы получаем известные уравнения для линейных задач, а именно:

$$g_E(h, \gamma_E) = 0, \quad (3.66)$$

$$g_M(h, \gamma_M) = 0, \quad (3.67)$$

(см. формулы (3.38), (3.39)).

Отметим, что в рассматриваемых линейных случаях выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \max(\tau\varepsilon_1, \tau\varepsilon_3) &< \gamma_E^2 < \tau\varepsilon_2, \\ \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &< \gamma_M^2 < \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Обозначим

$$\lambda_{s,m}^E := \tau\varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{c,m}^E := \tau\varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{s,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{c,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2},$$

где $j_{s,m} = \pi m$ – m -й неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$; $j_{c,m} = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ – m -й положительный корень уравнения $\cos x = 0$; $m = 0, 1, 2, \dots$

В приложениях Б и В доказано, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3.4. Пусть уравнение (3.66) имеет l_E корней

$$\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}, \dots, \gamma_E^{(l_E)}.$$

Тогда существует целое число $0 < m_E < l_E$ такое, что

$$\begin{aligned} \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^E}, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right), \quad i = \overline{0, m_E - 1}, \\ \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} \right), \quad i = \overline{m_E, l_E - 1}. \end{aligned}$$

Утверждение 3.5. Пусть уравнение (3.67) имеет l_M корней

$$\gamma_M^{(1)}, \gamma_M^{(2)}, \dots, \gamma_M^{(l_M)}.$$

Тогда существует целое число $0 < m_M < l_M$ такое, что

$$\begin{aligned} \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^M}, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right), \quad i = \overline{0, m_M - 1}, \\ \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} \right), \quad i = \overline{m_M, l_M - 1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (3.37) дисперсионных уравнений. Теперь у нас все готово, чтобы доказать существование парных собственных значений (γ_E, γ_M) задачи P .

Мы предполагаем, что уравнения (3.66), (3.67) имеют l_E и l_M корней

$$\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}, \dots, \gamma_E^{(l_E)} \quad \text{и} \quad \gamma_M^{(1)}, \gamma_M^{(2)}, \dots, \gamma_M^{(l_M)}$$

соответственно. При выполнении неравенств (3.68) всегда можно выбрать h так, что эти уравнения будут иметь решения (см. приложения Б и В). Корни уравнений (3.66), (3.67) локализованы как указано в утверждениях 3.3, 3.4.

Напомним, что

$$\gamma_E^{(i)} \in \left(\sqrt{\max(\tau\varepsilon_1, \tau\varepsilon_3)}, \sqrt{\tau\varepsilon_2} \right) \quad \text{для всех } i = \overline{1, l_E}$$

и

$$\gamma_M^{(i)} \in \left(\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}, \sqrt{\varepsilon_2} \right) \quad \text{для всех } i = \overline{1, l_M}.$$

Заметим, что точки

$$\sqrt{\lambda_{s,i}^E}, \quad \sqrt{\lambda_{s,j}^M}, \quad i = \overline{0, l_E}, \quad j = \overline{0, l_M}$$

являются полюсами функций Грина (3.18), (3.19).

Пусть

$$\delta_i^E > 0 \quad \text{и} \quad \delta_j^M > 0, \quad i = \overline{0, l_E}, \quad j = \overline{0, l_M}$$

достаточно малые числа такие, что

$$\begin{aligned} \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^E} + \delta_i^E, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right), \quad i = \overline{0, m_E - 1}; \\ \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} - \delta_{i+1}^E \right), \quad i = \overline{m_E, l_E - 1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^M} + \delta_i^M, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right), \quad i = \overline{0, m_M - 1}; \\ \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} - \delta_{i+1}^M \right), \quad i = \overline{m_M, l_M - 1}. \end{aligned}$$

Построим отрезки

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{s,i}^E} + \delta_i^E, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right], \quad i = \overline{0, m_E - 1}; \\ \Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} - \delta_{i+1}^E \right], \quad i = \overline{m_E, l_E - 1} \end{aligned}$$

И

$$\begin{aligned}\Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{s,i}^M} + \delta_i^M, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right], \quad i = \overline{0, m_M - 1}; \\ \Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} - \delta_{i+1}^M \right], \quad i = \overline{m_M, l_M - 1}.\end{aligned}$$

Геометрически проведенные рассуждения представлены на рис. 3.1.

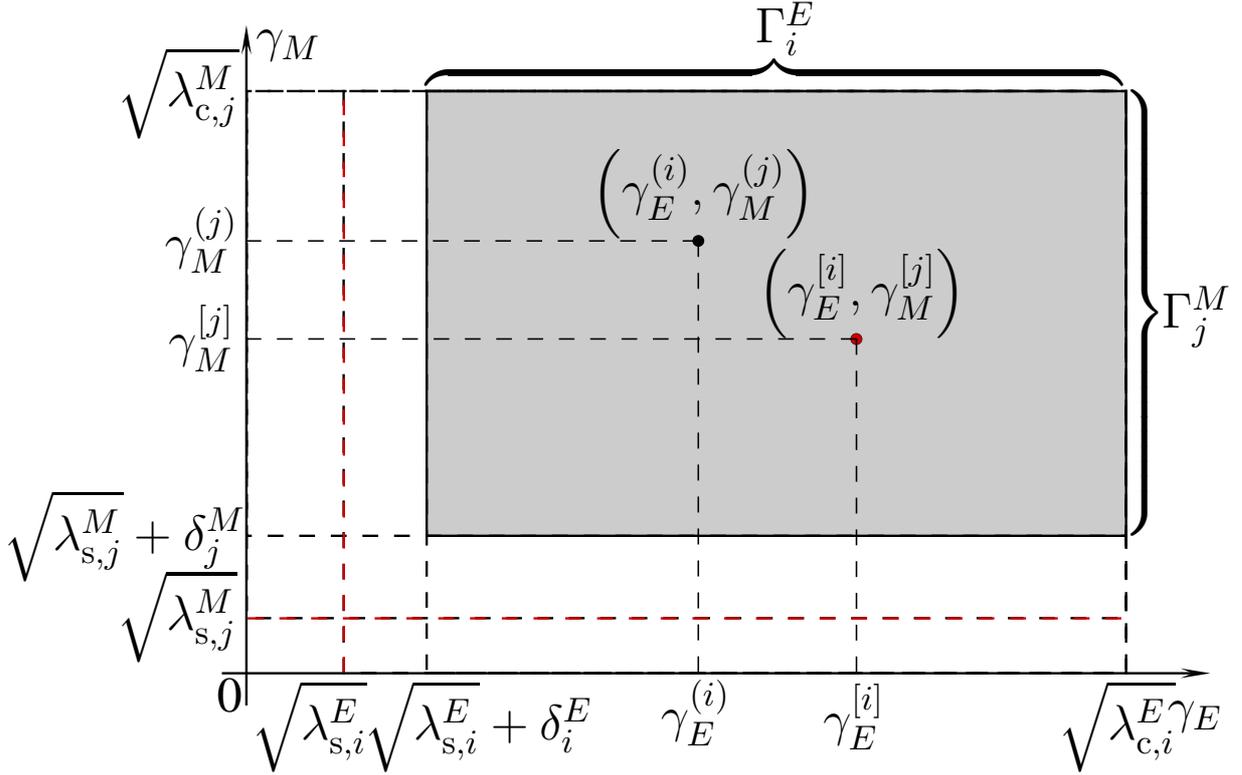


Рис. 3.1. Парные собственные значения

При наших предположениях функция $g_E(\gamma_E)$ имеет различные знаки на концах отрезков Γ_i^E и обращается в нуль в точках $\gamma_E^{(i)}$. Тот же самый вывод имеет место для функции $g_M(\gamma_M)$.

Обозначим

$$\Gamma^E := \left(\bigcup_{i=1}^{m_E} \Gamma_i^E \right) \cup \left(\bigcup_{j=m_E+1}^{l_E} \Gamma_j^E \right), \quad \Gamma^M := \left(\bigcup_{i=1}^{m_M} \Gamma_i^M \right) \cup \left(\bigcup_{j=m_M+1}^{l_M} \Gamma_j^M \right)$$

и $\Gamma := \Gamma^E \times \Gamma^M$.

Следующая теорема является основным результатом этой главы.

Теорема 3.4. Пусть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ и уравнения (3.66), (3.67) имеют l_E и l_M решений соответственно. Тогда найдется значение $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $0 < \alpha \leq \alpha_0$ существует по крайней мере $l_E \cdot l_M$ парных собственных значений $(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}) \in \Gamma_i^E \times \Gamma_j^M$, $i = \overline{1, l_E}$, $j = \overline{1, l_M}$ задачи.

Доказательство. Матричная функция Грина

$$\mathbf{G}(x, s) := \begin{pmatrix} G_M(x, s) & 0 & 0 \\ 0 & G_E(x, s) & 0 \\ 0 & 0 & G_M(x, s) \end{pmatrix}$$

существует для всех $(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma$ в силу выбора значений $\delta_i^E > 0$ и $\delta_j^M > 0$ $i = \overline{0, l_E}$, $j = \overline{0, l_M}$. Из свойств ядер и правой части матричного интегрального оператора \mathbf{N} , определенного формулой (3.51)) следует, что $A = A(\gamma_E, \gamma_M)$ – непрерывная функция относительно $(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma$. Пусть $A_1 = \min_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma} A$, выберем $\alpha < A_1^2$. В соответствии с теоремой 3.2 единственное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\gamma_E, \gamma_M)$ уравнения (3.51) существует для каждой пары $(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma$. Это решение есть непрерывная функция и $\|\mathbf{u}\| \leq r_* = r_*(\gamma_E, \gamma_M)$. Пусть $r_{00} = \max_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma} r_*(\gamma_E, \gamma_M)$. Оценивая функции $\frac{Q_E}{\sin 2k_E h}$ и $\frac{Q_M}{\sin 2k_M h}$ (см. (3.40), (3.41)), мы получаем

$$\left| \frac{Q_E}{\sin 2k_E h} \right| \leq C_E r_{00}^3, \quad \left| \frac{Q_M}{\sin 2k_M h} \right| \leq C_M r_{00}^3.$$

Функции $g_E(\gamma_E)$, $g_M(\gamma_M)$ непрерывны, и уравнения $g_E(\gamma_E) = 0$, $g_M(\gamma_M) = 0$ имеют корни $\gamma_E^{(i)}$, $\gamma_M^{(j)}$; $(\gamma_E^{(i)}, \gamma_M^{(j)}) \in \Gamma$.

Для определенности рассмотрим случай, когда

$$(\gamma_E^{(i)}, \gamma_M^{(j)}) \in \left(\bigcup_{p=1}^{m_E} \Gamma_p^E \right) \times \left(\bigcup_{q=1}^{m_M} \Gamma_q^M \right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} M_E^1 &= \min_{0 \leq p \leq m_E - 1} \left| g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,p}^E} + \delta_p^E \right) \right|, & M_E^2 &= \min_{0 \leq p \leq m_E - 1} \left| g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,p}^E} \right) \right|; \\ M_M^1 &= \min_{0 \leq q \leq m_M - 1} \left| g_M \left(\sqrt{\lambda_{s,q}^M} + \delta_q^M \right) \right|, & M_M^2 &= \min_{0 \leq q \leq m_M - 1} \left| g_M \left(\sqrt{\lambda_{c,q}^M} \right) \right|. \end{aligned}$$

Тогда величина $\hat{M} = \min \{ M_E^1, M_E^2, M_M^1, M_M^2 \}$ положительна и не зависит от параметра α .

