

ОТЗЫВ

официального оппонента д.ф.-м.н., профессора Шестопалова Ю.В., на диссертационную работу Валовика Дмитрия Викторовича «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Актуальность работы. Задачи распространения поляризованных электромагнитных волн в нелинейных волноведущих структурах актуальны на протяжении более чем полувека. Фактически, с момента создания лазера в середине прошлого века стало ясно, что линейная теория распространения волн не применима при распространении электромагнитных волн высокой интенсивности. Однако несмотря на большое внимание исследователей (рассматриваемыми задачами занимались В.М. Елеонский, Л.Г. Оганесьянц, В.П. Силин, В.С. Серов, Ю.Г. Смирнов, В.К. Федянин, Ю.В. Шестопалов, Н.-W. Schürmann, A.D. Boardman, D.N. Christodoulides, К.М. Leung, D. Mihaelache и многие другие), математическая теория задач о распространении поляризованных электромагнитных волн в плоскостойких диэлектрических волноведущих структурах с диэлектрической проницаемостью нелинейно зависящей от квадрата модуля электрического поля развивалась медленно. Это связано как с новизной математических постановок рассматриваемых задач, так и со сложностью их исследования. Дело в том, что в строгой математической постановке в общем случае рассматриваемые задачи являются задачами сопряжения на собственные значения (как для одномерного спектрального параметра, так и для двумерного) для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их систем на оси. Общих методов исследования таких задач не было разработано. Кроме того, ни методы теории бифуркаций, ни теория ветвления решений в данном случае не применимы.

Собственные значения в задачах такого типа являются постоянными распространения изучаемой волноведущей структуры и необходимы при ее конструировании.

Основным объектом исследования в рассматриваемых задачах является дисперсионное уравнение, которое с математической точки зрения является трансцендентным уравнением относительно спектрального параметра, корни такого уравнения суть собственные числа рассматриваемой задачи. Дисперсионное уравнение легко получить, обладая явными решениями нелинейного дифференциального уравнения исследуемой задачи. Однако, дисперсионное уравнение, выраженное через явные решения, может оказаться чрезвычайно сложным для исследования. Кроме того, явные решения нелинейных уравнений могут быть найдены лишь в исключительных случаях.

Только простейшая задача о распространении ТЕ-волн в слое с керровской нелинейностью могла быть исследована существовавшими методами. Это связано с тем, что основное уравнение такой задачи интегрируется в эллиптических функциях. Но даже в этом случае такое дисперсионное уравнение до настоящего момента полностью не исследовано.

В диссертации Д.В. Валовика построен новый математический аппарат для исследования задач о распространении поляризованных электромагнитных волн в слое с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Используя предложенный метод, автор получает дисперсионное уравнение относительно собственных значений, при этом нет необходимости полностью интегрировать уравнения.

Суммируя сказанное, можно заключить, что **актуальность** диссертационного исследования Д.В. Валовика обусловлена двумя обстоятельствами: во-первых, изучаемые в диссертации задачи представляют собой новую и мало разработанную область в теории нелинейных задач на собственные значения (нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений; во-вторых, рассматриваемая диссертация по сути является современной глубоко разработанной теорией распространения поляризованных и связанных поляризованных

электромагнитных волн в плоском волноводе, диэлектрическая проницаемость которого нелинейно зависит от квадрата модуля электрического поля. Такая теория имеет большое прикладное значение, поскольку позволяет как предсказывать новые эффекты, обусловленные нелинейностью, так и эффективно проводить расчеты параметров, необходимых при конструировании волноводящих систем с нелинейными диэлектриками. Также важным обстоятельством является то, что предложенный метод для задач о ТЕ- и ТМ-волнах не опирается на методы теории возмущений и может быть использован в широких пределах изменения параметров, характеризующих задачу.

Оценка содержания диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, четырех приложений. Во введении приводится тема, общая характеристика работы, обзор литературы по теме диссертации, формулируются цель, основное содержание работы и положения, выносимые на защиту, указываются публикации автора по теме диссертации и апробация.

В **первой главе** исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Пункт 1.1 посвящен строгой математической постановке изучаемой задачи, здесь же дано определение собственного значения рассматриваемой задачи. Пункт 1.2 посвящен выводу дисперсионного уравнения, также в этом пункте содержится важнейший результат первой главы – теорема 1.1 (об эквивалентности) исходной задачи на собственные значения и дисперсионного уравнения, указанная теорема также утверждает при каких условиях собственная функция, соответствующая определенному собственному значению имеет заданное количество нулей и дается явная формула для нулей; теорема 1.2 этого же пункта утверждает, что если какая-либо собственная функция задачи имеет более двух нулей на рассматриваемом интервале, то она является периодической и дается явная формула для периода.

