

## ОТЗЫВ

официального оппонента д.ф.-м.н., профессора Тихонравова А. В. на диссертационную работу Валовика Дмитрия Викторовича «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

**Актуальность работы.** Теория распространения волн в нелинейных средах – традиционная область приложений дифференциальных и интегральных уравнений. Задачи о распространении электромагнитных волн в волноводах с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поля в строгой постановке чрезвычайно сложны для исследования, но при этом актуальны в связи с ростом физических приложений, в которых мощности электромагнитного излучения таковы, что нелинейные эффекты проявляются на практике. Задачи о распространении ТЕ- и/или ТМ-волн в планарных волноводах с диэлектрической проницаемостью, зависящей от квадрата модуля амплитуды электрического поля, являются задачами сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла во всем пространстве. Поскольку материальные уравнения в рассматриваемом случае являются нелинейными, рассматриваемые задачи также являются нелинейными как по искомым функциям, так и по спектральному параметру. Искомыми в рассматриваемых Д.В. Валовиком задачах являются собственные значения или парные собственные значения для задач о связанных волнах, которые определяют набор распространяющихся в волноводе мод. До на-



стоящего времени строгие математические методы исследования рассматриваемых задач не были разработаны.

Работа Д.В. Валовика направлена на то, чтобы построить математический аппарат, позволяющий находить и исследовать дисперсионные уравнения, корнями которых являются искомые собственные значения. При этом не требуется знание явных решений рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений. **Актуальность** проведенного диссертационного исследования обусловлена тем, что в диссертации разработана общая теория распространения поляризованных и связанных поляризованных электромагнитных волн в диэлектриках с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поля.

Развитая теория имеет существенное прикладное значение, поскольку позволяет строгими методами изучать волноведущие структуры с нелинейными диэлектриками и теоретически предсказывать новые эффекты, обусловленные влиянием нелинейности.

**Оценка содержания диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, четырех приложений. Во введении обсуждается тема работы и дается ее общая характеристика, приводится обзор литературы по теме диссертации, формулируются цели исследования, основное содержание работы и положения, выносимые на защиту, указываются публикации автора по теме диссертации и апробация работы.

В **главе 1** изучается задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от квадрата амплитуды поля. Задача рассматривается в строгой электродинамической постановке.

Дается определение собственного значения рассматриваемой задачи и формулируется задача о доказательстве существования собственных значе-



ний. Очень важным является то, что введенное определение физически оправданным образом обобщает понятие собственного значения в линейном случае. Важнейшим элементом является вывод дисперсионного уравнения в форме интегрального уравнения, на исследовании которого и основывается получение всех существенных результатов главы.

Сразу же следует отметить полноту проведенного исследования. В работе доказана теорема об эквивалентности исходной задачи на собственные значения и задачи нахождения решений дисперсионного уравнения (теорема 1.1). Следующая теорема 1.2 утверждает, что если какая-либо собственная функция задачи имеет более двух нулей на рассматриваемом интервале, то она является периодической. Теоремы 1.3 и 1.4 доказывают существование по крайней мере одного собственного значения рассматриваемой задачи при различных ограничениях, а теоремы 1.5 и 1.6 – существование дискретного множества собственных значений при различных ограничениях. Далее в главе 1 рассмотрены два наиболее широко обсуждаемых на практике типа нелинейности: нелинейность Керра и нелинейность с насыщением. В обоих случаях получены новые интересные результаты о существовании и локализации собственных значений рассматриваемых задач, в частности, для задачи с нелинейностью Керра получено строгое доказательство существования бесконечного числа собственных значений при любой толщине волноведущего слоя.

В главе 2 исследуется задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью диэлектрической проницаемости. Поскольку для ТМ-волны имеются две отличные от нуля компоненты поля  $E$ , то естественно рассматривать диэлектрическую проницаемость как тензор, что сразу же усложняет исследуемую задачу. Тем не менее техника, предложенная для изучения задачи о ТЕ-волнах, успешно применяется и для изучения этой, более сложной, задачи. В целом, получен-



ные результаты следуют последовательности результатов, полученных в главе 1. Как и в главе 1, все доказанные теоремы предполагают самую общую зависимость компонент тензора диэлектрической проницаемости слоя от квадратов компонент электрического слоя.