Если $\alpha \leq \frac{\hat{M}}{Cr_{00}^3}$, где $C = \max\{C_E, C_M\}$, тогда

$$\Phi_E \left(\sqrt{\lambda_{s,p}^E} + \delta_p^E, \tilde{\gamma}_M \right) \cdot \Phi_E \left(\sqrt{\lambda_{c,p}^E}, \tilde{\gamma}_M \right) < 0,$$

$$\Phi_M \left(\tilde{\gamma}_E, \sqrt{\lambda_{s,q}^M} + \delta_q^M \right) \cdot \Phi_M \left(\tilde{\gamma}_E, \sqrt{\lambda_{c,q}^M} \right) < 0,$$

причем $(\tilde{\gamma}_E, \tilde{\gamma}_M)$ – произвольная точка из

$$\left[\sqrt{\lambda_{s,p}^E} + \delta_p^E, \sqrt{\lambda_{c,p}^E} \right] \times \left[\sqrt{\lambda_{s,q}^M} + \delta_q^M, \sqrt{\lambda_{c,q}^M} \right].$$

Поскольку $\Phi_E(\gamma_E, \gamma_M)$, $\Phi_M(\gamma_E, \gamma_M)$ – также непрерывные функции, следовательно, уравнения

$$\Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) = 0, \quad \Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) = 0$$

имеют корни $(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}) \in \left(\bigcup_{p=1}^{m_E} \Gamma_p^E \right) \times \left(\bigcup_{q=1}^{m_M} \Gamma_q^M \right)$.

Можно выбрать $\alpha_0 = \min \left\{ A_1^2, \frac{\hat{M}}{Cr_{00}^3} \right\}$. □

Из теоремы 3.4 следует, что при указанных предположениях существуют поверхностные связанные ТЕ-ТМ-волны, распространяющиеся вдоль границы изотропного слоя с керровской нелинейностью. Так как в линейном слое связанных волн не существует, то мы показали, что в нелинейном слое существует новый режим распространения волн. Кроме того, при доказательстве теоремы 3.4 получена теоретическая оценка величины α_0 .

Ясно, что достаточные условия существования нетривиального решения рассматриваемой задачи зависят не только от коэффициента нелинейности α , но и от толщины слоя h и параметра ε_2 .

Замечание 3.3. Необходимо подчеркнуть, что с точки зрения теории спектральных задач существование изолированных парных собственных

значений является весьма нетривиальным и, по-видимому, новым математическим результатом. Как уже говорилось во введении, в случае линейной двухпараметрической спектральной задачи пары собственных значений заполняют непрерывные множества (см., например, [88]).

3.7. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Сформулируем итерационный метод нахождения приближенных собственных значений задачи P и докажем теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.

Теорема 3.5. Пусть $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0\}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле и выполняются два условия (3.53), (3.54). Последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n)}(x) = (X^{(n)}(x), Y^{(n)}(x), Z^{(n)}(x))^T$, где $\mathbf{u}^{(n)} \in B_{r_0}$ уравнения (3.51) (или системы (3.42)), определяемая итерационным процессом

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \alpha \mathbf{N}_1 \left(\left| \mathbf{u}^{(n)} \right|^2 \mathbf{u}^{(n)} \right) + \mathbf{h}, \quad (3.69)$$

сходится равномерно в $\mathbf{C}[-h, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ уравнения (3.51) (или системы (3.42)) для любого начального приближения $\mathbf{u}^{(0)} \in B_{r_0}$ со скоростью геометрической прогрессии q .

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.6. Пусть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ и уравнения (3.66), (3.67) имеют l_E и l_M решений соответственно. Тогда найдется значение $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $0 < \alpha \leq \alpha_0$ и каждого $n \geq 0$ существует по крайней мере $l_E \cdot l_M$ пар значений $(\tilde{\gamma}_{E,i}^{(n)}, \tilde{\gamma}_{M,j}^{(n)}) \in \Gamma_i^E \times \Gamma_j^M$, $i = \overline{1, l_E}$, $j = \overline{1, l_M}$, являющихся корнями системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi_E(\tilde{\gamma}_E^{(n)}, \tilde{\gamma}_M^{(n)}) = 0, \\ \Phi_M(\tilde{\gamma}_E^{(n)}, \tilde{\gamma}_M^{(n)}) = 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

где $\mathbf{u}^{(n)}$ определяется соотношением (3.69).

Доказательство. Для каждого $n \geq 0$ функции $\mathbf{u}^{(n)}$ непрерывны согласно (3.69). Таким образом, для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 3.4, если заменить \mathbf{u} на $\mathbf{u}^{(n)}$ и проверить условия $\|\mathbf{u}^{(n)}\| \leq r_* = r_*(\gamma)$. Это неравенство выполняется, так как все итерации $\mathbf{u}^{(n)}$ лежат внутри шара B_{r_*} [79], если начальное приближение лежит в шаре B_{r_*} (что имеет место). \square

Теорема 3.6 утверждает существование приближенных собственных значений задачи P . Система (3.70) является системой приближенных дисперсионных уравнений для задачи P . Оно отличается от точной системы дисперсионных уравнений (3.37) только тем, что вместо (вообще говоря, неизвестного) вектора \mathbf{u} в формулах используется (известный!) вектор $\mathbf{u}^{(n)}$.

Следующая теорема утверждает сходимость приближенных парных собственных значений к точным.

Теорема 3.7 (О сходимости). Пусть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ и уравнения (3.66), (3.67) имеют l_E и l_M решений соответственно, а $(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]})$ и $(\tilde{\gamma}_{E,i}^{(n)}, \tilde{\gamma}_{M,j}^{(n)})$ – соответственно точные и приближенные парные собственные значения задачи P на множестве $\Gamma_i^E \times \Gamma_j^M$. Тогда найдется значение $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $0 < \alpha \leq \alpha_0$ справедливо

$$\left| (\tilde{\gamma}_{E,i}^{(n)}, \tilde{\gamma}_{M,j}^{(n)}) - (\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}) \right| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) &= C_E^{(h)} g_E(h, \gamma_E) - \alpha \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u})}{\sin 2k_E h}, \\ \Phi_{E,n}(\gamma_E, \gamma_M) &= C_E^{(h)} g_E(h, \gamma_E) - \alpha \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u}^{(n)})}{\sin 2k_E h} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) &= C_M^{(h)} k_M g_M(h, \gamma_M) - \alpha \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u})}{\sin 2k_M h}, \\ \Phi_{M,n}(\gamma_E, \gamma_M) &= C_M^{(h)} k_M g_M(h, \gamma_M) - \alpha \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u}^{(n)})}{\sin 2k_M h}. \end{aligned}$$

Тогда, используя оценку (3.56) и формулы (3.40), (3.41), находим

$$\begin{aligned} & |\Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) - \Phi_{E,n}(\gamma_E, \gamma_M)| = \\ & = \alpha \left| \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u})}{\sin 2k_E h} - \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u}^{(n)})}{\sin 2k_E h} \right| \leq \\ & \leq \alpha \tilde{C}_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \alpha \tilde{C}_E \frac{q^n}{1-q} \|\mathbf{h}\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) - \Phi_{M,n}(\gamma_E, \gamma_M)| = \\ & = \alpha \left| \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u})}{\sin 2k_M h} - \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M; \mathbf{u}^{(n)})}{\sin 2k_M h} \right| \leq \\ & \leq \alpha \tilde{C}_M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \alpha \tilde{C}_M \frac{q^n}{1-q} \|\mathbf{h}\|, \end{aligned}$$

где постоянные \tilde{C}_E и \tilde{C}_M не зависят от n , а все другие величины определены выше.

Далее имеем

$$\max_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma^E \times \Gamma^M} |\Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) - \Phi_{E,n}(\gamma_E, \gamma_M)| \leq \alpha \frac{Q^n}{1-Q} C_*, \quad (3.71)$$

$$\max_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma^E \times \Gamma^M} |\Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) - \Phi_{M,n}(\gamma_E, \gamma_M)| \leq \alpha \frac{Q^n}{1-Q} C_*, \quad (3.72)$$

где

$$C_* = \max_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma^E \times \Gamma^M} \left\{ \|\mathbf{h}(\gamma_E, \gamma_M)\| \tilde{C}_E(\gamma_E, \gamma_M), \|\mathbf{h}(\gamma_E, \gamma_M)\| \tilde{C}_M(\gamma_E, \gamma_M) \right\}$$

и $Q = \max_{(\gamma_E, \gamma_M) \in \Gamma^E \times \Gamma^M} (3r_*^2(\gamma_E, \gamma_M) \|\mathbf{N}(\gamma_E, \gamma_M)\|)$, а $Q < 1$.

При выполнении условий теорем 3.4 и 4.5 существуют решения $(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]})$ и $(\tilde{\gamma}_{E,i}^{(n)}, \tilde{\gamma}_{M,j}^{(n)})$ точной (3.37) и приближенной (3.70) систем дисперсионных уравнений. Также при доказательстве теорем 3.4 и 4.5 было установлено, что непрерывные функции $\Phi_E(\gamma_E, \gamma_M)$, $\Phi_{E,n}(\gamma_E, \gamma_M)$ и $\Phi_M(\gamma_E, \gamma_M)$, $\Phi_{M,n}(\gamma_E, \gamma_M)$ меняют свой знак на концах отрезков Γ_i^E и Γ_j^M соответственно. Тогда доказательство теоремы следует из оценок (3.71), (3.72). \square

Для расчетов были выбраны следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$, $h = 8$, $\alpha = 0.001$, $\omega_E = \omega_M$. Остальные параметры указаны в подрисуночных подписях. При выбранных значениях параметров в линейном слое (при $\alpha = 0$) распространяется по пять собственных волн каждого типа (ТЕ- и ТМ-), т.е. уравнения $g_E(\gamma_E) = 0$ и $g_M(\gamma_M) = 0$ имеют по пять решений каждое. Эти решения отмечены на рис. 3.2–3.4 вертикальными (для ТЕ-волн) и горизонтальными (для ТМ-волн) отрезками (серого цвета):

– ТЕ-волнам (линейный случай) отвечают постоянные распространения

$$\gamma_E^{\text{lin}} \approx 1.132, \quad \gamma_E^{\text{lin}} \approx 1.478, \quad \gamma_E^{\text{lin}} \approx 1.720, \quad \gamma_E^{\text{lin}} \approx 1.879, \quad \gamma_E^{\text{lin}} \approx 1.970.$$

– ТМ-волнам (линейный случай) отвечают постоянные распространения

$$\gamma_M^{\text{lin}} \approx 1.036, \quad \gamma_M^{\text{lin}} \approx 1.351, \quad \gamma_M^{\text{lin}} \approx 1.653, \quad \gamma_M^{\text{lin}} \approx 1.852, \quad \gamma_M^{\text{lin}} \approx 1.964.$$

При достаточно малом коэффициенте нелинейности α парные собственные значения будут находиться в окрестностях точек пересечения вертикальных и горизонтальных отрезков. При значении коэффициента нелинейности меньше некоторого критического значения α_0 таких парных собственных значений будет не менее 25 пар (рис. 3.2).

На рис. 3.2–3.4 искомые парные собственные значения – это точки пересечения кривых линий, обозначаемых $\square\square\square\square$ и $\star\star\star\star$. Для построения таких кривых использовался метод пристрелки по параметрам для рассматриваемой двухпараметрической задачи. Были выбраны значения $C_E^{(0)}$ и $C_M^{(0)}$ (слой Σ занимает по x отрезок от 0 до h) и сформирована сетка для γ_E и γ_M . Определив таким образом начальные значения, для каждой пары значений сетки (γ_E, γ_M) решалась задача Коши для системы (3.14). Для каждого полученного решения проверялось выполнение условий сопряжения (3.11) при $x = h$ отдельно для пар X, Z и Y, Y' .

Заметим, что в нелинейном случае появляются парные собственные значения (точки пересечения кривых, обозначаемых $\square\square\square\square$ и $\star\star\star\star$ на

рис. 3.2–3.4), которые не могут быть предсказаны на основе линейной теории. Это такие парные собственные значения, для которых не выполняется по крайней мере одно из неравенств (3.68).

