

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Вологодского
государственного



университета,
профессор

Л. И. Соколов

09

2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию **Жданова Игоря Игоревича «Свойства самонормированных случайных величин»**, представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Актуальность темы исследования. В диссертации изучаются асимптотические свойства самонормированных сумм независимых случайных величин. Самонормированная сумма представляет собой отношение суммы случайных величин к корню квадратному из суммы квадратов упомянутых случайных величин. Самонормированные суммы независимых случайных величин являются предметом многочисленных исследований большого числа специалистов по теории вероятностей. Они возникают естественным образом при исследовании типичных задач научного и прикладного характера. В качестве примера можно указать на две основные задачи математической статистики – проверку статистических гипотез и построение доверительных интервалов. При решении обеих этих задач, среди прочего инструментария, используется классическая статистика Стьюдента. Само определение классической статистики Стьюдента включает в себя самонормированную сумму, построенную по случайной выборке – независимым одинаково распределенным случайным величинам. Несколькими исследователями было отмечено, что асимптотические свойства классической статистики Стьюдента при неограниченном увеличении объема выборки могут быть описаны в терминах самонормированных сумм, входящих в ее определение. Например, статистика Стьюдента асимптотически нормальна тогда и только тогда, когда самонормированная сумма, входящая в определение статистики Стьюдента, асимптотически нормальна. Помимо важных прикладных задач,

самонормированные суммы случайных величин привлекают внимание в качестве объекта исследований. Они частично позволяют решить довольно старую проблему нормирования в теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Эта проблема была впервые сформулирована в знаменитой монографии Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогорова «Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин», ГТТЛ, Москва, 1949. Частичное решение упомянутой проблемы состоит в том, что нормирование сумм следует производить не числами, а корнем квадратным из суммы квадратов случайных величин.

Известные исследования асимптотических свойств самонормированных сумм были осуществлены по аналогии с классической теорией суммирования независимых случайных величин. Основные задачи, привлечшие внимание специалистов, состоят в поиске необходимых и достаточных условий слабой компактности и слабой сходимости распределений самонормированных сумм независимых случайных величин. Решение любой из этих задач требует новых подходов, так как опыт классической теории суммирования независимых случайных величин мало чем может помочь. За последние три десятилетия обе упомянутые задачи были решены для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Решение указанных задач для самонормированных сумм, построенных по разнораспределенным случайным величинам, представляется весьма проблематичным, по крайней мере, в настоящее время.

В рассматриваемой диссертации предпринята попытка решить упомянутые задачи для самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат конечному числу типов. Для таких самонормированных сумм полностью решена задача о слабой компактности, указаны условия слабой сходимости распределений самонормированных сумм к нормальному распределению и доказаны два новых варианта закона повторного логарифма. С уверенностью можно сказать, что диссертация написана на актуальную тему, которая имеет важное значение для приложений и для теоретических исследований самонормированных сумм случайных величин.

Содержание и новизна работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов (параграфов), заключения и списка литературы, насчитывающего 28 наименований. Общий объем диссертации составляет 79 страниц.

Во введении изложена краткая история исследований об асимптотических свойствах самонормированных сумм случайных величин. Упомянуты пионерские публикации и сформулирована цель исследований, составляющих содержание диссертации. В первом разделе (параграфе) исследуется слабая компактность самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному типу.

Указаны необходимые и достаточные условия (теоремы 1.1 и 1.2) слабой компактности самонормированных сумм. Теоремы сформулированы с помощью трех функций, каждая из которых определена с помощью функции распределения, представляющей тип распределения. Во втором разделе (параграфе) доказан ряд вспомогательных утверждений, необходимых для исследования слабой компактности самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат конечному числу типов. Некоторые из доказанных утверждений представляют самостоятельный интерес. Например, теорема 2.1 содержит необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм, выраженные в терминах вторых моментов случайных величин, нормированных корнем квадратным из суммы квадратов случайных величин, составляющих сумму. Лемма 2.4 утверждает, что слабо компактные самонормированные суммы имеют конечные экспоненциальные моменты. В третьем разделе (параграфе) указаны необходимые и достаточные условия (теорема 3.2) слабой компактности самонормированных сумм случайных величин, распределения которых принадлежат конечному числу типов. Теорема сформулирована в терминах функций распределения, представляющих типы. Условия слабой сходимости, будучи необходимыми и достаточными, кажутся трудно проверяемыми в конкретных ситуациях. Здесь также доказана теорема (теорема 3.1) о равносильности слабой компактности статистик Стюдента и самонормированных сумм, входящих в определение статистик Стюдента. Это было ранее доказано другими авторами для самонормированных случайных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Теорема 3.1 является нетривиальным обобщением упомянутого утверждения на самонормированные суммы, построенные по независимым разнораспределенным случайным величинам. В четвертом разделе (параграфе) приведены условия для асимптотической нормальности распределений самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному типу. Доказано (теорема 4.1), что распределения самонормированных сумм слабо сходятся к стандартному нормальному распределению, если тип, к которому принадлежат распределения случайных величин, лежит в области притяжения нормального типа. Это достаточное условие оказывается также и необходимым, если случайные величины, по которым строятся случайные суммы, симметричны. При доказательстве теоремы 4.1 решающую роль играет необходимое и достаточное условие принадлежности распределений области притяжения нормального закона, открытого О'Брайеном в 1980 году. В пятом разделе (параграфе) доказаны два закона повторного логарифма (теорема 5.1 и теорема 5.2) для самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному типу. Стоит подчеркнуть, что закон повторного логарифма, доказанный в теореме 5.1, имеет новую форму. Кажется

