

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ФГБУН «Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук
академик РАН / В.И. Бердышев/
01 декабря 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации – Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук» на диссертационную работу **Егорова Ивана Евгеньевича «Обобщение метода характеристик Коши для построения численно-аналитических методов решения задач синтеза оптимального управления»**, выдвинутую на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация **И.Е. Егорова «Обобщение метода характеристик Коши для построения численно-аналитических методов решения задач синтеза оптимального управления»** посвящена разработке новых эффективных методов построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи для класса детерминированных нелинейных автономных систем со скалярным управлением, терминальной функцией платы и при отсутствии фазовых ограничений. Интерес и актуальность изучения такого типа задач объясняется тем, что этому классу управляемых систем принадлежит ряд нетривиальных, содержательных моделей медицины и биологии, которые также подробно изучаются в диссертации.

Построение оптимальных позиционных стратегий управления или, другими словами, оптимальный синтез традиционно опирается на конструкцию и свойства функции цены, которая совпадает с обобщенным (минимаксным или вязкостным) решением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). Для класса задач оптимального управления, рассматриваемых в диссертационной работе **И.Е. Егорова** непрерывный гамильтониан кусочно линейен по импульсной переменной. В диссертации предложено обобщение метода характеристик Коши, классического метода, который позволяет аналитически строить гладкие решения линейного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Предложенный метод опирается на принцип максимума Понтрягина, метод

динамического программирования и анализ структуры динамики, он смыкается с другими известными подходами к обобщению метода характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби, предложенными в работах А.И. Субботина, А.А. Меликяна и их учеников и последователей. Достоинством, особенностью и оригинальностью класса задач оптимального управления, рассматриваемых в диссертационной работе **И.Е. Егорова**, является то, что предложенное в работе обобщение метода характеристик Коши позволяет аналитически построить непрерывно дифференцируемую функцию цены, и, тем самым, показать, что обобщенное решение кусочно-линейного уравнения ГЯБ совпадает с классическим решением. Отметим, что в известной литературе практически отсутствуют содержательные примеры, в которых аналитически построено глобальное решение уравнения ГЯБ.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трех приложений

Во введении дается подробный обзор литературы по теме диссертации и отмечается, что мотивацией исследований, результаты которых представлены в диссертационной работе **И.Е. Егорова**, явились следующие обстоятельства:

- необходимость создания новых эффективных численных методов для решения задач оптимального управления;
- недостаток работ по построению и глобальному обоснованию оптимального синтеза в задачах управления даже для систем малых размерностей, аффинных по управлению, со скалярным управлением и при отсутствии фазовых ограничений;
- крайняя скудность набора примеров решенных аналитически краевых задач для уравнений Гамильтона-Якоби, слабая проработка вопросов существования классических, гладких решений для уравнений ГЯБ.

В Главе 1 вводятся основные предположения для рассматриваемого класса задач оптимального управления, формулируются и доказываются основные свойства элементов тех конструкций, которые являются базой для предлагаемого обобщения метода характеристик. В этой главе разработан метод синтеза оптимального управления для задач, в которых у допустимых процессов, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, отсутствуют участки скользящих режимов управления и имеется не более одного переключения.

В дополнение к конструкции оптимального синтеза, для рассматриваемого класса управляемых автономных систем, обладающих при каждом значении управления асимптотически устойчивым положением равновесия, в Главе 4 диссертации **И.Е. Егорова** предложен оригинальный способ альтернативного позиционного управления, направляющий автономную систему в положение

равновесия, доставляющее оптимум терминальной функции состояния. Получены оценки сравнения результатов альтернативного управления с оптимальным результатом.

Предложенные теоретические конструкции позиционных законов управления использованы в диссертации для построения оптимальных и почти оптимальных стратегий лечения в содержательных моделях медицины -- моделях лечения злокачественных опухолей (Главы 1,2,3), лейкоза (Глава 1) и вирусных заболеваний (Глава 3).

Кроме того, в Главе 3 описывается метод отыскания глобального гладкого решения задачи Коши для кусочно-линейного уравнения ГЯБ с помощью задания недостающих граничных значений характеристик на поверхности обобщенных характеристик, соответствующих особым оптимальным управлениям. Получены достаточные условия гладкости функции цены и показано, что они выполнены в примерах, приведенных в данной главе. Построены аналитические представления гладкой функции цены.

В приложении А рассмотрены две механические модели. Для первой из них, колебательной, не применимы разработанные в диссертации методы синтеза оптимального управления. Для второй модели математического маятника при дополнительном ограничении суммарного ресурса управления, не вкладывающейся в рассматриваемый в диссертации класс задач оптимального управления, удалось тем не менее получить аналитическое описание гладкого решения уравнения ГЯБ. Приложение Б носит справочный характер. В Приложении В даны доказательства ряда утверждений и теорем из Глав 1,3.

Выше уже отмечалась актуальность и научная новизна диссертационной работы **И.Е. Егорова**:

- в диссертации разработаны новые численно-аналитические методы решения задач позиционного оптимального управления с помощью обобщенного метода характеристик для кусочно-линейного уравнения ГЯБ;
- на основе этих методов для ряда новых содержательных нелинейных и многомерных моделей медицины построена и обоснована конструкция глобального оптимального синтеза
- построены аналитические представления классических решений задачи Коши для кусочно-линейного уравнения ГЯБ в содержательных задачах оптимального лечения для новых моделей медицины;
- предложены и исследованы разумные альтернативные почти оптимальные способы позиционного управления.