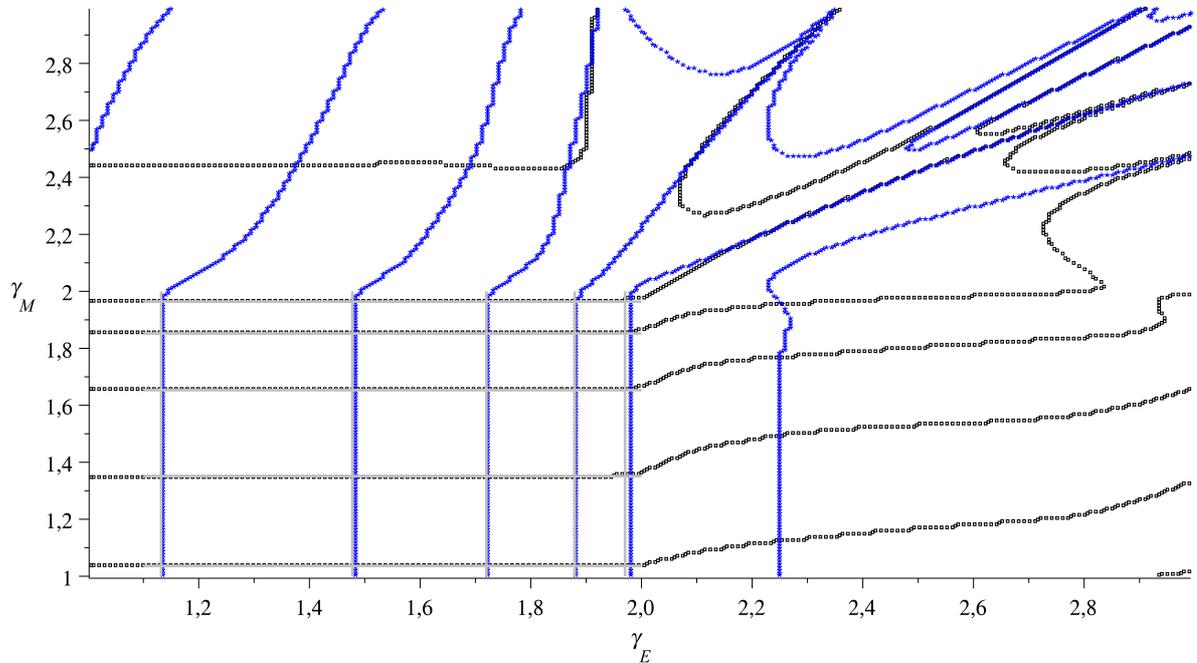


Рис. 3.2. Дисперсионные кривые.
Значения параметров: $C_E^{(0)} = 1$ и $C_M^{(0)} = 1$, $\alpha = 0.001$

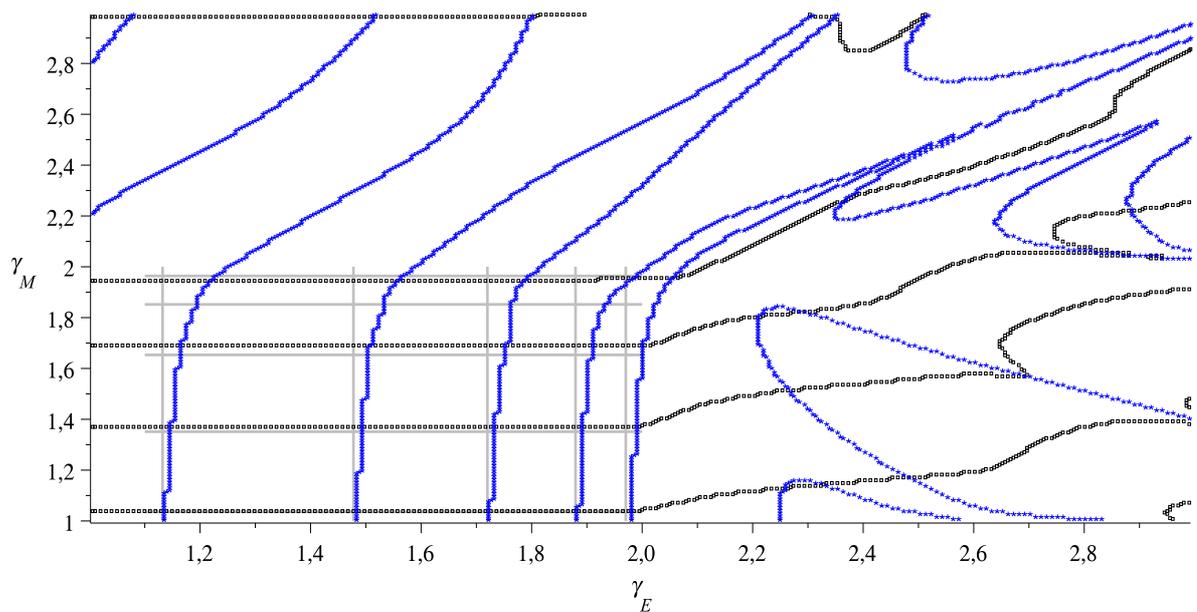


Рис. 3.3. Дисперсионные кривые. Нелинейный случай.
Значения параметров: $C_E^{(0)} = 1$ и $C_M^{(0)} = 10$, $\alpha = 0.001$

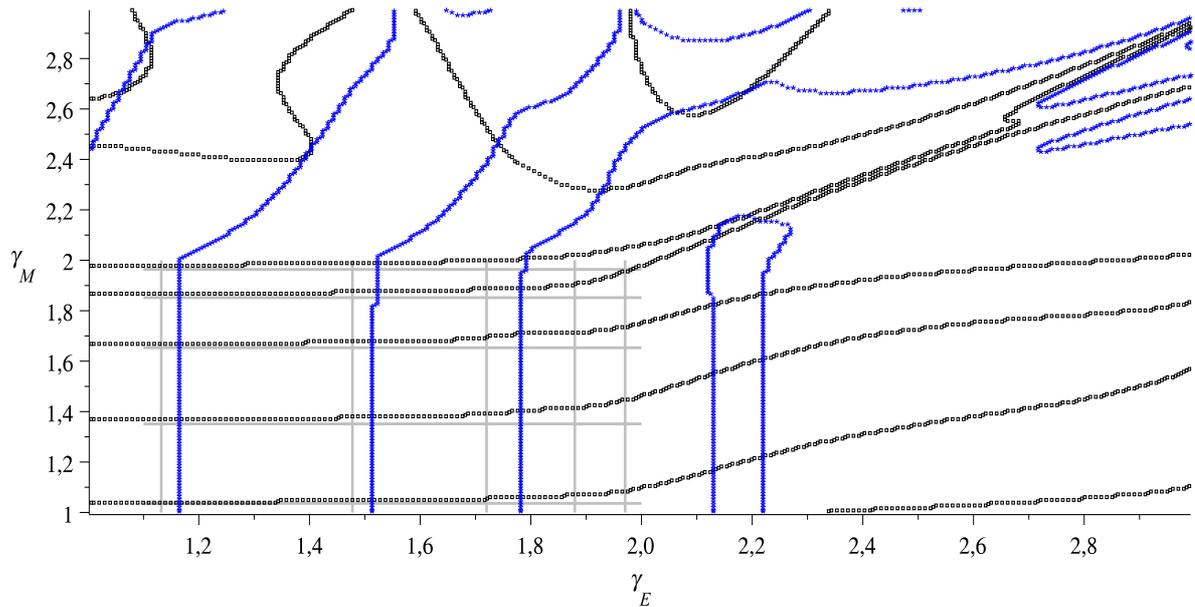


Рис. 3.4. Дисперсионные кривые. Нелинейный случай.

Значения параметров: $C_E^{(0)} = 10$ и $C_M^{(0)} = 1$, $\alpha = 0.001$

В линейных задачах собственные значения не зависят от значений собственных функций в какой-либо точке. В нелинейных задачах, в частности в рассматриваемой задаче, собственные значения зависят от значения собственных функций на одной из границ слоя. Рисунки 3.3 и 3.4 демонстрируют, что происходит при изменении начальных условий.

Ясно, что в линейных случаях все остается без изменения, по этой причине точки пересечения вертикальных и горизонтальных (серого цвета) отрезков фиксируют те же самые собственные значения линейных задач, как и прежде (см. рис. 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.** О некоторых многопараметрических спектральных задачах математической физики // Матем. моделирование, 1994, т. 6, № 6, с. 14–21.
- [2] **Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф.** Метод решения многопараметрической спектральной задачи для некоторых систем дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2000, т. 40, № 1, с. 21–29.
- [3] **Адамс М.** Введение в теорию оптических волноводов. – М.: Мир, 1984.
- [4] **Ахманов С.А., Хохлов Р.В.** Проблемы нелинейной оптики. – М.: ВИНТИ, 1964.
- [5] **Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.** Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. – М.: Физматлит, 2003.
- [6] **Березанский Ю.М., Константинов А.Ю.** О разложении по собственным векторам многопараметрических спектральных задач // Функци. анализ и его прил., 1992, т. 26, № 1, с. 81–83.
- [7] **Бирман М.Ш., Соломяк М.З.** Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: ЛГУ, 1980.
- [8] **Бломберг Н.** Нелинейная оптика. – М.: Мир, 1966.
- [9] **Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.** О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1998, т. 38, № 11, с. 1891–1899.
- [10] **Вайнберг М.М., Треногин В.А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.
- [11] **Вайнштейн Л.А.** Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.

- [12] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2010, № 1, с. 18–27.
- [13] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (II. ТМ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2010, № 2, с. 54–65.
- [14] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т. 51, № 9, с. 1729–1739.
- [15] **Валовик Д.В.** О существовании решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2008, № 2, с. 86–94.
- [16] **Валовик Д.В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением // Радиотехн. и электроника, 2011, т. 56, № 11, с. 1329–1335.
- [17] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Метод задачи Коши решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2013, т. 53, № 1, с. 74–89.
- [18] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Решение нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью, методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника, 2013, т. 58, № 1, с. 69–72.
- [19] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** К задаче о распространении нелинейных связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, т. 54, № 3, с. 504–518.
- [20] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейная задача на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Изв. вузов. Математика, 2008, № 10, с. 70–74.
- [21] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью // Радиотехн. и электроника, 2011, т. 56, № 3, с. 309–314.

- [22] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении связанных электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском слое с керровской нелинейностью // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2012, № 4, с. 21–48.
- [23] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т. 48, № 12, с. 2186–2194.
- [24] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном анизотропном слое // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2007, № 4, с. 51–59.
- [25] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое из нелинейного метаматериала // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2010, № 3, с. 71–87.
- [26] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2010.
- [27] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Радиотехн. и электроника, 2008, т. 53, № 8, с. 934–940.
- [28] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения и полей для поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном анизотропном слое // Радиотехн. и электроника, 2009, т. 54, № 4, с. 411–417.
- [29] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.** Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2013, т. 53, № 7, с. 1150–1161.
- [30] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2012, № 3, с. 29–37.
- [31] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Расчет постоянных распространения неоднородных нелинейных двухслойных круглых цилиндрических волноводов методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника, 2013, т. 58, № 8, с. 759–767.

- [32] **Взятышев В.Ф.** Диэлектрические волноводы. – М.: Советское радио, 1970.
- [33] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
- [34] **Волков Е.А.** Об исследовании и решении разностным методом нелинейных задач для обыкновенного дифференциального уравнения // Труды МИАН СССР, 1976, т. 140, с. 103–129.
- [35] **Гончаренко А.М., Карпенко В.А.** Основы теории оптических волноводов. – Минск: Наука и техника, 1983.
- [36] **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.
- [37] **Даутов Р.З., Карчевский Е.М.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов. – Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009.
- [38] **Делицын А.Л.** Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением // Диффер. уравн., 2000, т. 36, № 5, с. 629–633.
- [39] **Делицын А.Л.** О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т. 51, № 10, с. 1289–1293.
- [40] **Делоне Н.Б.** Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989.
- [41] **Дубровин Б.А.** Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–80.
- [42] **Елеонский В.М., Оганесьянц Л.Г., Силин В.П.** Векторная структура электромагнитного поля в самосфокусированных волноводах // УФН, 1972, т. 107, № 3, с. 516–518.
- [43] **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979.
- [44] **Жидков П.Е.** О базисности Рисса системы собственных функций нелинейной задачи типа Штурма – Лиувилля // Матем. сб., 2000, т. 191, № 3, с. 43–52.