весьма правдоподобным, что оба закона повторного логарифма вместе с уточнениями для симметричных случайных величин допускают обобщение в двух направлениях: расширение области равномерности и распространение его на самонормированные суммы, построенные по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат конечному числу типов. При доказательстве теорем 5.1 и 5.2 существенным образом использовался аппарат теории мартингалов.

Все перечисленные утверждения являются новыми и несомненно принадлежат автору диссертации.

Значимость работы. По мнению большинства специалистов по теории вероятностей, исследования асимптотических свойств сумм независимых случайных величин составляют важнейшую часть современной теории вероятностей. Такого мнения придерживались, например, классики вероятностной науки А.Н. Колмогоров и Б.В. Гнеденко – авторы упомянутой выше монографии по предельным теоремам для сумм независимых случайных величин. К сказанному следует добавить, что исследования функционалов от сумм независимых случайных величин значительно расширяют круг задач, идейно связанных с асимптотическими свойствами сумм независимых случайных величин. Результаты исследований, изложенные в диссертации, составляют значимый вклад в динамично развивающуюся область теории вероятностей – теорию функционалов от сумм независимых случайных величин. В диссертации доказаны новые глубокие утверждения об асимптотических свойствах самонормированных сумм независимых случайных величин. Доказан критерий слабой компактности самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат конечному числу типов. Указаны достаточные условия для справедливости центральной предельной теоремы для таких случайных сумм. Эти условия оказываются необходимыми при дополнительном предположении о симметричности случайных величин. Доказаны два новых закона повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному типу. Оба закона повторного логарифма имеют существенное уточнение для симметричных случайных величин. При доказательстве утверждений используются прямые вероятностные методы. Среди других методов исследования стоит упомянуть методы теории мартингалов. Например, мартингальные методы привлечены для доказательства законов повторного логарифма.

Результаты и методы диссертации могут оказаться полезными для научных и образовательных учреждений, в которых исследуют или изучают свойства функционалов от сумм независимых случайных величин.

Материал диссертации изложен в основном четко и аккуратно. Небольшое количество замечаний относится к стилю, в частности, практически полностью отсутствует «словесная» часть работы, за исключением очень сжатого обзора во введении, имеются некоторые погрешности типа доказательства леммы 1.1 на стр. 11: «Лемма является частным случаем теоремы 3.1, которая доказана во втором параграфе. Лемма доказана» Стандартное замечание касается, по-видимому, неизбежных опечаток, которые присутствуют и в диссертации И.И.Жданова, но в весьма умеренном количестве.

Однако отмеченные недостатки не влияют на главные результаты диссертации.

Оценивая работу в целом, можно заключить, что ее тематика является актуальной, а сама работа является законченным научным исследованием, содержащим решение задач, имеющих существенное значение для современной теории вероятностей и ее приложений. Основные результаты опубликованы в двух статьях, опубликованных соискателем без соавторов в журнале, входящем в список ВАК, в достаточной степени представлены на научных семинарах. Автореферат и опубликованные работы полностью отражают содержание диссертации.

Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском и Казанском (Приволжском) федеральном университетах, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Институте проблем управления РАН, Институте проблем информатики РАН, Вологодском государственном университете, а также других научных и учебных центрах России.

Считаем, что диссертационная работа И. И. Жданова «Свойства самонормированных случайных величин» полностью соответствует требованиям ВАК РФ к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а ее автор, Жданов Игорь Игоревич, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Отзыв заслушан и одобрен на заседании кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета 18 сентября 2014г., протокол № 1.

Заведующий кафедрой прикладной математики
Вологодского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор



ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Менеджер по персоналу
отдела кадров
Управления делами

А. И. Зейфман