Заметим, что само по себе доказательство того, что решение некоторого нелинейного уравнения обладает периодическим решением является сложной задачей даже в том случае, если не удастся определить период. Пункт 1.3 содержит 4 теоремы: теоремы 1.3 и 1.4 указывают условия, при которых существует по крайней мере одно собственное значение рассматриваемой задачи (они отличаются тем, что в теореме 1.3 \sup исследуемой функции является конечным, а в теореме 1.4 исследуемая функция предполагается неограниченной); теоремы 1.5, 1.6 указывают условия, при которых существует дискретное множество собственных значений (эти теоремы отличаются тем, что в теореме 1.5 \sup исследуемой функции является конечным, а в теореме 1.6 исследуемая функция предполагается неограниченной). Пункт 1.4 содержит два примера применения предложенного автором метода к исследованию задач с конкретными нелинейностями – нелинейность Керра и нелинейность с насыщением. И в первом и во втором случаях получены исчерпывающие результаты, которые демонстрируют возможности предложенного метода. А именно, в случае керровской нелинейности (которую моделирует функция, равная квадрату своего аргумента, умноженная на постоянную величину – коэффициент нелинейности) доказано, что существует бесконечное множество собственных значений с точкой накопления на бесконечности, получены двусторонние оценки для собственных значений. Также доказано, что существуют собственные значения (их бесконечное число), которые не сводятся к решениям соответствующей линейной задачи при стремлении коэффициента нелинейности к нулю (само уравнение задачи в этом случае переходит в линейное дифференциальное уравнение). В случае нелинейности с насыщением (которую моделирует ограниченная функция, умноженная на постоянную величину – коэффициент нелинейности) доказано, что существует не более конечного числа собственных значений, найдены важные неравенства между собственными значениями, указана верхняя граница для квадрата максимального собственного значения (причем эта оценка неулучшаема).

Во второй главе исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью. В этой главе, по сути, применяется та же техника, что и в главе 1, но данная глава технически существенно сложнее предыдущей: здесь приходится работать не с одним уравнением, а с системой уравнений, а также с более сложными условиями сопряжения. Пункт 2.1 посвящен строгой математической постановке изучаемой задачи, здесь же дано определение собственного значения рассматриваемой задачи. Пункт 2.2 посвящен выводу дисперсионного уравнения, также в этом пункте содержится важнейший результат первой главы – теорема 2.1 (об эквивалентности) исходной задачи на собственные значения и дисперсионного уравнения, указанная теорема также утверждает при каких условиях собственная функция, соответствующая определенному собственному значению имеет заданное количество нулей и дается явная формула для нулей; теорема 2.2 этого же пункта утверждает, что если какая-либо собственная функция задачи имеет более двух нулей на рассматриваемом интервале, то она является периодической и дается явная формула для периода. Как уже было отмечено доказательство существования периодического решения нелинейного уравнения является сложной задачей даже в том случае, если не удастся определить период. Пункт 2.3 содержит 4 теоремы: теоремы 2.3 и 2.4 указывают условия, при которых существует по крайней мере одно собственное значение рассматриваемой задачи (они отличаются тем, что в теореме 2.3 \sup исследуемой функции является конечным, а в теореме 2.4 исследуемая функция предполагается неограниченной); теоремы 2.5, 2.6 указывают условия, при которых существует дискретное множество собственных значений (эти теоремы отличаются тем, что в теореме 2.5 \sup исследуемой функции является конечным, а в теореме 2.6 исследуемая функция предполагается неограниченной).

В третьей главе исследуется нелинейная двухпараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью. В пункте 3.1 дается определение парных собственных значений и строгая математическая постановка рассматриваемой задачи, которая является нелинейной двухпараметрической задачей сопряжения на собственные значения для системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на оси (в слое диэлектрическая проницаемость зависит от поля по закону Керра). В пункте 3.2 осуществляется переход от дифференциальных уравнений к интегральным с использованием функций Грина двух вспомогательных линейных краевых задач (функции Грина построены явно). Задача оказывается весьма громоздкой технически. После перехода к интегральным уравнениям, система записывается в удобной для дальнейшего исследования операторной форме. В пункте 3.3 проводится исследование интегральных операторов, а именно устанавливается их ограниченность как операторов из $C[-h, h]$ в $C[-h, h]$. Пункт 3.4 посвящен доказательству единственности решения операторного уравнения в шаре некоторого радиуса с оценкой величины радиуса и оценкой на коэффициент нелинейности (теоремы 3.1 и 3.2). В пункте 3.5 доказывается, что при определенных условиях единственное решение рассматриваемого операторного уравнения непрерывно зависит от пары спектральных параметров (теорема 3.3). В пункте 3.6 доказана теорема о существовании и локализации парных собственных значений нелинейной задачи (теорема 3.4). Фактически доказательство сводится к применению метода малого параметра. Однако необходимо заметить, что такой подход оправдан, так как закон Керра справедлив именно для малых коэффициентов нелинейности (коэффициент нелинейности и является малым параметром в рассматриваемой задаче). Еще одно обстоятельство является весьма важным: в случае равенства коэффициента нелинейности нулю, рассматриваемая нелинейная задача распадается на две независимых линейных задачи, собственные значения кото-

