

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИВМ РАН



Член-корр. РАН Тыртышников Е.Е.

« 2014 г.

### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Валовика Дмитрия Викторовича «Нелинейные одно- и двух-параметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Диссертационная работа Валовика Д.В. посвящена разработке аналитических и численных методов исследования одно и двухпараметрических задач сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое. Такие задачи описывают распространение поляризованных и связанных поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поля. **Актуальность** работы заключается в том, что, во-первых, разработанные методы позволяют достаточно полно исследовать вопросы о существовании и локализации собственных значений в рассматриваемых задачах. В указанных задачах собственные значения являются постоянными распространения волновода и являются его важной характеристикой, знание которой необходимо при расчете и конструировании волновода. Несмотря на большое число работ как зарубежных, так и отечественных исследователей в этом направлении, только простейшие задачи (в первую очередь задачи с одной границей разде-

ла сред) были исследованы; задачи с двумя границами раздела, а именно такие задачи рассматриваются в диссертации Валовика Д.В. даже в простейших случаях оставались малоисследованными (хорошим примером является задача о распространении ТЕ-волн в слое с керровской нелинейностью, которая полностью исследована в главе 1, п. 1.4 рассматриваемой диссертации предложенным Валовиком Д.В. методом). Во-вторых, разработанный Валовиком Д.В. метод исследования – «метод интегральных дисперсионных уравнений» – имеет и самостоятельное математическое значение, поскольку позволяет достаточно полно изучать некоторые классы задач на собственные значения для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что это направление в теории обыкновенных дифференциальных уравнений привлекает внимание исследователей на протяжении многих десятилетий.

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и четырех приложений.

Во *введении* формулируется тема и дается общая характеристика работы, делается обзор литературы по теме и обоснование актуальности выбранной темы исследования, формулируются цель работы и положения выносимые на защиту, представлена структура диссертации, указываются публикации и апробация работы.

*Первая глава* посвящена исследованию нелинейной однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Исходная задача для системы уравнений Максвелла во всем пространстве сведена к нелинейной задаче типа Штурма – Лиувилля (на отрезке) с условиями третьего рода. Предложен метод, позволяющий перейти от дифференциальной задачи к исследованию так называемого дисперсионного уравнения. Корни (и только они) дисперсионного уравнения являются собственными значениями рассматриваемой задачи. Доказана теорема об эквивалентности исходной задачи на собственные значения и дисперсионного

уравнения, указанная теорема также утверждает при каких условиях собственная функция, соответствующая определенному собственному значению имеет заданное количество нулей и дается явная формула для нулей (теорема 1.1). Также доказана теорема, утверждающая, что если какая-либо собственная функция задачи имеет более двух нулей на рассматриваемом интервале, то она является периодической и дается явная формула для периода (теорема 1.2). Доказаны теоремы о существовании и локализации дискретного множества собственных значений (теоремы 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6). Детально рассмотрены два примера с конкретными нелинейностями, а именно, с керровской нелинейностью и нелинейностью с насыщением. И в первом и во втором случаях получены исчерпывающие результаты, которые демонстрируют возможности предложенного метода. А именно, доказано, что в случае керровской нелинейности существует бесконечное множество собственных значений с точкой накопления на бесконечности, получены двусторонние оценки для собственных значений. Также доказано, что в этом случае существуют собственные значения (их бесконечное число), которые не сводятся к решениям соответствующей линейной задачи при стремлении коэффициента нелинейности к нулю (само уравнение задачи в этом случае переходит в линейное дифференциальное уравнение). Этот результат, частности, показывает, что в рассматриваемой задаче в общем случае методы теории возмущений не применимы. В случае нелинейности с насыщением доказано, что существует не более конечного числа собственных значений, найдены неравенства между собственными значениями, указано ограничение сверху для максимального собственного значения.

*Вторая глава* посвящена изучению нелинейной однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Методика, предложенная в первой главе, здесь применяется для исследования более сложной задачи. Указанная сложность обусловлена тем, что в этой главе изучается не одно уравнение, а система; дополнительную трудность создают более сложные условия

сопряжения. Рассматриваемая в этой главе задача уже не может быть сведена к задаче типа Штурма – Лиувилля, поскольку и система уравнений, и краевые условия являются нелинейными как по искомым функциям, так и по спектральному параметру. В главе дается определение собственного значения рассматриваемой нелинейной задачи. Также как и в первой главе, дифференциальная задача сведена к дисперсионному уравнению, корни которого (и только они) являются собственными значениями рассматриваемой задачи. Доказана теорема об эквивалентности исходной задачи на собственные значения и дисперсионного уравнения, указанная теорема также утверждает при каких условиях собственная функция, соответствующая определенному собственному значению имеет заданное количество нулей и дается явная формула для нулей (теорема 2.1). Также доказана теорема, утверждающая, что если какая-либо собственная функция задачи имеет более двух нулей на рассматриваемом интервале, то она является периодической и дается явная формула для периода (теорема 2.2). Доказаны теоремы о существовании и локализации дискретного множества собственных значений (теоремы 2.3, 2.4, 2.5 и 2.6).