Диссертационная работа **И.Е. Егорова** хорошо структурирована и написана на современном математическом языке. Отметим, что в формулировках и доказательствах результатов диссертации использован аппарат негладкого анализа: регулярные суб- и супердифференциалы, субдифференциал Кларка, нормальный конус Кларка, проксимальный нормальный конус, активно применяются результаты теории дифференциальных включений: условия сильной инвариантности области определения функции цены относительно динамики управляемой системы, используется современная классификация особых поверхностей обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби.

Диссертационная работа **И.Е. Егорова** вносит серьёзный вклад в развитие численно-аналитических методов решения задач позиционного оптимального управления и соответствующих им краевых задач для уравнений Гамильтона-Якоби. Результаты диссертации могут быть использованы и развиты исследователями Института проблем механики РАН, Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, Вычислительного центра РАН им. А.А. Дородницына. Результаты диссертации могут быть полезными и в плане практических приложений, в качестве рекомендаций и анализа методик при разработке оптимальных стратегий лечения онкологических и вирусных заболеваний, а также методологически, как материал для обучения студентов в Московском государственном университете, Санкт-Петербургском государственном университете, Уральском федеральном университете.

Научные результаты диссертации получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Четыре статьи, содержащие основные результаты диссертационной работы, опубликованы в журналах, включенных в перечень ВАК. Также на ряде международных и всероссийских научных конференций и научно-исследовательских семинаров были сделаны соответствующие доклады. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

По диссертационной работе имеются следующие замечания.

1. В пунктах 1) и 2) предположения 1.3 (Глава 1) пропущено условие $\psi \neq 0$, которое неявно в них просматривается.
2. Практически отсутствуют графики функции цены в рассматриваемых задачах оптимального управления. Особенно познавательной была иллюстрация структуры графика этого гладкого решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в окрестности линий переключения оптимального синтеза и особых характеристик уравнения.

3. Интересным было бы исследование и относительно несложным развитие полученных результатов на задачи оптимального управления с интегрально-терминальными показателями качества, позволяющими управлять динамикой лечения с помощью непрерывных методик, а также сравнение полученных при этом результатов лечения с результатами лечения, согласно методикам, предлагаемым в диссертации.

4. В задачах оптимального управления на минимум функционала качества более естественным было бы вводить гамильтонианы также с помощью операции минимума, а не с помощью операции максимума и использования в них сопряженных переменных со знаком минус. Последнее усложняет для читателя восприятие материала и отвечает лишь букве, а не содержанию принципа максимума Понтрягина.

Эти замечания носят редакционный и рекомендательный характер и не влияют на положительную в целом оценку диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа **И.Е. Егорова «Обобщение метода характеристик Коши для построения численно-аналитических методов решения задач синтеза оптимального управления»** полностью соответствует специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» и удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к диссертационным работам, выдвигаемым на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Зав. сектором

отдела динамических систем ИММ УрО РАН,

доктор физико-математических наук

член-корреспондент РАН

Н. Субботина

/Н.Н. Субботина/

Подпись Н.Н. Субботиной заверяю:

Ученый секретарь ИММ УрО РАН,

кандидат физико-математических наук



О.Н. Ульянов

/О.Н. Ульянов/

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук» (ИММ УрО РАН)
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
телефон: +7 (343) 374-83-32
тел./факс: +7 (343) 374-25-81

Сведения о ведущей организации

по диссертации Егорова Ивана Евгеньевича на тему «Обобщение метода характеристик Коши для построения численно-аналитических методов решения задач синтеза оптимального управления», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Полное наименование организации в соответствии с уставом	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук
Сокращенное наименование организации в соответствии с уставом	ИММ УрО РАН
Ведомственная принадлежность	ФАНО
Место нахождения	г. Екатеринбург
Почтовый индекс, адрес организации	620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Веб-сайт	http://www.imm.uran.ru
Телефон	Тел.: (343)3748332 Факс: (343)3742581
Адрес электронной почты	bvi@imm.uran.ru
Список основных публикаций работников ведущей организации по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет:	
1. Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010, Т.271, С.259—277.	
2. Subbotina N.N., Tokmantsev T.B. On Grid Optimal Feedbacks to Control Problems of Prescribed Duration on the Plane // Annals of the ISDG: Advances in Dynamic Games Vol. 11, (Michele Breton, Krzysztof Szajowski editors), P.133–147, 2011, New York : Springer.	
3. Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана // Екатеринбург: РИО УрО РАН. 2013, 244 с.	
4. Nina N. Subbotina , Ekaterina A. Kolpakova. Connections between Optimal Control Problems and Generalized Solutions of PDEs of the First Order. // Preprints of the 19th World Congress of the International Federation of	

Automatic Control. Cape Town, South Africa. August 24-29, 2014. Cape Town: IFAC. 2014. P.11381-11384.

5. Н.Н. Субботина, Л.Г. Шагалова. Конструкция непрерывного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 247-257

ЗАВЕРЯЮ:

сведения о ведущей организации

Ученый секретарь ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат.наук



О.Н.Ульянов