рых не связаны друг с другом. Таким образом, использование метода малого параметра приводит к принципиально новому факту: существования связанных собственных значений нелинейной задачи (учет нелинейности приводит к тому, что независимые собственные значения соответствующих линейных задач «склеиваются» в пары собственных значений). Оценка на коэффициент нелинейности дана через нормы соответствующих операторов. Пункт 3.7 посвящен формулировке и обоснованию итерационного метода нахождения связанных собственных значений, а именно, теорема 3.5 утверждает равномерную сходимость приближенного решения (построенного итерационным методом) операторного уравнения к единственному точному решению этого уравнения; теорема 3.6 утверждает существование решений системы дисперсионных уравнений (приближенных парных собственных значений), построенных с использованием приближенного решения операторного уравнения; теорема 3.7 утверждает сходимость приближенных парных собственных значений к точным при условии, что номер итерации при нахождении приближенных решений операторного уравнения стремится к бесконечности. Заметим, что теорема 3.7 является нетривиальным результатом с точки зрения вычислительной математики.

Научная новизна работы. Новизна работы определяется а) новыми постановками спектральных задач теории распространения электромагнитных волн, б) предложенными оригинальными методами решения, в) полученными результатами, а также г) тем серьезным научным потенциалом, который вкладывает данная работа для дальнейших эффективных исследований как в теории нелинейных дифференциальных уравнений, так и в нелинейной электродинамике и, можно сказать шире, в целом в прикладном нелинейном анализе. Данная работа является удачным примером комплексного сочетания хорошо разработанных математических моделей и метода и их реализации как для получения теоретических результатов, важных в электродинамике, так и для развития методов численного моделирования. Диссертация является

значительным шагом вперед в указанных областях и предлагает новые методы исследования нелинейных волновых процессов и явлений в слоистых средах.

Значимость для науки и практики. В диссертации разработаны новые методы исследования, которые уже нашли применение в математической теории распространения и возбуждения колебаний и волн в нелинейных структурах. Эти методы с успехом применяются для моделирования и расчета электродинамических систем, где необходим учет нелинейных соотношений между полями и проницаемостями сред. Можно говорить в связи с этим о создании и развитии новых разделов теории нелинейной электродинамики. Кроме того, доказанное в работе наличие ‘парных’ волн и различные выявленные в диссертации эффекты, обусловленные конкретными нелинейностями, сами по себе весьма существенны для развития нелинейной электродинамики. Здесь безусловно можно говорить о существенно научном достижении; будущее покажет, насколько крупным и значимым является этот результат. В диссертации также разработаны и обоснованы численные методы, которые могут непосредственно применяться для расчетов и моделирования конкретных структур и создания новых программных продуктов для этих целей.

Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах, в том числе – 2 монографиях; 23 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов); 4 статьях в других изданиях (из них 1 работа без соавторов).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами, сравнением результатов с простейшими модельными задачами. Обоснованность результатов подтверждается тем, что за короткий промежуток времени, автор опубликовал серию работ в ведущих международных научных журналах, которые по-

лучили высокую оценку рецензентов, а также представил результаты на крупных международных конференциях.

Рекомендации по использованию материалов диссертации в учебных курсах. Полученные результаты могут быть использованы в МГУ, ИВМ РАН, ВЦ РАН, ИПМ РАН, МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ПГУ, а также в других учреждениях и организациях.

Замечания по диссертационной работе.

Результаты, полученные в первой главе при рассмотрении конкретных нелинейностей, являются весьма интересными. Вызывает сожаление, что автор не проделал аналогичную работу для задачи, исследованной в общем случае во второй главе.

Кроме того, необходимо оформить теорию исследования и решения дисперсионных уравнений, в которые входят функции нескольких действительных или комплексных переменных, с использованием методов, обозначений и результатов теории отображений; необходимо сформулировать результаты о разрешимости дисперсионных уравнений с точки зрения этой теории.

Приведенные замечания носят во многом характер пожеланий для будущей научной работы автора и развития данного научного направления.

Заключение по диссертационной работе. Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК. Выносимые на защиту положения полностью отражены в выпускаемых в Российской Федерации и за рубежом ведущих научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным считаю, что диссертация Валовика Д.В. «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собствен-

ные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», соответствует всем требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Ведущий научный сотрудник
кафедры прикладной математики
Московского государственного технического
университета радиотехники, электроники
и автоматики (МГТУ МИРЭА)
доктор физ.-мат. наук, профессор

Ю.В. Шестопалов

*Торжисе Ю.В. Шестопалова
заверяю*



*Проректор по
научной работе
У.В. Соловьев*

119454 г. Москва, Проспект Вернадского, д. 78

Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА)

Телефон: (495) 433-00-66

Факс: (495) 434-92-87

E-mail: rector@mirea.ru