- [45] **Зильбергейт А.С., Копилевич Ю.И.** Спектральная теория регулярных волноводов. – Ленинград: ФТИ, 1983.
- [46] **Ильин В.А.** Спектральная теория дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1991.
- [47] **Ильин В.А., Крицков Л.В.** Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам. Функциональный анализ, Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., т. 96. – М.: ВИНТИ, 2006.
- [48] **Ильинский Ю.А., Келдыш Л.В.** Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. – М.: МГУ, 1989.
- [49] **Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В.** Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: МГУ, 1989.
- [50] **Исаев Г.А.** О сингулярных многопараметрических дифференциальных операторах. Теоремы разложения // Матем. сб., 1986, т. 131, № 1, с. 52–72.
- [51] **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.
- [52] **Келлер Дж.Б., Антман С. (под ред.)** Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1974.
- [53] **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
- [54] **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968.
- [55] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
- [56] **Константинов А.Ю.** Многопараметрические спектральные задачи и коммутирующие расширения эрмитовых операторов // Функц. анализ и его прил., 1994, т. 28, № 2, с. 55–57.
- [57] **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1956.
- [58] **Костюченко А.Г., Саргсян И.С.** Распределение собственных значений. – М.: Наука, 1979.

- [59] **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. – М.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1.
- [60] **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2001.
- [61] **Макин А.С.** О базисности системы собственных функций одной нелинейной спектральной задачи // Диффер. урав., 2003, т. 39, № 5, с. 612–618.
- [62] **Манькин Э.А.** Взаимодействие излучения с веществом. Феноменология нелинейной оптики. – М.: МИФИ, 1996.
- [63] **Маркушевич А.И.** Введение в классическую теорию абелевых функций. – М.: Наука, 1979.
- [64] **Марченко В.А.** Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977.
- [65] **Махмудов А.П., Алиев З.С.** Недифференцируемые возмущения спектральных задач для пары самосопряженных операторов и глобальная бифуркация // Изв. вузов. Математика, 1990, № 1, с. 44–52.
- [66] **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.
- [67] **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
- [68] **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во Московского университета, 1984.
- [69] **Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.** Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974.
- [70] **Риман Б.** Сочинения. – М., Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [71] **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1953. – Т. 1.
- [72] **Смирнов Ю.Г.** Математические методы исследования задач электродинамики. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2009.
- [73] **Смирнов Ю.Г., Куприянова С.Н.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2004, т. 44, № 10, с. 1850–1860.

- [74] **Смирнов Ю.Г., Хорошева Э.А.** О разрешимости нелинейной краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки, 2010, № 3, с. 55–70.
- [75] **Спрингер Дж.** Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: ИЛ, 1960.
- [76] **Стрэттон Дж.А.** Теория электромагнетизма. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [77] **Таланов В.И.** О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ, 1965, т. 2, № 5, сс. 218–222.
- [78] **Самарский А.А., Тихонов А.Н.** О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Жур. техн. физ., 1948, т. 18, № 7, с. 971–985.
- [79] **Треногин В.А.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
- [80] **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1962.
- [81] **Фелсен Л., Маркувиц Н.** Излучение и рассеяние волн. – М.: Мир, 1978. – Т.1,2.
- [82] **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970.
- [83] **Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.** Методы анализа нелинейных динамических систем. – М.: Мир, 1991.
- [84] **Чеботарев Н.Г.** Теория алгебраических функций. – М.: ГИТТЛ, 1948.
- [85] **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Ч. 2.
- [86] **Шен И.Р.** Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989.
- [87] **Amrein W.O., Hinz A.M., Pearson D.B. (Eds.)** Sturm-Liouville theory: past and present. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
- [88] **Atkinson F.V., Mingarelli A.B.** Multiparameter eigenvalue problems. Sturm-Liouville theory. – NW: CRC Press, 2011.
- [89] **Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D.** Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves in: **Ponath H.-E., Stegeman G.I.** (editors) Modern problems in condensed matter sciences. Vol. 29. Nonlinear surface electromagnetic phenomena. – North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1991.

-
- [90] **Boardman A.D., Maradudin A.A., Stegeman G.I., Twardowski T., Wright E.M.** Exact theory of nonlinear p -polarized optical waves // *Phys. Rev. A*, 1987, vol. 35, no. 3, pp. 1159–1164
- [91] **Boardman A.D., Egan P.** S -polarized waves in a thin dielectric film asymmetrically bounded by optically nonlinear media // *IEEE J. Quantum Electron.*, 1985, vol. 21, no. 10, pp. 1701–1713.
- [92] **Boardman A.D., Twardowski T.** Theory of nonlinear interaction between TE and TM waves // *J. Opt. Soc. Am. B.*, 1988, vol. 5, no. 2, pp. 523–528.
- [93] **Boardman A.D., Twardowski T.** Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides // *Phys. Rev. A*, 1989, vol. 39, no. 5, pp. 2481–2491.
- [94] **Chen Y.** TE family of self-guided beams in saturable nonlinear media // *Journal of Lightwave Techn.*, 1991, vol. 9, no. 9, pp. 1208–1213.
- [95] **Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.** Self-trapping of optical beams // *Phys. Rev. Lett.*, 1964, vol. 13, no. 15, pp. 479–482.
- [96] **Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P.** Cylindrical Nonlinear Waveguides // *Soviet Physics JETP*, 1972, vol. 35, no. 1, pp. 44–47.
- [97] **Eleonskii V.M., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P.** Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides // *Soviet Phys. JETP*, 1973, vol. 36, no. 2, pp. 282–285.
- [98] **Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D.** *Photonic Crystals. Molding the flow of light.* – Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008.
- [99] **Joseph R.I., Christodoulides D.N.** Exact field decomposition for TM waves in nonlinear media // *Opt. Lett.*, 1987, vol. 12, no. 10, pp. 826–828.
- [100] **Leung K.M.** P -polarized nonlinear surface polaritons in materials with intensity-dependent dielectric functions // *Phys. Rev. B*, 1985, vol. 32, no. 8, pp. 5093–5101.
- [101] **Lourtioz J.-M., Benisty H., Berger V., Gérard J.-M., Maystre D., Tchelnokov A.** *Photonic Crystals. Towards nanoscale photonic devices.* – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

-
- [102] **Marennikova E.A., Valovik D.V.** The problem of surface electromagnetic TE wave propagation in an inhomogeneous plane layer dielectric waveguide // Abstracts. Days on diffraction: International Conference (Saint Petersburg, Russia, 27–31 May, 2013). – Saint Petersburg, Russia, 2013.
- [103] **Qin C., Wang Z.H.** Exact dispersion relation for TM waves guided by thin dielectric films bounded by nonlinear media // Optics Letters, 1993, vol. 18, no. 4, pp. 1–3.
- [104] **Schürmann H.W., Serov V.S., Shestopalov Yu.V.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure // Phys. Rev. E, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 1040–1050.
- [105] **Schürmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu.V.** Propagation of TE waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E, 2005, vol. 71, no. 1–2, pp. 016614-1–10.
- [106] **Seaton C.T., Valera J.D., Shoemaker R.L., Stegeman G.I., Chilwel J.T., Smith S.D.** Calculations of nonlinear TE waves guided by thin dielectric films bounded by nonlinear media // IEEE J. Quantum Electron., 1985, vol. 21, no. 7, pp. 774–783.
- [107] **Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu., Valovik D.V.** Nonlinear Double-Layer Bragg Waveguide: Analytical and Numerical Approaches to Investigate Waveguiding Problem // Adv. in Numer. Anal., 2014, vol. 2014, pp. 1–11.
- [108] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. – Penza: PSU Press, 2011.
- [109] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Boundary eigenvalue problem for Maxwell equations in a nonlinear dielectric layer // Appl. Math., 2010, no. 1, pp. 29–36.
- [110] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys., 2012, vol. 53, no. 12, pp. 123530-1–24.
- [111] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic transverse-electric-transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys., 2013, vol. 54, no. 4, pp. 043506-1–22.

-
- [112] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // *Adv. Math. Phys.*, 2012, vol. 2012, pp. 1–21.
- [113] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // *J. Math. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 8, pp. 083502-1–13.
- [114] **Smol'kin E.Yu., Valovik D.V.** Numerical solution of the problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in a nonlinear two-layered dielectric cylindrical waveguide // *Proceedings of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory 2012 (MMET*14)* (Kharkov, Ukraine, 27–31 August, 2012). – Kharkov, 2012, pp. 68–71.
- [115] **Valovik D.V.** Electromagnetic TE wave propagation through a nonlinear metamaterial slab // *Abstracts. Days on diffraction: International Conference* (Saint Petersburg, Russia, 30 May – 3 June, 2011). – Saint Petersburg, Russia 2011, pp. 175–176.
- [116] **Valovik D.V.** Electromagnetic TM wave propagation through a nonlinear metamaterial layer with arbitrary nonlinearity // *PIERS Proceedings* (Kuala Lumpur, Malaysia, March 27–30, 2012). – Kuala Lumpur, Malaysia, 2012, pp. 1676–1680.
- [117] **Valovik D.V.** Electromagnetic TE wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. Computational approach to determine propagation constants // *PIERS Proceedings* (Moscow, Russia, August 19–23, 2012). – Moscow, Russia, 2012, pp. 122–126.
- [118] **Valovik D.V.** On the problem of nonlinear coupled electromagnetic transverse electric-transverse magnetic wave propagation // *J. Math. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 042902-1–14.
- [119] **Valovik D.V.** Propagation of TE-waves through a nonlinear metamaterial layer with arbitrary nonlinearity // *PIERS Proceedings* (Suzhou, China, September 12–16, 2011). – Suzhou, China, 2011, pp. 193–197.
- [120] **Valovik D.V.** Propagation of TM wave in a layer with Kerr nonlinearity // *Proceedings of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory 2010 (MMET*13)* (Kiev, Ukraine, September 6–8, 2010). – Kiev, Ukraine, 2010, pp. 366–369.

-
- [121] **Valovik D.V., Smirnov Yu.G.** Analysis of the TM-wave propagation in nonlinear dielectric layer planar waveguides with Kerr nonlinearity // Abstracts. Days on Diffraction: International Conference (Saint Petersburg, Russia, 29 May – 1 June, 2007). – Saint Petersburg, Russia, 2007, pp. 81.
- [122] **Valovik D.V., Smirnov Yu.G.** Electromagnetic TM wave propagation through a nonlinear metamaterial slab // Abstracts. Days on diffraction: International Conference (Saint Petersburg, Russia, 30 May – 3 June, 2011). – Saint Petersburg, Russia, 2011, pp. 176–177.
- [123] **Valovik D.V., Smirnov Yu.G.** Regime of coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a plane layer waveguide with Kerr nonlinearity // Proceedings of the 2013 International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2013) (Hiroshima, Japan, 20 May – 24 May, 2013). – Hiroshima, 2013, pp. 823–826.
- [124] **Valovik D.V., Zarembo E.V.** Electromagnetic TM wave propagation in nonlinear multilayered waveguides. Numerical technique to obtain propagation constants // Proceedings of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory 2012 (MMET*14) (Kharkov, Ukraine, August 27–31, 2012). – Kharkov, Ukraine, 2012, pp. 105–108.
- [125] **Valovik D.V., Zarembo E.V.** Numerical technique to calculate propagation constants for the problem of polarized wave propagation in a layer with nonlinear permittivity // PIERS Proceedings (Moscow, Russia, August 19–23, 2012). – Moscow, Russia, 2012, pp. 117–121.
- [126] **Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. Computational approach to determine propagation constants // Springer Proceeding in Mathematics & Statistics, Volume 52: Inverse Problems and Large Scale computations (Proceedings of the Workshop on Large Scale Modeling, Sunne, Sweden, May 1–6). – Sunne, Sweden, 2013, pp. 71–91.
- [127] **Valovik D.V.** New propagation regime for nonlinear guided waves: coupled electromagnetic TE-TM wave propagation // PIERS Proceedings (Stockholm, Sweden, August 12–15, 2013). – Stockholm, Sweden, 2013, pp. 285–289.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ТЕ- И ТМ-ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ СЛОЕМ

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль поверхности однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\},$$

расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя Σ описывается диагональным тензором 3×3

$$\varepsilon = \text{diag} (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}),$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ – действительные постоянные.