*В третьей главе* исследуется нелинейная двухпараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью. Для этой задачи так же как и в предыдущих главах автор вводит строгое определение объекта (в данном случае парных собственных значений нелинейной двухпараметрической задачи). Рассматриваемая задача формулируется для уравнений Максвелла во всем пространстве. Аккуратно используя решения в полупространствах, условия излучения и условия сопряжения автор сводит исходную задачу к двухпараметрической задаче на собственные значения на отрезке для системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (краевые условия являются нелинейными соотношениями как по значениям искомым функций, так и по спектральным параметрам). Для решения поставленной задачи используется стандартная методика перехода к эквивалентной системе инте-

гральных уравнений с ядрами в виде функций Грина некоторых вспомогательных линейных задач. Подчеркнем, что «стандартной» эта методика является лишь в случае однопараметрических задач на собственные значения, в частности, для задач типа Штурма – Лиувилля, но не для рассматриваемой автором двухпараметрической задачи. Далее автор переходит к операторной записи полученной системы нелинейных интегральных уравнений и исследует это операторное уравнение методами функционального анализа, а именно доказывает ограниченность в пространстве непрерывных на отрезке функций полученных интегральных операторов. Далее, используя полученные результаты доказана единственность решения операторного уравнения в шаре некоторого радиуса с оценкой величины радиуса и оценкой на коэффициент нелинейности (теоремы 3.1 и 3.2); затем доказано, что при определенных условиях единственное решение рассматриваемого операторного уравнения непрерывно зависит от пары спектральных параметров (теорема 3.3). Теорема 3.4 утверждает основной результат третьей главы – теорему о существовании и локализации парных собственных значений нелинейной задачи. Доказательство основано на методе малого параметра, при доказательстве приведена оценка на коэффициент нелинейности через нормы изучаемых операторов. Заметим, что несмотря на применение известного метода (метода малого параметра), полученный результат представляется весьма интересным, поскольку ничего похожего не наблюдается в соответствующем линейном случае. По сути, указанный результат является теоретическим обоснованием возможности существования связанных электромагнитных волн. Еще заметим, что поскольку закон Керра справедлив как раз для малых коэффициентов нелинейности, то использованный Валовиком Д.В. подход адекватен рассматриваемой задаче. Кроме того, в этой же главе сформулирован и обоснован итерационный метод нахождения связанных собственных значений (теоремы 3.5, 3.6 и 3.7).

Работа носит теоретический характер, но может найти практическое применение при исследовании, расчете и конструировании нелинейных волнораспространяющих структур.

Диссертация не свободна от недостатков. В качестве критических замечаний отметим следующие:

1. В диссертации представлены результаты расчетов, но ничего не говорится о том, каким методом представленные численные результаты были получены; также ничего не сказано о программной реализации предложенного в третьей главе итерационного метода.

2. В первых двух главах однопараметрические задачи исследованы для произвольной нелинейности, а в третьей главе двухпараметрическая задача поставлена и исследована только для одного закона нелинейности. Автору бы следовало подробно объяснить чем это вызвано.

3. В диссертации утверждается (см. стр. 115) "что в нелинейном слое существует новый режим распространения волн", а также "что с точки зрения теории спектральных задач существование изолированных парных собственных значений является весьма нетривиальной и, по-видимому, новым математическим результатом". Указанные заключения желательно бы обсудить со специалистами соответствующих областей физики и дать их физические интерпретации.

4. Автору не удалось избежать опечаток и неточностей: на с. 2 в оглавлении указано «III. Цели и основное содержание работы», в то время как на с. 18 этот пункт называется «III. Цель и основное содержание работы» и действительно, автор ставит перед собой одну основную цель: разработать общий математический аппарат для исследования рассматриваемых им задач; на с. 8, последняя строка снизу ссылки не все упорядочены по возрастанию, кроме того, работа [120] не относится к многопараметрическим задачам, а не отмеченная работа [113] относится.

Следует отметить, что приведенные замечания не снижают ценности и весомости полученных диссертантом результатов и не влияют на общую по-

ложительную оценку диссертационной работы. Диссертация Валовика Д.В. представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, посвященную актуальной теме, выполненную на высоком научном уровне и представляющую несомненную теоретическую и практическую ценность.

**Научная новизна** настоящей диссертационной работы состоит в том, что здесь предложен новый математический аппарат для решения нелинейных задач на собственные значения (в том числе двухпараметрических) для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и их систем, а также в том, что получены конкретные весьма полные результаты о собственных значениях рассматриваемых задач для частных видов нелинейностей (рассмотренные нелинейности являются важнейшими в нелинейно оптике).

**Практическая ценность работы** заключается в том, что разработанные методы могут быть применены для расчета реальных волноведущих структур.

Все положения и выводы диссертации достоверны и научно обоснованы. Полученные в диссертационной работе результаты являются новыми и имеют общенаучный интерес. Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах, в том числе – 2 монографиях; 23 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов); 4 статьях в других изданиях (из них 1 работа без соавторов).

**Рекомендации по использованию** результатов диссертации. Полученные результаты могут быть использованы в МГУ, ИВМ РАН, ВЦ РАН, ИПМ РАН, МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ПГУ, а также в других учреждениях и организациях участвующих в исследованиях распространения электромагнитных волн.

Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК. Выносимые на защиту положения достаточно полно отражены в выпускаемых в Российской Федерации и за рубежом ведущих научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным считаем, что диссертация Валовика Д.В. «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», соответствует всем требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Отзыв заслушан и утвержден 4 сентября 2014 г. на заседании научного семинара «Методы решения задач вариационной ассимиляции данных наблюдений и управление сложными системами» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики Российской академии наук (протокол № 2).

Главный научный сотрудник  
Института вычислительной математики  
Российской академии наук  
доктор физ.-мат. наук, профессор

В.И. Агошков

Подпись В.И. Агошкова заверяю.  
Зав. НОО ИВМ РАН

Лаврова А.К.