В главе 3 исследуется нелинейная двухпараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью. Из всех трех рассмотренных в диссертации задач, данная задача – наиболее сложная. Поэтому автору пришлось сузить класс рассматриваемых нелинейных зависимостей диэлектрической проницаемости. Но при этом следует отметить, что нелинейность керровского типа является наиболее важной для приложений.

В строгой постановке рассматриваемая задача представляет собой нелинейную двухпараметрическую задачу сопряжения на собственные значения для системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на оси, перпендикулярной границе слоя. Автором вводится определение парных собственных значений. Для доказательства их существования задача в дифференциальной формулировке сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений на отрезке, которая затем представляется в виде нелинейного операторного уравнения. Устанавливается ограниченность входящих в него интегральных операторов в пространстве непрерывных на отрезке функций и доказывается единственность решения операторного уравнения в шаре некоторого радиуса с дополнительными оценками на величину коэффициента нелинейности.

Основным результатом главы 3 является теорема 3.4, которая утверждает существование парных собственных значений при достаточно малых значениях коэффициента керровской нелинейности. Это – очень интересный новый результат, поскольку доказывается, что при наличии нелинейности возникает новый волновой режим для двухчастного электромагнитного поля,



не имеющий места в линейном случае. В конце третьей главы обосновывается итерационный метод нахождения связанных собственных значений рассматриваемой задачи. Данный метод имеет безусловную практическую значимость.

**Научная новизна работы** определяется тем, что в ней разработан новый подход к исследованию задач на собственные значения для системы уравнения Максвелла в слое с нелинейной диэлектрической проницаемостью.

**Значимость для науки и практики.** Разработанные в диссертации методы исследования и полученные результаты являются значимыми как для теории нелинейных задач на собственные значения, так и для практических задач электродинамики волноведущих структур с нелинейными диэлектриками. Полученные в работе результаты дают надежную основу для экспериментов, связанных с распространением электромагнитных волн в слоистых волноводах. В работе теоретически предсказано существование новых эффектов, в частности, возможность существования в нелинейном слое связанных ТЕ-ТМ волн, что может оказаться интересным для практики. Разработанный в диссертации метод исследования задач на собственные значения может быть полезным и при изучении других нелинейных задач, в частности, нелинейных краевых задач, описывающих дифракцию поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом слое с нелинейным диэлектриком.

**Основные результаты диссертации** опубликованы в 29 работах, в том числе – 2 монографиях; 23 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов); 4 статьях в других изданиях (из них 1 работа без соавторов).



**Достоверность и обоснованность** полученных Д.В. Валовиком результатов обеспечивается строгой постановкой задач, использованием строгих математических методов, полными и строгими математическими доказательствами.

#### **Замечания по диссертационной работе.**

В работе весьма скупо используется иллюстративный материал, а также примеры, поясняющие новые нетривиальные результаты, полученные автором. Наличие таких примеров облегчило бы восприятие этих результатов. Так, например, на стр 34 автором указывается, что в «нелинейной задаче могут существовать собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, но имеющие одно и то же число нулей». Это – новый, по сравнению с линейным случаем, эффект, который было бы хорошо проиллюстрировать.

Во второй главе диссертации можно было бы рассмотреть отдельно керровскую нелинейность, как важный для приложений случай. Это было сделано в первой главе для ТЕ-волн, но, по какой-то причине, аналогичное рассмотрение не вошло во вторую главу.

**Рекомендации по использованию** результатов диссертации. Полученные результаты могут быть использованы в МГУ, ИВМ РАН, ВЦ РАН, ИПМ РАН, МФТИ, МГТУ им. Баумана, ПГУ, а так же в других учреждениях и организациях.

Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК. Выносимые на защиту положения достаточно полно отражены в выпускаемых в Российской Федерации и за рубежом ведущих научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.



В связи с вышеизложенным считаю, что диссертация Д. В. Валовика «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» соответствует всем требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Директор Научно-исследовательского

вычислительного центра (НИВЦ)

МГУ им. М.В. Ломоносова

доктор физ.-мат. наук, профессор

23.09.2014



А.В. Тихонравов

Подпись А.В. Тихонравова заверяю

Ученый секретарь ученого совета

В.В. Суворов

119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, стр. 4,

Научно-исследовательский вычислительный центр

Московского государственного университета

имени М.В.Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Тел.: (495) 939-54-24

Факс: (495) 938-21-36

E-mail: nivc@srcc.msu.ru