Запишем уравнения Максвелла в следующей форме [76]:

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \\ \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$ и $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$. Ток проводимости $\tilde{\mathbf{j}}$ в уравнениях (A.1) отсутствует, так как $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ являются полными полями.

Рассмотрим поле, гармонически зависящее от времени [96]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}^-(x, y, z) \sin \omega t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}^-(x, y, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где ω – круговая частота; \mathbf{E}^+ , \mathbf{E}^- , \mathbf{H}^+ , \mathbf{H}^- – вещественные искомые вектор-функции.

Поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \{(\mathbf{E}^+ + i\mathbf{E}^-)e^{-i\omega t} + (\mathbf{E}^+ - i\mathbf{E}^-)e^{i\omega t}\} / 2, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \{(\mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-)e^{-i\omega t} + (\mathbf{H}^+ - i\mathbf{H}^-)e^{i\omega t}\} / 2.\end{aligned}$$

Величины

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + i\mathbf{E}^-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-$$

носят название комплексных амплитуд.

Считаем, что

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T,$$

знак $(\cdot)^T$ обозначает операцию транспонирования;

$$\begin{aligned}E_x &= E_x(x, y, z), & E_y &= E_y(x, y, z), & E_z &= E_z(x, y, z), \\ H_x &= H_x(x, y, z), & H_y &= H_y(x, y, z), & H_z &= H_z(x, y, z).\end{aligned}$$

Поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{Re} \{ \mathbf{E} e^{-i\omega t} \}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \text{Re} \{ \mathbf{H} e^{-i\omega t} \}.$$

Подставляя поля $\mathbf{E} e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H} e^{-i\omega t}$ в систему (А.1), получаем, что комплексные амплитуды \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \text{diag}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}), & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Выпишем систему (А.2) в координатной форме:

$$\begin{cases} \partial_y H_z - \partial_z H_y = -i\omega \varepsilon_{xx} E_x, \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega \varepsilon_{yy} E_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = -i\omega \varepsilon_{zz} E_z, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_y E_z - \partial_z E_y = i\omega \mu H_x, \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu H_y, \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega \mu H_z. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Считаем, что поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z . Таким образом, компоненты полей $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x, y)e^{i\gamma z}, & E_y &= E_y(x, y)e^{i\gamma z}, & E_z &= E_z(x, y)e^{i\gamma z}, \\ H_x &= H_x(x, y)e^{i\gamma z}, & H_y &= H_y(x, y)e^{i\gamma z}, & H_z &= H_z(x, y)e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения).

Подставив компоненты (A.4) в систему (A.2) (или (A.3)), получим

$$\begin{cases} \partial_y H_z - i\gamma H_y = -i\omega\varepsilon_{xx}E_x, \\ i\gamma H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_{yy}E_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = -i\omega\varepsilon_{zz}E_z, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_y E_z - i\gamma E_y = i\omega\mu H_x, \\ i\gamma E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu H_y, \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega\mu H_z. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Пусть $k_{xx}^2 = \gamma^2 - \omega^2\mu\varepsilon_{xx}$, $k_{yy}^2 = \gamma^2 - \omega^2\mu\varepsilon_{yy}$.

Из первого и пятого уравнений системы (A.5) получаем

$$E_x = \frac{\omega\mu}{ik_{xx}^2} \left(\frac{\gamma}{\omega\mu} \partial_x E_z + \partial_y H_z \right), \quad H_y = \frac{\omega\varepsilon_{xx}}{ik_{xx}^2} \left(\partial_x E_z + \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_{xx}} \partial_y H_z \right). \quad (\text{A.6})$$

Из второго и четвертого уравнений системы (A.5) получаем

$$E_y = \frac{\omega\mu}{ik_{yy}^2} \left(\frac{\gamma}{\omega\mu} \partial_y E_z - \partial_x H_z \right), \quad H_x = \frac{\omega\varepsilon_{yy}}{ik_{yy}^2} \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_{yy}} \partial_x H_z - \partial_y E_z \right). \quad (\text{A.7})$$

Из формул (A.6) и (A.7) легко видеть, что компоненты E_x , E_y , H_x и H_y выражаются через E_z и H_z .

Учитывая формулы (A.5)–(A.7), можно сделать вывод, что поле с компонентами (A.4) может быть представлено в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн. А именно:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T; \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)^T. \quad (\text{A.9})$$

Комплексные амплитуды (A.8) и (A.9) соответствуют ТЕ-поляризованным электромагнитным волнам, или ТЕ-волнам (от *transverse-electric*), и ТМ-поляризованным электромагнитным волнам, или ТМ-волнам (от *transverse-magnetic*) соответственно.

В то же время ясно, что представление (A.4) не учитывает симметрию по координате y . Учет такой симметрии приводит к тому, что можно пренебречь зависимостью по y в представлении компонент поля (A.4) [3, 32, 35]. При этом формулы (A.5) принимают вид

$$\begin{cases} -i\gamma H_y = -i\omega\varepsilon_{xx}E_x, \\ i\gamma H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_{yy}E_y, \\ \partial_x H_y = -i\omega\varepsilon_{zz}E_z, \end{cases} \quad \begin{cases} -i\gamma E_y = i\omega\mu H_x, \\ i\gamma E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu H_y, \\ \partial_x E_y = i\omega\mu H_z. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Перегруппируем уравнения (А.10) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_{yy}E_y, \\ -i\gamma E_y = i\omega\mu H_x, \\ \partial_x E_y = i\omega\mu H_z, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -i\gamma H_y = -i\omega\varepsilon_{xx}E_x, \\ \partial_y H_y = -i\omega\varepsilon_{zz}E_z, \\ i\gamma E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu H_y. \end{array} \right. \quad (\text{А.11})$$

Системы (А.11) являются независимыми. Отсюда получаем, что для рассматриваемой геометрии можно изучать ТЕ- и ТМ-волны более простой структуры, а именно:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T; \quad (\text{А.12})$$

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)^T. \quad (\text{А.13})$$

Комплексные амплитуды (А.12) и (А.13) отвечают ТЕ-волнам и ТМ-волнам соответственно.

Подставим поля (А.12) с компонентами

$$E_y = E_y(x, y)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x, y)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x, y)e^{i\gamma z}$$

в систему (А.2), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y H_z = 0, \\ i\gamma H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_{yy}E_y, \\ -\partial_y H_x = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -i\gamma E_y = i\omega\mu H_x, \\ 0 = 0, \\ \partial_x E_y = i\omega\mu H_z. \end{array} \right.$$

Из первого и третьего уравнений этой системы следует, что H_z и H_x не зависят от y . Это влечет то, что E_y тоже не зависит от y .

Окончательно получаем, что в случае гармонической зависимости полей от z комплексные амплитуды (А.12) имеют вид

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}. \quad (\text{А.14})$$

Подставим поля (А.13) с компонентами

$$E_x = E_x(x, y)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x, y)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x, y)e^{i\gamma z}$$

в систему (А.2), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\gamma H_y = -i\omega\varepsilon_{xx}E_x, \\ 0 = 0, \\ \partial_x H_y = -i\omega\varepsilon_{zz}E_z, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z = 0, \\ i\gamma E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu H_y, \\ -\partial_y E_x = 0. \end{array} \right.$$

Из четвертого и шестого уравнений этой системы следует, что E_z и E_x не зависят от y . Это влечет то, что H_y тоже не зависит от y .

Окончательно получаем, что в случае гармонической зависимости полей от z компоненты комплексных амплитуд (А.13) имеют вид

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}. \quad (\text{А.15})$$

Таким образом, сделанный ранее вывод о возможности пренебречь зависимостью от y подтверждается.

Представления (А.14) и (А.15) позволяют перейти от уравнений в частных производных (А.2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В однородных направляющих структурах, таких как, например, слой с постоянной диэлектрической проницаемостью, поверхностная электромагнитная волна представляется в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн. Это обстоятельство позволяет изучать распространение поверхностных электромагнитных волн в слое Σ с постоянной диэлектрической проницаемостью лишь для поляризованных волн, что упрощает анализ возникающих уравнений. Независимость компонент поля от одной из пространственных переменных (в рассматриваемом случае от y) позволяет еще более упростить представление полей. Общее решение уравнений Максвелла в слое, где диэлектрическая проницаемость является функцией от напряженности электрического поля, уже нельзя представить в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-полей. Поэтому, изучая распространение ТЕ- и ТМ-поляризованных волн в нелинейных слоях, мы, вообще говоря, находим лишь частные решения уравнений Максвелла (А.2), которые соответствуют упомянутым поляризациям.

П Р И Л О Ж Е Н И Е Б

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

В этом приложении излагаются известные, но необходимые в главах 1 и 3 результаты о распространении электромагнитных ТЕ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью.

Б.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используя результаты приложения А, рассмотрим монохроматические ТЕ-волны

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(H_x, 0, H_z)^T$$

(где \mathbf{E} , \mathbf{H} – комплексные амплитуды, ω – круговая частота), распространяющиеся вдоль поверхности однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\},$$

расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Внутри слоя Σ диэлектрическая проницаемость ε является действительной постоянной ε_2 .

Комплексные амплитуды \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла (см. приложение А)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Как было показано в приложении А, компоненты поверхностных ТЕ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ , имеют представление

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (\text{Б.2})$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя компоненты (Б.2) в систему (Б.1), получаем

$$\gamma^2 E_y(x) - E_y''(x) = \omega^2 \mu \varepsilon E_y(x) \quad (\text{Б.3})$$

и $H_x(x) = -\gamma(\omega\mu)^{-1}E_y(x)$, $H_z(x) = -i(\omega\mu)^{-1}E_y'(x)$.

Обозначим $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ и нормируем (Б.3) в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = k_0 x, \quad \frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Обозначая $Y(\tilde{x}) := E_y(\tilde{x})$ и опуская тильду, получим из (Б.3)

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x), \quad (\text{Б.4})$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2, & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Функция Y такова, что

$$Y(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \quad (\text{Б.5})$$

Эти условия соответствуют физической природе задачи.

Известно, что касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границах раздела сред. В рассматриваемом случае касательными компонентами являются E_y и H_z . Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} E_y(h+0) &= E_y(h-0), & E_y(0-0) &= E_y(0+0), \\ H_z(h+0) &= H_z(h-0), & H_z(0-0) &= H_z(0+0). \end{aligned}$$

Условия непрерывности для компонент E_y , H_z дают условия сопряжения для функций Y и Y'

$$[Y]|_{x=0} = 0, \quad [Y]|_{x=h} = 0, \quad [Y']|_{x=0} = 0, \quad [Y']|_{x=h} = 0, \quad (\text{Б.6})$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Задача P_E^{lin} : доказать существование собственных значений $\gamma = \tilde{\gamma}$ таких, что существует не равная тождественно нулю функция $Y(x; \tilde{\gamma})$, которая удовлетворяет уравнению (Б.4), условиям (Б.5), (Б.6) и затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Замечание 3.4. Мы считаем, что γ является действительным числом. Это условие выделяет распространяющиеся вдоль границ слоя электромагнитные волны, затухающие при удалении от границ слоя. Однако в рассматриваемой линейной задаче можно считать γ комплексным (это приведет к появлению так называемых вытекающих волн). В нелинейных случаях, рассмотренных в главах 1–3, уже невозможно рассматривать комплексные γ (см., объяснение на с. 26).

Б.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Обозначим

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1, \quad k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2, \quad \hat{k}_2^2 := \gamma^2 - \varepsilon_2, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3.$$

При $x < 0$ и $x > h$, учитывая условия на бесконечности, из (Б.3) получаем

$$Y(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (\text{Б.7})$$

Считаем $k_1^2 > 0$, $k_3^2 > 0$, ибо в противном случае получим решения, которые не удовлетворяют условию на бесконечности.

Постоянные A и B в решениях (Б.7) определяются начальными условиями и условиями сопряжения. Как будет видно далее, в дисперсионное уравнение постоянные A и B не входят. То есть собственные значения (постоянные распространения) – решения дисперсионного уравнения – не зависят от постоянных A и B , как это обычно и бывает в линейных задачах на собственные значения. Однако собственные функции от указанных постоянных зависят.

При $0 \leq x \leq h$ необходимо рассмотреть два случая:

(а) $\hat{k}_2^2 > 0$, тогда, решая уравнение (Б.3), получаем

$$Y(x) = C_1 e^{-\hat{k}_2 x} + C_2 e^{\hat{k}_2 x}; \quad (\text{Б.8})$$

(б) $k_2^2 > 0$, тогда, решая уравнение (Б.3), получаем

$$Y(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x. \quad (\text{Б.9})$$

В случае (а), используя (Б.6) и решения (Б.7), (Б.8), получаем

$$\begin{cases} A = C_1 + C_2, \\ B = C_1 e^{-\hat{k}_2 h} + C_2 e^{\hat{k}_2 h}, \\ Ak_1 = \hat{k}_2(-C_1 + C_2), \\ -Bk_3 = \hat{k}_2(-C_1 e^{-\hat{k}_2 h} + C_2 e^{\hat{k}_2 h}). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим дисперсионное уравнение

$$\frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} = e^{2h\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2}}. \quad (\text{Б.10})$$

В случае (б), используя (Б.6) и решения (Б.7), (Б.9), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} A = C_2, \\ B = C_1 \sin k_2 h + C_2 \cos k_2 h, \\ Ak_1 = C_1 k_2, \\ -Bk_3 = k_2(-C_1 \cos k_2 h - C_2 \sin k_2 h). \end{array} \right.$$

Из этой системы находим

$$\frac{\varepsilon_2 - \gamma^2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} (\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3})} \sin h \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} = \cos h \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}. \quad (\text{Б.11})$$

Если $\cos h \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} \neq 0$, то из (Б.10) получаем дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg} \left(\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} h \right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} (\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3})}{\varepsilon_2 - \gamma^2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}. \quad (\text{Б.12})$$

Случай $\cos h \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} = 0$ не представляет интереса.

Б.5. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Условия $k_1^2 > 0$ и $k_3^2 > 0$ и $\hat{k}_2^2 > 0$ (см. (Б.7)–(Б.8)) немедленно дают

$$\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \quad (\text{Б.13})$$

Легко видеть в (Б.10), что

$$\left| \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} \right| < 1.$$

Поскольку $\gamma^2 - \varepsilon_2 > 0$, то не существует положительного числа h , удовлетворяющего уравнению (Б.10). Таким образом, уравнение (Б.10) не имеет действительных положительных решений γ таких, что справедливо (Б.13).

Уравнение (Б.12) хорошо известно [11] и может быть переписано в форме

$$h = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} (\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3})}{\varepsilon_2 - \gamma^2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} + \pi n \right), \quad (\text{Б.14})$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ (т.к. $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$, то $h < 0$ при $n \leq -1$, отсюда следует, что $n \geq 0$).

Из формулы (Б.14) очевидно, что линия $\gamma^2 = \varepsilon_2$ является асимптотой:

$$h^* = \lim_{\gamma^2 \rightarrow \varepsilon_2 - 0} h(\gamma) = +\infty.$$

Учитывая результаты исследования уравнений (Б.10) и (Б.12), получаем важный вывод: для существования решений задачи P_E^{lin} (эти решения отвечают распространяющимся ТЕ-волнам) необходимо выполнение неравенства $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, отсюда получаем важное неравенство

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2,$$

где предполагается, что $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0 > 0$. Если же $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < 0$, тогда γ удовлетворяет следующему двойному неравенству: $0 < \gamma^2 < \varepsilon_2$.

Подводит итог проделанной работе следующее

Утверждение Б.1. Пусть $\varepsilon_* \geq \varepsilon_0$, $\varepsilon^* < \varepsilon_2$ и $Y(0) \neq 0$. В этом случае для любого

$$h > h_* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \arctan \frac{\sqrt{\varepsilon^* - \varepsilon_*}}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \geq 0,$$

где $\varepsilon_* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon^* = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, задача P_E^{lin} имеет конечное число (и не менее одного) положительных (кратности 1) собственных значений $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_p$, которые являются корнями уравнения (Б.12) (или (Б.14)). Для всякого $i = \overline{1, p}$ справедливо, что $\tilde{\gamma}_i^2 \in (\varepsilon^*, \varepsilon_2)$.

На языке электродинамики утверждение Б.1 можно сформулировать так: пусть выполняются неравенства $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, тогда найдется $h_* \geq 0$ такое, что для всякого $h > h_*$ существует не более конечного числа $p \geq 1$ собственных электромагнитных ТЕ-волн волновода Σ толщины h . Число p равно числу действительных решений γ^2 дисперсионного уравнения (Б.12) (или (Б.14)).

Ясно, что $0 \leq h_* < +\infty$; h_* возрастает, когда $(\varepsilon_2 - \varepsilon^*)$ убывает.

В главе 3 понадобится утверждение о распределении корней уравнения (Б.12). Для этого запишем уравнение (Б.12) в форме

$$g_E(h, \gamma) := (k_2^2 - k_1 k_3) \sin 2k_2 h - k_2 (k_1 + k_3) \cos 2k_2 h = 0. \quad (\text{Б.15})$$

Рассмотрим функцию $w_E(\gamma^2) := k_2^2 - k_1 k_3$. Легко видеть, что w_E монотонно убывает при $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$.

Кроме того, $w_E(\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)) > 0$ и $w_E(\varepsilon_2) < 0$. Это влечет существование единственного числа $\tilde{\gamma}^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ такого, что $w_E(\tilde{\gamma}^2) = 0$.

Обозначим $\lambda_{s,m}^E := \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}$, $\lambda_{c,m}^E := \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2}$, где $j_{s,m} = \pi t - m$ — t -й неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$, и $j_{c,m} = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ — m -й положительный корень уравнения $\cos x = 0$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Известно, что $j_{s,0} < j_{c,0} < j_{s,1} < j_{c,1} < j_{s,2} < j_{c,2} < \dots$

Тогда $\lambda_{s,0}^E > \lambda_{c,0}^E > \lambda_{s,1}^E > \lambda_{c,1}^E > \lambda_{s,2}^E > \lambda_{c,2}^E > \dots$ При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E} \right) &= (-1)^{m+1}, \\ \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right) &= (-1)^m \operatorname{sign} (k_2^2 - k_1 k_3), \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Считаем, что $\tilde{\gamma}^2 \neq \lambda_{s,m}^E, \lambda_{c,m}^E$ для всякого допустимого целого m .

Ясно, что существует индекс p такой, что имеет место одна из двух возможностей:

$$\lambda_{s,0}^E > \lambda_{c,0}^E > \lambda_{s,1}^E > \lambda_{c,2}^E > \dots > \lambda_{s,p}^E > \tilde{\gamma}^2 > \lambda_{c,p}^E > \lambda_{s,p+1}^E > \lambda_{c,p+1}^E > \dots \quad (\text{Б.17})$$

ИЛИ

$$\lambda_{s,0}^E > \lambda_{c,0}^E > \lambda_{s,1}^E > \lambda_{c,2}^E > \dots > \lambda_{s,p}^E > \lambda_{c,p}^E > \tilde{\gamma}^2 > \lambda_{s,p+1}^E > \lambda_{c,p+1}^E > \dots \quad (\text{Б.18})$$

Для случая, указанного в (Б.17), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E} \right) &= (-1)^{m+1}, \quad \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right) = (-1)^m \quad \text{при } m < p, \\ \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E} \right) &= (-1)^{m+1}, \quad \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right) = (-1)^{m+1} \quad \text{при } m \geq p. \end{aligned}$$

Легко видеть, что существует по крайней мере один корень $\gamma^{(m)}$ уравнения (Б.15) в каждом интервале $\left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E}, \sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right)$, где $m = \overline{0, p-1}$.

Также ясно, что существует по крайней мере один корень $\gamma^{(n)}$ уравнения (Б.15) в каждом интервале $\left(\sqrt{\lambda_{c,n}^E}, \sqrt{\lambda_{s,n+1}^E} \right)$, где $n = p, p+1, \dots$

Для случая, указанного в (Б.18), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E} \right) &= (-1)^{m+1}, \quad \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right) = (-1)^m \quad \text{при } m < p+1, \\ \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E} \right) &= (-1)^{m+1}, \quad \operatorname{sign} g_E \left(\sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right) = (-1)^{m+1} \quad \text{при } m \geq p+1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что существует по крайней мере один корень $\gamma^{(m)}$ уравнения (Б.15) в каждом интервале $\left(\sqrt{\lambda_{s,m}^E}, \sqrt{\lambda_{c,m}^E} \right)$, где $m = \overline{0, p}$.

Также ясно, что существует по крайней мере один корень $\gamma^{(n)}$ уравнения (Б.15) в каждом интервале $\left(\sqrt{\lambda_{c,n}^E}, \sqrt{\lambda_{s,n+1}^E} \right)$, где $n = p+1, p+2, \dots$

Итак, мы получили следующее

Утверждение Б.2. Пусть уравнение (Б.15) (или (Б.14)) имеет l_E корней $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(l_E)}$.

Тогда существует целое число $0 < m_E < l_E$ такое, что

$$\begin{aligned} \gamma^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^E}, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right), \quad i = \overline{0, m_E - 1}, \\ \gamma^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} \right), \quad i = \overline{m_E, l_E - 1}. \end{aligned}$$

Дисперсионные кривые показаны на рис. Б.1, Б.2.

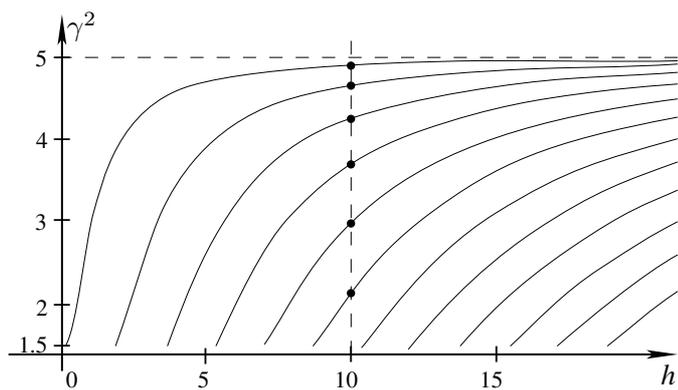


Рис. Б.2. $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 5, \varepsilon_3 = 1.5$

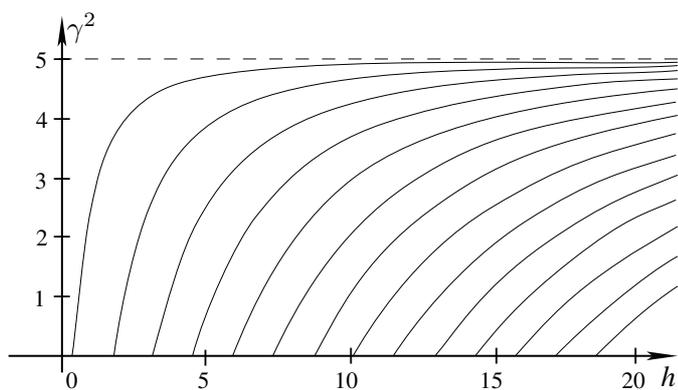


Рис. Б.2. $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 5, \varepsilon_3 = -1.5$

Для того чтобы определить число собственных значений (например, на рис. Б.1), проводим линию, соответствующую толщине слоя h (штриховая линия $h = 10$). Число собственных значений равно числу точек, в которых эта линия пересекает дисперсионные кривые (на рис. Б.1 имеется 6 таких точек, они отмечены черными кружками).

П Р И Л О Ж Е Н И Е В

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

В этом приложении излагаются известные, но необходимые в главах 2 и 3, результаты о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью.

В.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используя результаты приложения А, рассмотрим монохроматические ТМ-волны

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(E_x, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(0, H_y, 0)^T$$

(где \mathbf{E} , \mathbf{H} – комплексные амплитуды, ω – круговая частота), распространяющиеся вдоль поверхности однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\},$$

расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается диагональным тензором 3×3 : $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$, где ε_{xx} , ε_{zz} – действительные постоянные. В случае ТМ-волн элемент ε_{yy} не оказывает влияние на процесс распространения волн.

Комплексные амплитуды \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла (см. приложение А)

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Как было показано в приложении А, компоненты поверхностных ТМ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ , имеют представление

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad (\text{В.2})$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя компоненты (В.2) в систему (В.1), получаем

$$\begin{cases} \gamma (iE_x(x))' - E_z''(x) = \omega^2 \mu \hat{\varepsilon}_{zz} E_z(x), \\ \gamma^2 (iE_x(x)) - \gamma E_z'(x) = \omega^2 \mu \hat{\varepsilon}_{xx} (iE_x(x)) \end{cases} \quad (\text{В.3})$$

и $H_y = (i\omega\mu)^{-1}(i\gamma E_x - E_z')$.

Обозначим $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ и нормируем систему уравнений (В.3) в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = k_0 x, \quad \frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_0}.$$

Обозначая $Z(\tilde{x}) := E_z$, $X(\tilde{x}) := iE_x$ и опуская тильду, получим из (В.3)

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \hat{\varepsilon}_{zz} Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1} \hat{\varepsilon}_{xx} X, \end{cases} \quad (\text{В.4})$$

где с учетом предыдущего

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_{xx}, & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h, \end{cases} \quad \hat{\varepsilon}_{zz} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_{zz}, & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Функции X , Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty), \\ Z(x) &\in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty) \cap \\ &\cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \end{aligned} \quad (\text{В.5})$$

Эти условия соответствуют физической природе задачи.

Известно, что касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными компонентами являются H_y и E_z . Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} H_y(h+0) &= H_y(h-0), \quad H_y(0-0) = H_y(0+0), \\ E_z(h+0) &= E_z(h-0), \quad E_z(0-0) = E_z(0+0). \end{aligned}$$

Из написанного выше получаем условия сопряжения для X и Z (см. также формулы, относящиеся к компонентам (A.15), приложение А)

$$[\gamma X - Z']|_{x=0} = 0, \quad [\gamma X - Z']|_{x=h} = 0, \quad [Z]|_{x=0} = 0, \quad [Z]|_{x=h} = 0, \quad (\text{B.6})$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Задача P_M^{lin} : доказать существование собственных значений $\gamma = \tilde{\gamma}$ таких, что существуют не равные тождественно нулю функции $X(x; \tilde{\gamma})$ и $Z(x; \tilde{\gamma})$, которые удовлетворяют системе уравнений (B.4), условиям (B.5), (B.6) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Справедливо замечание со с. 140 (см. также объяснение на с. 61).

В.2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Обозначим

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1, \quad k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3.$$

Из системы (B.4) получаем

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ Z = \gamma^{-1} \hat{\varepsilon}_{xx} \hat{\varepsilon}_{zz}^{-1} X', \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

где $\lambda = \hat{\varepsilon}_{zz} \hat{\varepsilon}_{xx}^{-1} (\gamma^2 - \hat{\varepsilon}_{xx})$.

При $x < 0$ и $x > h$, учитывая условия на бесконечности, из (B.7) получаем

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h; \end{cases} \quad Z(x) = \begin{cases} A\gamma^{-1} k_1 e^{x k_1}, & x < 0, \\ -B\gamma^{-1} k_3 e^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Считаем $k_1^2 > 0$, $k_3^2 > 0$, ибо в противном случае получим общее решение, выраженное через синусы и косинусы действительного аргумента, и, таким образом, не удовлетворяющее условию на бесконечности. Случай $k_1^2 = 0$ (и $k_1^2 > 0$) тоже невозможен, так как тогда получаем постоянное решение, которое также не удовлетворяет этому условию.

Постоянные A и B в решениях (B.8) определяются начальными условиями и условиями сопряжения. Здесь также справедливо объяснение, данное на с. 140.

При $0 \leq x \leq h$ необходимо рассмотреть два случая:

(а) $\lambda > 0$, тогда общее решение системы (B.7) есть

$$\begin{cases} X(x) = C_1 e^{-x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{x\sqrt{\lambda}}, \\ Z(x) = \gamma^{-1} \sqrt{\lambda} (-C_1 e^{-x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{x\sqrt{\lambda}}); \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

(б) $\lambda < 0$, тогда общее решение системы (В.7) есть

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin x\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos x\sqrt{-\lambda}, \\ Z(x) = \gamma^{-1}\sqrt{-\lambda}(C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} - C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}). \end{cases} \quad (\text{В.10})$$

В случае (а), используя (В.6) и решения (В.8)–(В.9), получаем

$$\begin{cases} \varepsilon_1 A = \varepsilon_{xx} (C_1 + C_2), \\ \varepsilon_3 B = \varepsilon_{xx} (C_1 e^{-h\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{h\sqrt{\lambda}}), \\ k_1 A = \sqrt{\lambda} (C_2 - C_1), \\ -k_3 B = \sqrt{\lambda} (-C_1 e^{-h\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{h\sqrt{\lambda}}). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим дисперсионное уравнение, которое удобно записать в развернутой форме

$$e^{2h\sqrt{\lambda}} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\gamma^2 - \varepsilon_1)}}{\varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_{xx}} + \sqrt{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\gamma^2 - \varepsilon_1)}} \cdot \frac{\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\gamma^2 - \varepsilon_3)}}{\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_{xx}} + \sqrt{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\gamma^2 - \varepsilon_3)}}. \quad (\text{В.11})$$

В случае (б), используя (В.6) и решения (В.8) и (В.10), получаем

$$\begin{cases} \varepsilon_1 A = \varepsilon_{xx} C_2, \\ \varepsilon_3 B = \varepsilon_{xx} (C_1 \sin h\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos h\sqrt{-\lambda}), \\ k_1 A = \sqrt{-\lambda} C_1, \\ -k_3 B = \sqrt{-\lambda} (C_1 \cos h\sqrt{-\lambda} - C_2 \sin h\sqrt{-\lambda}). \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\varepsilon_{xx} - \gamma^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} - \gamma^2)} (\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3})} \sin h\sqrt{-\lambda} = \cos h\sqrt{-\lambda}. \quad (\text{В.12})$$

Если $\cos h\sqrt{-\lambda} \neq 0$, тогда из (В.12) получаем известное уравнение

$$\operatorname{tg} h\sqrt{-\lambda} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} - \gamma^2)} (\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3})}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\varepsilon_{xx} - \gamma^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad (\text{В.13})$$

которое при условиях $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ и $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_2$ приведено в [11].

Если условие $\cos h\sqrt{-\lambda} \neq 0$ не выполняется, тогда мы можем получить более простое (алгебраическое) уравнение для γ .

В.3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Условия $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$ и $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$ немедленно дают $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

Условие $\lambda > 0$ влечет следующие неравенства:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} > 0, \\ \varepsilon_{zz} > 0, \\ \gamma^2 > \varepsilon_{xx} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} < 0, \\ \varepsilon_{zz} < 0, \\ \gamma^2 > \varepsilon_{xx}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} > 0, \\ \varepsilon_{zz} < 0, \\ \gamma^2 < \varepsilon_{xx}. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Первая и вторая группы неравенств (B.14) вместе с уже известным дают $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_3)$. Таким образом, величина γ^2 не ограничена справа.

Условие $\lambda < 0$ влечет следующие неравенства:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} > 0, \\ \varepsilon_{zz} < 0, \\ \gamma^2 > \varepsilon_{xx} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} < 0, \\ \varepsilon_{zz} > 0, \\ \gamma^2 > \varepsilon_{xx}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} > 0, \\ \varepsilon_{zz} > 0, \\ \gamma^2 < \varepsilon_{xx}. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Первая и вторая группы неравенств (B.15) вместе с уже известным дают $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_3)$. Таким образом, величина γ^2 не ограничена справа. Можно показать, что в уравнении (B.13) $\lim_{\gamma^2 \rightarrow +\infty} h = 0$.

Уравнение (B.11) может быть легко исследовано. Возможно, что результаты исследования окажутся полезными в электродинамике, поскольку это уравнение даже при ограничении $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_2$ описывает случай $\varepsilon_2 < 0$. Заметим еще, что в случае уравнения (B.11) может существовать не более одной дисперсионной кривой.

Рассмотрим более простой и наиболее важный случай: $\lambda < 0$ и $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_2$.

Уравнение (B.12) при указанных условиях принимает вид

$$\operatorname{tg} h \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} \left(\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} \right)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\varepsilon_2 - \gamma^2) - \varepsilon_2^2 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}. \quad (\text{B.16})$$

Неравенства (B.15) принимают вид $\varepsilon_2 > 0$, $\gamma^2 < \varepsilon_2$.

Условия $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$ и $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$ и предыдущие неравенства дают необходимое условие существования распространяющихся волн, а именно должно быть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, отсюда получаем важное неравенство $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$.

Подводит итог проделанной работе следующее

Утверждение В.1. Пусть $\varepsilon_* \geq \varepsilon_0$, $\varepsilon^* < \varepsilon_2$ и $X(0) \neq 0$. В этом случае для любого

$$h > h_* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \arctan \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon^* - \varepsilon_*}}{\varepsilon_* \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon^*}} \geq 0,$$

где $\varepsilon_* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon^* = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, задача P_M^{lin} имеет конечное число (и не менее одного) положительных (кратности 1) собственных значений $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_p$, являющихся корнями уравнения (B.16). Для всякого $i = \overline{1, p}$ справедливо $\tilde{\gamma}_i^2 \in (\varepsilon^*, \varepsilon_2)$.

На языке электродинамики утверждение Б.1 можно сформулировать так: *пусть выполняются неравенства $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, тогда найдется $h_* \geq 0$ такое, что для всякого $h > h_*$ существует не более конечного числа $p \geq 1$ собственных электромагнитных ТЕ-волн волновода Σ толщины h . Число p равно числу действительных решений γ^2 дисперсионного уравнения (В.16).*

Ясно, что $0 \leq h_* < +\infty$; h_* возрастает, когда $(\varepsilon_2 - \varepsilon^*)$ убывает.

В главе 3 понадобится утверждение о распределении корней уравнения (В.16). Для этого запишем уравнение (В.16) в форме

$$g_M(h, \gamma) := (\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_2^2 - \varepsilon_2^2 k_1 k_3) \sin 2k_2 h - \varepsilon_2 k_2 (\varepsilon_1 k_3 + \varepsilon_3 k_1) \cos 2k_2 h. \quad (\text{В.17})$$

Рассмотрим функцию $w_M(\gamma^2) := \varepsilon_1 \varepsilon_3 k_2^2 - \varepsilon_2^2 k_1 k_3$. Легко видеть, что w_M монотонно убывает при $\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$. Кроме того, $w_M(\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)) > 0$ и $w_M(\varepsilon_2) < 0$. Это влечет существование единственного числа $\tilde{\gamma}^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ такого, что $w_M(\tilde{\gamma}^2) = 0$.

Обозначим $\lambda_{s,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}$, $\lambda_{c,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2}$, где $j_{s,m} = \pi t$ — m -й неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$, и $j_{c,m} = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ — m -й положительный корень уравнения $\cos x = 0$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Известно, что $j_{s,0} < j_{c,0} < j_{s,1} < j_{c,1} < j_{s,2} < j_{c,2} < \dots$

Тогда $\lambda_{s,0}^M > \lambda_{c,0}^M > \lambda_{s,1}^M > \lambda_{c,1}^M > \lambda_{s,2}^M > \lambda_{c,2}^M > \dots$ При этом

$$\text{sign } g_M\left(\sqrt{\lambda_{s,m}^M}\right) = (-1)^{m+1}, \quad \text{sign } g_M\left(\sqrt{\lambda_{c,m}^M}\right) = (-1)^m \text{sign}\left(\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_2^2 - \varepsilon_2^2 k_1 k_3\right). \quad (\text{В.18})$$

Считаем, что $\tilde{\gamma}^2 \neq \lambda_{s,m}^M, \lambda_{c,m}^M$ для всякого допустимого целого m .

Ясно, что существует индекс q такой, что имеет место одна из двух возможностей:

$$\lambda_{s,0}^M > \lambda_{c,0}^M > \lambda_{s,1}^M > \lambda_{c,1}^M > \dots > \lambda_{s,q}^M > \tilde{\gamma}^2 > \lambda_{c,q}^M > \lambda_{s,q+1}^M > \lambda_{c,q+1}^M > \dots \quad (\text{В.19})$$

ИЛИ

$$\lambda_{s,0}^M > \lambda_{c,0}^M > \lambda_{s,1}^M > \lambda_{c,1}^M > \dots > \lambda_{s,q}^M > \lambda_{c,q}^M > \tilde{\gamma}^2 > \lambda_{s,q+1}^M > \lambda_{c,q+1}^M > \dots \quad (\text{В.20})$$

На основе анализа, проведенного в приложении Б, получаем следующее

Утверждение В.2. *Пусть уравнение (В.17) (или (В.16)) имеет l_M корней $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(l_M)}$. Тогда существует целое число $0 < m_M < l_M$ такое, что*

$$\begin{aligned} \gamma^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^M}, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right), & i = \overline{0, m_M - 1}, \\ \gamma^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} \right), & i = \overline{m_M, l_M - 1}. \end{aligned}$$

В случае уравнения (В.16) поведение дисперсионных кривых такое же, как показано на рис. Б.1, Б.2 (см. с. 143).

П Р И Л О Ж Е Н И Е Г

СВЯЗАННЫЕ ТЕ-ТМ-ВОЛНЫ

Г.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ТЕ- и ТМ-ВОЛНЫ

В приложении А показано, что при определенных условиях электромагнитное поле может быть записано в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн. В задаче, рассматриваемой здесь, эти условия выполняются.

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль поверхности однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq x \leq h\},$$

расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < -h$ и $x > h$.

Электромагнитное поле $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})$ запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= (E_x, E_y, E_z)^T = (0, E_y, 0)^T + (E_x, 0, E_z)^T, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= (H_x, H_y, H_z)^T = \underbrace{(H_x, 0, H_z)^T}_{\text{ТЕ-волны}} + \underbrace{(0, H_y, 0)^T}_{\text{ТМ-волны}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего необходимо рассмотреть отдельно ТЕ- и ТМ-волны.

ТЕ-волны имеют вид $\tilde{\mathbf{E}}_E = (0, E_y, 0)^T$, $\tilde{\mathbf{H}}_E = (H_x, 0, H_z)^T$. Доказано, что для рассматриваемой геометрии компоненты E_y , H_x , H_z не зависят от y (см. главу 1 и приложение Б). Кроме того, волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z . Значит, компоненты полей могут быть записаны в следующем виде:

$$E_y = E_y(x, t)e^{i\gamma_E z}, \quad H_x = H_x(x, t)e^{i\gamma_E z}, \quad H_z = H_z(x, t)e^{i\gamma_E z},$$

где γ_E – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения ТЕ-волны).

ТМ-волны имеют вид $\tilde{\mathbf{E}}_M = (E_x, 0, E_z)^T$, $\tilde{\mathbf{H}}_M = (0, H_y, 0)^T$. Доказано, что для рассматриваемой геометрии компоненты E_x , E_z , H_y не зависят от y (см. главу 2

и приложение В). Кроме того, волны, распространяющиеся вдоль границы слоя Σ , гармонически зависят от z . Значит, компоненты полей могут быть записаны в следующем виде:

$$E_x = E_x(x, t)e^{i\gamma_M z}, \quad E_z = E_z(x, t)e^{i\gamma_M z}, \quad H_y = H_y(x, t)e^{i\gamma_M z},$$

где γ_M – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения ТМ-волны).

В случае постоянной диэлектрической проницаемости в слое спектральные параметры γ_E и γ_M могут быть комплексными числами.

Для каждого из двух рассмотренных случаев мы ищем поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границ слоя. С математической точки зрения проблема сводится к определению значений постоянных распространения, которые соответствуют распространяющимся поверхностным волнам (до настоящего момента мы рассматривали случаи ТЕ- и ТМ-волн отдельно).

Имея в виду все выводы, полученные для ТЕ- и ТМ-волн, рассмотрим связанные ТЕ-ТМ-волны, т.е. попросту сумму ТЕ- и ТМ-волн. Если среда характеризуется диагональным тензором диэлектрической проницаемости с постоянными компонентами, то в этом случае система уравнений Максвелла всегда распадается на две независимые подсистемы, это означает, что ТЕ- и ТМ-волны, распространяющиеся в линейной среде, не взаимодействуют. Другими словами, ТЕ- и ТМ-волны, распространяющиеся в линейной среде, связанного состояния не образуют.

Г.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ТЕ-ТМ-ВОЛНЫ

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль поверхности однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя Σ , расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Запишем уравнения Максвелла в следующей форме [76]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \end{cases} \quad (\text{Г.1})$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$ и $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$. В первом уравнении (Г.1) ток проводимости $\tilde{\mathbf{j}}$ отсутствует, так как $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ являются полными полями.

Из (Г.1) получаем

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t(\mu\tilde{\mathbf{H}}), \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t(\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}). \end{cases} \quad (\text{Г.2})$$

Предполагаем, что поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ в среде существуют на двух частотах ω_E и ω_M , а именно:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_E^+(x, y, z) \cos \omega_E t + \mathbf{E}_E^-(x, y, z) \sin \omega_E t + \\ &\quad + \mathbf{E}_M^+(x, y, z) \cos \omega_M t + \mathbf{E}_M^-(x, y, z) \sin \omega_M t; \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_E^+(x, y, z) \cos \omega_E t + \mathbf{H}_E^-(x, y, z) \sin \omega_E t + \\ &\quad + \mathbf{H}_M^+(x, y, z) \cos \omega_M t + \mathbf{H}_M^-(x, y, z) \sin \omega_M t, \end{aligned} \quad (\text{Г.3})$$

где ω_E, ω_M – круговые частоты; $\mathbf{E}_E^+, \mathbf{E}_E^-, \mathbf{E}_M^+, \mathbf{E}_M^-, \mathbf{H}_E^+, \mathbf{H}_E^-, \mathbf{H}_M^+, \mathbf{H}_M^-$ – вещественные искомые функции; векторы с индексом E отвечают поляризованным ТЕ-волнам, а векторы с индексом M – поляризованным ТМ-волнам.

Образуем комплексные амплитуды \mathbf{E}, \mathbf{H} полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_E + \mathbf{E}_M, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_E + \mathbf{H}_M, \quad (\text{Г.4})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_E &= \mathbf{E}_E^+ + i\mathbf{E}_E^-, & \mathbf{E}_M &= \mathbf{E}_M^+ + i\mathbf{E}_M^-, \\ \mathbf{H}_E &= \mathbf{H}_E^+ + i\mathbf{H}_E^-, & \mathbf{H}_M &= \mathbf{H}_M^+ + i\mathbf{H}_M^-. \end{aligned}$$

Используя формулы Эйлера для $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\omega t}$, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t} \}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t} \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_E &= (0, E_y, 0)^T, & \mathbf{E}_M &= (E_x, 0, E_z)^T, \\ \mathbf{H}_E &= (H_x, 0, H_z)^T, & \mathbf{H}_M &= (0, H_y, 0)^T, \\ E_x &= E_x(x) e^{i\gamma_M z}, & E_y &= E_y(x) e^{i\gamma_E z}, & E_z &= E_z(x) e^{i\gamma_M z}, \\ H_x &= H_x(x) e^{i\gamma_E z}, & H_y &= H_y(x) e^{i\gamma_M z}, & H_z &= H_z(x) e^{i\gamma_E z}, \end{aligned} \quad (\text{Г.5})$$

а поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \operatorname{Re} \left\{ (E_x(x) e^{i(\gamma_M z - \omega_M t)}, E_y(x) e^{i(\gamma_E z - \omega_E t)}, E_z(x) e^{i(\gamma_M z - \omega_M t)})^T \right\}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \operatorname{Re} \left\{ (H_x(x) e^{i(\gamma_E z - \omega_E t)}, H_y(x) e^{i(\gamma_M z - \omega_M t)}, H_z(x) e^{i(\gamma_E z - \omega_E t)})^T \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Г.6})$$

Предполагается, что $\operatorname{Im} \gamma_E = 0$ и $\operatorname{Im} \gamma_M = 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega_E \omega_M} &:= \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \mathbf{H}_{\omega_E \omega_M} &:= \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}. \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

Поля (Г.7) называются связанными ТЕ-ТМ-волнами.

На возможность использования различных постоянных распространения для разных поляризаций впервые указано в [42, 97] (позже такая возможность была указана в [89], [93]). Заметим, что в упомянутых работах предполагается $\omega_E = \omega_M$. Здесь мы покажем, что для разных поляризаций возможно использовать не только различные постоянные распространения, но и различные частоты.

Как известно (см., например, [40, 60, 86]), закон Керра в изотропной среде для монохроматической волны $\hat{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}$, где $\hat{\mathbf{E}}$ – комплексная амплитуда, имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha|\hat{\mathbf{E}}|^2$, где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости; α – коэффициент нелинейности.

Поскольку вектор $\mathbf{E}_{\omega_E\omega_M}$ представляет собой сумму ТЕ- и ТМ-волн, то имеет место формула

$$|\mathbf{E}_{\omega_E\omega_M}| = |\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}| = |\mathbf{E}_E + \mathbf{E}_M| = |\mathbf{E}|.$$

Таким образом, получаем $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2$.

Значит, в рассматриваемом случае зависимость уравнений Максвелла от t такая же, как и в случае постоянного тензора ε . Это позволяет записать уравнения (Г.2) для полей (Г.7):

$$\begin{cases} \text{rot}(\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}) = i\mu\omega_E \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + i\mu\omega_M \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \text{rot}(\mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}) = -i\varepsilon\omega_E \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} - i\varepsilon\omega_M \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}. \end{cases} \quad (\text{Г.8})$$

Таким образом, мы обосновали переход от уравнений (Г.1) для полей $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ к уравнениям (Г.8) для комплексных амплитуд (Г.4).

Комплексные амплитуды \mathbf{E}, \mathbf{H} (см. формулы (Г.4)) удовлетворяют следствию уравнений Максвелла (Г.8), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = -h, x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве описывается следующим образом:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < -h; \\ \varepsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2, & -h \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h, \end{cases}$$

где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ и $\alpha > 0$ – вещественные постоянные.

Решение уравнений Максвелла разыскивается во всем пространстве.

Как видно из (Г.8), правые части векторных уравнений являются суммой ТЕ-волн с частотой ω_E и ТМ-волн с частотой ω_M . Чтобы аналогичное утверждение

выполнялось и для левых частей, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$e^{-i\omega_M t} \partial_y E_z \equiv 0, \quad e^{-i\omega_M t} \partial_y E_x \equiv 0, \quad e^{-i\omega_E t} \partial_y H_z \equiv 0, \quad e^{-i\omega_E t} \partial_y H_x.$$

Отсюда получаем, что компоненты E_z , E_x , H_z , H_x не зависят от переменной y .

Хорошо известно (см., например, приложение А), что в случае слоя с постоянной диэлектрической проницаемостью поверхностная волна может быть представлена в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн. Это значит, что в случае постоянной диэлектрической проницаемости общее решение уравнений Максвелла (Г.2) является линейной комбинацией ТЕ- и ТМ-волн. В этом случае, подставляя ТЕ- и ТМ-поля в систему (Г.2), нетрудно убедиться, что компоненты H_z , H_x (для ТЕ-волн) и компоненты E_z , E_x (для ТМ-волн) не зависят от y .

Далее, оказывается, можно показать (см., главы 1 и 2 соответственно), что для каждой поляризации отдельно (ТЕ- и ТМ-) для рассматриваемой нелинейной проницаемости также существуют волны, не зависящие от y . Только нужно иметь в виду, что в случае нелинейных уравнений Максвелла общее решение уже не может быть представлено в виде линейной комбинации ТЕ- и ТМ-волн. В этом случае ТЕ- и ТМ-волны являются частными решениями уравнений Максвелла.

Все это объясняет, почему компоненты (Г.5) не зависят от y .

Неизвестными в рассматриваемой задаче являются парные собственные значения $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$, которые отвечают распространяющимся вдоль поверхности слоя Σ связанным ТЕ-ТМ-волнам, затухающим при удалении от границ слоя. Решению этой задачи посвящена глава 3 настоящей диссертации.